UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL

“LISANDRO ALVARADO”

ANÁLISIS DE LOS FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LOS DERIVADOS FINANCIEROS

Dennis U. Heredia Rodríguez

Barquisimeto, 2009.

UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL “LISANDRO ALVARADO”

DECANATO DE ADMINISTRACIÓN Y CONTADURÍA

ANÁLISIS DE LOS FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LOS DERIVADOS FINANCIEROS

Trabajo presentado para optar al grado de:

Licenciado en Administración Comercial.

Por: Dennis U. Heredia Rodríguez

Barquisimeto, 2009.

ANÁLISIS DE LOS FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LOS DERIVADOS FINANCIEROS

Por: DENNIS U. HEREDIA RODRÍGUEZ

Trabajo de Grado aprobado

Prof. Jorge Eliécer Hernández	**Prof. Carlos Figueredo**
Tutor	**Jurado**

Prof. Miguel Vivas

Jurado

Barquisimeto, 21 de septiembre de 2009

"El número es el principio de todas las cosas." Pitágoras.

Dedicatoria:

La presente Tesis no es solo la culminación de mi carrera universitaria, sino más bien, el principio de la misma. Es por eso que en este punto de mi vida, quiero revalorar a toda voz, los votos aprehendidos ante los compromisos asumidos desde el principio.

Compromiso con mi familia, con la esperanza de ser motivo de orgullo para mis mayores, madre y a la memoria de mi padre que se encuentra en el reino de los cielos y ejemplo digno para los que me siguen, especialmente mis hijos e hija, así como a mi esposa.

Compromiso con la Universidad, con la fé y el empeño de mantener muy en alto los símbolos de la ética y la disciplina, valores fundamentales de mi formación.

Compromiso con éste, mi país, con el fin irrenunciable que tenemos todos los egresados de la educación superior de retornar a la nación, todo lo que de ella recibimos, para llevarla por el camino hasta su progreso.

A Dios Todopoderoso.

AGRADECIMIENTO

Para el feliz término del presente proyecto, conté con el grandioso aporte de algunas personas, que me guiaron y enseñaron los beneficios obtenidos en el avance del mismo. Para ellos mi más grande reconocimiento.

En primer lugar, a mí Poder Superior, tal cual lo concibo, por otorgarme el don de la vida, serenidad, valor y sabiduría.

Seguidamente a mí querida madre, hermanos, hijos, hija y esposa.

Especialmente al Profesor Jorge Eliécer Hernández, por su valiosa orientación, por profundizar los conocimientos adquiridos en el transcurso de mi carrera profesional, por los aportes realizados para la culminación exitosa del presente trabajo de grado.

ÍNDICE

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE GRÁFICOS

GRÁFICO **PÁG.**

UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL "LISANDRO ALVARADO"

DECANATO DE ADMINISTRACIÓN Y CONTADURÍA

ANÁLISIS DE LOS FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LOS DERIVADOS FINANCIEROS

Autor: Dennis U. Heredia Rodríguez

Tutor: M.Sc. Jorge Eliécer Hernández

RESUMEN

El objeto de estudio de este trabajo de grado, consiste en analizar los fundamentos matemáticos de los derivados financieros, tomando como base de estudio las opciones financieras, los contratos forward y los contratos de futuro. La investigación es de carácter Teórica-Documental; se apoyó en la aplicación de conocimientos matemáticos para el análisis e interpretación de los resultados. Con el análisis de la tasa de variación media y la tasa de variación instantánea para los contratos forward, se concluyó que el valor del contrato siempre es creciente y acelerado, puesto que la tasa mencionada siempre es positiva, representando así, el derivado financiero que ofrece mayor rentabilidad.

Palabras claves: Derivados Financieros – Opciones - Contratos forward - Contratos de futuro - Tasa de variación media - Tasa de variación instantánea.

INTRODUCCIÓN

El exponencial crecimiento a nivel mundial durante la últimas dos décadas de los montos transados en Contratos Forward y Contratos de Futuro, las Opciones Financieras, Warrants y los Swaps, entre los derivados financieros más conocidos, ha hecho que los inversionistas y las empresas hayan reconocido las bondades de estos productos como medios para reducir o cubrir riesgos, para especular y para realizar operaciones de arbitraje.

Muchos de los problemas cuantitativos que se presentan en las organizaciones se resuelven de la mejor forma con la aplicación de procedimientos matemáticos, estadísticos o de programación. Hay un gran número de tales procedimientos disponibles, que facilita la toma de mejores decisiones bajo riesgo e incertidumbre teniendo como base conceptos fundamentales de matemática o estadística, suficientes para aplicarlos.

Hemos considerado necesario y de gran importancia, realizar un análisis de los fundamentos matemáticos de los derivados financieros. Bajo esta premisa se realiza este trabajo con la finalidad de hacer aportes teóricos - técnicos de aplicaciones de la matemática al campo de las finanzas.

En este sentido, la investigación se orientará en el análisis de los fundamentos matemáticos de los siguientes derivados financieros: Contratos Forward, Contratos de Futuro y las Opciones Financieras.

El presente trabajo está planteado en seis capítulos. En el Capítulo I, se describe el planteamiento del problema, los objetivos de la investigación y la importancia que lo justifica.

En el Capítulo II, se realiza una revisión del material bibliográfico consultado, incluyendo los documentos en líneas y textos digitales, para describir el marco teórico y las investigaciones que antecedieron a este trabajo, así como el basamento legal por el cual se rigen los derivados financieros en Venezuela.

El contenido del Capítulo III está referido al marco metodológico de la investigación, es decir la metodología aplicada para estudiar y analizar cada uno de los derivados financieros objetos de estudio, así como también, sus fundamentos matemáticos.

En el Capítulo IV, se presenta el análisis matemático de los derivados financieros, seguidamente en el Capitulo V presentamos la interpretación de los resultados, y por último el Capítulo VI, el cual le permite al investigador, a través de las conclusiones y recomendaciones, reflejar el punto de vista que valoriza el análisis de los resultados de la investigación realizada.

Finalmente, se incluyen las referencias bibliográficas y anexos que servirán de sustento para el desarrollo de la investigación.

CAPITULO I

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En un mundo en el que prevalece la incertidumbre, con economías y mercados en constante cambio, la actividad del empresario actual debe estar cada vez más sistematizada y basada en adecuados instrumentos de control de gestión. Es decir, es necesaria una verdadera actividad de análisis dinámico de los cambios del macro-micro entorno empresarial. Asimismo, el área financiera de las empresas se ha tornado aún más crítica, razón por la cual es necesario que las organizaciones formen a los gerentes en esta disciplina para perfeccionar su labor, buscando la permanencia, el crecimiento de la inversión y la creación del valor de la empresa.

Por otro parte, el análisis cuantitativo ha venido cobrando cada vez mayor importancia en la comprensión y la solución de problemas que se presentan en el campo de las ciencias sociales en general. En las organizaciones en particular, siempre se presentan situaciones para resolver, tal es el caso de conocer cuál es la rentabilidad de los instrumentos derivados, cómo influyen los cambios de las tasas de interés, cuál es el tiempo óptimo para invertir en los derivados financieros, qué cantidad de capital se debe invertir, todas estas interrogantes, pueden ser respondidas usando el análisis de los modelos que representan a los derivados financieros; siendo parte del problema la limitación de estos modelos; es por ello que, surge la siguiente interrogante. ¿Cómo analizar estos modelos?.

OBJETIVOS

Objetivo General

1. Analizar los fundamentos matemáticos de los derivados financieros.

Objetivos específicos

1. Analizar las características de los Derivados Financieros.
2. Identificar los Modelos Matemáticos de los Contratos Forwards, Contratos de Futuros y Opciones Financieras.
3. Determinar los agentes que intervienen y los principios básicos de formación de precios de los Contratos Forward, Contrato de Futuros y las Opciones Financieras, que permitan la valoración de los derivados financieros.

JUSTIFICACIÓN

El presente trabajo tiene su justificación desde el punto de vista académico, por cuanto constituye un aporte profesional al Decanato de Administración y Contaduría, de la Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado", toda vez que proporcionará a los futuros egresados las herramientas necesarias para ampliar el conocimiento en cuanto a la aplicación efectiva de los instrumentos derivados financieros, ya que en los últimos años es innegable el notable incremento del uso de estos instrumentos financieros, pero en Venezuela se ha visto relativamente poco progreso; en ese sentido es menester profundizar el estudio sistemático y pormenorizado de estos productos, estableciendo una conexión apropiada entre los fundamentos financieros y los fundamentos matemáticos, de tal forma que beneficie tanto a aquellos que hacen del mundo financiero su ambiente de trabajo como a aquellos cuyo ambiente es el mundo teórico matemático.

Es por ello, que el presente trabajo de investigación surge ante la poca documentación bibliografía que soporte el modelaje matemático de valoración de los instrumentos derivados financieros con aplicaciones al mercado venezolano, la cual es considerada como un factor limitante en la toma de decisiones a nivel empresarial, reflejándose una desconexión entre el área financiera y el área de técnicas cuantitativas con respecto a los derivados financieros.

CAPITULO II

MARCO TEORICO

Antecedentes de la Investigación

Los modelos matemáticos son ampliamente usados en términos prácticos y en términos teóricos. En términos prácticos, en los mercados financieros altamente desarrollados y eficientes, es posible identificar un creciente empleo de estos modelos por parte de analistas financieros, de igual forma, en términos teóricos, los modelos matemáticos tienen una aplicación amplia.

En la vida de las organizaciones o del individuo siempre se presentan situaciones por resolver y aceptamos el riesgo como una parte de la vida, si bien es cierto, una empresa se expone a cambios impredecibles en el precio de venta, costos de trabajo, tasas impositivas, tecnologías y otros riesgos. No hay nada que el gerente moderno pueda hacer ante esto. Sin embargo, el gerente puede proteger a la empresa contra riesgos particulares, y en años recientes se ha desarrollado una gama de nuevas herramientas, conocidas como Derivados Financieros, para ayudar en esta tarea.

Precisando de una vez, a continuación se destaca un trabajo que enfoca los derivados financieros:

Milanés, L (1999), en un trabajo de grado denominado: "Diseño de un manual de procedimientos contables de los instrumentos financieros derivados, contratos futuros", se planteó en la investigación como diseñar un manual de procedimientos contables de los instrumentos derivados, contratos a futuros, a través de un estudio de carácter bibliográfico y de consultas por internet. Esta investigación sirve de base al presente trabajo, porque permite visualizar efectivamente que los instrumentos financieros derivados existen en el mercado venezolano, y están regulados en primera instancia por la Comisión Nacional de Valores, quien a través de las normas relativas a la constitución y funcionamiento de la cámara de compensación de opciones y futuros de Venezuela, es el órgano que también interviene en la regulación del funcionamiento de estos instrumentos.

Los derivados financieros, han experimentado un crecimiento en las economías latinoamericanas, sin embargo, en el caso de Venezuela, este tipo de negociación es innovadora y no existen estudios anteriores que guarde relación con la presente investigación, los cuales podrían tomarse como referencia.

Bases Teóricas

Para el desarrollo de este trabajo es necesario explicar las principales concepciones que orientan el mismo. En este sentido se comenzará por describir brevemente la Teoría sobre los Derivados Financieros, para establecer la vinculación de estos con los fundamentos matemáticos, haciendo luego referencia a los modelos de valuación de los Contratos Forward, Contrato de Futuro y las Opciones Financieras. Finalmente se conceptualiza los aspectos relacionados con la fundamentación matemática teórica – técnica de los derivados financieros.

Teoría sobre los Derivados Financieros

Los derivados financieros como su nombre indica son contratos cuyo valor "deriva" del valor de otro instrumento. Para fines de esta investigación, los derivados financieros según Vélez (2003), se definen como: "Un instrumento financiero que depende de otro, donde el valor de un derivado está determinado por el valor de otro activo que se llama subyacente" (p.412).

En la misma línea de pensamiento, Granda (2005), define a los Instrumentos derivados como: "Acuerdos financieros cuyo precio está determinado por el valor de otro activo denominado activo subyacente". El autor agrega además, los derivados operan a través de contratos celebrados entre dos tipos de agentes: los que quieren cubrirse del riesgo inherente al precio del subyacente y los que buscan asumirlo. Los primeros tienen como finalidad asegurar el precio futuro del subyacente, mientras que los segundos buscan obtener ganancias económicas de las variaciones en el precio de dicho activo.

Siguiendo con otros autores, Garay y González (2007), consideran a los instrumentos financieros como: "Contratos financieros cuyos valores dependen de los valores de un activo subyacente, tales como acciones, bonos, índices bursátiles, monedas o metales preciosos."(p.80). Señalando además que estos permiten especular sobre el desempeño esperado del activo subyacente, pero sin necesidad de comprar ese activo. Esto permite a los inversionistas tomar posiciones sin desembolsar grandes sumas de dinero. Así, los derivados permiten que el inversionista pueda apalancarse sustancialmente y, con ello, aspirar a percibir mayores rendimientos esperados, aunque a costa de incrementar significativamente el riesgo de la inversión. (ob. cit.)

En consecuencia, los derivados también pueden ser empleados para cubrir riesgos; es decir, para generar ganancias si el valor del activo subyacente fluctúa en una cierta dirección. Una empresa que invierta en bonos puede, por ejemplo, tomar posiciones específicas en instrumentos derivados de manera que generen ganancias si el valor de los bonos cae. La pérdida en los bonos se compensa o se cubre con la ganancia en el instrumento derivado.

Partiendo de esta premisa, Brealey, Myers, Marcus y García (1996), le incorporan nuevos elementos, afirman que "Los productos derivados, o simplemente derivados, son herramientas que consisten apuestas sobre los precios de las acciones, los tipos de interés y de cambio, precios de los bienes, y demás." (p.374).

Existen derivados sobre productos agrícolas y ganaderos, metales, productos energéticos, divisas, acciones, índices bursátiles, tipos de interés, entre otros.

Objetivo y Finalidad de los Derivados Financieros.

Las concepciones antes referidas, llevan a señalar que los Derivados Financieros tienen como objetivo, minimizar el riesgo asociado a las fluctuaciones imprevistas del precio del activo subyacente. Por esto, todo contrato derivado tiene por objeto brindar la posibilidad de transferir riesgo. Es por ello que, pueden realizarse sobre tasas de interés, tipos de cambio, precios de materias primas (commodities) y acciones, entre otros.

Si bien inicialmente este tipo de productos financieros fueron concebidos buscando eliminar la incertidumbre que generaba la fluctuación del precio de las cosas, tanto en el vendedor como en el comprador, hoy en día se utilizan bajo dicha filosofía como sistema de especulación pura.

Ahora bien, la finalidad de usar los derivados es tratar de cubrir los posibles riesgos que aparecen en cualquier operación financiera, estabilizando y por lo tanto concretando el costo financiero real de la operación.

Lo anterior motiva a estudiar y analizar tres tipos de derivados que han experimentado un vertiginoso incremento en la última década, ellos son: Los Contratos Forward, Contratos de Futuro y las Opciones Financieras, ya que una vez obtenido las características de cada uno de ellos, cómo funcionan, deben paralelamente desarrollar la fundamentación matemática de cada uno de esos modelos de instrumentos financieros para adaptarse al objetivo primordial de esta investigación, o sea, analizar los fundamentos matemáticos de los derivados financieros.

Las características generales de los derivados financieros son las siguientes:

- Su valor cambia en respuesta a los cambios de precio del activo subyacente.
- Requiere una inversión inicial neta muy pequeña o nula, respecto a otro tipo de contratos que tienen una respuesta similar ante cambios en las condiciones del mercado. Lo que permite mayores ganancias como también mayores pérdidas.
- Se liquidará en una fecha futura.
- Pueden cotizarse en mercados organizados (como las bolsas) o no organizados Over The Counter o "OTC", que son derivados hechos a la medida de las partes que contratan el derivado.

