1 Antecedentes del método de elementos finitos

1.1 Introducción

En ingeniería cuando se quiere encontrar una descripción cuantitativa de un fenómeno físico lo primero que se hace es plantear un conjunto de ecuaciones de gobierno, que en general consiste en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias o a derivadas parciales, en una dada región o dominio y las condiciones de contorno e iniciales.

El segundo paso es resolver ese sistema para un dado conjunto de datos. En este punto es donde aparecen los inconvenientes, pues solo es posible resolverlas exactamente (analíticamente) si las ecuaciones son muy simples y estan definidas en un dominio de geometría simple. Asi y todo si el número de variables dependientes aumenta, suelen encontrarse deficultades para resolver el sistema.

Para salvar este problema y utilizar una de las mas potentes herramientas (la computadora) se debe replantear el problema de una manera puramente algebraica. Para llevar a cabo esto puede utilizarse alguna de las formas de *discretización* del problema continuo definido por las ecuaciones diferenciales. En esta discretización el conjunto infinito de números que representa a la/s función/es solución desconocida/s es reemplazado por un número finito de parámetros desconocidos. En este proceso se requiere alguna forma de aproximación.

Una de las formas de discretización posible, y una de las mas simples, es el proceso de diferencias finitas. En lo que sigue veremos varias aproximaciones por funciones de prueba que caen dentro de la clasificación general que se conoce como *método de elementos finitos*.

Para poder avanzar, vamos a concentrar la atención en algunos problemas particulares simples. Estos problemas servirán para desarrollar ejemplos y para introducir los principios generales de aproximación, de modo tal que luego puedan aplicarlos a sus propios casos especiales sea que generen sus propios programas o que utilicen un programa desarrollado con esta metodología.

Problema: flujo de calor en un dominio bidimensional

Planteo: utilizaremos la notación q_x para el calor que fluye en la dirección del eje x en la unidad de tiempo y q_y cuando ocurre en la dirección del eje y. La diferencia D entre el calor que entra y el que sale de un elemento de tamaño $dx\ dy$ viene representado por la expresión:

$$D = \left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx - q_x \right) dy + \left(q_y + \frac{\partial q_y}{\partial x} dy - q_y \right) dx \tag{1}$$

Por conservación de la energía, D debe ser igual a la suma del calor generado en el elemento y al calor liberado en el mismo en la unidad de tiempo. Para el calor generado utilizaremos la notación $Q\ dx\ dy$ donde Q podrá variar con la posición (coordenada (x, y) del punto dentro del dominio) y del tiempo, y para el calor liberado $-\rho\ c\ (\partial\phi\ /\ \partial t)\, dx\ dy$ donde c es el calor específico, ρ la densidad y $\phi(x, y, t)$ es la distribución de temperatura en el tiempo t. El requerimiento de igualdad nos lleva a la relación diferencial, que debe satisfacerse en todo el dominio:

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial x} - Q + \rho c \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \tag{2}$$

La ley física que gobierna el flujo de calor en un medio isotrópico, puede escribirse para la componente de flujo en una dirección cualquiera n

$$q_n = -k \frac{\partial \phi}{\partial n} \tag{3}$$

Donde k es una propiedad conocida del medio, conductividad térmica. Para las direcciones x e y específicamente:

$$\begin{aligned} q_x &= -k \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ q_y &= -k \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{aligned} \tag{4}$$

Las relaciones (2) y (4) definen un sistema de ecuaciones diferenciales que gobiernan el problema y requieren la solución para las tres variables dependientes q_x, q_y y ϕ. Tal solución requiere se especifiquen

las condiciones iniciales (por ejemplo la distribución de temperatura) en todo el dominio Ω para $t = t_o$ y las condiciones de contorno (o borde) en el borde Γ del dominio.

Tipicamente podremos encontrarnos con dos clases de condiciones de borde involucradas en el problema.

La primer clase de condición aplicable a la parte Γ_ϕ del contorno donde se especifican los valores $\overline{\phi}(x, y, t)$ de la temperatura. A este tipo de condición se la suele denominar condición de Dirichlet o condición esencial. Podemos escribirla como:

$$\phi - \overline{\phi} = 0 \quad \text{en } \Gamma_\phi \tag{5}$$

La segunda clase de condición de borde que se aplica a la parte Γ_q , que es lo que resta del borde del dominio, donde se especifica el valor del flujo de calor referido a la dirección n normal al borde $\overline{q}(x, y, t)$. A este tipo de condición se la suele denominar condición de Newman o condición natural. Se la puede escribir como:

$$q_n - \overline{q} = 0 \tag{6}$$

El problema esta completamente definido por las ecuaciones (2), (4), (5) y (6) y los números que representan la distribución de ϕ, q_x y q_y para todo tiempo t pueden ser, en principio, obtenidas resolviendo este conjunto de ecuaciones.

Cabe remarcar que todo punto del contorno debe tener especificada alguna condición, lo cual lleva a que en todos los casos se cumpla que:

$$\Gamma = \Gamma_\phi + \Gamma_q \tag{7}$$

La ecuación (2) puede expresarse de una forma alternativa utilizando (4) para eliminar como incógnitas a q_x y q_y. Como consecuencia obtenemos la siguiente ecuación diferencial de mayor orden:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial \phi}{\partial y}\right) + Q - \rho c\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \tag{8}$$

Esta ecuación diferencial también requiere que se especifiquen las condiciones iniciales y de contorno. Esta ecuación representa a un problema definido en el dominio del tiempo y del espacio. Si suponemos que para nuestro problema se esta en estado estable (o estacionario) entonces $\partial\ /\partial t = 0$ y la ecuación de gobierno se simplifica a:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial \phi}{\partial y}\right) + Q = 0 \tag{9}$$

Esta última solo requiere que se especifiquen las condiciones de contorno como en (5) y (6).

Principalmente vamos a trabajar con esta última forma de definir el problema, por ser más simple y porque varias situaciones físicas tienen expresiones matemáticas similares (solo cambian el significado de las variables y de los coheficientes que caracterizan al sistema). Otras aplicaciones son por ejemplo flujo irrotacional de un fluido ideal ($k = 1$ y $Q = 0$), flujo de un fluido a través de un medio poroso ($Q = 0$ y $k =$ permeabilidad del medio poroso), entre otras.

Primeramente para un problema unidimensional, las expresiones se reducen a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) + Q &= 0 \\ \phi - \overline{\phi} &= 0 \\ q_n - \overline{q} &= 0 \end{aligned} \tag{10}$$

En este caso el dominio comprende $\Omega = \{0 \leq x \leq L_x\}$ y el contorno $\Gamma = \{x = 0, x = L_x\}$. Esta ecuación diferencial ordinaria puede resolverse analiticamente, y servirá para comparar con las soluciones aproximadas que obtendremos al aplicar un procedimiento discretio para resolverla.

1.2 Discretización

Las soluciones numéricas a ecuaciones diferenciales ordinarias o a derivadas parciales por aplicación de procedimientos numéricos llevaran implícitos los conceptos de aproximación y de discretización.

El concepto de *aproximación* estará involucrado porque se seleccionará una familia de funciones para aproximar a la función solución (analítica) con un procedimiento que guarda cierta similitud una combinación lineal.

La selección del conjunto de funciones de aproximación es un punto clave para la solución de ecuaciones diferenciales utilizando métodos numéricos. Es el primer paso para replantear el problema mátemático a resolver, con el fin de obtener una forma puramente algebraica que solo involucre operaciones matemáticas básicas.

Comenzaremos por elegir un conjunto de funciones de manera tal que la función de aproximación satisfaga las condiciones de borde exactamente. Si podemos encontrar una función ψ que satisfaga las condiciones de borde en Γ, y un conjunto de funciones de prueba N_m ($m = 1..M$, con M finito) elegidas de manera tal que $N_m = 0$ en Γ para todos los m. El conjunto de funciones de prueba N_m tiene la finalidad de ajustar a la solución en el dominio. Entonces para todos los puntos del dominio Ω la función solución puede aproximarse por $\hat{\phi}$:

$$\phi \simeq \hat{\phi} = \psi + \sum_{m=1}^{M} a_m N_m \tag{11}$$

a_m es un conjunto de parámetros que hay que calcular para obtener un buen ajuste. Las funciones de prueba también son conocidas como funciones de base o funciones de forma.

La condición para elegir a este conjunto de ecuaciones es que si se aumenta el número M se tenga la garantía de obtener una mejor solución aproximada, con lo cual la función $\hat{\phi}$ convergerá a ϕ. Una condición para que se logre la convergencia es que el conjunto de funciones elegido tenga la posibilidad de representar cualquier variación de la función ϕ en el dominio Ω. Esto es conocido como *requerimiento de completitud*.

El concepto de *discretización* aparece cuando se reemplazan los infinitos puntos donde se necesita conocer la función incógnita por un número finito de parámetros desconocidos. En general este conjunto de parámetros estará asociado al conjunto de funciones que utilizaremos para aproximar a la función solución que estamos buscando, en el caso (11) serán los a_m.

Solo resta establecer una metodología (o procedimiento) que nos permita determinar los valores de los parámetros. Con este fin se presenta, luego del ejemplo, el método de aproximación por residuos ponderados.

EJEMPLO 1:

Este ejemplo tiene la finalidad de encontrar una función aproximante paramétrica como la (11) a una función dada. Supongamos que tenemos la función:

$$\phi = -(0.1 + x/3) * sin(1.7 * \pi * x)$$

Se propone la siguiente familia, o conjunto de funciones, para realizar el ajuste:

$$\begin{aligned}
\psi &= 0.3505740306 * x \\
&= [-(0.1 + 1/3) * sin(1.7 * \pi * 1)]\, x \\
N_1 &= x\,(1 - x) \\
N_2 &= x^2\,(1 - x) \\
\hat{\phi} &= \psi + a_1\ N_1 + a_2\ N_2
\end{aligned}$$

Como debemos calcular dos parámetros, pondremos las siguientes condiciones: $\hat{\phi}(1/3) = \phi(1/3)$ y $\hat{\phi}(2/3) = \phi(2/3)$, lo cual permitirá plantear un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, resolverlo y obtener el valor de los parámetros a_1 y a_2.

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{9} & \frac{2}{27} \\ \frac{2}{9} & \frac{4}{27} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.2064978 - 0.350574 * 1/3 \\ +0.1310596 - 0.350574 * 2/3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.44824857 \\ 2.97944192 \end{bmatrix}$$

$$\overset{\wedge}{\phi} = 0.3505740306 * x + -2.44824857x\,(1-x) + 2.97944192x^2\,(1-x)$$

1.3 Aproximación por residuos ponderados

Lo primero que se debe definir es el error o residuo de la aproximación (11), al que denominaremos R_Ω:

$$R_\Omega = \phi - \overset{\wedge}{\phi} \tag{12}$$

Aqui debemos observar que R_Ω también dependerá de la posición x dentro del dominio Ω, (dado que ϕ y $\overset{\wedge}{\phi}$ dependen de x). Lo que se quiere hacer es disminuir este residuo de una manera general en todo el dominio Ω. Para ello vamos a requerir que un conjunto apropiado de integrales del error sobre el dominio Ω pesandas (ponderadas) de diferentes maneras, sea cero. Matemáticamente:

$$\int_\Omega W_l\ R_\Omega\ d\Omega = \int_\Omega W_l \left(\phi - \overset{\wedge}{\phi}\right) d\Omega = 0 \quad \text{con } l = 1..M \tag{13}$$

W_l es un conjunto de funciones de peso independientes.

Para que se cumpla la condición general de convergencia $\overset{\wedge}{\phi} \to \phi$ cuando $M \to \infty$, consiste en exigir que (13) se satisfaga para toda W_l cuando $M \to \infty$. Esto será cierto solo si $R_\Omega \to 0$ en todos los puntos del dominio (que es lo que se desea). Cuando se reemplaza (11) en (13) se obtiene un sistema de ecuaciones algebraicas lineal. Resolviendo el sistema de ecuaciones algebraicas obtenemos los valores de los parámetros a_m que se estaban buscando. Concretamente:

$$\begin{aligned} \int_\Omega W_l \left(\phi - \overset{\wedge}{\phi}\right) d\Omega &= \int_\Omega W_l \left[\phi - \psi - \sum_{m=1}^{M} a_m N_m\right] d\Omega \\ &= \int_\Omega W_l \left[\phi - \psi\right] d\Omega - \int_\Omega W_l \left[\sum_{m=1}^{M} a_m N_m\right] d\Omega \\ &= \int_\Omega W_l \left[\phi - \psi\right] d\Omega - \sum_{m=1}^{M} a_m \int_\Omega W_l N_m d\Omega \\ &= \mathbf{f} - \mathbf{K}\mathbf{a} \end{aligned} \tag{14}$$

Donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^T &= (a_1, a_2, ..., a_M) \\ K_{lm} &= \int_\Omega W_l\ N_m\ d\Omega \qquad 1 \le l \le M \ \text{ y } 1 \le m \le M \\ f_l &= \int_\Omega W_l\ (\phi - \psi)\ d\Omega \quad 1 \le l\ \le M \end{aligned} \tag{15}$$

l sistema a resolver, escrito de la manera convencional es:

$$\mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{f} \tag{16}$$

Donde **K** es la matriz de coeficientes, **a** el vector de incógnitas y **f** el vector de términos independientes.

Para poder resolver las integrales, previamente debemos elegir al conjunto de funciones de peso W_l. Varios conjuntos de funciones de peso pueden ser utilizadas, cada uno conduce a un método de aproximación por residuos ponderados diferente. A continuación se enumeran algunos de los más utilizados, para problemas unidimensionales.