A continuación se ofrece una descripción de las características de las Opciones Financieras, Contratos Forward y de Contratos de Futuros, el objetivo de esta parte es entender el funcionamiento de estos tres contratos y las diferencias entre ellos.

Opciones Financieras

Según Fernández y Martínez (1997), una opción es: “Un contrato que proporciona a su poseedor (el comprador) el derecho (no la obligación a comprar (opción de compra) o vender (opción de venta) una cantidad de activos, a un precio establecido, en una fecha determinada” (p.13). Es por ello que, el tipo y número de activos, el precio de ejecución del contrato y la fecha hasta la que el contrato tiene validez son las características fundamentales de la opción. Tal como su nombre lo indica, las opciones son instrumentos que permiten a su tenedor ejercerlas sólo si lo desea.

Por otra parte, Garay y González (2007), las Opciones Financieras se definen como: “Contratos que permiten comprar o vender un determinado titulo-valor a un precio de ejecución previamente especificado (precio de ejercicio o Strike Price) y durante un periodo previamente establecido.”(p.80).

Para estos autores las opciones pueden ser emitidas sobre los siguientes activos subyacentes: acciones, monedas extranjeras, índices de cotización de acciones y contratos de futuro. (ob. cit.)

Igualmente Vélez (2003), considera que: “Una opción le otorga a quien posee el derecho, pero no la obligación de comprar o vender un titulo valor a un determinado precio.”(p.412)

Dentro de este marco, el mismo autor, indica que las opciones pueden clasificarse en tres grupos:

a) **Opción de Compra (Call Option):** es un contrato que proporciona la opción de adquirir cierto activo en una fecha determinada y a un precio definido (strike price). Una opción de compra otorga al tenedor el derecho, más no la obligación, de comprar el activo subyacente en cierta fecha de expiración por un determinado precio de ejercicio (exercise o strike price).

b) **Opción de Venta (Put Option):** es un contrato que proporciona una opción de vender un activo en una fecha y a un precio específico (strike price). Una opción de venta (Put Option) otorga al tenedor el derecho a vender y al emisor de la opción la obligación de comprar una acción a un precio de ejercicio (exercise o strike price). Dicho de otro modo, el comprador de la opción de venta tiene la alternativa de ejercer o no su derecho (vender)

c) Opciones europeas y americanas: Esta opción tiene una fecha de vencimiento. Las opciones europeas solo pueden ejecutarse en una fecha (la de expiración de la opción). La opción americana puede hacerse efectiva en cualquier fecha, entre la fecha de compra y la fecha de vencimiento, inclusive. La posibilidad de ejercer el derecho a la opción en cualquier momento hace que las opciones americanas sean más valiosas que las europeas. Sin embargo, a la vez, esto hace que las americanas sean más difíciles de valuar. (ob. cit.)

Contratos Forward

En opinión de Fernández y Martínez (1997), definen los contratos forward o contrato a plazo como: "Un acuerdo entre un comprador y un vendedor para realizar una compra - venta en el futuro a un precio fijado hoy" (p.18).

Dicho de otra manera, es un contrato que obliga a su poseedor (el comprador) a comprar una determinada cantidad de cierto activo, en una fecha futura especificada, pagando una cantidad prefijada. El vendedor del forward queda obligado a vender el activo en las condiciones establecidas en el contrato.

Por otro lado, Garay y González (2007) indican que los Contratos Forward son: "Un acuerdo para comprar o vender un determinado activo a un cierto precio (el precio de entrega) y por un período determinado" (p.81). De este modo, un Contrato

Forward puede ser comparado con un contrato negociado en el mercado al contado o spot, entendiéndose como spot a un acuerdo para comprar o vender un activo mediante la entrega inmediata de ese activo por parte del vendedor al comprador a cambio de efectivo.

Otros aspectos relevantes de los Contratos Forward son enfocados por Granda (2005), quien los conceptualiza como:

> Todo acuerdo o contrato entre dos partes, hecho a la medida de sus necesidades y por fuera de bolsa, para aceptar o realizar la entrega de una cantidad específica de un producto o subyacente con especificaciones definidas en cuanto al precio, fecha, lugar y forma de entrega. (p.1)

Agrega además, que existen dos modalidades de cumplimiento de estos contratos:

- **Modalidad Delivery:** En la cual se entrega físicamente el activo.
- **Modalidad Non Delivery:** En la cual se cobra o gira el diferencial del precio pactado del activo negociado frente a su valor de mercado. (ob. cit.)

Para Granda (2005) Los contratos forward pueden clasificarse en tres grupos:

a. **Forward sobre tasa de interés FRA:** Los FRA son contratos específicos individuales entre dos partes para entrar en una inversión en una fecha futura particular, a una tasa de interés particular.
b. **Forward sobre divisas o sobre tasa de cambio:** posibilitan a los participantes entrar en acuerdos sobre transacciones de tipo de cambio extranjero para ser efectuadas en momentos específicos en el futuro. El tamaño y vencimiento de este tipo de contrato a plazo son negociados entre el comprador y el vendedor y las tasas de cambio son generalmente cotizadas para 30, 60 ó 90 días y/o 6, 9 ó 12 meses desde la fecha en que suscribe el contrato.

c. **Forward sobre activos que no pagan intereses ni dividendos:** Estos activos generalmente son materias primas que presentan una anomalía en el precio a plazo, producida, entre otras razones, porque el mercado no es un mercado eficiente, ya que por ejemplo en el caso del petróleo, es imposible vender, puesto que no es posible pedirlo prestado y los usuarios que almacenen petróleo lo hacen porque las consecuencias de una falta de petróleo son terribles y por tanto no están dispuestos a prestarlo a nadie.

En este mismo orden, el autor muestra tres formas que se pueden cumplir en un Contrato Forward ellas son:

- Haciendo entrega física del producto, como divisas o títulos de acuerdo con el contrato.
- Cumplimiento Financiero, entregando o recibiendo en efectivo el monto equivalente al valor de mercado del subyacente.
- Liquidándolo contra un índice. (ob. cit.)

En estos casos, no hay entrega física del producto sino que las partes se obligan a entregar o a recibir en bolívares la diferencia entre el valor de la tasa pactada (de interés o cambio) y el valor de la tasa de referencia vigente en la fecha de cumplimiento (Non Delivery Forward- NDF)

Contratos de Futuro

De acuerdo a las interpretaciones de Granda (2005), los Contratos a Futuro constituyen: "Un acuerdo negociado en una bolsa o mercado organizado, que obliga a las partes contratantes a comprar o vender un número de bienes o valores (activo subyacente) en una fecha futura, pero con un precio establecido de antemano". (p.14)

A este respecto, la noción de futuro no es más que una promesa, un compromiso entre dos partes por el cual en una fecha futura una de las partes se compromete a comprar algo y otra a vender algo, no realizándose ninguna transacción en el momento de la contratación.

En atención a la concepción de Contrato de Futuro, Garay y González (2007), señalan que: "Es un acuerdo para comprar o vender un activo a un precio en un cierto momento". (p.81), es muy similar al Contrato Forward. Sin embargo, aún cuando el Contrato Forward se negocia en el mercado extrabursátil, un contrato de futuro se negocia en una bolsa. Esto se debe a que el Contrato de Futuro es mucho más estandarizado que el contrato forward.

Los Contratos de Futuro están disponibles para gran cantidad de activos subyacentes, se negocian en mercados organizados y, al igual que los Forward, deben especificar qué, dónde y cuándo puede ser entregado.

Por consiguiente, los Contratos Forward o contratos a plazo y los Contratos de Futuro, en opinión de Garay y González (2007), son: "convenios financieros que obligan a las partes firmantes a comprar o vender un cierto activo a un determinado precio y en una fecha futura preestablecida."(p.299)

Esta teoría es ampliada por Brealey y otros. (1996), para quienes el Contrato de Futuro es: "Un acuerdo para comprar o vender un activo en una fecha posterior especificada". Otro aspecto que resaltan, en relación con esto, es que: "El precio se fija cuando se efectúa la orden, pero no se paga hasta la fecha de entrega de los que se haya comprado" (p.374)(ob. cit.)

Cabe destacar también, tal como lo señalan: Garay y González (2007), en relación con los mercados de contratos de futuro, lo siguiente: "Los compradores y los vendedores de una diversa gama de activos se reúnen y acuerdan el precio de un bien o un instrumento financiero que se intercambiará en una fecha futura, previamente establecida." (p.299)

Siguiendo con los mismos autores, también puede verse que los demandantes y los oferentes de estos instrumentos determinan hoy el precio que regirá más adelante. Las personas que se comprometen a comprar el activo en el futuro, se dice que cuenta con una posición larga (long), mientras que los individuos que se comprometen a vender el activo en el futuro, se dice que tienen una posición corta (short). (ob. cit.)

Esta definición es aplicable a los contratos forward y a los futuros. La diferencia radica en que los contratos forward se negocian en el llamado mercado Over The Counter ó OTC, es decir, directamente entre las partes interesadas (sin intermediarios), mientras que los de futuros se negocian en las bolsas o mercados organizados, tal como se señalara anteriormente.

Además, los contratos de futuro se diferencian de los contratos forward en que los primeros son estandarizados, con requerimientos de margen y liquidaciones diarias.

Diferencias entre Contratos forward y Contratos Futuros

- Los contratos forward son contratos privados entre dos personas, en cambio los contratos futuros son contratos entre dos partes negociada en la bolsa de contrato de futuro.
- Los contratos forwards se ajustan a las necesidades de las partes, se especifica una fecha de entrega y se cierra al vencimiento, en cambio los contratos futuros, es un contrato estándar, hay rangos de posibles fechas de entrega y se cierra diariamente.
- En los contratos forward, entrega el activo subyacente, en los contratos de futuro usualmente se termina sin la entrega del activo.

Por ejemplo, un exportador de mercancías puede pactar con una entidad financiera que dentro de un par de meses, en el momento en que reciba el pago de la mercancía, le venderá a la entidad dichas divisas a un precio fijado hoy. En este caso en el momento actual no hay ningún desembolso, pero sea cual sea la cotización de la divisa en el momento pactado para la transacción se las deberá vender al precio pactado hoy.

Así pues, si bien un futuro financiero tiene la ventaja de que no se produce un desembolso o cobro inicial también tiene la desventaja de que el beneficio o pérdida no está limitado, ya que sea cual sea el precio de contado en el momento de vencimiento del contrato, la transacción se deberá realizar al precio pactado hoy.

En una visión más amplia, Granda (2005) señala que los Contratos Futuros pueden clasificarse según la función de los distintos activos subyacentes:

a. Divisas, compromisos de comprar o vender una determinada divisa a un determinado tipo de cambio.
b. Tipo de interés, compromiso de tomar o dar prestado a un determinado tipo de interés.
c. Materias primas, compromiso de comprar o vender una determinada cantidad de una materia prima en un momento futuro.

En ese mismo orden, el autor señala "El principal objetivo de los mercados de futuros es posibilitar cobertura ante cambios desfavorables en alguna variable económica". (ob. cit.). Puede afirmarse que esto se logra mediante un mecanismo que hace posible que quienes quieran eliminar riesgo puedan transferirlo a quienes estén dispuestos a asumirlo, en ese sentido, la cobertura en futuros es una herramienta empleada para minimizar el riesgo que se produce cuando las cotizaciones se mueven en forma adversa.

Por último, el mismo autor sostiene que hay dos tipos de coberturas:

1. **La cobertura vendedora** es utilizada por quienes tratan de proteger el precio de una venta del bien que realizarán con posterioridad, es decir, por aquellos que temen una caída futura del precio del bien.
2. **La cobertura compradora** es empleada por quienes buscan establecer el precio de una compra de un bien que efectuarán posteriormente, es decir, por aquellos que temen un aumento de las cotizaciones. (ob. cit.)

Valoración de los Derivados Financieros mediante Modelos Matemáticos

Valoración de las opciones

La idea detrás de una opción es la siguiente: si se puede comprar un activo subyacente, por ejemplo: a un precio predefinido, se espera que en el momento de ejercer el derecho de comprar el precio del activo este más alto que el precio estipulado en la opción. Para una opción de venta la situación es contraria: se espera que el precio de mercado del activo subyacente sea menor que el pactado en la opción de venta.

El valor de una opción de compra ó una opción a venta, por ejemplo, están definidos mediante las expresiones:

Valor de una opción de compra (call) al expirar:

$$C_T = \max(S_T - V_E, 0)$$

Valor de una opción de venta (put) al expirar**:**

$$P_T = \max(V_E - S_T, 0)$$

En donde:

- C_T es valor de la opción de compra,
- P_T es valor de la opción de venta,
- S_T es el precio de mercado del activo subyacente,
- T: Es el plazo hasta el vencimiento de la opción,
- V_E es el precio de ejercicio: valor al cual se compraría el activo en el vencimiento.
- max significa el máximo valor entre (S_T-V_E) y 0 (cero).

Variables que afectan el valor de una opción

El valor de una opción depende de ciertas variables relacionadas con el activo subyacente y los mercados financieros. A continuación presentamos y explicamos las seis variables que afectan el valor de una opción:

- **El valor actual del activo subyacente:** Las opciones son activos cuyo valor depende del valor del activo subyacente. Por lo tanto, un cambio en su valor cambiará el valor de la opción. Como las opciones de compra otorgan el derecho de comprar el activo subyacente a un precio determinado con anticipación, un aumento del precio del activo subyacente aumentará el valor de la opción de compra. Por el contrario, en la opción de venta de un activo, un aumento del subyacente reduce el valor de la opción (porque el precio de venta esta fijo).
- **Precio de ejercicio:** Ya hemos visto que el precio define la opción. Es obvio que si este precio es el que el tenedor de la opción de compra paga por el activo subyacente, al aumentar el precio de ejercicio, el valor de la opción de compra disminuye. En el caso de la opción de venta, la situación es contraria, al aumentar el precio de ejercicio, el valor de la opción de venta aumenta.

- **Tasa de interés libre de riesgo durante el periodo de maduración:** Como el tenedor de una opción de compra paga el precio de la opción al inicio del negocio, existe un costo de oportunidad sobre ese dinero. Es bien sabido que el costo de la oportunidad del dinero depende del nivel general de las tasa de interés. Por el otro lado, el precio de ejercicio se hace efectivo al terminar el periodo de maduración. De este modo un pago que se haga en el futuro (opción de compra) tendrá menos valor hoy si la tasa de interés aumenta. En el caso de la opción de venta se recibe el precio de ejercicio en la fecha de maduración, de manera que ese ingreso futuro valdrá menos hoy si la tasa de interés aumenta. Así pues, un aumento en la tasa de interés aumenta el valor de una opción de compra y disminuye el valor de una opción de venta.
- **Periodo de maduración:** Al aumentar el período de maduración, tanto el caso de una opción de compra como en el de una opción de venta se logra mayor flexibilidad y esto le da valor a la opción. Por lo tanto, el valor de ambas opciones aumenta. Sin embargo, al aumentar el tiempo de maduración dejando constante el precio de ejercicio, el valor presente de ese precio de ejercicio al finalizar el período de maduración disminuye. Por lo tanto, aumentar el período de maduración hace que una opción de compra valga más porque hay que pagar una suma fija y el valor de una opción de venta valga menos porque se va a recibir una suma fijada con antelación. Estas consideraciones son válidas para las opciones americanas que permiten ejercer la opción en cualquier tiempo antes de la maduración.
- **Volatilidad o varianza del valor activo:** Quien compra una opción compra el derecho de comprar o vender un activo subyacente a un precio predeterminado. Mientras más alta sea la volatilidad del valor del activo subyacente, más valdrá la opción.
- **Dividendos o flujos de caja recibidos:** El valor de mercado de una acción o de un activo depende de los flujos futuros que se puedan recibir de ellos. Si los flujos de caja o dividendos se reciben antes de la fecha de maduración, son beneficios que el tenedor de una opción de compra no recibe. Si esos

dividendos o flujos de caja no se recibieran antes del final del periodo de maduración, sino después, esos beneficios los recibiría el tenedor de la opción de compra. De esta manera, un aumento en los dividendos o flujos disminuye el valor de una opción de compra. El análisis contrario se puede hacer para el tenedor de una opción de venta y se puede concluir que el valor de esta aumenta si aumentan los dividendos o flujos de caja.