1.3.1 Colocación por puntos

Aqui el conjunto de funciones de peso W_l es:

$$W_l = \delta\left(x - x_l\right) \tag{17}$$

donde $\delta\left(x - x_l\right)$ es la función Delta de Dirac, que tiene las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} \delta\left(x - x_l\right) &= 0 \ \text{ si } x \neq x_l \\ \delta\left(x - x_l\right) &= \infty \ \text{ si } x = x_l \\ \int_{x<x_l}^{x>x_l} G(x)\ \delta\left(x - x_l\right)\ dx &= G(x_l) \end{aligned} \tag{18}$$

Lo cual implica que $R_\Omega = 0$ en un cierto número de puntos x_l. Las componentes de la matriz **K** y del vector **f** que se obtienen al reemplazar (17) en (13) obteniendo las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} K_{lm} &= N_m(x_l) \\ f_l &= \left[\phi - \psi\right]_{x=x_l} \end{aligned} \tag{19}$$

$N_m(x_l)$:es la función de prueba valuada en x_l
$\left[\phi - \psi\right]_{x=x_l}$:es la diferencia de las funciones valuada en x_l

1.3.2 Colocación por subdominios

En este caso, el conjunto de funciones de peso W_l se elige para que satisfaga las siguientes condiciones:

$$W_l = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } \ x_l < x < x_{l+1} \\ 0 & \text{si } \ x < x_l \text{ o } x > x_{l+1} \end{array} \right\} \tag{20}$$

Por propiedad de las integrales la (13) simplemente requiere que la suma de la integral del error sobre M subdominios que componen a Ω sea cero. Reemplazando la función de peso en (13) se obtienen las siguientes expresiones para las componentes de la matriz **K** y del vector **f** son en este caso:

$$\begin{aligned} K_{lm} &= \int_{x_l}^{x_{l+1}} N_m\ dx \\ f_l &= \int_{x_l}^{x_{l+1}} (\phi - \psi)\ dx \end{aligned} \tag{21}$$

1.3.3 Mínimos cuadrados

En general el método de mínimos cuadrados no es presentado como un método de residuos ponderados, pero puede mostrarse que pertenece a esta clase de métodos. La aproximación general por mínimos cuadrados es tratar de minimizar la suma de los cuadrados del residuo (o error) en cada punto del dominio Ω. En este caso se requiere la minimización de:

$$I\left(a_1, a_2, ..., a_M\right) = \int_{\Omega} \left(\phi - \hat{\phi}\right)^2 d\Omega \tag{22}$$

tal que, se plantearemos que

$$\frac{\partial I}{\partial a_l} = 0 \text{ para } \; l = 1, 2, ...M \tag{23}$$

Llevando a cabo el proceso de derivación, y teniendo en cuenta (11) se obtiene:

$$\frac{\partial I}{\partial a_l} = N_l \tag{24}$$

Puede mostrarse que I es un mínimo cuando:

$$\int_{\Omega} \left(\phi - \hat{\phi}\right) N_l \; d\Omega = 0 \tag{25}$$

Esta última expresión es de la misma forma que (13) si se considera que $W_l = N_l$. Las expresiones para las componentes:

$$\begin{aligned} K_{lm} &= \int_{\Omega} N_l \; N_m \; d\Omega \\ f_l &= \int_{\Omega} N_l \; \left(\phi - \psi\right) \; d\Omega \end{aligned} \tag{26}$$

1.3.4 Galerkin

Este es sin dudas es el mas popular de los métodos de residuos ponderados. En este caso se eligen como funciones de peso a las mismas funciones que se utilizan como funciones de forma, es decir $W_l = N_l$. Haciendo el reemplazo en (13) las componentes de la matriz $\mathbf{K}$ y del vector $\mathbf{f}$ son:

$$\begin{aligned} K_{lm} &= \int_{\Omega} N_l \; N_m \; d\Omega \\ f_l &= \int_{\Omega} N_l \; \left(\phi - \psi\right) \; d\Omega \end{aligned} \tag{27}$$

Observaciones:

♣ Este método tiene la ventaja computacional de que la matriz $\mathbf{K}$ resulta simétrica (generalmente).

♣ Las expresiones (26) y (27) resultan ser equivalentes.

♣ Si el conjunto de funciones de prueba $N_m = \sin\left(m \; \pi \; x/L_x\right)$ para $m = 1, 2, ...M$ y $\Omega = \{x \backslash \; 0 \leq x \leq L_x\}$ se obtiene que:

$$\begin{aligned} K_{lm} &= \int_0^{L_x} \sin\left(\frac{l \; \pi \; x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{m \; \pi \; x}{L_x}\right) \; dx \\ f_l &= \int_0^{L_x} \left(\phi - \psi\right) \; \sin\left(\frac{m \; \pi \; x}{L_x}\right) \; dx \end{aligned}$$

que al realizar las integrales da:

$$K_{lm} = \left\{ \begin{array}{ll} L_x/2 & \text{si} \;\; l = m \\ 0 & \text{si} \;\; l \neq m \end{array} \right\}$$

dando lugar a un sistema diagonal, resultando inmediatamente en la solución:

$$a_m = \frac{2}{L_x} \int_0^{L_x} (\phi - \psi) \;\; \sin\left(\frac{m \; \pi \; x}{L_x}\right) \; dx \quad \text{para} \;\; m = 1, 2, ...m$$

Que es idéntica a la representación de una serie seno de Fourier truncada, donde la particular simplicidad se debe a la propiedad de ortogonalidad de las funciones de forma.

EJEMPLO 2:

Encontraremos ahora las aproximaciones a la función del ejemplo 1 empleando el método de residuos ponderados utilizando las distintas funciones de peso presentadas. La función a aproximar en $\Omega = [0; 1]$ es:

$$\phi = -(0.1 + x/3) * sin(1.7 * \pi * x)$$

Se propone la siguiente aproximación a la función, que será utilizada en todos los casos:

$$\begin{array}{rcl} \overset{\wedge}{\phi} & = & \psi + a_1 \; N_1 + a_2 \; N_2 \\ \psi & = & 0.3505740306 * x \\ N_1 & = & x \, (1 - x) \\ N_2 & = & x^2 \, (1 - x) \end{array}$$

Colocación por puntos

Se adoptan los siguientes dos puntos de colocación: $x_1 = 0.25$ y $x_2 = 0.75$ con lo cual $M = 2$

$$K_{lm} = N_m(x_l) \;\; \text{y} \;\; f_l = [\phi - \psi]_{x=x_l}$$

$$\begin{array}{rcl} K_{11} = & N_1 \, (x_1) & = 0.1875 \\ K_{12} = & N_2 \, (x_1) & = 0.046875 \\ f_1 = & \phi \, (x_1) - \psi \, (x_1) & = -0.2659113 \\ K_{21} = & N_1 \, (x_2) & = 0.1875 \\ K_{22} = & N_2 \, (x_2) & = 0.140625 \\ f_2 = & \phi \, (x_2) - \psi \, (x_2) & = 0.0032116 \end{array}$$

El sistema y su solución son:

$$\left[\begin{array}{cc} 0.1875 & 0.046875 \\ 0.1875 & 0.140625 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} -0.2659113 \\ 0.0032116 \end{array} \right] \;\; \Rightarrow \;\; \begin{array}{c} a_1 = -2.1358546 \\ a_2 = 2.87064426 \end{array}$$

$$\overset{\wedge}{\phi} = 0.3505740306 * x - 2.13585478 \; x \, (1 - x) + 2.87064417 \; x^2 \, (1 - x)$$

Colocación por subdominios

Se adoptan dos subdominios, el primer subdominio esta comprendido ente $x_1 = 0$ y $x_2 = 0.5$ y el segundo entre $x_2 = 0.5$ y $x_3 = 1$ con lo cual $M = 2$.

$$K_{lm} = \int_{x_l}^{x_{l+1}} N_m \; dx \quad \text{y} \quad f_l = \int_{x_l}^{x_{l+1}} (\phi - \psi) \; dx$$

$$
\begin{aligned}
K_{11} &= \int_0^{0.5} N_1(x)\,dx && = 0.083333\\
K_{12} &= \int_0^{0.5} N_2(x)\,dx && = 0.0260416\\
f_1 &= \int_0^{0.5} [\phi(x) - \psi(x)]\,dx && = -0.11234019\\
K_{21} &= \int_{0.5}^{1} N_1(x)\,dx && = 0.0833333\\
K_{22} &= \int_{0.5}^{1} N_2(x)\,dx && = 0.0572916\\
f_2 &= \int_{0.5}^{1} [\phi(x) - \psi(x)]\,dx && = -0.02452481
\end{aligned}
$$

El sistema algebraico y su solución son:

$$
\begin{bmatrix} 0.083333 & 0.0260416 \\ 0.0833333 & 0.0572916 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.11234019 \\ -0.02452481 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} a_1 = -2.226236221 \\ a_2 = 2.8100923155 \end{array}
$$

$$
\overset{\wedge}{\phi} = 0.3505740306 * x - 2.226236221\ x(1-x) + 2.8100923155\ x^2(1-x)
$$

Mínimos cuadrados

En este caso se tiene que las expresiones para K_{lm} y f_l coinciden con las que corresponden a Galerkin:

$$
K_{lm} = \int_\Omega N_l\ N_m\ d\Omega \quad \text{y} \quad f_l = \int_\Omega N_l\ (\phi - \psi)\ d\Omega
$$

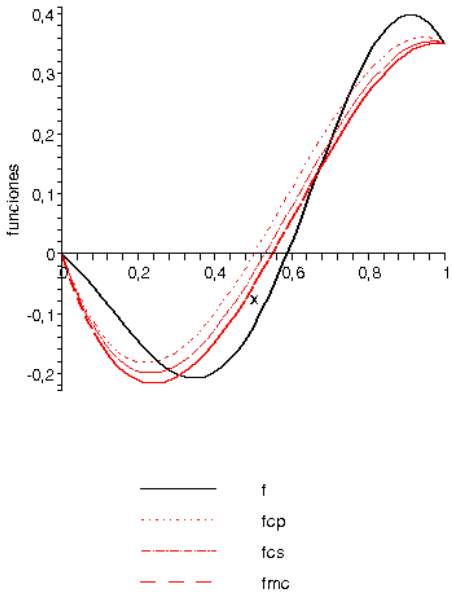
$$
\begin{aligned}
K_{11} &= \int_0^{1} N_1(x)\,N_1(x)\,dx && = \tfrac{1}{30}\\
K_{12} &= \int_0^{1} N_1(x)\,N_2(x)\,dx && = \tfrac{1}{60}\\
f_1 &= \int_0^{1} N_1(x)\,[\phi(x) - \psi(x)]\,dx && = -0.03053668742\\
K_{21} &= \int_0^{1} N_2(x)\,N_1(x)\,dx && = \tfrac{1}{60}\\
K_{22} &= \int_0^{1} N_2(x)\,N_2(x)\,dx && = \tfrac{1}{105}\\
f_2 &= \int_0^{1} N_2(x)\,[\phi(x) - \psi(x)]\,dx && = -0.01192414968
\end{aligned}
$$

El sistema y su solución son:

$$
\begin{bmatrix} \frac{1}{30} & \frac{1}{60} \\ \frac{1}{60} & \frac{1}{105} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.03053668742 \\ -0.01192414968 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} a_1 = -2.32066211519 \\ a_2 = 2.80912298519 \end{array}
$$

$$
\overset{\wedge}{\phi} = 0.3505740306 * x - 2.32066211519\ x(1-x) + 2.80912298519\ x^2(1-x)
$$

En el siguiente grafico se han superpuesto la función y las aproximaciones obtenidas.



1.4 Aproximación a la solución de ecuaciones diferenciales

Consideremos que la ecuación dierencial puede ser escrita de la diguiente forma general:

$$A(u) = \mathcal{L}(u) + p = 0 \qquad \text{en} \quad \Omega \tag{28}$$

Donde
$\mathcal{L}()$ es un operador diferencial lineal
p es una función independiente de u
u variable independiente
Las condiciones de borde pueden expresarse en forma general como:

$$B(u) = \mathcal{M}(u) + r \qquad \text{en } \Gamma \tag{29}$$

Donde
$\mathcal{M}(u) = u$ entonces $r = -\overline{u}$ en Γ_u
$\mathcal{M}(u) = -k\frac{\partial u}{\partial n}$ entonces $r = -\overline{q}$ en Γ_q

1.4.1 Condiciones de borde satisfechas por la elección de las funciones de prueba

Se establece ahora como se construirá la aproximación $\hat{u}$ a la solución analítica u, por medio de una expansión de la forma:

$$u \simeq \hat{u} = \psi + \sum_{m=1}^{M} a_m \; N_m \tag{30}$$

En este caso la función ψ será la encargada de cumplir las condiciones de borde y las funciones N_m las encargadas de ajustar a la función solución en el dominio. Estas funciones son elegidas de manera tal que cumplan con las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\psi) &= -r \quad \text{en} \quad \Gamma \\ \mathcal{M}(N_m) &= 0 \quad \text{para} \quad m = 1, 2, ...M \quad \text{en} \quad \Gamma \end{aligned} \tag{31}$$

Por esto $\hat{u}$ satisface automáticamente las condiciones de borde, cualquiera sean los valores que adopten los coeficientes a_m. La aproximación (30) puede utilizarse para aproximar a las derivadas de u derivando directamente, con tal que las funciones N_m sean continuas en el dominio Ω y que todas sus derivadas, que sean necesarias, existan:

$$\begin{aligned} u &\simeq \hat{u} = \psi + \sum_{m=1}^{M} a_m \, N_m \\ \frac{\partial u}{\partial x} &\simeq \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \sum_{m=1}^{M} a_m \frac{\partial N_m}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &\simeq \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \sum_{m=1}^{M} a_m \frac{\partial^2 N_m}{\partial x^2} \end{aligned} \tag{32}$$

Las aproximaciones a u, $\frac{\partial u}{\partial x}$ y $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ son reemplazadas en la ecuación diferencial $A(u)$ para obtener la expresión del residuo.