Valoración de Contratos Forward

En el mercado de productos derivados existen tres actores fundamentales, los **proteccionistas**, que son personas o empresas que desean disminuir la incertidumbre con respecto al valor del activo subyacente que están negociando, los **especuladores**, que son personas o empresas que están apostando a una subida o bajada del precio del activo subyacente, y los **arbitrajistas**, que buscan aprovecharse de cualquier desequilibrio que pudiera producirse en los mercados a futuro con respecto a los mercados a contado (spots).

Las fórmulas que se utilizan para valorar los distintos Contratos Forward y Contrato de Futuro se basan en argumentos de no-arbitraje.

Por ejemplo, suponga que el precio al contado o spot actual del oro es 400 dólares la onza, el precio forward del oro a un año es 469 dólares la onza y que la tasa de interés en Estados Unidos es 6, 5 % anual. Si no existen costos por almacenar el oro, ¿existe alguna oportunidad de arbitraje?.

Es posible demostrar, de manera muy sencilla, que los precios anteriores no son de equilibrio, toda vez que existen oportunidades de arbitraje. Un arbitrajista podría realizar la siguiente transacción hoy: pide prestado al banco la cantidad de 400 dólares por un año a la tasa de interés de mercado de 6,5 %, emplea ese dinero para comprar una onza de oro y, simultáneamente, toma una posición corta sobre un contrato forward de oro con vencimiento a un año al precio de entrega de 460 dólares por onza. Al cabo del año, el arbitrajista cumple con el Contrato Forward y entrega la onza de oro que posee el precio de 460 dólares. Asimismo, procede a liquidar el préstamo con el banco, el cual asciende a 426 dólares (400 x 1,065), y obtiene así una ganancia completamente segura de 34 dólares (460 – 426) sin haber realizado inversión inicial alguna.

A continuación mostramos el modelo matemático por medio del cual se rige la valoración:

$$F = S(1+r)^t$$

En donde:

- r es tasa de interés libre de riesgo a un año, para qué no existan oportunidades de arbitraje.
- S es el precio de contado del oro
- F es el precio forward de un contrato.
- t es el periodo en años para ser entregado.

En el ejemplo anterior, S = 400, t = 1 y r = 0,065, de manera que F = 400 (1 + 0,065) = $426. Es decir, el precio del Contrato Forward sobre el oro a un año debería ser 426 dólares para que no existan oportunidades de arbitraje.

Valoración de Contratos de Futuro

A continuación se presentan las fórmulas que se aplican para valorar contratos de futuro sobre Letras del Tesoro y Bonos del Tesoro del gobierno de Estados Unidos, índices bursátiles y monedas. Estas fórmulas se pueden deducir utilizando argumentos de arbitraje similares a los del ejemplo del oro.

Valoración de contratos de futuro sobre Letras del Tesoro del gobierno de Estados Unidos. La siguiente fórmula se emplea para valorar un contrato de futuro sobre letras del tesoro del gobierno de Estados Unidos (recuerde que las letras del tesoro son bonos de descuentos o cero cupón; es decir, no proporcionan pagos de cupones a sus tenedores. Las letras del tesoro se emiten con períodos de madurez inferior a un año)

$$F = P(1 + r)$$

En donde,

- F: es el valor actual del contrato de futuro sobre letras del tesoro
- r : es la tasa de interés
- P: es el precio actual de la letra del tesoro en el mercado.

Valoración de Contratos de Futuro sobre Bonos del Tesoro del gobierno de Estados Unidos. Los Bonos del Tesoro de Estados Unidos, a diferencia de las Letras del Tesoro, cuentan con periodos de madurez mayores a un año y proveen de pagos de cupones semestrales. El valor presente de los pagos de cupones que se espera devengue el bono debe ser deducido del precio del mercado del bono para poder valorar el contrato de futuro, puesto que estos cupones no son percibidos por el tenedor del contrato de futuro.

$$\boldsymbol{F = (P - V_{p,i}) \cdot (1 + r)}$$

En donde $V_{p,i}$ es el valor presente de los intereses que serían percibidos por el bono.

Valoración de contratos de futuro sobre índices bursátiles. Si se cambia en la formula anterior, el valor presente de los intereses por valor presente de los dividendos, se puede deducir la siguiente fórmula

$$\boldsymbol{F = (P - V_{p,d}) \cdot (1 + r)}$$

En donde $V_{p,d}$ es el valor presente de los dividendos esperados que serán percibidos por las acciones incluidas en el índice.

Valoración de Contrato de Futuro sobre monedas. Si se emplea Contrato de Futuro sobre monedas, se puede deducir la siguiente fórmula:

$$\boldsymbol{F = S \cdot \left(\frac{1 + r_d}{1 + r_f} \right)}$$

En donde

- r_d es la tasa de interés doméstica,
- r_f es la tasa de interés extranjera
- S es el tipo de cambio.

Valoración de opciones europeas: La fórmula de Black-Scholes-Merton

Las fórmulas utilizadas para valorar opciones fueron desarrolladas por Fischer Black y Myron Scholes en 1973 así como por Robert Merton en 1972, aunque su trabajo fue publicado al año siguiente. El modelo que desarrollaron estos autores y por el cual Merton y Scholes recibieron el Premio Nobel de Economía en 1998 (Black ya había fallecido unos años antes) se basa en que una combinación específica de acciones y de préstamos pueden duplicar los pagos que proporcionan una opción de compra a lo largo de un período de tiempo infinitesimal.

El modelo Black Scholes Merton (BSM). Aunque este modelo puede ser adecuado para valorar opciones con activos financieros subyacentes, no es el más adecuado para valorar proyectos que pueden ser considerados también como opciones. Se basa en que los resultados de las opciones, sea que se ejerzan o no, siguen un comportamiento binomial.

Como todos los modelos, éste tiene unos supuestos sobre los cuales se diseño:

- Se consideran opciones europeas.
- No hay impuestos ni costo de transacción. Son divisibles y existe información gratuita.
- Las acciones son infinitamente divisibles.
- Las ventas cortas están permitidas.
- La tasa de interés para endeudarse o prestar es la misma y es constante.
- La acción No paga dividendos.
- No hay imperfecciones al emitir o suscribir una opción.
- La tasa de interés a corto plazo se conoce y es constante durante la duración del contrato. Los que participan en el mercado pueden recibir y dar en préstamo a esa tasa.
- Los precios de las acciones obedecen a lo que se conoce como camino o paseo aleatorio (random walk).
- La distribución de probabilidad de la rentabilidad de las acciones es normal.
- La varianza de la rentabilidad de la acción es constante y conocida por los participantes del mercado.

A continuación se esbozan los basamentos del modelo de Black-Scholes-Merton. Si se supone que el periodo de la opción y el precio de la acción subyacente dependen de la misma fuente de incertidumbre, entonces es posible construir un portafolio que consista en la acción y en la opción y que sea capaz de eliminar esta fuente de incertidumbre. Así, el portafolio se encuentra libre de riesgo en forma instantánea y debe, en consecuencia, devengar la tasa libre de riesgo.

Entonces, una vez identificado el proceso que sigue el precio de la opción, es necesario construir un portafolio libre de riesgo, el cual consiste de una posición larga de Δ (delta) acciones y una posición corta de una opción de compra. Al cambiar delta (por cambios en el precio de la opción o producto del paso del tiempo) es necesario que el portafolio creado se mantenga libre de riesgo, lo cual requiere que se compre o que se venda el número apropiado de acciones constantemente.

Lo anterior conduce a la ecuación diferencial de Black-Scholes-Merton.

En el caso de una opción call europea, con precio de ejercicio *X*, y término de expiración *T*, al final del período la opción debe valer exactamente máx (*S-X,* 0) cuando *t*= *T*.

Las ecuaciones que soportan el modelo matemático de este derivado financiero son:

$$c = S_0 N(d_1) - Xe^{-rt} N(d_2)$$
$$p = Xe^{-rt} N(-d_2) - S_0 N(-d_1)$$

En donde

$$d_1 = \frac{Ln(S_0 / X) + (r + \sigma^2 / 2)t}{\sigma\sqrt{t}}$$

$$d_2 = \frac{Ln(S_0 / X) + (r - \sigma^2 / 2)t}{\sigma\sqrt{t}}$$

De acuerdo con las ecuaciones de BSM, las cinco variables requeridas para calcular el valor de una opción de compra (c) y de una opción de venta (p) europeas son las siguientes:

- *N(d)* es la distribución acumulada de la normal (denota la probabilidad de que una variable aleatoria, estandarizada y distribuida normalmente, sea inferior a *d*.)
- S_0 es el precio actual de la acción (denota el Precio de la opción subyacente a la opción en el mercado)

- X precio de ejercicio de la opción.
- e = 2,71828 es la base de los logaritmos naturales
- r tasa de interés a corto plazo, (denota Tasa de rendimiento libre de riesgo anualizada y continua).
- t período de tiempo
- σ desviación estándar de la rentabilidad de las acciones (denota la Desviación estándar (anualizada) del rendimiento continuo de las acciones.)
- σ^2 Varianza
- T es el tiempo, expresado en años, que faltaba para la expiración del contrato de opciones.

En la fórmula de Black Scholes Merton. N(x) es el valor de la función de probabilidad acumulada de una distribución normal estándar y viene determinada por:

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-(1/2)y^2} dy .$$

Teoría sobre los Fundamentos Matemáticos

Sobre la base de las consideraciones anteriores, el análisis de cada modelo de valoración de los derivados financieros, se realizará considerando un conjunto de postulados, teoremas, proposiciones, criterios, definiciones y en general las propiedades y leyes que rigen la ciencia de la matemática.

Entre los fundamentos matemáticos a ser utilizados en la presente investigación se desarrolla a continuación:

Axiomática de los Números Reales.

El conjunto de los números reales no es más que la unión del conjunto de los números racionales *Q* y el conjunto de los números irracionales *I*; es denotado con la letra mayúscula *R*. Queda definido por:

$$\boldsymbol{R = Q \cup I}.$$

Los axiomas que rigen la suma en este conjunto son los siguientes:

A.1.- $\boldsymbol{a,b \in R \Rightarrow (a+b) \in R}$

A.2.- $\boldsymbol{(a+b)+c = a+(b+c)}$, $\forall \boldsymbol{a,b,c \in R}$

A.3.- $\exists ! 0 \in \boldsymbol{R} / \quad \boldsymbol{a} + 0 = \boldsymbol{a}, \quad \forall \boldsymbol{a \in R}$

A.4.- $\forall \boldsymbol{a \in R}, \exists ! (-\boldsymbol{a}) \in \boldsymbol{R} : \quad \boldsymbol{a + (-a)} = 0$

A.5.- $\boldsymbol{a+b = b+a}, \quad \forall \boldsymbol{a,b \in R}$

Los axiomas que rigen la multiplicación en este conjunto siguen a continuación:

M.1.- $\boldsymbol{a,b \in R \Rightarrow (ab) \in R}$
M.2.- $\boldsymbol{(ab)c = a(bc)}$, $\forall \boldsymbol{a,b,c \in R}$
M.3.- $\exists ! 1 \in \boldsymbol{R} / \quad \boldsymbol{a}.1 = \boldsymbol{a}, \quad \forall \boldsymbol{a \in R}$
M.4.- $\forall \boldsymbol{a \in R, a} \neq 0, \exists ! \boldsymbol{a}^{-1} = \frac{1}{\boldsymbol{a}} \in \boldsymbol{R} / \quad \boldsymbol{a.a}^{-1} = \boldsymbol{a}.\frac{1}{\boldsymbol{a}} = 1$
M.5.- $\boldsymbol{ab = ba}, \quad \forall \boldsymbol{a,b \in R}$
M.6.- $\boldsymbol{a(b+c) = ab + ac}, \quad \forall \boldsymbol{a,b} \text{ y } \boldsymbol{c \in R}$

Funciones como modelos matemáticos

Son diversas las aplicaciones de la matemática al campo de la administración y economía, finanzas e ingeniería, en fin en todas aquellas áreas del quehacer humano donde se necesita expresar una situación del mundo real en términos de una relación funcional, denominada modelo matemático de la situación.

Es por ello, que la presente investigación se diferencia fundamentalmente de las investigaciones de carácter empírico, precisamente porque está destinada a proporcionar un método práctico en la obtención de funciones como modelos matemáticos. Resulta oportuno, mostrar las muchas relaciones que aparecen en el área financiera y que pueden ser modeladas mediante funciones, tal es el caso, del análisis de los modelos de valoración de los derivados financieros.

Definición de función

Una función, en matemáticas, es el término usado para indicar la relación o correspondencia entre dos o más cantidades. En este sentido, Leithold (1998), define función como:

> Una función es un conjunto de pares ordenados de números *(x, y)* en los que no existe dos pares ordenados diferentes con el mismo primer número. El conjunto de todos los valores admisibles de x se denomina dominio de la función, y el conjunto de todos los valores resultantes de y recibe el nombre de rango de la función. (p. 28)

Para Arya y Lardner (2002), establece como definición de función lo siguiente:

> Sean X y Y dos conjuntos no vacios. Una función de X en Y es una regla que se asigna a cada elemento $x \in X$ una única $y \in Y$. Si una función asigna y a un $x \in X$ particular, decimos que y es el valor de la función en x. (p. 177)

Función real

Para efecto de esta investigación, vamos a considerar valores comprendidos en el conjunto de los números reales. Por consiguiente, las funciones que nos interesan para realizar el análisis de los modelos de valoración de los derivados financieros, son las funciones reales de variable real. Es por ello, que Sáenz (2007), define la función real como: "Una función real de variable real es una función cuyo dominio y cuyo conjunto de llegada son subconjuntos de R" (p. 178)

Función exponencial

La definición de función exponencial, según Sáez (1993), es como sigue:

> Sea a un número real tal que $\boldsymbol{a} > 0$ y $\boldsymbol{a} \neq 1$. Se define función exponencial con base a a la función definida como $\boldsymbol{f(x) = a^x}$, donde el dominio de la función exponencial *f* es todos los números reales y el rango es el conjunto de los números reales positivos. La gráfica de *f* no corta al eje X. Corta al eje Y en (0,1) ya que $\boldsymbol{a}^0 = 1$.(p. 17)

Por otra parte, Según Arya y Lardner (2002), considera que: "Una función del tipo $\boldsymbol{f(x) = a^x}$ $(\boldsymbol{a} > 0$ y $\boldsymbol{a} \neq 1)$, se denomina una función exponencial. Cuando $\boldsymbol{a} > 1$, la función se conoce como una función exponencial creciente, mientras que si $\boldsymbol{a} < 1$, se llama una función exponencial decreciente." (p. 237)

Valor absoluto

Según Sáez (2007), define valor absoluto como:

El valor absoluto de un número real es el número real

$$|\boldsymbol{x}| = \begin{cases} \boldsymbol{x}, & \text{si } \boldsymbol{x} \geq 0 \\ -\boldsymbol{x}, & \text{si } \boldsymbol{x} < 0 \end{cases}$$

O sea, el valor absoluto de un número real es igual al mismo número si este es 0 ó positivo, y es igual a su inverso aditivo en el caso que fuere negativo. p (134)

Las siguientes propiedades siguen inmediatamente de la definición:

- $|x| \geq 0, \ \forall a \in R.$
- $|x| = 0, \Leftrightarrow x = 0$
- $-|x| \leq x \leq |x|, \ \forall a \in R.$
- Si $a \geq 0$ entonces $|x| = a \Leftrightarrow x = a \vee x = -a$

Otras propiedades importantes del valor absoluto

Si a y b son números reales y n es un número natural, entonces:

- $|xy| = |x||y|$
- $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$
- $|x^n| = |x|^n$
- $|x| < |y| \Leftrightarrow x^2 < y^2$
- Desigualdad triangular

  $|x + y| \leq |x| + |y|$

Pendiente de una recta

Según Goodman (1996), define la pendiente de una recta como:

"Sean $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ cualesquiera dos puntos distintos en una recta L no vertical. La pendiente de la recta L, que se denota con m, está dada por

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Donde:

1. Si $m > 0$, L es una recta con pendiente positiva, sube al movernos de izquierda a derecha.
2. Si $m < 0$, L es una recta con pendiente negativa, baja al movernos de izquierda a derecha.
3. Si $m = 0$, L es una recta con pendiente cero, es horizontal.
4. Si m no existe, L es una recta con pendiente indefinida, es vertical." (p. 106).