$$\begin{aligned} R_\Omega &= A(\hat{u}) \\ &= \mathcal{L}(\hat{u}) + p \\ &= \mathcal{L}(\psi) + \sum_{m=1}^{M} a_m \mathcal{L}(N_m) + p \end{aligned} \tag{33}$$

Obtenido el residuo éste se minimizará utilizando el método de los residuos ponderados, para que $R_\Omega \simeq 0$ en Ω, lo cual lleva a plantear:

$$\int_\Omega W_l \; R_\Omega \; d\Omega = \int_\Omega W_l \left[\mathcal{L}(\psi) + \sum_{m=1}^{M} a_m \mathcal{L}(N_m) + p \right] = 0 \tag{34}$$

Agrupando adecuadamente los términos obtenemos:

$$\begin{aligned} K_{lm} &= \int_\Omega W_l \; \mathcal{L}(N_m) \; d\Omega \qquad\qquad 1 \leq l \leq M \text{ y } 1 \leq m \leq M \\ f_l &= \int_\Omega W_l \; p \; d\Omega + \int_\Omega W_l \; \mathcal{L}(\psi) \; d\Omega \qquad 1 \leq l \; \leq M \end{aligned} \tag{35}$$

Por lo cual obtenemos el siguiente sistema *algebraico* a resolver:

$$\mathbf{Ka} + \mathbf{f} = \mathbf{0}$$

1.4.2 Condiciones de borde no satisfechas por la elección de las funciones de prueba

En muchos casos ocurre que encontrar una función ψ que satisfaga las condiciones de borde, suele ser una tarea muy ardua y en ocasiones imposible, lo cual limita el rango de funciones de prueba admisibles. Para salvar este inconveniente se considerará un conjunto de funciones que **no** satisfagan las condiciones de borde en forma parcial o total. La aproximación $\hat{u}$ se construirá ahora de la siguiente manera:

$$u \simeq \hat{u} = \sum_{m=1}^{M} a_m \, N_m \tag{36}$$

Como $\hat{u}$ no satisface las condiciones de borde, aparecerá un residuo en el borde R_Γ además del residuo en el dominio R_Ω. Tenemos ahora:

$$
\begin{aligned}
R_\Omega &= A(\hat{u}) = \mathcal{L}(\hat{u}) + p \quad \text{en } \Omega \\
R_\Gamma &= B(\hat{u}) = \mathcal{M}(\hat{u}) + r \quad \text{en } \Gamma
\end{aligned} \tag{37}
$$

Ahora deben ser minimizados ambos, para lo cual se propone plantear el método de los residuos ponderados de la siguiente manera:

$$
\int_\Omega W_l \; R_\Omega \; d\Omega + \int_\Gamma \overline{W}_l \; R_\Gamma \; d\Gamma = 0 \tag{38}
$$

Las funciones de peso W_l (en el dominio) y las $\overline{W}_l$ (en el contorno) pueden ser elegidas en forma *independiente*. La aproximación (36) puede utilizarse para aproximar a las derivadas de u, con tal que las funciones N_m sean continuas en el dominio Ω y que existan todas sus derivadas:

$$
\begin{aligned}
u &\simeq \hat{u} = \sum_{m=1}^{M} a_m \; N_m \\
\frac{\partial u}{\partial x} &\simeq \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} = \sum_{m=1}^{M} a_m \frac{\partial N_m}{\partial x} \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &\simeq \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} = \sum_{m=1}^{M} a_m \frac{\partial^2 N_m}{\partial x^2}
\end{aligned} \tag{39}
$$

El residuo en el dominio y en el borde se obtienen reemplazando las aproximaciones (39) en (28) y (29), para obtener:

$$
\begin{aligned}
K_{lm} &= \int_\Omega W_l \; \mathcal{L}(N_m) \; d\Omega + \int_\Gamma \overline{W}_l \; \mathcal{M}(N_m) \; d\Gamma \quad 1 \le l \le M \text{ y } 1 \le m \le M \\
f_l &= -\int_\Omega W_l \; p \; d\Omega - \int_\Gamma \overline{W}_l \; r \; d\Gamma \qquad\qquad 1 \le l \; \le M
\end{aligned} \tag{40}
$$

1.4.3 Forma débil del problema. Condiciones de borde naturales

Se ha planteado la forma de encontrar el valor de los parámetros a_m aun cuando la solución aproximada $\hat{u}$ no cumple las condiciones de borde, en forma total o parcial. Si bien esto nos amplia el rango de funciones a utilizar, pueden aparecer dificultades cuando las condiciones de borde incluyen derivadas de $\hat{u}$ que deban evaluarse en bordes curvos o de geometría complicada. Se plantea a continuación una manera para evitar tales cálculos y proponer una forma mas general para tratar las condiciones de borde.

Volviendo al planteo de residuos ponderados, se tenía que:

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega W_l \; R_\Omega \; d\Omega &= \int_\Omega W_l \left[\mathcal{L}(\hat{u}) + p \right] \; d\Omega \\
&= \int_\Omega W_l \mathcal{L}(\hat{u}) \; d\Omega + \int_\Omega W_l p \; d\Omega
\end{aligned}
$$

El primer término pude ser integrado por partes (recordar que $\int_\Omega u dv = uv \mid_\Gamma - \int_\Omega v du$) obteniendo:

$$
\int_\Omega W_l \; \mathcal{L}(\hat{u}) \; d\Omega = \int_\Gamma W_l \; \mathcal{E}\left(\hat{u}\right) \; d\Gamma - \int_\Omega \mathcal{C}\left(W_l\right) \; \mathcal{D}\left(\hat{u}\right) d\Omega \tag{41}
$$

Donde $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ y $\mathcal{E}$ son operadores diferenciales con un orden de diferenciación menor que $\mathcal{L}$. A la expresión (41) se conoce como *orma débil del problema*.

Si reemplazamos la expresión de la forma débil (41) en la expresión del residuo (38) y se eligen convenientemente las funciones de peso $\overline{W}_l$ el último término de (41) podrá cancelarse con *parte* del término que corresponde al residuo en el contorno. Este procedimiento *es aplicable* para tratar con las *condiciones de borde naturales* del problema, no asi para las condiciones esenciales.

$$\int_{\Gamma_q} \overline{W}_l \; r \; d\Gamma \; \leftrightarrow \int_{\Gamma_q} W_l \; \mathcal{E}\left(\hat{u}\right) \; d\Gamma$$

Debido a que los nuevos operadores diferenciales son de menor orden, son menores también los requerimientos que deben cumplir las funciones de prueba, lo cual es una ventaja adicional.

Con el fin de aclarar los conceptos que han sido presentados de manera abstracta, plantearemos un par de problemas simples a los que aplicaremos los procedimientos recien vistos, estos se presentan en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 3:

Vamos a tratar con el siguiente problema de transferencia de calor unidimensional con una fuente distribuida gobernado por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{l} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \phi + 1 = 0 \\ \phi = 0 \;\; \text{en} \;\; x = 0 \\ \phi = 1 \;\; \text{en} \;\; x = 1 \end{array}$$

Solución analítica

La solución homogenea es:

$$\phi_h(x) = A\cos(x) + B\sin(x)$$

La solución particular:

$$\begin{array}{l} \phi_p(x) = \alpha \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0 \\ 0 + \alpha + 1 = 0 \therefore \alpha = -1 \end{array}$$

La solución general entonces

$$\begin{array}{rcl} \phi(x) & = & \phi_h(x) + \phi_p(x) \\ \phi(x) & = & A\cos(x) + B\sin(x) - 1 \end{array}$$

Utilizando las condiciones de contorno para encontrar las constantes A y B

$$x = 0 \; , \phi = 0 \Rightarrow 0 = A\cos(0) + B\sin(0) - 1 \quad \therefore A = 1$$

$$x = 1, \phi = 1 \Rightarrow 1 = 1\cos(1) + B\sin(1) - 1 \quad \therefore B = 1.734697595$$

La solución entonces es:

$$\phi(x) = \cos(x) + 1.734697595\sin(x) - 1$$

Soluciones aproximadas por residuos ponderados

Con funciones que satisfacen las condiciones de borde

El problema esta definido por:

$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \phi + 1 = 0$ para $0 \leq x \leq 1$
$\phi = 0 \;\; \text{en} \;\; x = 0$
$\phi = 1 \;\; \text{en} \;\; x = 1$

Si analizamos las ecuaciones de gobierno comparándolas con las expresiones generales (28) y (29), se tiene que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}() &= \frac{\partial^2()}{\partial x^2} + () \qquad p = 1 \\
\mathcal{M}() &= () \qquad r = 0 \quad \text{en} \quad x = 0 \\
\mathcal{M}() &= () \qquad r = -1 \quad \text{en} \quad x = 1
\end{aligned}$$

La aproximación $\overset{\wedge}{\phi}$, estará formada por la función ψ a la que le exigiremos que cumpla las condiciones de contorno y una familia de funciones de prueba $N_m = 0$ en el borde. Se propone:

$$\begin{aligned}
\overset{\wedge}{\phi} &= \psi + a_1\ N_1 + a_2\ N_2 \\
\psi &= x \\
N_1 &= x\,(1-x) \\
N_2 &= x^2\,(1-x)
\end{aligned}$$

Entonces:

$\psi = x$	$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 1$	$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0$	$\mathcal{L}(\psi) = 0 + x$
$N_1 = x\,(1-x)$	$\frac{\partial N_1}{\partial x} = 1 - 2x$	$\frac{\partial^2 N_1}{\partial x^2} = -2$	$\mathcal{L}(N_1) = -2 + x\,(1-x)$
$N_2 = x^2\,(1-x)$	$\frac{\partial N_2}{\partial x} = 2x - 3x^2$	$\frac{\partial^2 N_2}{\partial x^2} = 2 - 6x$	$\mathcal{L}(N_2) = 2 - 6x + x^2\,(1-x)$

$$\begin{aligned}
\int_\Omega W_l\ R_\Omega\ d\Omega &= \int_\Omega W_l \left[\mathcal{L}(\hat{u}) + p\right]\ d\Omega \\
&= \int_0^1 W_l \left[\mathcal{L}(\psi + \sum_{m=1}^{2} a_m N_m) + p\right]\ dx \\
&= \int_0^1 W_l \mathcal{L}(\psi)\ dx + \sum_{m=1}^{2} a_m \int_0^1 W_l \mathcal{L}\,(N_m)\ \ dx + \int_0^1 W_l\ p\ dx
\end{aligned}$$

Agrupando, se obtienen:

$$\begin{aligned}
K_{lm} &= \int_0^1 W_l\ \mathcal{L}(N_m)\ dx \\
f_l &= \int_0^1 W_l\ p\ dx + \int_0^1 W_l\ \mathcal{L}(\psi)\ dx
\end{aligned}$$

Utiliaremos las diferentes funciones de peso para encontrar las soluciones aproximadas.
Colocación por puntos

$$W_l = \delta\,(x - x_l)$$

Elegimos los puntos de colocación a $x_1 = 1/3$ y $x_2 = 2/3$.

$$
\begin{aligned}
K_{11} &= \int_0^1 \delta(x-x_1)\,\mathcal{L}(N_1)dx && = \tfrac{-16}{9}\\
K_{12} &= \int_0^1 \delta(x-x_1)\,\mathcal{L}(N_2)dx && = \tfrac{2}{27}\\
f_1 &= \int_0^1 \delta(x-x_1)\,\mathcal{L}(\psi)dx + \int_0^1 \delta(x-x_1)\,p dx && = \tfrac{-4}{3}\\
K_{21} &= \int_0^1 \delta(x-x_2)\,\mathcal{L}(N_1)dx && = \tfrac{-16}{9}\\
K_{22} &= \int_0^1 \delta(x-x_2)\,\mathcal{L}(N_2)dx && = \tfrac{-50}{27}\\
f_2 &= \int_0^1 \delta(x-x_1)\,\mathcal{L}(\psi)dx + \int_0^1 \delta(x-x_1)\,p dx && = \tfrac{-5}{3}
\end{aligned}
$$

El sismema a resolver y su solución son:

$$
\begin{bmatrix} \frac{-16}{9} & \frac{2}{27} \\ \frac{-16}{9} & \frac{-50}{27} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} =
\begin{bmatrix} \frac{-4}{3} \\ \frac{-5}{3} \end{bmatrix}
\Rightarrow \begin{matrix} a_1 = \frac{315}{416} \\ a_2 = \frac{9}{52} \end{matrix}
$$

$$
\overset{\wedge}{\phi} = x + \frac{315}{416}\,x(1-x) + \frac{9}{52}\,x^2(1-x)
$$

Colocación por subdominios

$$
W_l = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } \; x_l < x < x_{l+1} \\ 0 & \text{si } \; x < x_l \text{ o } x > x_{l+1} \end{array} \right\}
$$

Se elige el primer subdominio entre $x_1 = 0$ a $x_2 = 0.5$ y el segundo entre $x_2 = 0.5$ a $x_3 = 1$.

$$
\begin{aligned}
K_{11} &= \int_0^{0.5} 1\;\mathcal{L}(N_1)\;dx && = -0.916666\\
K_{12} &= \int_0^{0.5} 1\;\mathcal{L}(N_2)\;dx && = 0.2760416\\
f_1 &= \int_0^{0.5} 1\;\mathcal{L}(\psi)\;dx + \int_0^{0.5} 1\;p\;dx && = -0.625000\\
K_{21} &= \int_{0.5}^{1} 1\;\mathcal{L}(N_1)\;dx && = -0.916666\\
K_{22} &= \int_{0.5}^{1} 1\;\mathcal{L}(N_2)\;dx && = -1.1927083\\
f_2 &= \int_{0.5}^{1} 1\mathcal{L}(\psi)\;dx + \int_{0.5}^{1} 1\;p\;dx && = -0.87500
\end{aligned}
$$