Limite de una función

En opinión de Arya y Lardner (2002), el límite de una función se define como:

> Sea $\boldsymbol{f(x)}$ una función que está definida para todos los valores de $\boldsymbol{x}$ cerca de $\boldsymbol{c}$, con excepción posible de $\boldsymbol{c}$ mismo. Se dice que $\boldsymbol{L}$ es el límite de $\boldsymbol{f(x)}$ cuando $\boldsymbol{x}$ tiende a $\boldsymbol{c}$, si la diferencia entre $\boldsymbol{f(x)}$ y $\boldsymbol{L}$ puede hacerse tan pequeña como se desee con solo restringir a $\boldsymbol{x}$ a estar lo suficientemente cerca de $\boldsymbol{c}$. p(459)

En símbolos escribimos

$$\lim_{x \to c} f(x) = L, \text{ o bien } f(x) \to L \text{ cuando } x \to c$$

Límites unilaterales

Existen dos tipos de límites, limite por la izquierda y limite por la derecha. A estos los llamaremos límites unilaterales.

Límite por la derecha

Según Sáenz (2007), define el límite lateral por la derecha, de la siguiente manera:

> Sea f una función que está definida en un intervalo abierto de la forma (a,b). Diremos que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a por

> la derecha es el número L, si $\boldsymbol{f(x)}$ se aproxima arbitrariamente a L cuando x se aproxima a a, siendo $x > a$.(p.99)

En este caso escribiremos:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

Límite por la izquierda

Según Sáenz (2007), define el límite lateral por la izquierda, de la siguiente manera:

> Sea f una función que está definida en un intervalo abierto de la forma (b, a). Diremos que el límite de $\boldsymbol{f(x)}$ cuando x tiende a a por la izquierda es el número L, si $\boldsymbol{f(x)}$ se aproxima arbitrariamente a L cuando x se aproxima a a, siendo $x < a$.(p.99)

En este caso escribiremos:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

Señala el mismo autor, es evidente que si el límite de una función es el número L, entonces, ambos limites unilaterales también serán iguales a L. Recíprocamente, si ambos límites son iguales a un mismo número L, entonces el límite de la función también es L. (ob. cit.).

Este resultado es muy importante y lo resumimos en la siguiente proposición.

Proposición

Si $\boldsymbol{\lim_{x \to a} f(x) = L}$ existe y es igual a L si y solo si existen $\lim_{x \to a^+} f(x)$ y $\lim_{x \to a^-} f(x)$ y ambos son iguales a L.

Cabe destacar también, la determinación de los valores límites de funciones en casos más complicados descansa en varias leyes o teoremas que se refieren a límites, con el objeto de calcular de manera más fácil que cuando se utiliza la definición, sin embargo, se debe recalcar que las demostraciones de dichos teoremas están basadas en la definición de límite de una función.

Un resultado fundamental en la teoría de los limites nos dice que el limite respeta las operaciones elementales del algebra. Es decir, el límite de una suma, diferencia, producto, cociente, entre otros; de funciones es igual a la suma, diferencia, producto, cociente de los límites.

Este resultado, por ser de gran importancia, se enuncia en forma precisa como leyes de los límites en la tabla 1.

Observemos que cada uno de los límites definidos existe, con tal que exista los límites del lado derecho y, en el caso de la función cociente, el denominador del lado derecho sea distinto de cero.

Leyes de los Límites

Tabla 1

Nombre Funcional	Expresión Matemática	Límite
Constante	$f(x)=k$	$\lim_{x\to a} f(x)=k$
Identidad	$f(x)=x$	$\lim_{x\to a} f(x)=a$
Afín	$f(x)=kx$	$\lim_{x\to a} kx = ka$
Potencial	$f(x)=x^n$	$\lim_{x\to a} x^n = a^n$
Radical	$f(x)=\sqrt[n]{x^m}$	$\lim_{x\to a} f(x)=\sqrt[n]{a^m}$
Función Suma	$f(x)\pm g(x)$	$\lim_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=\lim_{x\to a} f(x)\pm\lim_{x\to a} g(x)$
Función Producto	$f(x)\cdot g(x)$	$\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=\lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a} g(x)$
Función Cociente	$\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$

Continuidad de una función en un número

Según Arya y Lardner (2002), la definición de continuidad de una función viene dada por las siguientes condiciones:

> Una función $f(x)$ se dice que es continua en el punto $x=c$ si las tres condiciones siguientes se cumplen.
>
> 1. $f(x)$ está definida en $x=c$. Esto es, $f(c)$ está bien definida.
> 2. $\lim_{x\to c} f(x)$ existe.
> 3. $\lim_{x\to c} f(x)=f(c)$
>
> Si cualquiera de estas condiciones no se satisface, se dice que la función es discontinua en $x=c$. (p. 492).

Derivada de una Función

Para Leithold (1998), define:

> La derivada de la función f es aquella función, denotada por $f\,'$, tal que su valor en un número x del dominio de f esta dado por
>
> $$f'(x)=\lim_{\Delta_x\to 0}\frac{f(x+\Delta_x)-f(x)}{\Delta_x}$$
>
> si este límite existe.(p. 104)

A dicho límite, cuando existe, se le denota $f'(x)$. Es común usar la siguiente notación:

$$\frac{d}{dx}f(x)=f'(x).$$

Propiedades de las derivadas.

A continuación, se presentan algunas fórmulas de derivación en la tabla 2, que nos permiten encontrar la derivada de un gran número de funciones en forma rápida y mecánica, sin tener que recurrir a los límites. En las fórmulas siguientes *u*, *v* y *w* son funciones derivables de *x*.

Tabla 2

Nombre Funcional	Expresión Matemática	Derivada
Constante	$f(x)=k$	$f'(x)=0$
Identidad	$f(x)=x$	$f'(x)=1$
Afín	$f(x)=kx$	$f'(x)=k$
Potencial	$f(x)=x^{n}$	$f'(x)=nx^{n-1}$.
Radical	$f(x)=\sqrt[n]{x^{m}}$	$f(x)=\frac{m}{n}\sqrt[n]{x^{m-n}}$
Función Suma	$f(x)=u(x)\pm v(x)$	$f'(x)=u'(x)\pm v'(x)$
Función Producto	$f(x)=u(x)\cdot v(x)$	$f'(x)=u'(x)v(x)+v'(x)u(x)$.
Función Cociente	$f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$	$f'(x)=\frac{u'(x)v(x)-v'(x)u(x)}{(v(x))^{2}}$
Función Compuesta	$f(x)=u(v(x))$	$f'(x)=u'(v(x))\cdot v'(x)$
Función Logaritmica	$f(x)=Ln(x)$	$f'(x)=\frac{1}{x}$
Función Exponencial	$f(x)=e^{x}$	$f'(x)=e^{x}$

Estudio del Criterio de Monotonía

En esta parte, consideraremos el significado de la primera derivada de una función en relación con su gráfica.

En este orden de ideas se puede citar, en primer lugar la definición de función creciente y función decreciente. Arya y Lardner (2002), se conceptualiza a través de la siguiente definición:

> Una función $y = f(x)$ se dice que es una función creciente sobre un intervalo de valores de ***x,*** si ***y*** crece al incrementarse la ***x***. Esto es, si x_1 y x_2 son dos valores cualesquiera en el intervalo dado con $x_2 > x_1$, entonces $f(x_2) > f(x_1)$. Una función $y = f(x)$ se dice que es una función decreciente sobre un intervalo de su dominio si ***y*** decrece al incrementarse la ***x***. Es decir, si $x_2 > x_1$ son dos valores de x en el intervalo dado, entonces $f(x_2) < f(x_1)$.(p. 537)

Teorema Criterio de Monotonía

Según Sáez (2007), define el teorema que establece el criterio de monotonía como:

> Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y diferenciable en el intervalo abierto (a,b). Si $f'(x) > 0$ para toda *x* en algún intervalo, entonces ***f*** es una función creciente de ***x*** sobre tal intervalo. Si $f'(x) < 0$ para toda *x* en algún intervalo, entonces *f* es una función decreciente de *x* sobre tal intervalo. (p.385)

Estudio del criterio de la primera y segunda derivada y la gráfica de la función.

En esta parte consideraremos para el análisis el significado de la primera derivada de una función con respecto a su gráfica. Antes de abordar este criterio, es necesario definir los términos siguientes:

Estudio de máximos y mínimos relativos.

Muchas de las aplicaciones importantes de derivadas incluyen encontrar los máximos y mínimos relativos de una función, en relación con esto, el mismo autor enuncia en primer lugar el máximo relativo ó máximo local como:

> Una función *f* tiene un máximo relativo o un máximo local en un punto *c* si existe un intervalo abierto I que contiene a *c* y contenido en el dominio de *f* tal que $\boldsymbol{f(c) \geq f(x)}, \quad \forall \boldsymbol{a \in I}$. Una función *f* tiene un mínimo relativo o un mínimo local en un punto *c* si existe un intervalo abierto I que contiene a *c* y contenido en el dominio de *f* tal que $\boldsymbol{f(c) \leq f(x)}, \quad \forall \boldsymbol{a \in I}$. A los máximos y mínimos relativos les daremos el nombre común de extremos relativos o extremos locales. (p. 394) (ob. cit.)

Cabe destacar también, tal como lo define Sáenz (2007): "Se llama número crítico de una función *f* a un número *c* del dominio de *f* tal que, $\boldsymbol{f'(c)} = 0$ ó $\boldsymbol{f'(c)}$ no existe. Si *c* es un número crítico, entonces $\boldsymbol{(c, f(c))}$ es un punto crítico." (p. 395)

Es de suma importancia determinar cuando un punto crítico es un máximo relativo, un mínimo relativo o ninguna de las dos cosas. En relación con esto el mismo autor establece:

> Sea *f* una función continua en un intervalo $\boldsymbol{(a,b)}$ y sea *c* que pertenece al intervalo $\boldsymbol{(a,b)}$ un número crítico de *f*, se tiene que: Si $\boldsymbol{f'(x)} > 0$ en un intervalo abierto a la izquierda de *c* y si $\boldsymbol{f'(x)} < 0$ en un intervalo abierto a la derecha de *c*, entonces *f* tiene un máximo relativo en *c*. Mientras que, si $\boldsymbol{f'(x)} < 0$ en un intervalo abierto a la izquierda de *c* y si $\boldsymbol{f'(x)} > 0$ en un intervalo abierto a la derecha de *c*, entonces *f* tiene un mínimo relativo en *c*. Por último, si en un intervalo abierto a la derecha de *c*, $f'(x)$ tiene el mismo signo, entonces *f* no tiene ni máximo ni mínimo en *c*. (p. 397) (ob. cit.)

La anterior definición se conoce como el criterio de la primera derivada, va a ser de gran utilidad porque nos permitirá saber cuando un punto crítico es un máximo relativo, un mínimo relativo ó ninguna de las anteriores.

Extremos Absolutos.

Según Sáenz (2005), define los extremos absolutos de una función como:

> Sea c un punto del dominio de la función f. Diremos que: $f(c)$ es el valor máximo de f, máximo absoluto de f o, simplemente, el máximo de f, si $f(c) \geq f(x)$, $\forall x \in$ Dom(f). $f(c)$ es el valor mínimo de f, mínimo absoluto de f o, simplemente, el mínimo de f, si $f(c) \leq f(x)$, $\forall x \in$ Dom(f). $f(c)$ es el valor extremo de f, si $f(c)$ es un máximo o un mínimo. P (281).

Definición de concavidad.

Según Sáenz (2007), "Sea f una función diferenciable en un intervalo abierto I, el gráfico de f es cóncavo hacia arriba en I si f' es creciente en I, por otro lado, el gráfico de f es cóncavo hacia abajo en I si f' es decreciente en I." (p. 402.)

Criterio de concavidad.

En la misma línea de pensamiento, el autor define dicho criterio como: "Si $f''(x) > 0$ en (a,b), el gráfico de f es cóncava hacia arriba en (a,b), de igual manera, si $f''(x) < 0$ en (a,b), el gráfico de f es cóncavo hacia abajo en (a,b)" (p. 402). (ob. cit.)

Criterio de la segunda derivada.

Según Sáenz (2007), define este criterio así: “Si $\boldsymbol{f'(c)} = 0$ y $\boldsymbol{f''(x)} > 0$, entonces *f*, tiene un mínimo relativo en *c* de igual manera, Si $\boldsymbol{f'(c)} = 0$ y $\boldsymbol{f''(x)} < 0$, entonces *f*, tiene un máximo relativo en *c*” (p. 406)

Números Combinatorios.

Según Giménez (1998), señala: “Siendo *m* y *n* dos números naturales tales que $m \geq n$, llamaremos numero combinatorio de numerador m y orden n, al número:

$$\frac{m!}{n!(m-n)!}.$$

donde entendemos que $m!$ es el factorial de m, definido por medio de

$$m! = m(m-1)(m-2)....1$$

Utilizaremos, para representarlos, el símbolo $\binom{m}{n}$, o sea:

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!} \text{ ”(p.428)}$$

Binomio de Newton

Con esta definición preliminar obtenemos la siguiente fórmula del Binomio o potencia entera de la suma

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + ... + \binom{n}{h}a^{n-h}b^h + ... + \binom{n}{n-1}a\ b^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

Escrito en forma compacta,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{h} a^{n-h} b^h$$

CAPITULO III

MARCO METODOLÓGICO

Tipo y Diseño de Investigación

La presente investigación se circunscribe en la modalidad de proyecto estudio teórico, de carácter matemático, por su aporte significativo al área financiera, mediante la presentación de los modelos de evaluación de los derivados financieros a través del análisis de los fundamentos matemáticos de estos instrumentos.

Este trabajo se apoya sobre el tipo de investigación documental de nivel descriptivo, en ese sentido, Cázares (1990), indica sobre la investigación documental lo siguiente:

> La investigación documental depende fundamentalmente de la información que se recoge o consulta en documentos, que constituyen una fuente o referencia que se puede acudir en cualquier momento o lugar, sin que se altere su naturaleza o sentido, para que la información constituya un aporte a la realidad objeto de estudio. (p. 18)

En tal sentido, el Manual de Trabajos de Grado de Especialización y Maestría y Tesis Doctorales de la UPEL (2006) señala:

> Se entiende por Investigación Documental, el estudio de problemas con el propósito de ampliar y profundizar el conocimiento de su naturaleza, con apoyo, principalmente, en trabajos previos, información y datos divulgados por medios impresos, audiovisuales o electrónicos. La originalidad del estudio se refleja en el enfoque, criterios, conceptualizaciones, reflexiones, conclusiones, recomendaciones y, en general, en el pensamiento del autor .(p.20)

Asimismo, la Investigación Documental facilita el cumplimiento de los siguientes objetivos:

- Extender, ampliar y desarrollar los conocimientos que se tienen acerca del tema dado.
- Profundizar y precisar conceptos, tesis y argumentos científicos.
- Aplicar, utilizar y concretar algunas de las ventajas ya conocidas.
- Relacionar, explicar y sintetizar las teorías y conocimientos.

La elaboración del presente estudio, permite la ampliación y desarrollo de los conocimientos que existe acerca de los derivados financieros, como ya se mencionó es una investigación teórica de carácter matemático con aplicación al área financiera, donde se busca profundizar y afinar conceptos, así como argumentos científicos inherentes al objeto de estudio.

Técnica de análisis.

Desde el punto de vista metodológico, el concepto de matriz que estamos interesados en esta investigación consiste en el análisis de contenidos como técnica de investigación teórica, en nuestro caso particular está elaborada con la finalidad de utilizar y concretar los fundamentos matemáticos, además de relacionar, explicar y sintetizar las teorías y conocimientos sobre el tema de los derivados financieros, mediante la técnica de análisis expuesta en una matriz de doble entrada.

En consecuencia, el análisis (de las opciones financieras, los Contratos forward y los contratos de futuro seleccionados en esta investigación) se realizará a través de una matriz de doble entrada, tal como se muestran en la tabla 3.

Matriz de análisis

Tabla 3

Modelo	Análisis
Opción de compra (call) $$C_T = \max(S_T - V_E, 0)$$ En donde: - C_T es valor de la opción de compra, - S_T es el precio de mercado del activo subyacente, - V_E es el precio de ejercicio. - max significa el máximo valor entre (S_T-V_E) y 0 (cero).	Condiciones a considerar: i. Considerando C_T y S_T como Variables, V_E fijo. ii. Considerando C_T y V_E como Variables, S_T fijo. Para el análisis de este modelo, se realizará el estudio de los siguientes fundamentos matemáticos: - Determinación del dominio y rango de la función definida por $y = \|x - b\|$ - Determinación de la gráfica correspondiente a este modelo. - Determinación de la tasa de variación media. - Determinación de la tasa de variación instantánea o derivada.
Opción de venta (put) $$P_T = \max(V_E - S_T, 0)$$ En donde: - P_T es valor de la opción de venta.	El análisis de este modelo es análogo al anterior.
Contrato Forward $$F = S(1+r)^t$$ En donde: - F es el precio forward de un contrato. - S es el precio de contado activo subyacente. - r es tasa de interés libre de riesgo a un año, para qué no existan oportunidades de arbitraje. - t es el periodo en años para ser entregado.	Condiciones a considerar: i. Considerando la tasa r como una variable y manteniendo S y t fijos. ii. Considerando t como una variable y manteniendo S y r fijos. Para el análisis de este modelo se realizará el estudio de los siguientes fundamentos matemáticos: - Determinación del dominio y rango de la función polimonial y la función exponencial. - Estudio de la continuidad de la función Polinomial del contrato forward. - Determinación de la tasa de variación media. - Determinación de la tasa de variación instantánea o derivada. - Estudio de la primera y segunda derivada. - Determinación de la gráfica.

<table>
<tr>
<td>

Contrato de Futuro sobre Letras del Tesoro

$$F = P(1+r)$$

En donde,

- F es el valor actual del contrato de futuro sobre letras del tesoro.
- r Tasa de interés
- P es el precio actual de la letra del tesoro en el mercado.

</td>
<td>

Observación: El análisis de este modelo corresponde a un caso particular al anterior considerando t=1.

Condiciones a considerar:

i. Considerando la tasa r como una variable y manteniendo P fijo.
ii. Considerando P como una variable y manteniendo r fijo.

Para el análisis de este modelo se realizará el estudio de los siguientes fundamentos matemáticos:

- Determinación del dominio y rango de la función afín del contrato de futuro.
- Determinación de la tasa de variación media.
- Determinación de la tasa de variación instantánea o derivada.
- Estudio de la primera y segunda derivada.
- Obtención de la gráfica.

</td>
</tr>
<tr>
<td>

Contrato de Futuro sobre Bonos del Tesoro

$$F = \left(P - V_{p,i}\right) \cdot \left(1+r\right)$$

En donde,

- F es el valor actual del contrato de futuro sobre Bonos del tesoro
- r tasa de interés
- P es el precio actual de los Bonos del tesoro en el mercado.
- $V_{p,i}$ es el valor presente de los intereses que serían percibidos por el bono.

</td>
<td>

El análisis de este modelo es análogo al anterior.

</td>
</tr>
</table>

Contrato de Futuro sobre Monedas

$$F = S \cdot \left(\frac{1 + r_d}{1 + r_f} \right)$$

En donde

- F es el valor actual del contrato de futuro sobre Monedas.
- r_d es la tasa de interés doméstica,
- r_f es la tasa de interés extranjera
- S es el tipo de cambio.

Para el análisis de este modelo se realizará mediante el estudio de los siguientes fundamentos matemáticos:

- Determinación del dominio y rango de la función afín del contrato de futuro sobre monedas
- Determinación de la tasa de variación media.
- Tasa de variación instantánea o derivada
- Estudio de la primera y segunda derivada.
- obtención de la gráfica.

Condiciones consideradas para realizar el análisis del modelo:

i. Considerando como variable independiente el tipo de cambio *S* y el cociente $\left(\frac{1 + r_d}{1 + r_f} \right)$ como factor constante.
ii. Considerando la tasa de interés domestica r_d como variable independiente y el cociente $\left(\frac{S}{1 + r_f} \right)$ como factor constante.
iii. Por último, considerando la tasa extranjera r_f como la variable independiente y $S(1 + r_f)$ como factor constante.

Modelo de Black-Scholes-Merton $c = S_0 N(d_1) - Xe^{-rt} N(d_2)$ $p = Xe^{-rt} N(-d_2) - S_0 N(-d_1)$ En donde $d_1 = \frac{Ln(S_0 / X) + (r + \sigma^2 / 2)t}{\sigma\sqrt{t}}$ $\boldsymbol{d_2 = \frac{Ln(S_0 / X) + (r - \sigma^2 / 2)t}{\sigma\sqrt{t}}}$ - *N(d)* es la distribución normal. - S_0 es el precio actual de la opción subyacente a la opción en el mercado. - X precio de ejercicio de la opción. - r tasa de interés. - t periodo de tiempo - σ desviación estándar. - σ^2 Varianza - T es el tiempo, expresado en años.	Por último, la valoración del Modelo de Black-Scholes-Merton está basada en una teoría estadístico- matemática muy avanzada, llamada “Cálculo estocástico aplicado al campo financiero actuarial”. Asimismo, el modelo está expresado mediante el movimiento Browniano y ecuaciones diferenciales estocásticas, lo que imposibilita su análisis en este trabajo. En consecuencia, la introducción de este ha sido más que un planteamiento inicial para que interesados en el tema continúe con su posterior estudio y profundicen en la investigación de este instrumento de valoración y así obtener conocimiento de un amplio campo de los derivados financieros.

CAPITULO IV

ANALISIS MATEMATICO DE LOS DERIVADOS FINANCIEROS

Análisis del Valor de una opción (Modelo Máximo)

Dado que la expresión definida como:

$$\boldsymbol{C_T} = \max(\boldsymbol{S_T} - \boldsymbol{V_E}, \boldsymbol{0})$$

representa el valor de una opción de compra, si consideramos las condiciones establecidas en la matriz de doble entrada para el análisis de este derivado financiero tenemos los siguientes casos:

i. Para C_T y S_T como variables y V_E fijo, la expresión dada puede reescribirse como $\boldsymbol{y} = \max(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}, \boldsymbol{0})$, donde $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C_T}$ (variable dependiente), $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{S_T}$ (variable independiente) y $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{V_E}$ (término constante)

ii. Para C_T y V_E como variables y S_T fijo, la expresión dada puede reescribirse como $\boldsymbol{y} = \max(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{0})$, donde $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C_T}$ (variable dependiente), $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{V_E}$ (variable independiente) y $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{S_T}$ (término constante)

Análisis de la función valor de una Opción Compra.

a. Determinación del dominio y rango de la función definida por $f(x) = \max(x - b, 0)$.

La definición de la función establece asignar el máximo valor entre la diferencia $x - b$ y cero, a la variable dependiente **y,** y como siempre podemos comparar dos valores numéricos, podemos concluir que el dominio de esta función es el conjunto de números reales.

Notemos que también se puede escribir esta función de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} x - b, & \text{si} \quad x \geq b \\ 0, & \text{si} \quad x < b \end{cases}$$

En consecuencia, podemos observar que si $x < b$ la función adquiere un valor constante igual a cero, por el contrario, si $x \geq b$ la función adquiere un valor siempre no negativo, así pues el rango de esta función es el intervalo $[\,0\,,\infty\,)$.

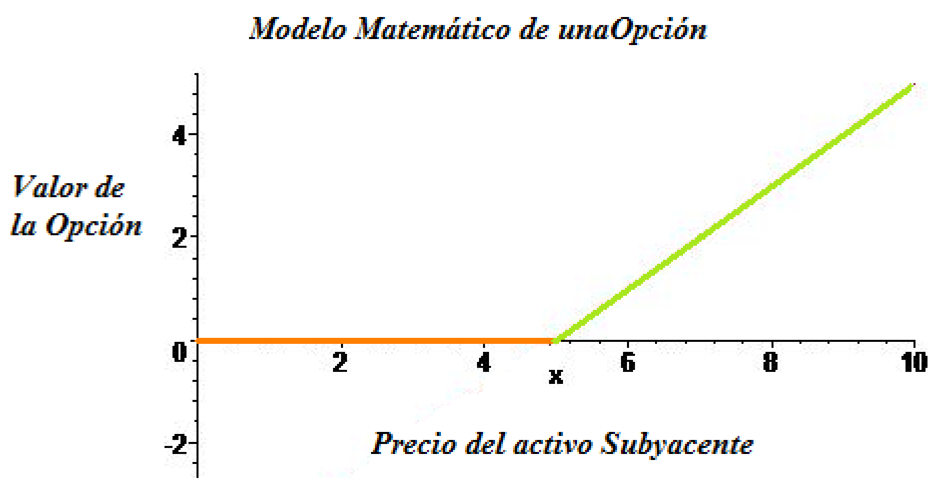
b. Obtención de la gráfica.

Como hemos mencionado para valores de x menores a b la función adquiere un valor constante igual a cero, lo cual nos conduce a una línea horizontal que coincide con el eje de las abscisas. Para valores de x mayores o iguales a b la función adquiere el modelo de una función afín, a saber, $f(x) = x - b$.

Recordemos que la forma general de la función afín está dada por $f(x) = mx + d$, donde m y d son la pendiente de la recta representada por esta ecuación y la ordenada al origen, respectivamente.

Al comparar las formas mencionada con la función afín, vemos que si $x \geq b$ tenemos que $m = 1$ y $d = -b$. Luego, la gráfica de la función está determinada por una semirectas. Esta semirrecta es creciente con ordenada en el origen ***-b*** y se hace cero o se anula en ***x = b.*** En consecuencia la gráfica queda como se muestra en la figura 1.

Figura 1



c. Determinación de la tasa de variación media:

Entendiendo que la tasa de variación media entre dos variables está definida por el cociente

$$t_{vm} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Vemos que, en este modelo objeto de estudio, la tasa de variación media coincide con las pendientes, en efecto, si $x \geq b$ y $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$ son dos puntos cualesquiera, tenemos que:

$$
\begin{aligned}
t_{vm} &= \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \\
&= \frac{(x_2-b)-(x_1-b)}{x_2-x_1} \\
&= \frac{x_2-x_1}{x_2-x_1} = 1
\end{aligned}
$$

Y por el contrario si $x < b$ y $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$ son dos puntos cualesquiera, tenemos que:

$$
\begin{aligned}
t_{vm} &= \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \\
&= \frac{0-0}{x_2-x_1} \\
&= \frac{0}{x_2-x_1} = 0.
\end{aligned}
$$

d. Determinación de la tasa de variación instantánea o derivada.

Como ya lo hemos expuesto, la tasa de variación instantánea (o velocidad de crecimiento instantáneo) coincide con la definición de derivada de una función. Por lo tanto, debemos considerar el cálculo de la derivada en los intervalos abiertos $(0,b)$ y (b,∞) puesto que en $x = b$ la función valor absoluto no posee derivada, esto es consecuencia de la no existencia del límite

$$
\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h},
$$

debido a que los límites laterales son distintos.

Entonces, usando la tabla 2, tenemos que si $x \geq b$ entonces

$$f'(x) = (x - b)' = 1$$

y si $x < b$ entonces

$$f'(x) = 0' = 0 .$$

Análisis del modelo de Contrato Forward (Función Polinomial y Función Exponencial).

Dado que la expresión algebraica, $F = S(1 + r)^t$ constituye el modelo matemático por medio del cual determina la valoración de un Contrato Forward cuando el activo subyacente está representado por el precio del oro. Se plantea entonces el análisis a partir de las consideraciones establecidas en la matriz de doble entrada para el estudio de este derivado financiero.

1) **Considerando la tasa *r* y el valor *F* como variables, manteniendo *S* y *t* fijos.**

El modelo considerado se puede escribir como

$$y = S(1 + x)^n ,$$

comportándose como una función polinomial, donde $y = F$ (variable dependiente), $x = r$ (variable independiente), y $n = t$ es un número entero positivo fijo.

Nótese que esta función polinomial puede ser expandida, de acuerdo al desarrollo de Newton mostrado en el Capítulo II, página 41, de la siguiente manera:

$$y = S(1+x)^n = S\left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \ldots + \binom{n}{k}x^k + \ldots + \binom{n}{n}x^n\right] = S\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$$

a. Determinación del Dominio y Rango de la función polinomial.

Para cualquier valor numérico real que se escoja para la variable $\boldsymbol{x}$, por el axioma A.1 mostrado en el Capítulo II, pág. 27, se tiene que la suma $(\mathbf{1}+\boldsymbol{x})$ es un número real, y por el axioma M.1 de la multiplicación, el producto $(\mathbf{1}+\boldsymbol{x})(\mathbf{1}+\boldsymbol{x})$ es un número real, en consecuencia, la potencia $(\mathbf{1}+\boldsymbol{x})^{\boldsymbol{n}}$ es un número real, por lo tanto el producto $\boldsymbol{S}(\mathbf{1}+\boldsymbol{x})^{\boldsymbol{n}}$ es un número real, lo que nos conduce a establecer que el dominio de esta función es el conjunto de los números reales. Ahora, en particular, y entendiendo que los valores de las tasas oscilan entre 0 y 1 (0 y 100%), tenemos que para este modelo, el dominio es restringido al intervalo cerrado $[\mathbf{0},\mathbf{1}]$.

Para determinar el rango de esta función estudiaremos los casos planteados a partir de las siguientes suposiciones: que el valor de $\boldsymbol{x}$ sea positivo o cero, ó, que el valor de $\boldsymbol{x}$ sea negativo.

Supongamos que $\boldsymbol{x}$ es cualquier número no negativo, entonces el valor $(\mathbf{1}+\boldsymbol{x})$ es mayor o igual a 1, y por lo tanto $(\mathbf{1}+\boldsymbol{x})^{\boldsymbol{n}}$ es mayor o igual a 1, independientemente de la potencia $\boldsymbol{n}$ considerada, entonces, al ser multiplicado por el valor de ***S,*** vemos que el producto $\boldsymbol{S}(\mathbf{1}+\boldsymbol{x})^{\boldsymbol{n}}$ es mayor o igual a ***S.***

Supongamos que $\boldsymbol{x}$ es negativo. Si éste pertenece al intervalo $[-\mathbf{1},\mathbf{0})$, los valores de $(\mathbf{1}+\boldsymbol{x})$ están en el intervalo $[\mathbf{0},\mathbf{1})$, es decir, son valores no negativos menores que 1, y en consecuencia la potencia $(\mathbf{1}+\boldsymbol{x})^{\boldsymbol{n}}$ mantiene la propiedad de ser no negativa y menor que 1, adicionalmente, el producto $\boldsymbol{S}(\mathbf{1}+\boldsymbol{x})^{\boldsymbol{n}}$ es un valor no negativo menor que ***S.*** Por otra parte, si $\boldsymbol{x}$ es un número negativo menor que $-\mathbf{1}$, entonces, la suma $(\mathbf{1}+\boldsymbol{x})$ es negativa. Ahora, si la potencia $\boldsymbol{n}$ es un número par, obtenemos que $(\mathbf{1}+\boldsymbol{x})^{\boldsymbol{n}}$ es un número no negativo y en consecuencia el producto $\boldsymbol{S}(\mathbf{1}+\boldsymbol{x})^{\boldsymbol{n}}$ es no negativo, pero si la potencia considerada es impar tenemos que $(1+x)^n$ es negativa y en consecuencia el producto $S(1+x)^n$ es también negativo.

Hagamos un cuadro resumen de lo antes expuesto.

Variación de x	Variación de $S(1+x)^n$
$x<-1$	$S(1+x)^n<0$ si n es impar $0\le S(1+x)^n<S$ si n es par
$-1\le x<0$	$0\le S(1+x)^n<S$
$x\ge 0$	$S(1+x)^n\ge S$

Para el modelo considerado, ya hemos mencionado que el dominio restringido es el intervalo $[\,0\,,1\,]$, en consecuencia el rango esperado es el intervalo $[\,S\,,2^n S\,]$.

b. Estudio de la continuidad de la función Polinomial del contrato forward.

Consideremos un valor real arbitrario ***a,*** para tratar de responder la pregunta ¿Es continua $f(x)=S(1+x)^n$ en $x=a$?, partimos de la definición de continuidad de una función dada en el Capítulo II, pág. 36, verificando las condiciones establecidas en ella.

Condición (1).

Sea $x=a$ un número real arbitrariamente escogido. Es claro que la suma $(1+a)$ es un número real, y que por lo tanto la potencia $(1+a)^n$ es un número real, en consecuencia, el producto $S(1+a)^n$ es un número real, así que $f(a)=S(1+a)^n$ existe.

Condición (2).

Aplicando el límite de una función potencial, mostrado en la tabla 1 del Capítulo II, pagina 35; encontramos que

$$\lim_{x \to a} S(1+x)^n = S(1+a)^n$$

que como sabemos, es un número real, lo cual nos lleva a determinar que este límite existe.

Condición 3.

De los resultados encontrados en la condición 1 y 2, podemos concluir que

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} S(1+x)^n = S(1+a)^n = f(a)$$

Satisfaciéndose así esta tercera condición.

Por lo tanto, podemos concluir que la función que modela este derivado financiero es continua en todas partes de su dominio, en particular, en el dominio restringido $[0,1]$.

c. Determinación de la tasa de variación media.

Escojamos dos pares de valores relacionados a partir de este modelo, $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$. Hagamos $h = x_2 - x_1$, con lo que $x_2 = x_1 + h$. Entonces,

$$t_{vm} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{S(1+x_2)^n - S(1+x_1)^n}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{S(1+x_1+h)^n - S(1+x_1)^n}{h}$$

Usando el desarrollo de Newton, en el primer término de la suma en el numerador obtenemos

$$t_{vm} = \frac{S\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x_1)^{n-k}h^k - S(1+x_1)^n}{h}$$

De acuerdo el axioma distributivo D.1, mostrado en el capítulo II página 28, podemos extraer el primer término para obtener:

$$t_{vm} = \frac{S(1+x_1)^n + S\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(1+x_1)^{n-k}h^k - S(1+x_1)^n}{h},$$

Eliminando los términos semejantes y dividiendo entre h obtenemos una expresión para la tasa de variación media

$$t_{vm} = S\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(1+x_1)^{n-k}h^{k-1}$$

d. Tasa de Variación instantánea o derivada.

Esta tasa puede ser calculada por medio del uso de límites o aplicando directamente las reglas de derivación. Aplicando límite obtenemos:

$$\begin{aligned}
t_{vi}(x_1) &= \lim_{h\to 0} S\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(1+x_1)^{n-k}h^{k-1}\\
&= \lim_{h\to 0} S\binom{n}{1}(1+x_1)^{n-1} + \lim_{h\to 0} S\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}(1+x_1)^{n-k}h^{k-1}\\
&= Sn(1+x_1)^{n-1}
\end{aligned}$$

Obtenemos el mismo resultado al aplicar la regla de derivación para funciones compuestas

$$f'(x) = nS(1+x)^{n-1}(1+x)' = nS(1+x)^{n-1}$$

Evaluando en $x = x_1$ obtenemos, $f'(x_1) = nS(1+x_1)^{n-1}$.

e. Obtención de la gráfica.

Haremos uso de los criterios de la primera y segunda derivada descritos en el capítulo II, página 38, y como consecuencia de estos obtendremos los puntos máximos y mínimos relativos.

Previamente hemos encontrado que la derivada de la función modelo está determinada por $f'(x) = nS(1+x)^{n-1}$. A partir de esta, y usando los resultados de la Tabla 2, obtenemos la segunda derivada

$$f''(x) = n(n-1)S(1+x)^{n-2}.$$

Resolviendo la desigualdad $f'(x) > 0$ encontraremos los intervalos de crecimiento de la función, dentro del dominio restringido $[\,0\,,1\,]$

$$\begin{aligned} nS(1+x)^{n-1} > 0 \;&\Leftrightarrow\; (1+x)^{n-1} > 0 \\ &\Leftrightarrow\; (1+x) > 0 \end{aligned}$$

Esta última desigualdad siempre es cierta para cualquier valor que tome la variable x en el dominio considerado, por lo tanto la derivada siempre es positiva en dicho dominio, y por consiguiente la función modelo siempre es creciente en su dominio.

Similar análisis haremos con la segunda derivada.

$$n(n-1)S(1+x)^{n-2} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (1+x)^{n-2} > 0$$
$$\Leftrightarrow \quad (1+x) > 0$$

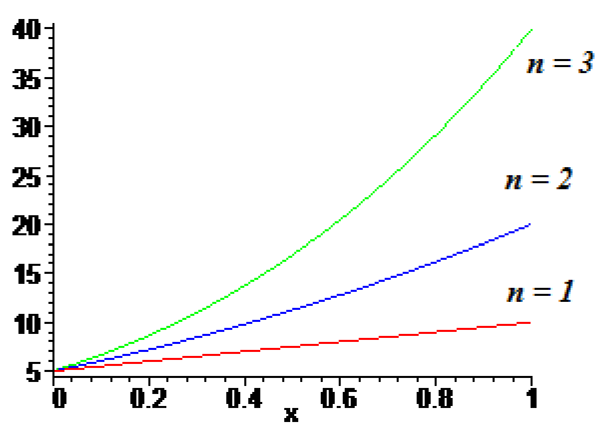
lo cual es cierto para cualquier valor que tome la variable x en el dominio considerado, por lo tanto la segunda derivada siempre es positiva en dicho dominio, y por consiguiente la función modelo siempre es cóncava hacia arriba en su dominio.

Por otra parte, debido a que la función modelo es continua y creciente en el intervalo $[\,0\,,1\,]$, por el teorema del valor extremo, tenemos que la función alcanza su máximo valor y su mínimo valor en los extremos del intervalo. Así pues, tenemos:

- Mínimo absoluto: $f(0) = S(1+0)^n = S$
- Máximo absoluto: $f(1) = S(1+1)^n = 2^n S$

A continuación, en la figura 2 mostramos algunas de las gráficas variando la potencia ***n*.**

Figura 2



Gráfica del modelo Forward para n = 1, 2, 3

2) Considerando *t* como una variable y manteniendo *S* y *r* fijos.

El modelo considerado se puede escribir como:

$$f(x) = Sa^x,$$

comportándose como una función exponencial, donde $y = F$ (Variable dependiente), $x = t$ (Variable Independiente), a es un valor constante con la propiedad de que $1 < a < 2$, y S es un valor constante fijo.

a. Determinación del Dominio y Rango de la función exponencial del contrato forward.

Haremos un estudio sistemático de la expresión Sa^x :

- En primer lugar, la expresión definida como $f(x) = Sa^x$, es una función exponencial cuyo dominio es el conjunto de números reales y el rango es el conjunto de los números reales positivos. La gráfica de f no corta al eje X. Corta al eje Y en $(0, S)$ ya que $a^0 = 1$.
- En segundo lugar, basado en la definición de función exponencial dada en el l Capítulo II, pagina30, tenemos que $f(x) = Sa^x$, está definida para valores de a comprendida en el intervalo $1 < a < 2$ es un número real, definido en el intervalo $(1,2)$. Por lo tanto, $Sa^x > 0$, significa entonces, que la función es creciente en todo su dominio ya que cuando $a > 1$, la función se conoce como una función exponencial creciente.

b. Determinación de la tasa de variación media.

Escojamos dos pares de valores relacionados a partir de este modelo, $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$. Hagamos $h = x_2 - x_1$, con lo que $x_2 = x_1 + h$. Entonces,

$$t_{vm} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{Sa^{x_2} - Sa^{x_1}}{x_2 - x_1}$$
$$= \frac{Sa^{x_1+h} - Sa^{x_1}}{h}$$

Observemos que usando propiedades de las potencias de igual base obtenemos lo siguiente

$$t_{vm} = \frac{Sa^{x_1+h} - Sa^{x_1}}{h}$$
$$= \frac{Sa^{x_1}a^h - Sa^{x_1}}{h} = Sa^{x_1}\,\frac{(a^h - 1)}{h}$$

c. Tasa de Variación instantánea o derivada.

Aplicando directamente las reglas de derivación, mostradas en la Tabla 2 tenemos que

$$f'(x) = SLn(a)a^x$$

Evaluando en $x = x_1$ obtenemos, $f'(x_1) = SLn(a) \cdot a^{x_1}$.

d. Estudio de la primera y segunda derivada.

A continuación, determinaremos los intervalos de crecimiento y/ó decrecimiento de la función exponencial del contrato forward definida como: $f(x) = Sa^x$, según el criterio de la primera derivada, debemos encontrar los intervalos donde $f'(c) > 0$ y $f'(x) < 0$.

Si $f(x) = Sa^x$, entonces la derivada de ***f***, viene definida por:

$$f'(x) = SLn(a)a^x$$

Resolvamos la desigualdad $f'(x) > 0$

$$f'(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad SLn(a)a^x > 0$$

Como $a^x > 0$ para cualquier valor de x y tanto S como $Ln(a)$ son positivos, tenemos que $f'(x) > 0$ para cualquier valor de x, en consecuencia la función f es creciente en todo su dominio.

Para encontrar los intervalos donde la función es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo debemos resolver la desigualdad $f''(x) > 0$

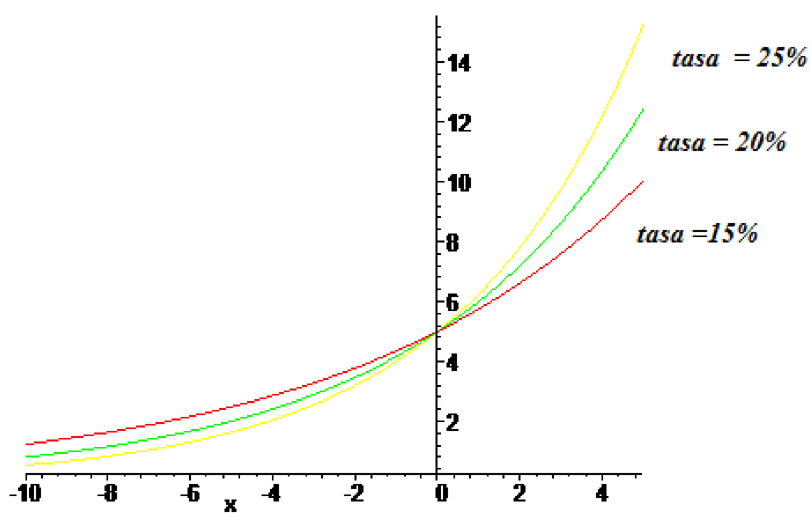
$$f''(x) = SLn^2(a)a^x > 0.$$

Similar al caso anterior, vemos que para cualquier valor de x la exponencial $a^x > 0$, es decir a^x es positiva, y como S y $Ln(a)$ son positivos, entonces, $f''(x) > 0$, con lo que f es cóncava hacia arriba en todo su dominio.

e. Obtención de la gráfica.

La figura 3 ilustra las gráficas de la función $f(x) = Sa^x$ para valores $S = 5$, y tasas correspondientes a 15, 20, y 25%.

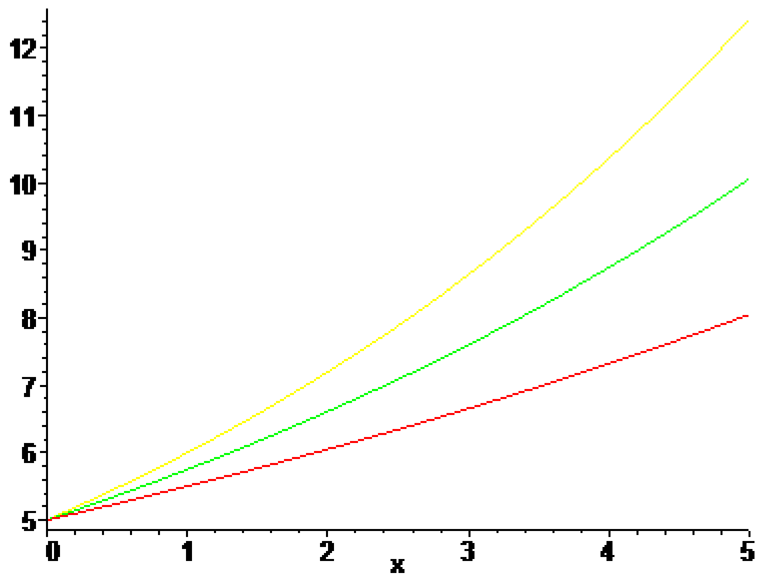
Figura 3



Gráficas correspondientes a tasas de 15,20 y 25%

Como estamos interesados solo en valores positivos, la gráfica anterior queda dibujada en el primer cuadrante, donde tanto los valores de las ordenadas como de las abscisas son positivas, tal como se muestra en la figura 4.

Figura 4



Análisis del modelo de Contrato futuro (Función afín).

Tal como se ha visto, la expresión algebraica $F = P(1+r)$ representa la fórmula para valorar el contrato de futuro cuando el activo subyacente lo constituye el precio de letras del tesoro. Igualmente se procede analizar según las condiciones establecidas en la matriz de análisis.

1. **Considerando la tasa *r* como una variable y manteniendo *P* fijo.**

Hagamos $x = r$ y mantengamos fijo P. Entonces la expresión dada puede ser reescrita como $y = b(1+x)$, denominándola como función afín del contrato de futuro. Donde $y = F$ (variable dependiente), $x = r$ (variable Independiente) y $b = P$ (constante).

a. **Determinación del Dominio y Rango de la función afín del Contrato de futuro.**

Dado que

$$y = b(1+x) = b + bx\,,$$

De acuerdo con el axioma M1 de la multiplicación y el axioma A1 de la suma, mostrados en el capítulo II, pagina 28, los resultados obtenidos del producto bx y la suma $b+bx$ son números reales independientemente de los valores numéricos asignados a la variable x. En consecuencia el dominio de esta función es el conjunto de números reales. En nuestro caso, tenemos un dominio restringido al intervalo $[\,0\,,1\,]$ debido a que la variable independiente representa tasas de interés.

b. **Determinación de la tasa de variación media.**

Escojamos dos pares relacionados con, $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$. Entonces,

$$\begin{aligned} t_{vm} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} &= \frac{b + bx_2 - b - bx_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{b(x_2 - x_1)}{(x_2 - x_1)} = b \end{aligned}$$

Este valor coincide con la pendiente de la recta, la cual resulta ser siempre positivo ya que, analíticamente la pendiente representa el precio del activo subyacente, que este caso es la letra del tesoro y por ser montos expresados en monedas, su valor siempre será positivo.

c. Tasa de Variación instantánea o derivada.

Aplicando las reglas de derivación, mostradas en la Tabla 2 encontramos la derivada de este modelo:

$$f'(x) = (b + bx)' = b$$

Vemos que coincide con la tasa de variación media.

d. Estudio de la primera y segunda derivada

Ya conocemos que la primera derivada tiene el valor constante b y en consecuencia

$$f''(x) = (b)'' = 0,$$

es decir la segunda derivada es cero. Esto nos conduce a concluir que la función es creciente en todo su dominio, y sin concavidad hacia arriba o hacia abajo, es decir, en todo el dominio la función siempre es creciente.

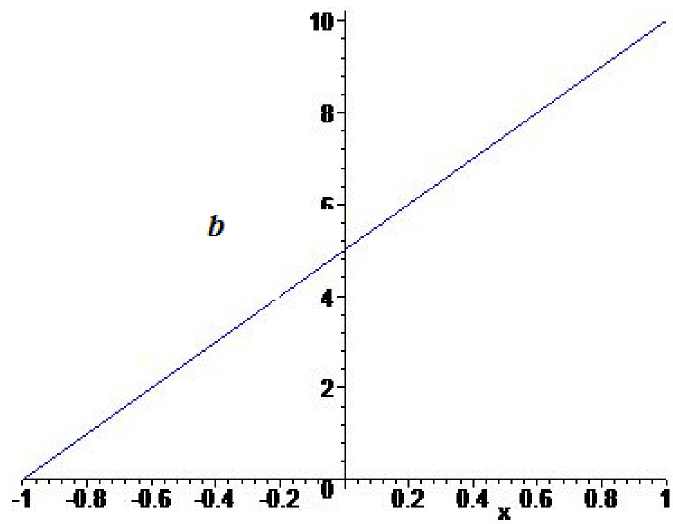
e. Obtención de la gráfica.

Sabemos que la gráfica de una función afín siempre es una línea recta, y que una línea recta está determinada por dos puntos. De modo que para graficar la función lineal del contrato de futuro de la forma $f(x) = b(1 + x)$, encontramos dos puntos distintos (x, y) que satisfagan la ecuación, lo graficamos y los unimos mediante una línea recta.

Haciendo $x = 0$ vemos que $f(0) = b$, de esta forma el punto $(0, b)$ es uno de esos puntos. El próximo lo encontramos resolviendo $f(x) = 0$, entonces tenemos que $b + bx = 0$, y despejando la variable independiente encontramos que $x = -1$. Por tanto, $(-1, 0)$ es un punto sobre la recta.

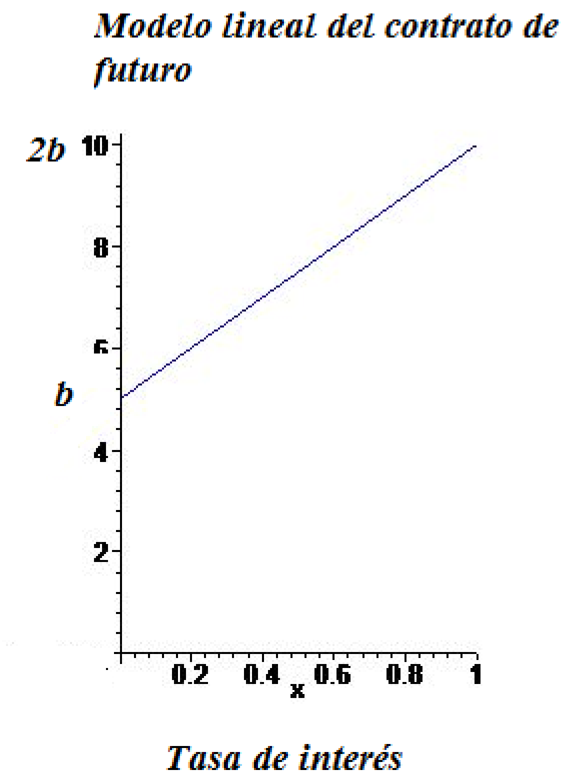
Graficando los puntos $(\mathbf{0},\boldsymbol{b})$ y $(\mathbf{-1},\mathbf{0})$, los cuales están situados sobre los ejes coordenados y uniéndolos mediante una línea recta, obtenemos la gráfica de la función lineal del contrato de futuro.

Figura 7



Como nuestro dominio está restringido al intervalo $[\mathbf{0},\mathbf{1}]$, la gráfica queda dibujada sólo en el primer cuadrante, tal como se muestra en la figura 8.

Figura 8



Finalmente, en la relación lineal entre la tasa de interés y el precio de la letra del tesoro, se observa que el cambio del precio actual del contrato de futuro es directamente proporcional a la tasa de interés aplicada, reflejada en la línea ascendente, que significa que los valores de *y* crecen para valores crecientes de *x*.

2. Considerando *P* como una variable y manteniendo *r* fijo.

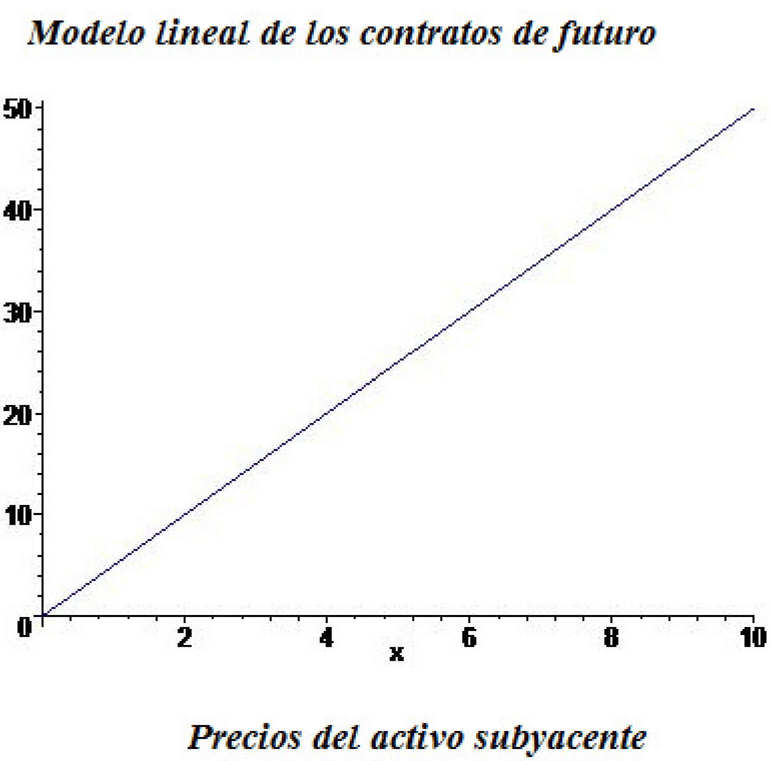
Hagamos $x = P$ y consideremos fijo el valor de r. Entonces la expresión dada se puede reescribir como $f(x) = x(1+a)$, la llamaremos función lineal del contrato de futuro.

Donde $y = F$ (variable dependiente), $x = P$ (variable independiente) y $a = r$ (constante).

Si $f(x) = x(1+b)$, entonces haciendo $c = 1 + a$, podemos simplificar la expresión dada como $f(x) = cx$. Luego, esta es una función lineal, donde su gráfica es una recta de pendiente $m = c$ y pasa por origen en el punto $(0,0)$, asimismo, tiene dominio y rango, el conjunto de todos los números reales. En nuestro caso restringido al intervalo $(0, \infty)$.

Como se analizó en el caso anterior, las tasas de interés oscilan en el intervalo $0 < a < 1$. Por lo tanto, el valor de la pendiente de la función dada es siempre positiva, en consecuencia su gráfica es una línea recta ascendente. En figura 9 ilustra la gráfica de la función.

Figura 9



Análisis del modelo de Contrato Futuro sobre Bonos del Tesoro.

Evidentemente, para valorar los Contratos de Futuro sobre Bonos del Tesoro, se utiliza el modelo de valoración siguiente:

$$\boldsymbol{F = (P - V_{p,i}) \cdot (1 + r)}$$

Donde $\boldsymbol{V_{p,i}}$ es el valor presente de los intereses que serían percibidos por el bono.

Cabe considerar, que estos derivados financieros se caracterizan porque sus periodos de madurez son mayores a un año y proveen de pagos de cupones semestrales, en comparación con las letras del tesoro que se emiten con períodos de madurez inferior a un año.

Se deduce, que la función $\boldsymbol{f(x) = (P - V_{p,i}) \cdot (1 + r)}$, es una expresión muy similar a los modelos presentados anteriormente. Dicho de otro modo, el principal interés en la realización de este análisis es plasmar un aporte de carácter teórico, mediante el estudio de un modelo de valoración determinado, por lo que no se considerará su desarrollo.

Análisis de la Valoración de Contrato de Futuro sobre monedas.

El modelo de valoración de estos derivados viene determinado mediante la expresión:

$$\boldsymbol{F = S \cdot \left(\frac{1 + r_d}{1 + r_f} \right)}$$

Donde $\boldsymbol{r_d}$ es la tasa de interés doméstica, $\boldsymbol{r_f}$ es la tasa de interés extranjera y $\boldsymbol{S}$ es el tipo de cambio.

Observemos que si consideramos como variable independiente el tipo de cambio, $\boldsymbol{S}$, obtenemos una función de tipo lineal donde el cociente

$$\left(\frac{1 + r_d}{1 + r_f}\right)$$

es el factor constante. Similarmente ocurre cuando consideramos a la tasa de interés doméstica, r_d, como variable independiente, en este caso el factor constante es el cociente

$$\frac{S}{1 + r_f}$$

Nos queda entonces considerar el caso en que la tasa de interés extranjera sea la variable independiente. De esta manera la función que representa este modelo queda como sigue

$$y = \frac{c}{1 + x}$$

Donde $\boldsymbol{x}$ representa la tasa de interés extranjera y la constante $\boldsymbol{c}$ representa el factor

$$S(1 + r_d)$$

a. Determinación del Dominio y Rango de la función afín del Contrato de futuro sobre monedas.

Del hecho que, en el modelo considerado, la variable independiente está presente en el denominador de la expresión, es necesario determinar aquellos posibles valores de la variable que anulen el denominador, en consecuencia debemos resolver la ecuación $\mathbf{1} + \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, la cual, obviamente tiene como solución $\boldsymbol{x} = -\mathbf{1}$. Este es el único valor real a ser exceptuado del dominio de la función pues es el que causa la indeterminación en el cociente.

Así pues, el dominio de la función es:

$$Dom(f) = R - \{-1\},$$

Sin embargo, dado que x representa una tasa porcentual, nos queda un dominio restringido al intervalo $[0,1]$.

El rango de esta función es el conjunto de los números reales menos el cero, ya que la división se anula solo cuando el numerador es cero. Ahora, como estamos considerando un dominio restringido, vemos que para $x = 0$, tenemos

$$\frac{c}{1+x} = \frac{c}{1+0} = c \quad ,$$

y si $x = 1$, tenemos

$$\frac{c}{1+x} = \frac{c}{1+1} = \frac{c}{2}$$

En consecuencia, el rango de la función con dominio restringido es el intervalo

$$\left[\frac{c}{2}, c\right]$$

b. Determinación de la tasa de variación media.

Escojamos dos pares relacionados con la función objeto de estudio, $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$. Entonces,

La tasa de variación media queda entonces definida por medio de

$$t_{vm} = \frac{-c}{(1+x_1)(1+x_2)}$$

c. **Tasa de Variación instantánea o derivada.**

Aplicando las técnicas de derivación, mostradas en la Tabla 2, encontramos que

$$f'(x) = (\frac{c}{1+x})' = (c(1+x)^{-1})' = -c(1+x)^{-2} = \frac{-c}{(1+x)^2}$$

Así, la derivada queda como

$$f'(x) = \frac{-c}{(1+x)^2}$$

d. **Estudio de la primera y segunda derivada.**

De la expresión encontrada para la derivada vemos que como la constante c siempre es positiva, y la expresión en el denominador es una suma elevada a una potencia par, queda que $f'(x) < 0$ para todo valor de x en el dominio restringido, por lo tanto la función considerada es siempre decreciente, con un valor máximo en $x = 0$, y un valor mínimo en $x = 1$.

Por otra parte, la segunda derivada la encontramos de esta manera

$$f''(x) = \left(\frac{-c}{(1+x)^2}\right)' = \left(-c(1+x)^{-2}\right)' = 2c(1+x)^{-3}$$

Hemos obtenido que:

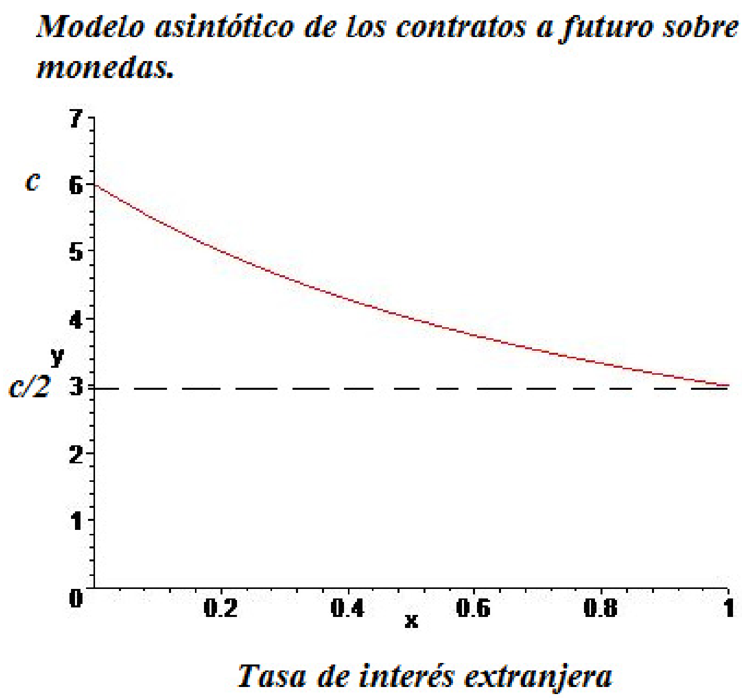
$$f''(x) = \frac{2c}{(1+x)^3}$$

Ahora, observemos que todos los valores de x son positivos en el dominio restringido, y en consecuencia la potencia cúbica $(1+x)^3$ siempre es positiva, por lo tanto el cociente siempre es positivo, ya que el numerador, $2c$, es positivo. Estamos en presencia de una concavidad hacia arriba en todo el dominio restringido considerado.

e. Obtención de la gráfica.

Ya conocemos que los puntos $(\mathbf{0},\boldsymbol{c})$ y $(\mathbf{1},\boldsymbol{c}/\mathbf{2})$ forman parte del gráfico de esta función, luego, la gráfica es una curva decreciente con concavidad hacia arriba. Véase el gráfico siguiente.

Figura 10



CAPITULO V

ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE LOS RESULTADOS

A continuación presentamos el análisis de la información obtenida mediante la estudio de los fundamentos matemáticos de los derivados financieros, mostrándolo por cada uno de los modelos de valoración de los derivados financieros.

Valor de una opción de compra (call)

El estudio de los fundamentos matemáticos para el derivado Opción fue considerado en dos casos. En el primero de ellos referido al valor de la opción, indicado como $\boldsymbol{C_T}$, como la variable dependiente, y al precio de mercado de la opción, $\boldsymbol{S_T}$, como variable independiente, manteniendo constante el precio de ejercicio de la opción, $\boldsymbol{V_E}$.

En este caso, la diferencia entre el valor del mercado y el precio de ejercicio de la opción siempre es positivo, y nulo cuando el precio del mercado es meno o igual al precio de ejercicio de la opción.

En el caso de que el valor del mercado no exceda al precio de ejercicio de la opción, la tasa de variación media y la tasa de variación instantánea del valor de la opción con respecto a la diferencia entre ambos, coinciden en un índice igual a 0, lo cual indica que no hay cambio del valor de la opción. Por el contrario, si el valor del mercado excede el precio de ejercicio de la opción, la tasa de variación media y la tasa de variación instantánea coinciden en un índice igual a 1, lo cual indica que el valor de la opción crece en igual proporción a la diferencia entre estos, esto es, en la medida que excede el valor del mercado al precio de ejercicio de la opción en esa medida crece el valor de la opción.

Valor de un contrato Forward.

Para el estudio de los fundamentos matemáticos de los contratos Forward se consideraron dos casos, en el primero de ellos la variable dependiente fue el valor del contrato Forward, denotado con $\boldsymbol{F}$, y la variable independiente la tasa de interés libre de riesgo, denotada con $\boldsymbol{r}$**,** manteniendo fijo el período en años, $\boldsymbol{t}$ y el valor del activo subyacente, $\boldsymbol{S}$.

Para este caso, los resultados muestran que los valores obtenidos para el valor del contrato oscilan entre el valor del activo subyacente y un múltiplo par del mismo, para valores de la tasa que oscilan entre cero y cien por ciento, en lenguaje simbólico, $\boldsymbol{F}$ puede tomar valores entre $\boldsymbol{S}$ y $\boldsymbol{2^n S}$.

Del estudio de este caso encontramos una expresión que nos capacita para determinar la tasa de variación media y la tasa de variación instantánea:

- $\boldsymbol{T_{vm} = S\sum_{k=1}^{t}\binom{t}{k}(1+r_1)^{n-k}(r_2-r_1)^{k-1}}$ (Tasa de variación media)

- $\boldsymbol{T_{v,i} = tS(1+r_1)^{t-1}}$ (Tasa de variación instantánea)

La tasa de variación instantánea del valor del contrato con respecto a la tasa de interés, medida en cualquier valor de la tasa de interés, indica que el valor del contrato crece proporcionalmente a esa tasa de variación. Por otra parte, el estudio de la segunda derivada indica que este crecimiento es acelerado.

En el segundo de los casos, la variable independiente considerada fue el tiempo, manteniendo fijo los otros parámetros, es decir, la tasa de interés y el valor del activo subyacente. Aquí, el modelo toma la forma exponencial, con una base positiva mayor que 1.

Para este modelo encontramos también expresiones para la tasa de variación media e instantánea:

- $\boldsymbol{T_{vm} = S(1+r)^{t_1}\frac{((1+r)^{(t_2-t_1)}-1)}{t_2-t_1}}$ (Tasa de variación media)

- $\boldsymbol{T_{vi} = SLn(1+r)(1+r)^{t}}$ (Tasa de variación instantánea)

El estudio de la tasa de variación instantánea también se comporta en forma exponencial, lo cual indica que el valor del contrato siempre es creciente, puesto que la tasa mencionada siempre es positiva. El estudio de la segunda derivada indica que este el crecimiento del valor del contrato es acelerado.

Valor de un contrato a Futuro sobre Letras del Tesoro y Bonos del Tesoro.

El modelo considerado para los Contratos a Futuro fue estudiado con el valor del contrato como la variable dependiente, denotándola con ***F,*** y la tasa de interés como variable independiente, denotándola con ***r,*** manteniendo fijo el precio actual de la Letra del Tesoro o del Bono del Tesoro, denotada con ***P***, y asignando en forma constante el valor presente de los intereses que serán percibidos por el bono, en el caso de Bonos del Tesoro, denotándolo con $\boldsymbol{V_{p,i}}$.

Con este preámbulo, los modelos considerados para los contratos a futuro sobre Letras del Tesoro y Bonos del Tesoro fueron, respectivamente, los siguientes:

- $\boldsymbol{F = P(1 + r)}$

- $\boldsymbol{F = (P - V_{p,i}) \cdot (1 + r)}$

El estudio fue realizado en forma general para los contratos sobre Letras del Tesoro, y sus resultados fueron trasladados a los contratos sobre Bonos del Tesoro, en vista de que podemos, sin pérdida de generalidad, suponer que el valor del activo subyacente es el mismo, salvo una diferencia.

Para efectos del estudio, se consideraron dos casos, en cualquiera de ellos la variable dependiente fue el valor del contrato, en el primero la variable independiente fue la tasa de interés, manteniendo fijo el precio del activo, y en el segundo tomamos el precio del activo como variable independiente y se mantuvo fija la tasa de interés. En ambos casos considerados, el modelo fue clasificado como afín o lineal.

En el primer caso, restringimos la tasa de interés a valores comprendidos entre cero y cien por ciento. Obteniendo un rango para los valores el contrato que oscila entre el valor de la letra y el doble de este valor, es decir, entre ***P*** y ***2P.*** También, la tasa de variación media y la tasa de variación instantánea coincidieron en el valor ***P***, es decir, el precio de la Letra del Tesoro. Esto nos indica que el valor del contrato crece a medida que crece la tasa de interés, y que para cualquier cambio que ocurra en la tasa el cambio que experimenta el valor del contrato es proporcional al valor de ***P***.

En el segundo de los casos, suponiendo fija una tasa de interés, y se permitió cualquier valor positivo para la Letra del Tesoro. La tasa de variación media y la instantánea coinciden en el valor del cien por ciento más el valor de la tasa de interés. Esto indica que el valor del contrato varía en forma creciente con respecto al precio de la Letra del Tesoro, y proporcionalmente a la tasa de interés más el cien por ciento.

Valor de un contrato a Futuro sobre Monedas.

El modelo considerado para los contratos a futuro sobre Monedas fue estudiado teniendo en cuenta al valor del contrato como variable dependiente, y a la tasa de interés extranjera como variable independiente, manteniendo constante a la tasa de interés doméstica y al tipo de cambio.

El modelo adquirió una forma asintótica, con valores de la tasa de interés extranjera oscilando entre cero y cien por ciento, para obtener un rango de valores del contrato entre el cincuenta por ciento del tipo de cambio más el interés del mismo aplicada la tasa de cambio doméstica, y el cien por ciento de este valor. El máximo valor ocurre si la tasa de interés extranjera es de cero por ciento y el mínimo de estos valores ocurren si la tasa es del cien por ciento.

El estudio de las tasas de variación media e instantánea mostraron las siguientes expresiones:

- $$T_{vm} = \frac{-P(1+r_d)}{(1+r_{f_1})(1+r_{f_2})}$$ (Tasa de variación media)

- $$T_{vi} = \frac{-P(1+r_d)}{(1+r_f)^2}$$ (Tasa de variación instantánea)

El cálculo de la tasa de variación instantánea nos muestra que el valor del contrato a futuro sobre monedas decrece en forma asintótica. El valor positivo, en todos los valores de la tasa de interés extranjero, establece que este decrecimiento es acelerado con respecto a los cambios de la tasa de interés extranjero.

CAPITULO V

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

CONCLUSIONES

En atención a lo anteriormente planteado, referente al análisis de los fundamentos matemáticos realizado a las opciones, contratos forward y contrato de futuro, arrojó las siguientes conclusiones:

- En primer lugar, podemos decir que se entiende por "derivado" un instrumento financiero cuyo valor depende de otro, (denominado "subyacente") que puede ser: una acción de una empresa, un índice bursátil, divisas o materias primas. Los derivados más importantes son tres: las opciones, los forwards y los futuros.

- Uno de los resultados más concluyentes de este trabajo se basa en el estudio de los fundamentos matemáticos para las opciones financieras, este modelo matemático se comporta como una función afín, donde a consecuencia de esto la diferencia entre el valor del mercado y el precio de ejercicio de la opción siempre es positivo, y nulo cuando el precio del mercado iguala el precio del ejercicio de la opción. Por consiguiente, un inversionista tras adquirir una opción de compra, obtendrá una ganancia cuando el precio de mercado del activo subyacente sea mayor que el precio de ejercicio. Es decir, $(S_T > V_E)$, Cuando el precio de mercado del activo subyacente sea igual al precio vigente en el mercado. Es decir, $(\boldsymbol{S_T} = \boldsymbol{V_E})$, sencillamente, el inversionista no ejerce la opción a la fecha de expiración.

- Otro resultado concluyente parte del estudio de los fundamentos matemáticos de los contratos Forward, a través del análisis realizado tanto a la función Polinomial como a la función exponencial, el mismo representa el derivado financiero que ofrece mayor rentabilidad puesto que, el estudio realizado sobre la tasa de variación instantánea se determino que se comporta de forma exponencial, lo cual indica que el valor del contrato siempre es creciente, puesto que la tasa mencionada siempre es positiva. El estudio de la segunda derivada demostró que este crecimiento del valor del contrato forward siempre es acelerado.
- Con respecto, al estudio realizado para los contratos de futuro sobre Letras del Tesoro, y Bonos del Tesoro, en ambos casos, el modelo fue clasificado como afín o lineal, lo que permite deducir que el valor del contrato varía en forma creciente con respecto al precio de la Letra del Tesoro o Bonos del Tesoro, directamente proporcional, con respecto a la variación que experimente la tasa de interés.
- Por último, el estudio realizado para los contratos a futuro sobre Monedas, que la tasa de variación instantánea muestra que el valor del contrato a futuro sobre monedas decrece en forma asintótica. El valor positivo, en todos los valores de la tasa de interés extranjero, establece que este decrecimiento es acelerado con respecto a los cambios de la tasa de interés extranjero.

RECOMENDACIONES

Basado en las conclusiones a que se ha llegado en el presente trabajo de investigación, a continuación se expone someramente que temas de los analizados se consideran que deben ser motivo de posterior análisis y reflexión, y que vías de investigación en temas relacionados con la tesis realizada o en temas afines puedan ser desarrollados:

- Respecto a la metodología propuesta para el estudio de los derivados financieros, creemos que es necesario realizar un exhaustivo análisis empírico, a través de otros fundamentos matemáticos tales como, el estudio probabilístico que permita obtener una base de datos, de allí extrapolar elementos de juicio sobre los cuales se determine el derivado financiero más adecuado. Además, la valoración de estos derivados a través de métodos estadísticos debería facilitar, por una parte, la disminución del riesgo e incertidumbre en el uso de estos instrumentos financieros.

- Un asunto complicado en la presente tesis, fue el estudio de todas las variables que afectan a las opciones financieras, que debería ser abordada con el fin de analizar este instrumento financiero tomando en cuenta todas las variables que afecta su valoración y de esta manera explicar mejor su comportamiento y funcionamiento. Por tal motivo, dada las características de la información que deberá manejarse, es necesario la definición de funciones con varias variables, así como el estudio de ecuaciones diferenciales parciales, podría proporcionar una nueva perspectiva a un tema que, dista mucho de estar determinado actualmente.

- Este trabajo ha sido más que un planteamiento inicial para que estudiantes y profesores profundicen en el análisis de los modelos de valoración de los derivados financieros en especial énfasis en el modelo de Black-Scholes-Merton, debido a que está basado en una teoría estadístico- matemática muy avanzada, llamada “Cálculo estocástico aplicado al campo financiero actuarial”. Además, el modelo está expresado mediante el movimiento Browniano y ecuaciones diferenciales estocásticas, lo que imposibilito su análisis en este trabajo. En consecuencia, la introducción de este ha sido más que un planteamiento inicial para que interesados en el tema continúe con su posterior estudio y profundicen en la investigación de este instrumento de valoración y así obtener conocimiento de un amplio campo de los derivados financieros.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Arya, J. y Lardner R. (2002). Matemáticas aplicadas a la administración y a la economía. Editorial PEARSON. Cuarta Edición. México.
- Brealey R, Myers S., Marcus A. y García M. (1996). Fundamentos de Finanzas Corporativas. McGraw-Hill. Primera Edición. Madrid.
- Cázares, L.(1990). Técnicas actuales de investigación documental. Editorial Trillas. México.
- Fernández P. y Martínez E.(1997).Derivados Financieros. Ediciones Folio, S.A. Barcelona.
- Granda, O. (2005). Derivados Financieros. [Documento en Línea].Disponible: http://www.derivadosfinancieros.com. [consulta: 2008, Noviembre 2008].
- Garay, U y González, M. (2007). Fundamentos de Finanzas: Con aplicaciones al mercado venezolano. Ediciones IESA. 2da. Edición. Caracas.
- Giménez, R.(1998). Matemática V. Ediciones Vega. Caracas.
- Goodman, A. (1996). Álgebra y Trigonometría con geometría analítica. Ediciones PRENTICE HALL. México.
- Leithold, L.(1998). El Cálculo. Séptima Edición. Editorial HARLA. México.
- Sáenz, J. (2007). Calculo Diferencial para Administración y Economía. Segunda Edición. Editorial HIPOTENUSA. Barquisimeto.
- Sáenz, J. (1993). Calculo Integral para Administración y Economía y Ciencias Sociales. Segunda Edición. Editorial HIPOTENUSA. Barquisimeto.
- Sáenz, J. (2005). Calculo Diferencial para Ciencias e Ingeniería. Segunda Edición. Editorial HIPOTENUSA. Barquisimeto.
- UPEL (2006). Manual de Trabajo de Grado de Especialización y Maestría y Tesis Doctorales. FEDUPEL. Caracas.
- Van Horne, J (1997). Administración Financiera.
- Vélez, I. (2003). Decisiones Empresariales bajo riesgo e incertidumbre. Editorial Norma. Colombia.

ANEXOS

ANEXO A

Dennis Uvencio Heredia Rodriguez. V-9.544.888

Urb. Refugio Santa Barbará-Reten Abajo - Tamaca

0251-730645-0426502742. asocimag@hotmail.com

ESTUDIOS REALIZADOS

- Estudios Secundaria: Liceo Mario Briceño Iragorry. Título Obtenido: Bachiller en Ciencias. Año: 1982.
- **Estudios Universitarios:** Actualmente cursando el último año de la Carrera de Licenciatura en Educación Mención Desarrollo Cultura de la UNIVERSIDAD NACIONAL EXPERIMENTAL SIMÓN RODRÍGUEZ UNESR.
- **Estudios Universitarios:** culmine el X Semestre de la Carrera Administración Comercial en el Decanato de Administración y Contaduría de la UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL LISANDRO ALVARADO UCLA.

EXPERIENCIA LABORAL

- **Industrias Pampero, C.A. Cargo:** Promotor. **Periodo:** 16/11/86 hasta 12/03/ 93
- **United Distillers de Venezuela**. **Cargo:** Vendedor. **Periodo:** 16/05/ 93 hasta 31 /01/ 95
- **Biblioteca Pública Mahatma Gandhi**. **Cargo:** Coordinador General. **Periodo:** 07/97 hasta actual.

CURSOS REALIZADOS

- **Curso de Básico de Ventas y Marchandising .** United Distillers (8/10/94). 24 horas.
- **Taller de Desarrollo Personal y Técnicas Modernas de Venta.** Parque Metropolitano del este. (25/07/ 95). 20 horas.
- **Asistente Técnico en Administración Tributaria**. Instituto Universitario de Tecnología Juan Pérez Alfonzo (10 /10/2003) 180 horas.

HABILIDADES Y DESTREZAS

- Amplio Conocimientos de Windows y excelente dominio de Microsoft Office XP Profesional.
- Atención al Cliente
- Control de las actividades técnicas, contables y administrativas de la Biblioteca.
- Coordinar y evaluar los servicios, para garantizarle a los usuarios la satisfacción de sus requerimientos de una manera eficaz y eficiente.

REFERENCIAS PERSONALES

- José Rafael Vergara Landaeta. 0424-5211904
- Licda. Maritza Rodriguez. 0416-3598721