El sistema y su solución:

$$
\begin{bmatrix} -0.916666 & 0.2760416 \\ -0.916666 & -1.1927083 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} =
\begin{bmatrix} -0.625000 \\ -0.87500 \end{bmatrix}
\Rightarrow \begin{matrix} a_1 = \; 0.733075435193 \\ a_2 = \; 0.170212765992 \end{matrix} \tag{42}
$$

$$
\overset{\wedge}{\phi} = x + 0.733075435193x(1-x) + \; 0.170212765992x^2(1-x) \tag{43}
$$

Galerkin

$$
W_l = N_l \tag{44}
$$

$$K_{11} = \int_0^1 N_1 \ \mathcal{L}(N_1)dx = \frac{-3}{10}$$

$$K_{12} = \int_0^1 N_1 \mathcal{L}(N_2)dx = \frac{-3}{20}$$

$$f_1 = \int_0^1 N_1 \mathcal{L}(\psi)dx + \int_0^1 N_1 \ p \ dx = \frac{1}{4}$$

$$K_{21} = \int_0^1 N_2 \ \mathcal{L}(N_1)dx = \frac{-3}{20}$$

$$K_{22} = \int_0^1 N_2 \ \mathcal{L}(N_2)dx = \frac{-13}{105}$$

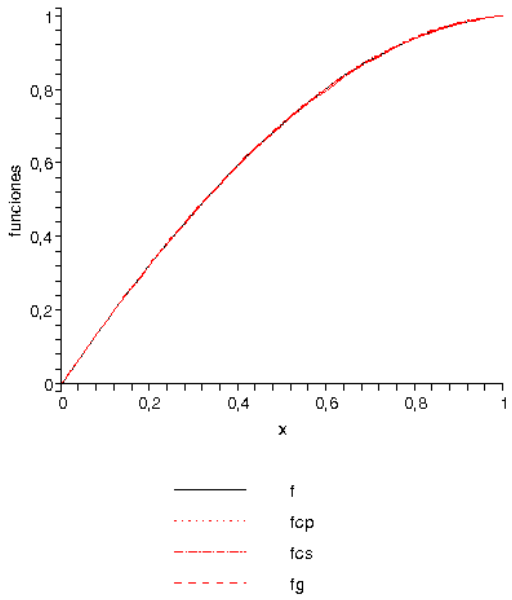
$$f_2 = \int_0^1 N_2 \ \mathcal{L}(\psi)dx + \int_0^1 N_2 \ p \ dx = \frac{2}{15}$$

El sistema y su solución:

$$\begin{bmatrix} \frac{-3}{10} & \frac{-3}{20} \\ \frac{-3}{20} & \frac{-13}{105} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{4} \\ \frac{-2}{15} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} a_1 = \frac{92}{123} \\ a_2 = \frac{7}{41} \end{matrix}$$

$$\hat{\phi} = x + \frac{92}{123}x\,(1-x) + x\frac{7}{41}x^2\,(1-x)$$

En el siguiente gráfico se han superpuesto la solución analítica y las soluciones aproximadas obtenidas.



EJEMPLO 4:

Se propone resolver el problema esta definido por:

$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \phi + 1 = 0$ para $0 \leq x \leq 1$

$\phi = 0$ en $x = 0$

$\frac{\partial\phi}{\partial x} = 1$ en $x = 1$

Solución analítica

$$\phi = cos(x) + 3.40822344sin(x) - 1$$

Soluciones aproximadas por residuos ponderados

Con funciones que no satisfacen las condiciones de borde

Si analizamos las ecuaciones de gobierno comparándolas con las expresiones generales (28) y (29), se tiene:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}() &= \frac{\partial^2()}{\partial x^2} + () \quad p = 1\\ \mathcal{M}() &= () \qquad r = 0 \quad \text{en} \quad x = 0\\ \mathcal{M}() &= \frac{\partial()}{\partial x} \quad r = -1 \quad \text{en} \quad x = 1\end{aligned}$$

La aproximación, con la función $\psi = 0$ (que cumple las condiciones de contorno en $x = 0$) y las $N_m = 0$ en $x = 0$, se propone la siguiente aproximación:

$$\begin{aligned}\overset{\wedge}{\phi} &= a_1 N_1 + a_2\ N_2 + a_3\ N_3\\ N_1 &= x^m \quad m = 1, 2, .., M\end{aligned}$$

Entonces:

$N_1 = x$	$\frac{\partial N1_1}{\partial x} = 1$	$\frac{\partial^2 N_1}{\partial x^2} = 0$
$N_2 = x^2$	$\frac{\partial N_2}{\partial x} = 2x$	$\frac{\partial^2 N_2}{\partial x^2} = 2$
$N_3 = x^3$	$\frac{\partial N_3}{\partial x} = 3x^2$	$\frac{\partial^2 N_3}{\partial x^2} = 6x$

La expresión del residuo:

$$\begin{aligned}0 &= \int_\Omega W_l \left[\mathcal{L}(\hat{u}) + p\right]\ d\Omega + \int_\Gamma \overline{W_l} \left[\mathcal{M}(\hat{u}) + r\right] d\Gamma\\ &= \int_0^1 W_l \left[\mathcal{L}(\sum_{m=1}^{2} a_m N_m) + p\right]\ dx + \left(\overline{W_l}\mathcal{M}(\sum_{m=1}^{2} a_m N_m) + r\right)_{x=0}\\ &+ \left(\overline{W_l}\mathcal{M}(\sum_{m=1}^{2} a_m N_m) + r\right)_{x=1}\end{aligned}$$

Como las funciones de prueba elegidas $N_m(0) = 0$ entonces no tengo residuo en $x = 0$.

$$0 = \sum_{m=1}^{2} a_m \int_0^1 W_l \mathcal{L}\left(N_m\right)\ dx + \int_0^1 W_l\ p\ dx + 0 + 0 + \sum_{m=1}^{2} \left(a_m \overline{W_l} \mathcal{M}(N_m)\right)_{x=1} + \left(\overline{W_l}\ r\right)_{x=1}$$

Agrupando convenientemente, se obtiene:

$$\begin{aligned}K_{lm} &= \int_0^1 W_l\ \mathcal{L}(N_m)\ dx + \left(\overline{W_l}\ \mathcal{M}(N_m)\right)_{x=1}\\ f_l &= \int_0^1 W_l\ p\ dx + \left(\overline{W_l}\ r\right)_{x=1}\end{aligned}$$

$$\mathbf{Ka} + \mathbf{f} = \mathbf{0}$$

Explícitamente:

$$\begin{aligned}K_{lm} &= \int_0^1 W_l \left(\frac{\partial^2 N_m}{\partial x^2} + N_m\right) dx + \left(\overline{W_l}\ \frac{\partial N_m}{\partial x}\right)_{x=1}\\ &= \int_0^1 W_l \frac{\partial^2\left(N_m\right)}{\partial x^2} dx + \int_0^1 W_l N_m dx + \left(\overline{W_l}\ \frac{\partial N_m}{\partial x}\right)_{x=1}\end{aligned}$$

Integrando por partes el primer término de la expresión anterior, para obtener la forma débil:

$$\int_0^1 W_l \frac{\partial^2 N_m}{\partial x^2} dx = -\int_0^1 \frac{\partial W_l}{\partial x}\frac{\partial N_m}{\partial x} dx + W_l \left(\frac{\partial N_m}{\partial x}\right)_{x=0} + W_l \left(\frac{\partial N_m}{\partial x}\right)_{x=1}$$

Considerando Galerkin ($W_l = N_l$), tendremos que $W_l = 0$ en $x = 0$. Reemplazando:

$$K_{lm} = -\int_0^1 \frac{\partial W_l}{\partial x}\frac{\partial N_m}{\partial x} dx + \int_0^1 W_l N_m dx + \left(W_l \frac{\partial N_m}{\partial x}\right)_{x=1} + \left(\overline{W_l}\ \frac{\partial N_m}{\partial x}\right)_{x=1}$$

Los dos últimos términos pueden cancelarse si se eligen $\overline{W_l}(1) = -W_l(1)$. Entonces solo queda:

$$\begin{aligned} K_{lm} &= -\int_0^1 \frac{\partial W_l}{\partial x}\frac{\partial N_m}{\partial x} dx + \int_0^1 W_l N_m dx \\ f_l &= \int_0^1 W_l\ p\ dx + (-W_l\ r)_{x=1} \end{aligned}$$

$$\mathbf{Ka} + \mathbf{f} = \mathbf{0}$$

$$\begin{aligned}
K_{11} &= -\int_0^1 \tfrac{\partial N_1}{\partial x}\ \tfrac{\partial N_1}{\partial x} dx + \int_0^1 N_1 N_1 dx && = \tfrac{-2}{3} \\
K_{12} &= -\int_0^1 \tfrac{\partial N_1}{\partial x}\ \tfrac{\partial N_2}{\partial x} dx + \int_0^1 N_1 N_2 dx && = \tfrac{-3}{4} \\
K_{13} &= -\int_0^1 \tfrac{\partial N_1}{\partial x}\ \tfrac{\partial N_3}{\partial x} dx + \int_0^1 N_1 N_3 dx && = \tfrac{-4}{5} \\
f_1 &= \int_0^1 N_1 1\ dx + (-N_1(1))\ (-1)\ dx && = \tfrac{3}{2} \\
K_{21} &= -\int_0^1 \tfrac{\partial N_2}{\partial x}\ \tfrac{\partial N_1}{\partial x} dx + \int_0^1 N_2 N_1 dx && = \tfrac{-3}{4} \\
K_{22} &= -\int_0^1 \tfrac{\partial N_2}{\partial x}\ \tfrac{\partial N_2}{\partial x} dx + \int_0^1 N_2 N_2 dx && = \tfrac{-17}{15} \\
K_{23} &= -\int_0^1 \tfrac{\partial N_2}{\partial x}\ \tfrac{\partial N_3}{\partial x} dx + \int_0^1 N_2 N_3 dx && = \tfrac{-4}{3} \\
f_2 &= \int_0^1 N_2 1\ dx + (-N_2(1))\ (-1)\ dx && = \tfrac{4}{3} \\
K_{31} &= -\int_0^1 \tfrac{\partial N_3}{\partial x}\ \tfrac{\partial N_1}{\partial x} dx + \int_0^1 N_3 N_1 dx && = \tfrac{-4}{5} \\
K_{32} &= -\int_0^1 \tfrac{\partial N_3}{\partial x}\ \tfrac{\partial N_2}{\partial x} dx + \int_0^1 N_3 N_2 dx && = \tfrac{-4}{3} \\
K_{33} &= -\int_0^1 \tfrac{\partial N_3}{\partial x}\ \tfrac{\partial N_3}{\partial x} dx + \int_0^1 N_3 N_3 dx && = \tfrac{-58}{35} \\
f_3 &= \int_0^1 N_3 1\ dx + (-N_3(1))\ (-1)\ dx && = \tfrac{5}{4}
\end{aligned}$$

Para $M = 1, 2$ el sistema a resolver y su solución son:

$$\begin{bmatrix} \frac{-2}{3} & \frac{-3}{4} \\ \frac{-3}{4} & \frac{-17}{15} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-3}{2} \\ \frac{-4}{3} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} a_1 = \frac{504}{139} \\ a_2 = \frac{-170}{139} \end{array}$$

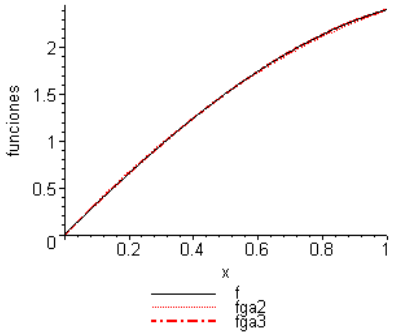
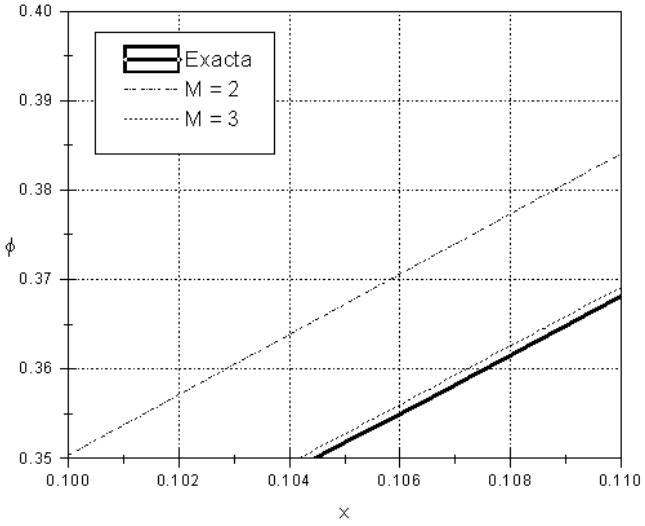
$$\hat{\phi} = \frac{504}{139}x - \frac{170}{139}\ x^2$$

Para $M = 1, 2, 3$ el sistema a resolver y su solución son:

$$\begin{bmatrix} \frac{-2}{3} & \frac{-3}{4} & \frac{-4}{5} \\ \frac{-3}{4} & \frac{-17}{15} & \frac{-4}{3} \\ \frac{-4}{5} & \frac{-4}{3} & \frac{-58}{35} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-3}{2} \\ \frac{-4}{3} \\ \frac{-5}{4} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} a_1 = \frac{6090}{1777} \\ a_2 = \frac{-1080}{1777} \\ a_3 = \frac{-5845}{14216} \end{array}$$

$$\overset{\wedge}{\phi} = \frac{6090}{1777}x - \frac{1080}{1777}\,x^2 - \frac{5845}{14216}x^3$$

En el siguiente gráfico se han superpuesto la solución analítica y las soluciones aproximadas:



Con el fin de "ver" las distintas funciones, se presenta el siguiente gráfico: