APUNTES DE ÁLGEBRA

JOSÉ LUIS ALBORNOZ SALAZAR

ÁLGEBRA

ÁLGEBRA *es la rama de la Matemática que estudia la* ***cantidad considerada del modo más general*** *posible.*

El ***concepto de la cantidad*** *en Álgebra es mucho más amplio que en Aritmética.*

En Aritmética las cantidades se representan por ***números*** *y éstos expresan valores* ***determinados****. Así, 20 expresa un solo valor:* ***veinte;*** *para expresar un valor mayor o menor que éste habrá que escribir un número distinto de 20.*

En Álgebra, para lograr la ***generalización,*** *las cantidades se representan por medio de* ***letras,*** *las cuales pueden* ***representar todos los valores****. Así,* ***"a"*** *representa el valor que* ***nosotros le asignemos****, y por lo tanto puede representar 20 o más de 20 o menos de 20, a nuestra elección, aunque conviene advertir que cuando en un problema asignamos a una letra un valor determinado, esa letra no puede representar, en el mismo problema, otro valor distinto del que le hemos asignado.*

Los ***símbolos*** *usados en Álgebra para representar las cantidades son los* ***números*** *y las* ***letras.***

Los ***números*** *se emplean para representar cantidades conocidas y determinadas.*

Las ***letras*** *se emplean para representar toda clase de cantidades, ya sean conocidas o desconocidas.*

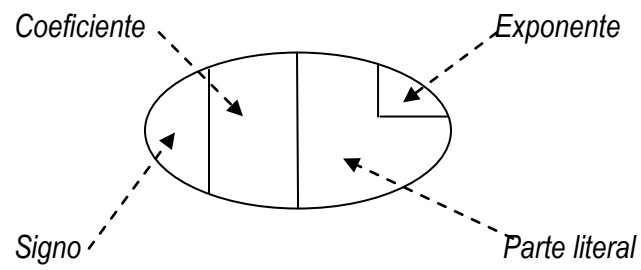
Una misma letra puede representar distintos valores diferenciándolos por medio de comillas ***(a', a´´,a''')*** *o también por medio de subíndices* ***(X_1, X_2, X_3).***

Con las cantidades algebraicas, representadas por letras, se pueden hacer las mismas operaciones que con los números aritméticos.

◄EXPRESIÓN ALGEBRAICA *es la representación de un símbolo algebraico o de una o más operaciones algebraicas.*

Ejemplos: a, $5x$, $\sqrt{4a}$, $(a+b)c$, x^2, $\frac{(5x-3y)a}{2x}$

◄TÉRMINO *es un conjunto formado por los cuatro (4) elementos siguientes:*



Ejemplos :

$-3X^2$ *es un término* ***:*** *tiene signo negativo, el coeficiente es "3", la parte literal es "X" y su exponente es "2".*

+2a *es un término* ***:*** *tiene signo positivo, coeficiente "2", parte literal "a" y aunque no se observa ningún exponente se sobre entiende que tiene exponente "1" (en álgebra $a^1 = a$).*

$7n^5$ *es un término* ***:*** *aunque no se observa el signo se sobre entiende que es positivo, el coeficiente es "7", la parte literal es "n" y su exponente es "5".*

$-n^3$ *es un término* ***:*** *tiene signo negativo, aunque no se observa el coeficiente se sobre entiende que es "1" (cualquier variable multiplicada por "1" es igual a dicha variable), la parte literal es "n" y su exponente es "3".*

X *es un término* ***:*** *aunque no se observa el signo se sobre entiende que es positivo, aunque no se observa el coeficiente se sobre entiende que es*

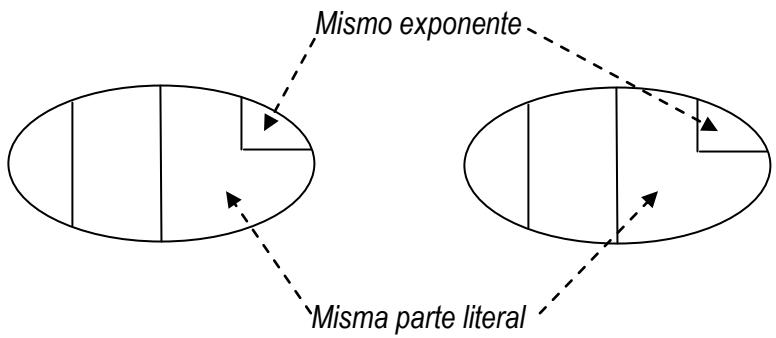
"1", la parte literal es "X y aunque no se observa ningún exponente se sobre entiende que tiene exponente "1" (recuerde que $X^1 = X$).

5 *es un término : aunque no se observa el signo se sobre entiende que es positivo, el coeficiente es "5", no tiene parte literal (pero pudiera ser cualquier variable elevada a cero que es igual a "1"). Un término que no tenga parte literal se denomina* **"término independiente".**

$\mathbf{-5X^2Y^3}$ *es un término : tiene signo negativo, el coeficiente es "5" , la parte literal es "XY", la letra "X" tiene exponente "2" y la letra "Y" tiene exponente "3".*

◄TÉRMINOS SEMEJANTES :

Dos términos son semejantes cuando tienen la misma parte literal y el mismo exponente.



Ejemplos :

$\mathbf{-3X^2}$ *y* $\mathbf{7X^2}$ *son términos semejantes, ambos tienen parte literal "X" y exponente "2" ($X^2 = X^2$).*

–5XY ; **8XY** *y* **72XY** *son términos semejantes, todos tienen la misma parte literal ("XY") y el mismo exponente en cada una de las dos letras ($X = X$; $Y = Y$) .*

$\mathbf{-7X^4Y^2}$ *y* $\mathbf{2X^4Y^2}$ *son términos semejantes, todos tienen la misma parte literal ("XY") y el mismo exponente en cada una de las dos letras ("X" tiene exponente "4" y "Y" exponente "2") ; ($X^4 = X^4$; $Y^2 = Y^2$).*

$\mathbf{-7X^3n^5}$ *y* $\mathbf{2n^5X^3}$ *son términos semejantes, todos tienen la misma parte literal (las letras "X" y "n") y el mismo exponente en cada una de las dos letras. No importa que las letras estén ordenadas de manera distinta, lo importante es que sean las mismas letras y que cada una tenga el mismo exponente en ambos términos ($X^3 = X^3$; $n^5 = n^5$).*

$\mathbf{-6X^2}$ *y* $\mathbf{8X^3}$ *NO son términos semejantes, ambos tienen parte literal "X" pero el exponente es distinto ($X^2 \neq X^3$).*

$\mathbf{4X^2}$ *y* $\mathbf{-4Y^2}$ *NO son términos semejantes, ambos tienen exponente "2" pero distinta parte literal ($X^2 \neq Y^2$).*

$\mathbf{-7n^3Y^2}$ *y* $\mathbf{2n^2Y^3}$ *NO son términos semejantes, porque aunque tienen la misma parte literal ("nY") el exponente en cada una de las dos letras es distinto ($n^3 \neq n^2$; $Y^2 \neq Y^3$) .*

$\mathbf{-9X^3Y^2}$ *y* $\mathbf{9X^3Y^3}$ *NO son términos semejantes, porque aunque tienen la misma parte literal ("XY") y el exponente de la letra "X" es igual, el exponente de la letra "Y" es distinto ($Y^2 \neq Y^3$).*

$\mathbf{-3a^3b^2}$ *y* $\mathbf{5b^3a^2}$ *NO son términos semejantes, porque aunque tienen la misma parte literal ("ab") el exponente en cada una de las dos letras es distinto ($a^3 \neq a^2$; $b^2 \neq b^3$).*

◄REDUCCIÓN DE TÉRMINOS SEMEJANTES :

Cuando en una misma expresión algebraica se encuentren dos o más términos semejantes se deben convertir en uno solo que sea equivalente a ellos.

Ejemplos :

1) **3X + 7X =**

Notamos que son dos términos semejantes (ambos tienen parte literal "X" y exponente "1").

Cuando una expresión algebraica presenta su primer término sin signo se sobre entiende que tiene signo positivo. Esto nada más se sobre entiende en el primer término, en ninguna otra ubicación más.

Cuando dos o más términos semejantes tengan igual signo se conserva el signo y se suman los coeficientes :

$$3X + 7X = 10X$$

2) **$-3n - 5n =$**

Notamos que son dos términos semejantes (ambos tienen parte literal "n" y exponente "1"), también podemos observar que ambos tienen signo negativo. Cuando dos o más términos semejantes tengan igual signo se conserva el signo y se suman los coeficientes :

$$-3n - 5n = -8n$$

3) **$4X^3Y^2 + 3X^3Y^2 + 2X^3Y^2 =$** $9X^3Y^2$

4) **$-10a^2b^5 - 4a^2b^5 - 2a^2b^5 =$** $-16a^2b^5$

5) **$-9a + 2a =$**

Notamos que son dos términos semejantes (ambos tienen parte literal "a" y exponente "1"), también podemos observar que tienen signos distintos.

Cuando dos términos semejantes tengan signos distintos, se colocará el signo del coeficiente mayor y se restarán los coeficientes :

$$-9a + 2a = -7a$$

6) **$7X^2 - 3X^2 =$**

Notamos que son dos términos semejantes (ambos tienen parte literal "X" y exponente "2"), también podemos observar que tienen signos distintos.

Aunque el primer termino ($7X^2$) no presenta ningún signo, se sobre entiende que tiene signo positivo.

Cuando dos términos semejantes tengan signos distintos, se colocará el signo del coeficiente mayor y se restarán los coeficientes :

$$7X^2 - 3X^2 = 4X^2$$

7) **$-9X^3n^2 + 2n^2X^3 =$** $-7X^3n^2$

8) **$-3b + 5b - 9b + 2b =$**

Notamos que son cuatro términos semejantes (todos tienen parte literal "b" y exponente "1"), también podemos observar que tienen signos distintos.

Cuando sean más de dos términos semejantes con diferentes signos, se recomienda primero sumar por separado los del mismo signo y después proceder como en los ejemplos anteriores.

Sumando los términos con signo positivo : $5b + 2b = 7b$

Sumando los términos con signo negativo : $-3b - 9b = -12b$

La expresión quedará como : $7b - 12b =$

Aplicando el procedimiento indicado en los ejemplos 5, 6 y 7 de esta misma página tendremos :

$$7b - 12b = -5b$$

9) **$5X - 9X + 6X =$**

$$11X - 9X = 2X$$

10) **$5XY - 9XY + 6XY + 3YX - 8YX =$**

$$14XY - 17XY = -3XY$$

11) **$Y - 3Y + 4Y + 13Y - 15Y =$**

$$18Y - 18Y = 0$$

12) **$-3a + 5b - 9b + 2a =$**

Notamos que son cuatro términos pero no todos son semejantes (dos tienen parte literal "a" y exponente "1" y dos tienen parte literal "b" y exponente "1")

En estos casos se deben reducir por separado los términos semejantes entre si.

Trabajando con "a" : $-3a + 2a = -a$

Trabajando con "b" : +5b –9b = –4b

–3a +5b –9b +2a = –a –4b

◄MONOMIO : *Es una expresión algebraica que consta de un solo término.*

Ejemplos : 3a, –9b, X^2, $-5X^3Y^5$, $\frac{XY^2}{2a}$

◄POLINOMIO : *Es una expresión algebraica que consta de más de un término.*

Ejemplos : $a + b$, $a + x - y$, $X^3 + 2X^2 + X - Y$

BINOMIO *es un polinomio que consta de dos términos.*

Ejemplos : $a + b$, $x - y$, $-\frac{XY^2}{2a} + \frac{Y}{b}$

TRINOMIO *es un polinomio que consta de tres términos.*

Ejemplos : $a + b - c$, $x - y + 6$, $5X - \frac{XY^2}{2a} + \frac{Y}{b}$

EL GRADO *de un polinomio puede ser* ***absoluto y con relación a una letra.***

Grado absoluto *de un polinomio es el grado de su término de mayor grado. Así, en el polinomio $X^4 - 5X^3 + X^2 - 3X$ el primer término es de cuarto grado; el segundo, de tercer grado; el tercero, de segundo grado, y el ultimo, de primer grado; luego, el* ***grado absoluto del polinomio es el cuarto.***

Grado *de un polinomio* ***con relación a una letra*** *es el mayor exponente de dicha letra en el polinomio. Así, el polinomio $a^6 + a^4x^2 - a^2x^4$ es de* ***sexto grado*** *con relación a la "a" y de* ***cuarto grado*** *con relación a la "x".*

Se dice que un ***polinomio*** *es* ***completo con relación a una letra*** *cuando contiene todos los exponentes sucesivos de dicha letra, desde el más alto al más bajo que tenga dicha letra en el polinomio. Así, el polinomio $x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - 3x$ es completo respecto de la "x", porque contiene todos los exponentes sucesivos de la "x" desde el más alto "5", hasta el más bajo "1", o sea 5, 4, 3, 2, 1; el polinomio $a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4$ es completo respecto de "a" y "b".*

Polinomio ordenado con respecto a una letra *es un polinomio en el cual los exponentes de una letra escogida, van aumentando o disminuyendo. Así, el polinomio $x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 5x + 8$ está ordenado en* ***orden descendente*** *con relación a la letra "x"; el polinomio $a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4$ está ordenado en* ***orden descendente*** *respecto a la letra "a" y en* ***orden ascendente*** *respecto a la letra "b".*

◄SUMA DE POLINOMIOS : *Para sumar dos o más polinomios se escriben uno a continuación de los otros con sus propios signos y se reducen los términos semejantes si los hay.*

Ejemplo : ***Sumar –3a + 5b y –9b + 2a***

Se escriben los dos polinomios uno a continuación del otro conservando los signos :

–3a +5b –9b +2a

Se reducen por separado los términos semejantes entre si.

Trabajando con "a" : –3a +2a = –a

Trabajando con "b" : +5b –9b = –4b

–3a +5b –9b +2a = –a –4b

En la práctica, suelen colocarse los polinomios unos debajo de los otros de modo que los términos semejantes queden en columnas y se hace la reducción de éstos, separándolos unos de otros con sus propios signos.

Ejemplos :

1) ***Sumar 4a – 3b – 5c y 7b – 9a – 3c***

Se coloca uno debajo del otro de manera que los términos semejantes queden en columnas ("a" debajo de "a", "b" debajo de "b" y "c" debajo de "c"). Todos los términos conservan sus signos.

El segundo polinomio se reordena de manera tal que las letras queden en el mismo orden que en el primer polinomio:

$$\begin{array}{rrr} +4a & -3b & -5c \\ -9a & +7b & -3c \\ \hline \end{array}$$

Posteriormente se reducen los términos semejantes en sentido vertical.

$$\begin{array}{rrr} +4a & -3b & -5c \\ -9a & +7b & -3c \\ \hline -5a & +4b & -8c \end{array}$$

Resultado : **– 5a + 4b – 8c**

2) ***Sumar $5X^3 + 3X - 2$ y $2X^2 - 9X + 4$***

Se coloca uno debajo del otro de manera que los términos semejantes queden en columnas. Todos los términos conservan sus signos.

Los polinomios deben ordenarse en el mismo sentido (ascendente o descendente) y donde falte un término se dejará el espacio vacío.

$$\begin{array}{rrrr} 5X^3 & & +3X & -2 \\ & 2X^2 & -9X & +4 \\ \hline \end{array}$$

Posteriormente se reducen los términos semejantes en sentido vertical. En la columna donde haya un solo término se coloca tal como esté.

$$\begin{array}{rrrr} 5X^3 & & +3X & -2 \\ & 2X^2 & -9X & +4 \\ \hline 5X^3 & +2X^2 & -6X & +2 \end{array}$$

Resultado : **$5X^3 + 2X^2 - 6X + 2$**

3) ***Sumar $5X^3 + 3X - 2$; $X^4 - 6X^2$; $2X^2 - 9X + 7$***

Se colocan uno debajo del otro de manera que los términos semejantes queden en columnas. Todos los términos conservan sus signos.

Los polinomios deben ordenarse en el mismo sentido (ascendente o descendente) y donde falte un término se dejará el espacio vacío.

$$\begin{array}{rrrrr} & 5X^3 & & +3X & -2 \\ X^4 & & -6X^2 & & \\ & & 2X^2 & -9X & +7 \\ \hline \end{array}$$

Posteriormente se reducen los términos semejantes en sentido vertical. En la columna donde haya un solo término se coloca tal como esté.

$$\begin{array}{rrrrr} & 5X^3 & & +3X & -2 \\ X^4 & & -6X^2 & & \\ & & 2X^2 & -9X & +7 \\ \hline \mathbf{X^4} & \mathbf{+5X^3} & \mathbf{-4X^2} & \mathbf{-6X} & \mathbf{+5} \end{array}$$

4) ***Sumar $a^3 - b^3$; $-5a^2b - 4ab^2$; $a^3 - 7ab^2 - b^3$***

$$\begin{array}{rrrrr} a^3 & & & & -b^3 \\ & -5a^2b & -4ab^2 & & \\ a^3 & & -7ab^2 & & -b^3 \\ \hline 2a^3 & -5a^2b & -11ab^2 & & -2b^3 \end{array}$$

5) ***Sumar*** $X^3 - XY^2 - Y^3$; $X^3 - 5X^2Y - Y^3$; $2X^3 - 4XY^2 - 5Y^3$

$$\begin{array}{llll} x^3 & & -\,xy^2 & -\,y^3 \\ x^3 & -\,5x^2y & & -\,y^3 \\ 2x^3 & & -\,4xy^2 & -\,5y^3 \\ \hline 4X^3 & -\,5X^2Y & -\,5XY^2 & -\,7Y^3 \end{array}$$

6) ***Sumar*** $X^4 - X^2Y^2$; $-\,5X^3Y + 6XY^3$; $-\,4XY^3 + Y^4$; $-4X^2Y^2 - 6$

$$\begin{array}{lllllll} x^4 & & -\,x^2y^2 & & & & \\ & -5x^3y & & +6xy^3 & & & \\ & & & -4xy^3 & +y^4 & & \\ & & -4x^2y^2 & & & & -6 \\ \hline x^4 & -5x^3y & -5x^2y^2 & +2xy^3 & +y^4 & & -6 \end{array}$$

◄RESTA DE POLINOMIOS : *Para restar dos polinomios se debe escribir el minuendo con sus propios signos y a continuación el sustraendo con los signos cambiados y se reducen los términos semejantes si los hay.*

minuendo

$$\boldsymbol{m - s = d}$$

sustraendo *diferencia*

Ejemplo : ***De*** $-3a + 5b$ ***restar*** $9b - 2a$

Se escribe el minuendo (al que se le va a restar) con sus propios signos y a continuación el sustraendo (lo que se va a restar) con los signos cambiados :

$$-3a + 5b - 9b + 2a$$

Se reducen por separado los términos semejantes entre sí.

Trabajando con "a" : $-3a + 2a = -a$
Trabajando con "b" : $+5b - 9b = -4b$
$= -a - 4b$

$$\boldsymbol{(-3a + 5b) - (9b - 2a)} = -3a + 5b - 9b + 2a = \boldsymbol{-a - 4b}$$

En la práctica, suele escribirse el sustraendo con sus signos cambiados debajo del minuendo, de modo que los términos semejantes queden en columnas y se hace la reducción de éstos, separándolos unos de otros con sus propios signos.

Ejemplo :

1) $5X^3 + 3X - 2$ ***menos*** $-2X^2 + 9X - 4$

Se le cambian los signos al sustraendo (lo que se va a restar)

$$2X^2 - 9X + 4$$

Se coloca debajo del minuendo (al que se le va a restar) de manera que los términos semejantes queden en columnas.

Los polinomios deben ordenarse en el mismo sentido (ascendente o descendente) y donde falte un término se dejará el espacio vacío.

$$\begin{array}{lll} 5X^3 & & +\,3X - 2 \\ & 2X^2 & -\,9X + 4 \\ \hline \end{array}$$

Posteriormente se reducen los términos semejantes en sentido vertical. En la columna donde haya un solo término se coloca tal como esté.

$$\begin{array}{lll} 5X^3 & & +\,3X - 2 \\ & 2X^2 & -\,9X + 4 \\ \hline 5X^3 & +\,2X^2 & -\,6X + 2 \end{array}$$

Resultado : $\mathbf{5X^3 + 2X^2 - 6X + 2}$

Es bueno aclarar que en la resta de polinomios se aplican los mismos criterios que en la suma de polinomios una vez que se le cambien los signos al sustraendo (lo que se va a restar).

Lo importante entonces es identificar el sustraendo (lo que se va a restar) y cambiarle todos los signos, no importa la forma como se plantee el ejercicio.

Ejercicios :

1) *De* **a + b** *restar* **a – b**
2) *De* **2X – 3Y** *restar* **– X + 2Y**
3) *De* **8a + b** *restar* **– 3a + 4**
4) *De* **X^2 – 3X** *restar* **– 5X + 6**

Respuestas:

1. $$\begin{array}{r} a+b \\ -a+b \\ \hline 2b \end{array}$$

2. $$\begin{array}{r} 2x-3y \\ x-2y \\ \hline 3x-5y \end{array}$$

3. $$\begin{array}{r} 8a\ +b \\ 3a\qquad -4 \\ \hline 11a+b-4 \end{array}$$

4. $$\begin{array}{r} x^2-3x \\ 5x-6 \\ \hline x^2+2x-6 \end{array}$$

5) *Restar* **$7a^2b + 9ab^2$** *de* **$a^3 – a^2b$**
6) *Restar* **X – Y + Z** *de* **X – Y + Z**
7) *Restar* **– X – Y + Z** *de* **X + Y – Z**

Respuestas:

5. $$\begin{array}{r} a^3-a^2b \\ -7a^2b-9ab^2 \\ \hline a^3-8a^2b-9ab^2 \end{array}$$

6. $$\begin{array}{r} x-y+z \\ -x+y-z \\ \hline 0 \end{array}$$

7. $$\begin{array}{r} x+y-z \\ x+y-z \\ \hline 2x+2y-2z \end{array}$$

◄SIGNOS DE AGRUPACIÓN : *Los signos de agrupación son de cuatro (4) clases : el paréntesis ( ), el corchete [ ], las llaves { } y el vínculo o barra — (el último es muy poco usado).*

Los signos de agrupación se emplean para indicar que las cantidades encerradas en ellos deben considerarse como un ***todo****, o sea, como* ***una sola cantidad****.*

Así, X + (Y – Z), que equivale a X + (+Y – Z), indica que la diferencia Y – Z debe sumarse con X, y ya sabemos que para efectuar esta suma escribimos a continuación de X las demás cantidades con su propio signo y tendremos :

X + (Y – Z) = X + Y – Z

La expresión X+(–2Y+Z) indica que a X hay que sumarle – 2Y + Z; luego, a continuación de X, escribimos – 2Y + Z con sus propios signos y tendremos :

X + (– 2Y + Z) = X – 2Y + Z

Vemos, pues, que hemos suprimido el paréntesis precedido del signo +, dejando a cada una de las cantidades que estaban dentro de él con sus propios signos.

La expresión X – (Y + Z), que equivale a X – (+Y + Z), indica que de X hay que restar la suma Y + Z y como para restar escribimos el sustraendo con los signos cambiados a continuación del minuendo, tendremos:

X – (Y + Z), = X – Y – Z

La expresión X – (– Y + Z),indica que de X hay que restar – Y + Z; luego cambiando los signos al sustraendo tendremos:

X – (– Y + Z), = X + Y – Z

Vemos pues, que hemos suprimido el paréntesis precedido del signo –, cambiando el signo a cada una de las cantidades que estaban encerradas en el paréntesis.

El corchete [ ], las llaves { } y el vínculo o barra —, tienen la misma significación que el paréntesis y se suprimen del mismo modo.

Ejercicios : *Simplificar, suprimiendo los signos de agrupación y reduciendo términos semejantes:*

1. $x-(x-y)$
$= x - x + y$
$= y$

2. $x^2+(-3x-x^2+5)$
$= x^2 - 3x - x^2 + 5$
$= -3x+5$

3. $a+b-(-2a+3)$
$= a+b+2a-3$
$= 3a+b-3$

4. $4m-(-2m-n)$
$= 4m+2m+n$
$= 6m+n$

5. $2x+3y-(4x+3y)$
$= 2x+3y-4x-3y$
$= -2x$

6. $a+(a-b)+(-a+b)$
$= a+a-b-a+b$
$= 2a-a = a$

7. $a^2+[-b^2+2a^2]-[a^2-b^2]$
$= a^2-b^2+2a^2-a^2+b^2$
$= 3a^2-a^2 = 2a^2$

8. $2a-\{-x+a-1\}-\{a+x-3\}$
$= 2a+x-a+1-a-x+3$
$= 1+3 = 4$

9. $x^2+y^2-(x^2+2xy+y^2)+[-x^2+y^2]$
$= x^2+y^2-x^2-2xy-y^2-x^2+y^2$
$= -x^2-2xy+y^2$

10. $(-5m+6)+(-m+5)-6$
$= -5m+6-m+5-6$
$= -6m+5$

11. $a+\overline{a-b}+\overline{-a+b}$ *(vínculo o barra)*
$= a+a-b-a+b = 2a-a = a$

12. $a-\overline{a-b}-\overline{-a-b}$ *(vínculo o barra)*
$= a-a+b+a+b = 2a-a+2b = a+2b$

Cuando unos signos de agrupación están incluidos dentro de otros :

1) *Simplificar la expresión :*

$$2a+[a-(a+b)]$$

Primero suprimo (elimino) el signo de agrupación que esté incluido dentro de otro (los más interiores), en este caso se puede observar que existe un paréntesis dentro de un corchete.

Como el paréntesis está precedido de un signo negativo, se cambian los signos de los términos que estén dentro de él :

$$= 2a+[a-a-b]$$

Posteriormente se procede a suprimir el otro signo de agrupación (corchete):

Como el corchete está precedido por un signo positivo, no se alteran los signos de los términos que estén dentro de los referidos corchetes

$$= 2a+a-a-b$$

Una vez que no hayan signos de agrupación se reducen los términos semejantes :

Trabajando con las "a" : $+2a+a-a$ = ***2a***

Trabajando con las "b" : $-b$ = ***– b***

El resultado es : ***2a – b***

2) <u>Simplificar la expresión:</u>

$$- \; [- 3a - \{ b + [- a + (2a - b) - (- a + b)] + 3b \} + 4a]$$

Empezando por los más interiores que son los paréntesis ; si el signo anterior al paréntesis es positivo, le dejo los signos iguales a los que estén dentro del paréntesis ; si el signo anterior al paréntesis es negativo, le cambio los signos a los que estén dentro del paréntesis :

$$- \; [- 3a - \{ b + [- a + 2a - b + a - b] + 3b \} + 4a]$$

Después el corchete que está entre las llaves (como en este caso el corchete está precedido por un signo positivo se mantienen los signos iguales) :

$$- \; [- 3a - \{ b - a + 2a - b + a - b + 3b \} + 4a]$$

Después las llaves que están dentro de los corchetes (como en este caso las llaves están precedidas por un signo negativo, se cambian todos los signos que estén dentro de ellas) :

$$- \; [- 3a - b + a - 2a + b - a + b - 3b + 4a]$$

Por último se suprimen los corchetes exteriores, y como en este caso está precedido por un signo negativo, se le cambiarán todos los signos que están dentro de él :

$$+ 3a + b - a + 2a - b + a - b + 3b - 4a$$

Una vez que no hayan signos de agrupación se reducen los términos semejantes :

Trabajando con las "a" : $+ 3a - a + 2a + a - 4a = 6a - 5a = \mathbf{a}$

Trabajando con las "b" : $+ b - b - b + 3b = 4b - 2b = \mathbf{2b}$

El resultado es : $\mathbf{a + 2b}$

3) <u>Simplificar la expresión:</u>

$$\begin{aligned}
&2m - \left[(m-n) - (m+n)\right] \\
&= 2m - \left[m - n - m - n\right] \\
&= 2m - m + n + m + n \\
&= 2m + 2n
\end{aligned}$$

4) <u>Simplificar la expresión:</u>

$$\begin{aligned}
&7m^2 - \left\{-\left[m^2 + 3n - (5-n) - (-3+m^2)\right]\right\} - (2n+3) \\
&= 7m^2 - \left\{-\left[m^2 + 3n - 5 + n + 3 - m^2\right]\right\} - 2n - 3 \\
&= 7m^2 - \left\{-m^2 - 3n + 5 - n - 3 + m^2\right\} - 2n - 3 \\
&= 7m^2 + m^2 + 3n - 5 + n + 3 - m^2 - 2n - 3 \\
&= 7m^2 + 2n - 5
\end{aligned}$$

5) <u>Simplificar la expresión:</u>

$$\begin{aligned}
&-(3m+n) - \left[2m + \left\{-m + (2m - (2n-5))\right\} - (n+6)\right] \\
&= -3m - n - \left[2m + \left\{-m + (2m - 2n + 5)\right\} - n - 6\right] \\
&= -3m - n - \left[2m + \left\{-m + 2m - 2n + 5\right\} - n - 6\right] \\
&= -3m - n - \left[2m - m + 2m - 2n + 5 - n - 6\right] \\
&= -3m - n - 2m + m - 2m + 2n - 5 + n + 6 \\
&= -6m + 2n + 1
\end{aligned}$$

6) <u>Simplificar la expresión:</u>

$$\begin{aligned}
&-\left[-3x + (-x - (2y-3))\right] + \left\{-(2x+y) + (-x-3) + 2 - (x+y)\right\} \\
&= -\left[-3x + (-x - 2y + 3)\right] + \left\{-2x - y - x - 3 + 2 - x - y\right\} \\
&= -\left[-3x - x - 2y + 3\right] - 2x - y - x - 3 + 2 - x - y \\
&= 3x + x + 2y - 3 - 4x - 2y - 1 \\
&= -4
\end{aligned}$$

◄MULTIPLICACIÓN : *La multiplicación es una operación que tiene por objeto, dadas dos cantidades llamadas multiplicando y multiplicador, hallar una tercera cantidad, llamada producto.*

multiplicando

$$a \times b = c$$

multiplicador *producto*

El multiplicando y el multiplicador son llamados factores del producto.

En nuestras clases de aritmética nos enseñaron que esta operación es representada a través del signo "x" (por).

En álgebra para evitar confusiones (por utilizar la "x" como una variable o incógnita) se ha convenido representarla de otras maneras :

Es así cómo la operación " a por b" *puede ser indicada de alguna de las siguientes maneras :*

1) **a . b**
2) **ab**
3) **a*b**
4) **(a).(b)**
5) **(a)(b)**

En álgebra para evitar confusiones en la multiplicación de cantidades conocidas (números) se acostumbra a encerrar los mismos entre paréntesis. Así, la multiplicación "12 por 20" suele indicarse como (12)(20) o como (12).(20) o como (12)(20)*

El orden de los factores no altera el producto. Así, el producto ab *puede escribirse* ba*; el producto* abc *puede escribirse también* bac *o* acb *(**Ley Conmutativa** de la multiplicación)*

Los factores de un producto pueden agruparse de cualquier modo.

Así, en el producto abcd, *tenemos:* abcd = a(bcd) = (ab)(cd) = (abc)d *(**Ley Asociativa** de la multiplicación).*

Ley de los signos :

1) (+ a).(+ b) = + ab
2) (– a).(– b) = + ab
3) (+ a).(– b) = – ab
4) (– a).(+ b) = – ab

Lo anterior podemos resumirlo diciendo que :

1) **+** por **+** da **+**
2) **–** por **–** da **+**
3) **+** por **–** da **–**
4) **–** por **+** da **–**

El signo del producto de varios factores es positivo cuando tiene un número par de factores negativos o ninguno :

(– a).(– b).(– c).(– d) = abcd

(+ a).(+ b).(+ c).(+ d) = abcd

El signo del producto de varios factores es negativo cuando tiene un número impar de factores negativos : *(– a).(– b).(– c) = – abc*

Ley de los exponentes : *Para multiplicar potencias de la misma base se escribe la misma base y se le pone por exponente la suma de los exponentes de los factores.*

Ejemplos:

1) $(X^m)(X^n) = X^{m+n}$
2) $(X^mY^n)(X^sY^t) = X^{m+s}\,Y^{n+t}$
3) $(X^2)(X) = X^{2+1} = X^3$
4) $(X^2Y^2)(XY^3) = (X^{2+1})(Y^{2+3}) = X^3Y^5$

Ley de los coeficientes : *El coeficiente del producto de dos factores es el producto de los coeficientes de los factores.*

(3a).(4b) = 12ab

◄MULTIPLICACIÓN DE MONOMIOS : *Se multiplican los coeficientes y a continuación de este producto se escriben las letras de los factores en orden alfabético, poniéndole a cada letra un exponente igual a la suma de los exponentes que tenga en los factores. El signo del producto vendrá dado por la Ley de los signos.*

Ejemplo 1 : **Multiplicar 3a por – 4b**

Primero se multiplican los coeficientes cumpliendo con la Ley de los signos : (3).(–4) = –12

A continuación se escriben las letras en orden alfabético : –12ab

$$(3a).(-4b) = -12ab$$

Ejemplo 2 : **Multiplicar $2b^2$ por $3b^3$**

Primero se multiplican los coeficientes cumpliendo con la Ley de los signos : (2).(3) = 6

A continuación de este producto se escriben las letras de los factores en orden alfabético, poniéndole a cada letra un exponente igual a la suma de los exponentes que tenga en los factores : $6(b^{2+3}) = 6b^5$

$$(2b^2)(3b^3) = (2)(3)(b^{2+3}) = 6b^5$$

Ejemplo 3 : **Multiplicar 2b por –3b**

$$(2b)(-3b) = (2)(-3)(b^{1+1}) = -6b^2$$

Ejemplo 4 : **Multiplicar $-2b^2$ por $-3b^3$**

$$(-2b^2)(-3b^3) = (-2)(-3)(b^{2+3}) = +6b^5$$

Ejemplo 5 : **Multiplicar $-4X^2Y^2$ por $5XY^3$**

Primero se multiplican los coeficientes cumpliendo con la Ley de los signos : (–4).(5) = –20

A continuación de este producto se escriben las letras de los factores en orden alfabético, poniéndole a cada letra un exponente igual a la suma de los exponentes que tenga en los factores : $-20\,(X^{2+1})\,(Y^{2+3})$

$$(-4X^2Y^2)\,(5XY^3) = -20\,(X^{2+1})\,(Y^{2+3}) = -20\,X^3Y^5$$

Ejemplo 6 : **Multiplicar 3a por – 4b por 2c**

Primero se multiplican los coeficientes cumpliendo con la Ley de los signos : (3).(–4).(2) = –24

A continuación se escriben las letras en orden alfabético : –24abc

$$(3a).(-4b).(2c) = -24abc$$

Ejemplo 7 : **Multiplicar $-4X^2Y^2$ por $5XY^3$ por $-XYZ$**

Primero se multiplican los coeficientes cumpliendo con la Ley de los signos : (–4).(5).(–1) = 20

A continuación de este producto se escriben las letras de los factores en orden alfabético, poniéndole a cada letra un exponente igual a la suma de los exponentes que tenga en los factores : $20(X^{2+1+1})\,(Y^{2+3+1})Z$

$$(-4X^2Y^2)\,(5XY^3)\,(-XYZ) = 20\,(X^{2+1+1})\,(Y^{2+3+1})Z = 20\,X^4Y^6Z$$

Ejemplo 8 : **Multiplicar $-4XY^2Z$ por $-5XY^2$ por $-2XYZ$**

Primero se multiplican los coeficientes cumpliendo con la Ley de los signos : (–4).(–5).(–2) = –40

A continuación de este producto se escriben las letras de los factores en orden alfabético, poniéndole a cada letra un exponente igual a la suma de los exponentes que tenga en los factores : $-40(X^{1+1+1})\,(Y^{2+2+1})\,(Z^{1+1})$

$$(-4XY^2Z)\,(-5XY^2)\,(-2XYZ) = -40\,(X^{1+1+1})\,(Y^{2+2+1})\,(Z^{1+1}) = -40\,X^3Y^5Z^2$$

Ejemplo 9 : **Multiplicar** $-2X^{2m+n}Y^{n-1}$ **por** $3X^{m+1}Y^{n}$

Primero se multiplican los coeficientes cumpliendo con la Ley de los signos : (–2).(3) = –6

A continuación de este producto se escriben las letras de los factores en orden alfabético, poniéndole a cada letra un exponente igual a la suma de los exponentes que tenga en los factores : $-6(X^{2m+n+m+1})\,(Y^{n-1+n})$

$$(-2X^{2m+n}Y^{n-1})\,(3X^{m+1}Y^{n}) = -6(X^{2m+n+m+1})\,(Y^{n-1+n})$$

$$= -6\,X^{3m+n+1}Y^{2n-1}$$

◄MULTIPLICACIÓN DE POLINOMIOS POR MONOMIOS :

*Se multiplica el monomio por cada uno de los términos del polinomio, teniendo en cuenta en cada caso la regla de los signos, y se separan los productos parciales con sus propios signos (**Ley Distributiva** de la multiplicación).*

Ejemplo 1 : **Multiplicar 2b por $3X^2 - 2X + 5$**

La multiplicación se indica como : $(2b).(3X^2 - 2X + 5) =$

Se multiplica el monomio (2b) por cada uno de los términos del polinomio, teniendo en cuenta en cada caso la regla de los signos:

$$(\mathbf{2b}).(\mathbf{3X^2} - 2X + 5) = \mathbf{6bX^2}$$

$$(\mathbf{2b}).(3X^2 \mathbf{-2X} + 5) = 6bX^2 \mathbf{-4bX}$$

$$(\mathbf{2b}).(3X^2 - 2X \mathbf{+5}) = 6bX^2 - 4bX \mathbf{+10b}$$

$$(2b).(3X^2 - 2X + 5) = \mathbf{6bX^2 - 4bX + 10b}$$

Ejemplo 2 : **Multiplicar $3X^2 - 2X + 5$ por $2X^2$**

La multiplicación se indica como : $(2X^2).(3X^2 - 2X + 5) =$

Se multiplica el monomio ($2X^2$) por cada uno de los términos del polinomio, teniendo en cuenta en cada caso la regla de los signos:

$$(\mathbf{2X^2}).(\mathbf{3X^2} - 2X + 5) = \mathbf{6X^{2+2}}$$

$$(\mathbf{2X^2}).(3X^2 \mathbf{-2X} + 5) = 6X^4 \mathbf{-4X^{2+1}}$$

$$(\mathbf{2X^2}).(3X^2 - 2X \mathbf{+5}) = 6X^4 - 4X^3 \mathbf{+10X^2}$$

$$(2X^2).(3X^2 - 2X + 5) = \mathbf{6X^4 - 4X^3 + 10X^2}$$

***La ecuación también puede disponerse en forma similar a lo aprendido en nuestras clases de aritmética** :*

$$\begin{array}{lll} 3X^2 & -2X & +5 \\ 2X^2 & & \\ \hline \end{array}$$

A continuación multiplicamos el monomio ($2X^2$) por cada uno de los términos del polinomio, teniendo en cuenta en cada caso la regla de los signos y colocando el resultado en la parte de abajo.

$$\begin{array}{lll} 3X^2 & -2X & +5 \\ 2X^2 & & \\ \hline \mathbf{6X^4} & \mathbf{-4X^3} & \mathbf{+10X^2} \end{array}$$

Por cualquiera de los dos métodos el resultado será el mismo.

Ejercicios :

1. $$\begin{array}{l} 3x^3-x^2 \\ -2x \\ \hline -6x^4+2x^3 \end{array}$$

2. $$\begin{array}{l} 8x^2y-3y^2 \\ 2ax^3 \\ \hline 16ax^5y-6ax^3y^2 \end{array}$$

3. $$\begin{array}{l} x^2-4x+3 \\ -2x \\ \hline -2x^3+8x^2-6x \end{array}$$

4. $$\begin{array}{l} a^3-4a^2+6a \\ 3ab \\ \hline 3a^4b-12a^3b+18a^2b \end{array}$$

5. $$\begin{array}{l} a^2-2ab+b^2 \\ -ab \\ \hline -a^3b+2a^2b^2-ab^3 \end{array}$$

6. $$\begin{array}{l} x^5-6x^3-8x \\ 3a^2x^2 \\ \hline 3a^2x^7-18a^2x^5-24a^2x^3 \end{array}$$

7. $$\begin{array}{l} m^4-3m^2n^2+7n^4 \\ -4m^3x \\ \hline -4m^7x+12m^5n^2x-28m^3n^4x \end{array}$$

8. $$\begin{array}{l} x^3-4x^2y+6xy^2 \\ ax^3y \\ \hline ax^6y-4ax^5y^2+6ax^4y^3 \end{array}$$

9. $$\begin{array}{l} a^3-5a^2b-8ab^2 \\ -4a^4m^2 \\ \hline -4a^7m^2+20a^6bm^2+32a^5b^2m^2 \end{array}$$

10. $$\begin{array}{l} a^m-a^{m-1}+a^{m-2} \\ -2a \\ \hline -2a^{m+1}+2a^{m-1+1}-2a^{m-2+1} \\ =-2a^{m+1}+2a^m-2a^{m-1} \end{array}$$

11. $$\begin{array}{l} x^{m+1}+3x^m-x^{m-1} \\ 3x^{2m} \\ \hline 3x^{3m+1}+9x^{3m}-3x^{3m-1} \end{array}$$

12. $$\begin{array}{l} a^mb^n+a^{m-1}b^{n+1}-a^{m-2}b^{n+2} \\ 3a^2b \\ \hline 3a^{m+2}b^{n+1}+3a^{m+1}b^{n+2}-3a^mb^{n+3} \end{array}$$

13. $$\begin{array}{l} x^3-3x^2+5x-6 \\ -4x^2 \\ \hline -4x^5+12x^4-20x^3+24x^2 \end{array}$$

14. $$\begin{array}{l} a^4-6a^3x+9a^2x^2-8 \\ 3bx^3 \\ \hline 3a^4bx^3-18a^3bx^4+27a^2bx^5-24bx^3 \end{array}$$

15. $$\begin{array}{l} a^{n+3}-3a^{n+2}-4a^{n+1}-a^n \\ -a^nx^2 \\ \hline -a^{2n+3}x^2+3a^{2n+2}x^2+4a^{2n+1}x^2+a^{2n}x^2 \end{array}$$

16. $$\begin{array}{l} x^4-6x^3+8x^2-7x+5 \\ -3a^2x^3 \\ \hline -3a^2x^7+18a^2x^6-24a^2x^5+21a^2x^4-15a^2x^3 \end{array}$$

17. $$\begin{array}{l} -3x^3+5x^2y-7xy^2-4y^3 \\ 5a^2xy^2 \\ \hline -15a^2x^4y^2+25a^2x^3y^3-35a^2x^2y^4-20a^2xy^5 \end{array}$$

18. $$\begin{array}{l} x^{a+5}-3x^{a+4}+x^{a+3}-5x^{a+1} \\ -2x^2 \\ \hline -2x^{a+7}+6x^{a+6}-2x^{a+5}+10x^{a+3} \end{array}$$

19. $$\begin{array}{l} a^8-3a^6b^2+a^4b^4-3a^2b^6+b^8 \\ -5a^3y^2 \\ \hline -5a^{11}y^2+15a^9b^2y^2-5a^7b^4y^2+15a^5b^6y^2-5a^3b^8y^2 \end{array}$$

20. $$\begin{array}{l} a^mb^n+3a^{m-1}b^{n-2}-a^{m-2}b^{n-4}+a^{m-3}b^{n-6} \\ 4a^mb^{-3} \\ \hline 4a^{2m}b^{n-3}+12a^{2m-1}b^{n-5}-4a^{2m-2}b^{n-7}+4a^{2m-3}b^{n-9} \end{array}$$

◄MULTIPLICACIÓN DE POLINOMIOS :

Se multiplican todos los términos del multiplicando por cada uno de los términos del multiplicador, teniendo en cuenta la Ley de los signos, y se reducen los términos semejantes.

Ejemplo 1 : **Multiplicar $X + 3$ por $X - 2$**

La multiplicación se indica como : $(X + 3).(X - 2) =$

Se multiplican todos los términos del multiplicando por cada uno de los términos del multiplicador, teniendo en cuenta la Ley de los signos

$$(\mathbf{X} + 3).(\mathbf{X} - 2) = \mathbf{X^2}$$

$$(\mathbf{X} + 3).(X \mathbf{-2}) = X^2 \mathbf{-2X}$$

$$(X \mathbf{+ 3}).(\mathbf{X} - 2) = X^2 - 2X \mathbf{+ 3X}$$

$$(X \mathbf{+ 3}).(X \mathbf{-2}) = X^2 - 2X + 3X \mathbf{- 6}$$

Una vez efectuada la operación se reducen los términos semejantes del polinomio resultante (producto) :

$$(X + 3).(X - 2) = X^2 - 2X + 3X - 6 = \mathbf{X^2 + X - 6}$$

La operación también puede disponerse en forma similar a lo aprendido en la multiplicación de un polinomio por un monomio (pág. 12).:

Los dos factores deben ordenarse con relación a una misma letra y colocarse uno debajo del otro:

$$\begin{array}{ll} X & +3 \\ X & -2 \\ \hline \end{array}$$

Primero se multiplica el primer término del multiplicador (X) por los dos términos del multiplicando (X+3) :

$$\begin{array}{ll} X & +3 \\ X & -2 \\ \hline X^2 & +3X \end{array}$$

Posteriormente se multiplica el segundo término del multiplicador (–2) por los dos términos del multiplicando (X+3), escribiendo los productos parciales de modo que los términos semejantes queden en columna :

$$\begin{array}{lll} X & +3 & \\ X & -2 & \\ \hline X^2 & +3X & \\ & -2X & -6 \\ \hline \end{array}$$

Por último se reducen los términos semejantes :

$$\begin{array}{lll} X & +3 & \\ X & -2 & \\ \hline X^2 & +3X & \\ & -2X & -6 \\ \hline \mathbf{X^2} & \mathbf{+ X} & \mathbf{-6} \end{array}$$

El resultado es el mismo que con el método anterior.

Ejemplo 1 : **Multiplicar $2X + 3$ por $3X^2 - 2$**

La multiplicación se indica como : $(2X + 3).(3X^2 - 2) =$

Se multiplican todos los términos del multiplicando por cada uno de los términos del multiplicador, teniendo en cuenta la Ley de los signos

$$(\mathbf{2X} + 3).(\mathbf{3X^2} - 2) = \mathbf{6X^3}$$

$(\mathbf{2X} + 3).(3X^2 \mathbf{-2}) = 6X^3 \mathbf{- 4X}$

$(2X + \mathbf{3}).(\mathbf{3X^2} - 2) = 6X^3 - 4X \mathbf{+ 9X^2}$

$(2X + \mathbf{3}).(3X^2 \mathbf{-2}) = 6X^3 - 4X + 9X^2 \mathbf{- 6}$

Una vez efectuada la operación se debe ordenar el polinomio resultante (producto) :

$$(2X + 3).(3X^2 - 2) = 6X^3 - 4X + 9X^2 - 6 = \mathbf{6X^3 + 9X^2 - 4X - 6}$$

Ejercicios :

1.
$$\begin{array}{r} a+3 \\ a-1 \\ \hline a^2+3a \\ -a-3 \\ \hline a^2+2a-3 \end{array}$$

2.
$$\begin{array}{r} a-3 \\ a+1 \\ \hline a^2-3a \\ a-3 \\ \hline a^2-2a-3 \end{array}$$

3.
$$\begin{array}{r} x+5 \\ x-4 \\ \hline x^2+5x \\ -4x-20 \\ \hline x^2+x-20 \end{array}$$

4.
$$\begin{array}{r} m-6 \\ m-5 \\ \hline m^2-6m \\ -5m+30 \\ \hline m^2-11m+30 \end{array}$$

5.
$$\begin{array}{r} -x+3 \\ -x+5 \\ \hline x^2-3x \\ -5x+15 \\ \hline x^2-8x+15 \end{array}$$

6.
$$\begin{array}{r} -a-2 \\ -a-3 \\ \hline a^2+2a \\ +3a+6 \\ \hline a^2+5a+6 \end{array}$$

7.
$$\begin{array}{r} 3x-2y \\ 2x+y \\ \hline 6x^2-4xy \\ +3xy-2y^2 \\ \hline 6x^2-xy-2y^2 \end{array}$$

8.
$$\begin{array}{r} 5x-4y \\ -3x+2y \\ \hline -15x^2+12xy \\ +10xy-8y^2 \\ \hline -15x^2+22xy-8y^2 \end{array}$$

9.
$$\begin{array}{r} 5a-7b \\ a+3b \\ \hline 5a^2-7ab \\ +15ab-21b^2 \\ \hline 5a^2+8ab-21b^2 \end{array}$$

10.
$$\begin{array}{r} 7x-3 \\ 2x+4 \\ \hline 14x^2-6x \\ +28x-12 \\ \hline 14x^2+22x-12 \end{array}$$

11.
$$\begin{array}{r} -a+b \\ 8a-4b \\ \hline -8a^2+8ab \\ +4ab-4b^2 \\ \hline -8a^2+12ab-4b^2 \end{array}$$

12.
$$\begin{array}{r} 6m-5n \\ m-n \\ \hline 6m^2-5mn \\ -6mn+5n^2 \\ \hline 6m^2-11mn+5n^2 \end{array}$$

13.

$$
\begin{array}{l}
x^3+2x^2-x \\
x^2-2x+5 \\
\hline
x^5+2x^4-x^3 \\
\quad -2x^4-4x^3+2x^2 \\
\qquad\qquad +5x^3+10x^2-5x \\
\hline
x^5 \qquad\qquad\qquad +12x^2-5x
\end{array}
$$

14.

$$
\begin{array}{l}
m^3-3m^2n+2mn^2 \\
m^2-2mn-8n^2 \\
\hline
m^5-3m^4n+2m^3n^2 \\
\quad -2m^4n+6m^3n^2-4m^2n^3 \\
\qquad\qquad -8m^3n^2+24m^2n^3-16mn^4 \\
\hline
m^5-5m^4n \qquad\qquad +20m^2n^3-16mn^4
\end{array}
$$

15.

$$
\begin{array}{l}
x^2+x+1 \\
x^2-x-1 \\
\hline
x^4+x^3+x^2 \\
\quad -x^3-x^2-x \\
\qquad\quad -x^2-x-1 \\
\hline
x^4 \quad -x^2-2x-1
\end{array}
$$

16.

$$
\begin{array}{l}
x^4-3x^2+2 \\
x^2-2x+3 \\
\hline
x^6 \quad -3x^4 \quad +2x^2 \\
\quad -2x^5 \quad +6x^3 \quad -4x \\
\qquad +3x^4 \quad -9x^2 \quad +6 \\
\hline
x^6-2x^5 \quad +6x^3-7x^2-4x+6
\end{array}
$$

17.

$$
\begin{array}{l}
m^3+m^2-4m-1 \\
m^3+1 \\
\hline
m^6+m^5-4m^4-m^3 \\
\qquad\qquad\qquad +m^3+m^2-4m-1 \\
\hline
m^6+m^5-4m^4 \qquad +m^2-4m-1
\end{array}
$$

18.

$$
\begin{array}{l}
a^3-5a+2 \\
a^2-a+5 \\
\hline
a^5 \quad -5a^3+2a^2 \\
\quad -a^4 \quad +5a^2-2a \\
\qquad +5a^3 \quad -25a+10 \\
\hline
a^5-a^4 \quad +7a^2-27a+10
\end{array}
$$

19.

$$
\begin{array}{l}
x^2-2xy+y^2 \\
-x^2+xy+3y^2 \\
\hline
-x^4+2x^3y-x^2y^2 \\
\quad +x^3y-2x^2y^2+xy^3 \\
\qquad\qquad +3x^2y^2-6xy^3+3y^4 \\
\hline
-x^4+3x^3y \qquad -5xy^3+3y^4
\end{array}
$$

20.

$$
\begin{array}{l}
n^2-2n+1 \\
n^2-1 \\
\hline
n^4-2n^3+n^2 \\
\qquad\qquad -n^2+2n-1 \\
\hline
n^4-2n^3 \quad +2n-1
\end{array}
$$

21.

$$
\begin{array}{l}
a^3-3a^2b+4ab^2 \\
a^2b\ -2ab^2-10b^3 \\
\hline
a^5b-3a^4b^2\ +4a^3b^3 \\
\qquad -\ 2a^4b^2+6a^3b^3\ -\ 8a^2b^4 \\
\qquad\qquad -10a^3b^3+30a^2b^4-40ab^5 \\
\hline
a^5b-5a^4b^2 \qquad\qquad +22a^2b^4-40ab^5
\end{array}
$$

22.

$$
\begin{array}{l}
8x^3-12x^2y+6xy^2-9y^3 \\
2x+3y \\
\hline
16x^4-24x^3y+12x^2y^2-18xy^3 \\
\qquad +24x^3y-36x^2y^2+18xy^3-27y^4 \\
\hline
16x^4 \qquad -24x^2y^2 \qquad -27y^4
\end{array}
$$

23.

$$
\begin{array}{l}
2y^3-3y^2+y-4 \\
2y+5 \\
\hline
4y^4-6y^3\ +2y^2\ -8y \\
\qquad +10y^3-15y^2+5y-20 \\
\hline
4y^4+4y^3\ -13y^2-3y-20
\end{array}
$$

24.

$$
\begin{array}{l}
-a^3+2ax^2+3x^3 \\
2a^2-3ax-x^2 \\
\hline
-2a^5 \qquad +4a^3x^2+6a^2x^3 \\
\qquad +3a^4x \qquad -6a^2x^3-9ax^4 \\
\qquad\qquad +a^3x^2 \qquad -2ax^4\ -3x^5 \\
\hline
-2a^5+3a^4x+5a^3x^2 \qquad -11ax^4-3x^5
\end{array}
$$

25.

$$
\begin{array}{l}
x^4-3x^3y+2x^2y^2+xy^3 \\
-x^2-xy-y^2 \\
\hline
-x^6\ +3x^5y-2x^4y^2-x^2y^3 \\
\qquad -x^5y+3x^4y^2-2x^3y^3\ -x^2y^4 \\
\qquad\qquad -\ x^4y^2\ +3x^3y^3-2x^2y^4-xy^5 \\
\hline
-x^6+2x^5y \qquad\qquad -3x^2y^4-xy^5
\end{array}
$$

26.

$$
\begin{array}{l}
a^3-5a^2+2a-3 \\
a^3-2a-7 \\
\hline
a^6-5a^5+2a^4-3a^3 \\
\qquad -2a^4+10a^3-4a^2+6a \\
\qquad\qquad -7a^3+35a^2-14a+21 \\
\hline
a^6-5a^5 \qquad\qquad +31a^2\ -8a\ +21
\end{array}
$$

27.

$$
\begin{array}{l}
m^4+m^3-m^2+3 \\
m^2-2m+3 \\
\hline
m^6+m^5\ -m^4 \qquad +3m^2 \\
\qquad -2m^5-2m^4+2m^3 \qquad -6m \\
\qquad\qquad +3m^4+3m^3-3m^2 \qquad +9 \\
\hline
m^6-\ m^5 \qquad +5m^3 \qquad -6m+9
\end{array}
$$

28.

$$
\begin{array}{l}
a^4+a^3b-3a^2b^2-ab^3+b^4 \\
a^2-2ab+b^2 \\
\hline
a^6+a^5b\ -3a^4b^2-a^3b^3\ +a^2b^4 \\
\qquad -2a^5b-2a^4b^2+6a^3b^3+2a^2b^4-2ab^5 \\
\qquad\qquad +\ a^4b^2+\ a^3b^3\ -3a^2b^4-ab^5\ +b^6 \\
\hline
a^6-a^5b\ -4a^4b^2+6a^3b^3 \qquad -3ab^5+b^6
\end{array}
$$

Ejercicios con exponentes literales :

1.

$$\begin{array}{l} a^{x+2}-a^{x+1}+a^{x} \\ a+1 \\ \hline a^{x+3}-a^{x+2}+a^{x+1} \\ \quad +a^{x+2}-a^{x+1}+a^{x} \\ \hline a^{x+3} \qquad\qquad\qquad +a^{x} \end{array}$$

2.

$$\begin{array}{l} -x^{n+3}+2x^{n+2}+x^{n+1} \\ x^{2}+x \\ \hline -x^{n+5}+2x^{n+4}+x^{n+3} \\ \qquad -\ x^{n+4}+2x^{n+3}+x^{n+2} \\ \hline -x^{n+5}+x^{n+4}+3x^{n+3}+x^{n+2} \end{array}$$

3.

$$\begin{array}{l} m^{a+2}+m^{a+1}-m^{a}+m^{a-1} \\ m^{2}-2m+3 \\ \hline m^{a+4}+m^{a+3}-m^{a+2}+m^{a+1} \\ \quad -2m^{a+3}-2m^{a+2}+2m^{a+1}-2m^{a} \\ \qquad +3m^{a+2}+3m^{a+1}-3m^{a}+3m^{a-1} \\ \hline m^{a+4}-m^{a+3} \qquad +6m^{a+1}-5m^{a}+3m^{a-1} \end{array}$$

4.

$$\begin{array}{l} a^{n+2}+3a^{n+1}-2a^{n} \\ a^{n+1}+a^{n} \\ \hline a^{2n+3}+3a^{2n+2}-2a^{2n+1} \\ \quad +\ a^{2n+2}+3a^{2n+1}-2a^{2n} \\ \hline a^{2n+3}+4a^{2n+2}+a^{2n+1}-2a^{2n} \end{array}$$

5.

$$\begin{array}{l} x^{a+2}+2x^{a+1}-x^{a} \\ x^{a+3}-2x^{a+1} \\ \hline x^{2a+5}+2x^{2a+4}-x^{2a+3} \\ \qquad -2x^{2a+3}-4x^{2a+2}+2x^{2a+1} \\ \hline x^{2a+5}+2x^{2a+4}-3x^{2a+3}-4x^{2a+2}+2x^{2a+1} \end{array}$$

6.

$$\begin{array}{l} a^{x}-2a^{x-1}+3a^{x-2} \\ a^{2}+2a-1 \\ \hline a^{x+2}-2a^{x+1}+3a^{x} \\ \quad +2a^{x+1}-4a^{x}+6a^{x-1} \\ \qquad -\ a^{x}+2a^{x-1}-3a^{x-2} \\ \hline a^{x+2} \qquad -2a^{x}+8a^{x-1}-3a^{x-2} \end{array}$$

7.

$$\begin{array}{l} a^{x}+3a^{x-1}-2a^{x-2} \\ a^{x}-a^{x-1}+a^{x-2} \\ \hline a^{2x}+3a^{2x-1}-2a^{2x-2} \\ \quad -\ a^{2x-1}-3a^{2x-2}+2a^{2x-3} \\ \qquad +\ a^{2x-2}+3a^{2x-3}-2a^{2x-4} \\ \hline a^{2x}+2a^{2x-1}-4a^{2x-2}+5a^{2x-3}-2a^{2x-4} \end{array}$$

8.

$$\begin{array}{l} m^{a+4}-m^{a+3}-2m^{a+2}+m^{a+1} \\ -m^{a-1}+m^{a-2}+m^{a-3} \\ \hline -m^{2a+3}+m^{2a+2}+2m^{2a+1}-m^{2a} \\ \quad +m^{2a+2}-m^{2a+1}-2m^{2a}+m^{2a-1} \\ \qquad +m^{2a+1}-m^{2a}-2m^{2a-1}+m^{2a-2} \\ \hline -m^{2a+3}+2m^{2a+2}+2m^{2a+1}-4m^{2a}-m^{2a-1}+m^{2a-2} \end{array}$$

◄PRODUCTO CONTINUADO DE POLINOMIOS :

Cuando se presente la multiplicación de tres o más polinomios, la operación se desarrolla efectuando el producto de dos factores (polinomios) cualquieras; este producto se multiplica por el tercer factor (polinomio) y así sucesivamente hasta incluirlos a todos en la operación:

Ejemplo 1 : **Efectuar 4.(a + 5).(a – 3)**

Primero multiplico "4 por a + 5" y el resultado obtenido lo multiplico por "a – 3" obteniendo el producto definitivo.

$$
\begin{array}{l}
4(a+5)(a-3) \\
4a+20 \\
\quad a-3 \\
\hline
4a^2+20a \\
\qquad -12a-60 \\
\hline
4a^2+8a-60
\end{array}
$$

Ejemplo 2 : **Efectuar $3a^2$.(X + 1).(X – 1)**

Primero multiplico "$3a^2$ por X + 1" y el resultado obtenido lo multiplico por "X – 1" obteniendo el producto definitivo.

$$
\begin{array}{l}
3a^2(x+1)(x-1) \\
3a^2x+3a^2 \\
x-1 \\
\hline
3a^2x^2+3a^2x \\
\qquad -3a^2x-3a^2 \\
\hline
3a^2x^2 \qquad -3a^2
\end{array}
$$

Ejemplo 3 : **Efectuar 2.(a – 3).(a – 1).(a + 4)**

Primero multiplico "2 por a – 3", el resultado obtenido lo multiplico por "a – 1" y ese nuevo producto lo multiplico por "a + 4" obteniendo el producto definitivo.

$$
\begin{array}{l}
2(a-3)(a-1)(a+4) \\
2a-6 \\
a-1 \\
\hline
2a^2-6a \\
\quad -2a+6 \\
\hline
2a^2-8a+6 \\
a+4 \\
\hline
2a^3-8a^2+6a \\
\quad +8a^2-32a+24 \\
\hline
2a^3 \qquad -26a+24
\end{array}
$$

4. $(x^2+1)(x^2-1)(x^2+1)$

$$
\begin{array}{l}
x^2+1 \\
x^2+1 \\
\hline
x^4+x^2 \\
\quad +x^2+1 \\
\hline
x^4+2x^2+1 \\
x^2-1 \\
\hline
x^6+2x^4+x^2 \\
\quad -x^4-2x^2-1 \\
\hline
x^6+x^4-x^2-1
\end{array}
$$

5. $m(m-4)(m-6)(3m+2)$

$$
\begin{array}{l}
m^2-4m \\
m-6 \\
\hline
m^3-4m^2 \\
\quad -6m^2+24m \\
\hline
m^3-10m^2+24m \\
3m+2 \\
\hline
3m^4-30m^3+72m^2 \\
\quad +2m^3-20m^2+48m \\
\hline
3m^4-28m^3+52m^2+48m
\end{array}
$$

6. $(a-b)(a^2-2ab+b^2)(a+b)$

$$
\begin{array}{l}
a^2-2ab+b^2 \\
a+b \\
\hline
a^3-2a^2b+ab^2 \\
\quad +a^2b-2ab^2+b^3 \\
\hline
a^3-a^2b-ab^2+b^3 \\
a-b \\
\hline
a^4-a^3b-a^2b^2+ab^3 \\
\quad -a^3b+a^2b^2+ab^3-b^4 \\
\hline
a^4-2a^3b+2ab^3-b^4
\end{array}
$$

7. $3x(x^2-2x+1)(x-1)(x+1)$

$$
\begin{array}{l}
3x^3-6x^2+3x \\
x-1 \\
\hline
3x^4-6x^3+3x^2 \\
\quad -3x^3+6x^2-3x \\
\hline
3x^4-9x^3+9x^2-3x \\
x+1 \\
\hline
3x^5-9x^4+9x^3-3x^2 \\
\quad +3x^4-9x^3+9x^2-3x \\
\hline
3x^5-6x^4+6x^2-3x
\end{array}
$$

8. $(x^2-x+1)(x^2+x-1)(x-2)$

$$
\begin{array}{l}
x^2-x+1 \\
x^2+x-1 \\
\hline
x^4-x^3+x^2 \\
\quad +x^3-x^2+x \\
\quad -x^2+x-1 \\
\hline
x^4-x^2+2x-1 \\
x-2 \\
\hline
x^5-x^3+2x^2-x \\
\quad -2x^4+2x^2-4x+2 \\
\hline
x^5-2x^4-x^3+4x^2-5x+2
\end{array}
$$

◄MULTIPLICACIÓN COMBINADA CON SUMA Y RESTA :

Ejemplo 1 : **Simplificar (X + 3).(X – 4) + 3.(X – 1).(X + 2)**

Se efectúa la primera multiplicación o producto " (X + 3).(X – 4)"; después la segunda multiplicación "3.(X – 1).(X + 2)" y por último se suman los dos productos obtenidos.

Efectuando el primer producto (recordando lo estudiado en Multiplicación de Polinomios pág. 14) :

$$(X + 3).(X - 4) = X^2 - X - 12$$

Efectuando el segundo producto (recordando lo estudiado en Producto Continuado de Polinomios pág. 19) :

$$3.(X - 1).(X + 2) = 3X^2 + 3X - 6$$

Sumando los dos productos (Suma de Polinomios pág. 4):

$$(X^2 - X - 12) + (3X^2 + 3X - 6) = X^2 - X - 12 + 3X^2 + 3X - 6$$

$$= 4X^2 + 2X - 18$$

Ejercicios :

1. $4(x+3)+5(x+2)$
$= 4x+12+5x+10$
$= 9x+22$

2. $6(x^2+4)-3(x^2+1)+5(x^2+2)$
$= 6x^2+24-3x^2-3+5x^2+10$
$= 8x^2+31$

3. $a(a-x)+3a(x+2a)-a(x-3a)$
$= a^2-ax+3ax+6a^2-ax+3a^2$
$= 10a^2+ax$

4. $x^2(y^2+1)+y^2(x^2+1)-3x^2y^2$
$= x^2y^2+x^2+x^2y^2+y^2-3x^2y^2$
$= -x^2y^2+x^2+y^2$

5. $4m^3-5mn^2+3m^2(m^2+n^2)-3m(m^2-n^2)$
$= 4m^3-5mn^2+3m^4+3m^2n^2-3m^3+3mn^2$
$= 3m^4+m^3+3m^2n^2-2mn^2$

6. $y^2+x^2y^3-y^3(x^2+1)+y^2(x^2+1)-y^2(x^2-1)$
$= y^2+x^2y^3-x^2y^3-y^3+x^2y^2+y^2-x^2y^2+y^2$
$= -y^3+3y^2$

7. $5(x+2)-(x+1)(x+4)-6x$
$= 5x+10-(x^2+4x+x+4)-6x$
$= -x+10-x^2-4x-x-4$
$= -x^2-6x+6$

8. $(a+5)(a-5)-3(a+2)(a-2)+5(a+4)$
$= a^2-5a+5a-25-3(a^2-2a+2a-4)+5a+20$
$= a^2+5a-5-3(a^2-4)$
$= a^2+5a-5-3a^2+12$
$= -2a^2+5a+7$

9. $(a+b)(4a-3b)-(5a-2b)(3a+b)-(a+b)(3a-6b)$
$= 4a^2+ab-3b^2-(15a^2-ab-2b^2)-(3a^2-3ab-6b^2)$
$= 4a^2+ab-3b^2-15a^2+ab+2b^2-3a^2+3ab+6b^2$
$= -14a^2+5ab+5b^2$

◄SUPRESIÓN DE SIGNOS DE AGRUPACIÓN CON PRODUCTOS INDICADOS:

Ejercicio 1 : **Simplificar la siguiente expresión**

$$x-\left[3a+2\left(-x+1\right)\right]$$

Un coeficiente colocado junto a un signo de agrupación nos indica que hay que multiplicarlo por cada uno de los términos encerrados en el signo de agrupación. Así en este caso multiplicaremos "+2" por (–X + 1) y tendremos :

$$=x-\left[3a-2x+2\right]$$

Ahora observamos que antes del corchete aparece un signo negativo, lo que nos indica que debemos cambiarle los signos a todos los términos que estén dentro de él.

$$=x-3a+2x-2$$

Por último se reducen los términos semejantes y el resultado será :

$$=3x-3a-2$$

2. $-\left(a+b\right)-3\left[2a+b\left(-a+2\right)\right]$

$=-a-b-3\left[2a-ab+2b\right]$

$=-a-b-6a+3ab-6b$

$=-7a-7b+3ab\Rightarrow-7a+3ab-7b$

3. $-\left[3x-2y+\left(x-2y\right)-2\left(x+y\right)-3\left(2x+1\right)\right]$

$=-\left[3x-2y+x-2y-2x-2y-6x-3\right]$

$=-\left[-4x-6y-3\right]$

$=4x+6y+3$

4. $4x^2-\left\{-3x+5-\left[-x+x\left(2-x\right)\right]\right\}$

$=4x^2-\left\{-3x+5-\left[-x+2x-x^2\right]\right\}$

$=4x^2-\left\{-3x+5+x-2x+x^2\right\}$

$=4x^2-\left\{-4x+5+x^2\right\}$

$=4x^2+4x-5-x^2$

$=3x^2+4x-5$

5. $2a-\left\{-3x+2\left[-a+3x-2\left(-a+b-\left(2+a\right)\right)\right]\right\}$

$=2a-\left\{-3x+2\left[-a+3x-2\left(-a+b-2-a\right)\right]\right\}$

$=2a-\left\{-3x+2\left[-a+3x+2a-2b+4+2a\right]\right\}$

$=2a-\left\{-3x+2\left[3a+3x-2b+4\right]\right\}$

$=2a-\left\{-3x+6a+6x-4b+8\right\}$

$=2a+3x-6a-6x+4b-8$

$=-4a-3x+4b-8\Rightarrow-4a+4b-3x-8$

6. $a-\left(x+y\right)-3\left(x-y\right)+2\left[-\left(x-2y\right)-2\left(-x-y\right)\right]$

$=a-x-y-3x+3y+2\left[-x+2y+2x+2y\right]$

$=a-4x+2y+2\left[x+4y\right]$

$=a-4x+2y+2x+8y$

$=a-2x+10y$

7. $-3\left\{-\left[+\left(-a+b\right)\right]\right\}-4\left\{-\left[-\left(-a-b\right)\right]\right\}$

$=-3\left\{-\left[-a+b\right]\right\}-4\left\{-\left[a+b\right]\right\}$

$=-3\left\{a-b\right\}-4\left\{-a-b\right\}$

$=-3a+3b+4a+4b$

$=a+7b$

◄DIVISIÓN : *Es una operación que tiene por objeto, dado el producto de dos factores (dividendo) y uno de los factores (divisor), hallar el otro factor (cociente).*

dividendo

$$\frac{a}{b} = c$$

divisor

cociente

De esta definición se deduce que el cociente multiplicado por el divisor reproduce el dividendo.

Así, la operación de dividir **6a²** *entre* **3a**, *que se indica* **6a² ÷ 3a** *ó* **6a² / 3a** *ó* $\frac{6a^2}{3a}$ *consiste en hallar una cantidad que multiplicada por* **3a** *dé* **6a²**. *Esa cantidad (cociente) es* **2a** .

Es evidente que $\frac{6a^2}{2a}$ **= 3a**, *donde vemos que si el dividendo se divide entre el cociente nos da de cociente lo que antes era divisor.*

Ley de los signos :

La Ley de los signos en la división es la misma que en la multiplicación.

Signos iguales dan positivo y signos diferentes dan negativo.

1) $\frac{+ab}{+a}$ = + b

2) $\frac{-ab}{-a}$ = + b

3) $\frac{+ab}{-a}$ = – b

4) $\frac{-ab}{+a}$ = – b

Lo anterior podemos resumirlo diciendo que :

1) **+** entre **+** da **+**
2) **–** entre **–** da **+**
3) **+** entre **–** da **–**
4) **–** entre **+** da **–**

Ley de los exponentes : *Para dividir potencias de la misma base se escribe la misma base y se le pone de exponente la diferencia entre el exponente del dividendo y el exponente del divisor.*

Ejemplos:

1) $(X^m) \div (X^n) = \frac{X^m}{X^n} = X^{m-n}$

2) $(X^5) \div (X^2) = \frac{X^5}{X^2} = X^{5-2} = X^3$

3) $(X^3Y^6) \div (X^2Y^4) = \frac{X^3Y^6}{X^2Y^4} = (X^{3-2})\,(Y^{6-4}) = XY^2$

Ley de los coeficientes : *El coeficiente del cociente es el cociente de dividir el coeficiente del dividendo entre el coeficiente del divisor.*

$$\frac{6a^2}{2a} = 3a$$

3a *es el cociente porque* **3a por 2a = 6a²**. *Y vemos que el coeficiente del cociente 3, es el cociente de dividir 6 entre 2.*

En otras palabras : divido el coeficiente del término del numerador (6) entre el coeficiente del término del denominador (2)

$$6 / 2 = 3$$

A continuación realizo la división de las partes literales, siguiendo los pasos mostrados en esta misma página en la Ley de los exponentes :

$$a^2 / a = a$$

Y después se multiplican los dos resultados = **= 3a**

◄DIVISIÓN DE DOS MONOMIOS : *Se divide el coeficiente del dividendo (numerador) entre el coeficiente del divisor (denominador) y a continuación se escriben en orden alfabético las letras, poniéndole a cada letra un exponente igual a la diferencia entre el exponente que tiene en el dividendo (numerador) y el exponente que tiene en el divisor (denominador). El signo lo da la Ley de los signos.*

Ejemplos :

1) $(10X^m) \div (5X^n) =$

Esta expresión también puede indicarse como $(10X^m) / (5X^n)$ *ó como* $\frac{10X^m}{5X^n}$ *, en donde* $10X^m$ *recibe el nombre de dividendo (numerador) y* $5X^n$ *recibe el nombre de divisor (denominador).*

Se divide el coeficiente del dividendo (numerador) entre el coeficiente del **divisor** *(denominador). El signo lo da la Ley de los signos*

$$\frac{10}{5} = 2$$

A continuación se escriben en orden alfabético las letras, poniéndole a cada letra un exponente igual a la diferencia entre el exponente que tiene en el dividendo (numerador) y el exponente que tiene en el divisor (denominador).

$$2X^{m-n}$$

La operación quedará expresada :

$$(10X^m) \div (5X^n) = \frac{10X^m}{5X^n} = 2X^{m-n}$$

2) $(6X^5) \div (-2X^2) = \frac{6X^5}{-2X^2} = -3X^{5-2} = -3X^3$

3) $(-6X^5) \div (-2X^2) = \frac{-6X^5}{-2X^2} = 3X^{5-2} = 3X^3$

4) $(10X^3Y^6) \div (-5X^2Y^4) =$

Se divide el coeficiente del dividendo o numerador $(10X^3Y^6)$ *entre el coeficiente del divisor o denominador* $(-5X^2Y^4)$ *. El signo lo da la Ley de los signos.*

$$\frac{10}{-5} = -2$$

A continuación se escriben en orden alfabético las letras, poniéndole a cada letra un exponente igual a la diferencia entre el exponente que tiene en el dividendo (numerador) y el exponente que tiene en el divisor (denominador).

$$-2(X^{3-2})(Y^{6-4})$$

La operación quedará expresada :

$$(10X^3Y^6) \div (-5X^2Y^4) = \frac{10X^3Y^6}{-5X^2Y^4} = -2(X^{3-2})(Y^{6-4}) = -2XY^2$$

5. $-a^3b^4c / a^3b^4 = -a^{3-3}b^{4-4}c = -c$

6. $-a^2b / -ab = a^{2-1}b^{1-1} = a$

7. $54x^2y^2z^3 / -6xy^2z^3 = -9x^{2-1}y^{2-2}z^{3-3} = -9x$

8. $-5m^2n / m^2n = -5m^{2-2}n^{1-1} = -5$

9. $-8a^2x^3 / -8a^2x^3 = a^{2-2}x^{3-3} = 1$

10. $-xy^2 / 2y = -\frac{xy^{2-1}}{2} = -\frac{xy}{2}$

11. $5x^4y^5 / -6x^4y = -\frac{5}{6}x^{4-4}y^{5-1} = -\frac{5}{6}y^4$

◄DIVISIÓN DE UN POLINOMIO POR UN MONOMIO :

Se divide cada uno de los términos del polinomio por el monomio separando los coeficientes parciales con sus propios signos. ***Esta es la Ley Distributiva de la división.***

Ejemplo 1 :

$$\frac{a^2-ab}{a}=\frac{a^2}{a}-\frac{ab}{a}=a-b$$

Ejemplo 2 :

$$\frac{3x^2y^3-5a^2x^4}{-3x^2}=\frac{3x^2y^3}{-3x^2}-\frac{5a^2x^4}{-3x^2}=-y^3+\frac{5}{3}a^2x^2$$

3. $$\frac{3a^3-5ab^2-6a^2b^3}{-2a}$$
$$=\frac{3a^3}{-2a}-\frac{5ab^2}{-2a}-\frac{6a^2b^3}{-2a}=-\frac{3}{2}a^2+\frac{5}{2}b^2+3ab^3$$

4. $$\frac{x^3-4x^2+x}{x}=\frac{x^3}{x}-\frac{4x^2}{x}+\frac{x}{x}=x^2-4x+1$$

5. $$\frac{4x^8-10x^6-5x^4}{2x^3}$$
$$=\frac{4x^8}{2x^3}-\frac{10x^6}{2x^3}-\frac{5x^4}{2x^3}=2x^5-5x^3-\frac{5}{2}x$$

6. $$\frac{6m^3-8m^2n+20mn^2}{-2m}$$
$$=\frac{6m^3}{-2m}-\frac{8m^2n}{-2m}+\frac{20mn^2}{-2m}=-3m^2+4mn-10n^2$$

7. $$\frac{6a^8b^8-3a^6b^6-a^2b^3}{3a^2b^3}$$
$$=\frac{6a^8b^8}{3a^2b^3}-\frac{3a^6b^6}{3a^2b^3}-\frac{a^2b^3}{3a^2b^3}=2a^6b^5-a^4b^3-\frac{1}{3}$$

8. $$\frac{x^4-5x^3-10x^2+15x}{-5x}$$
$$=\frac{x^4}{-5x}-\frac{5x^3}{-5x}-\frac{10x^2}{-5x}+\frac{15x}{-5x}=-\frac{1}{5}x^3+x^2+2x-3$$

9. $$\frac{8m^9n^2-10m^7n^4-20m^5n^6+12m^3n^8}{2m^2}$$
$$=\frac{8m^9n^2}{2m^2}-\frac{10m^7n^4}{2m^2}-\frac{20m^5n^6}{2m^2}+\frac{12m^3n^8}{2m^2}$$
$$=4m^7n^2-5m^5n^4-10m^3n^6+6mn^8$$

10. $$\frac{a^x+a^{m-1}}{a^2}=\frac{a^x}{a^2}+\frac{a^{m-1}}{a^2}=a^{x-2}+a^{m-3}$$

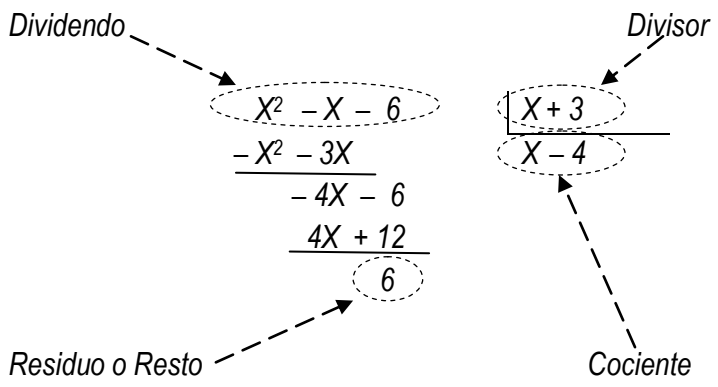
11. $$\frac{2a^m-3a^{m+2}+6a^{m+4}}{-3a^3}$$
$$=\frac{2a^m}{-3a^3}-\frac{3a^{m+2}}{-3a^3}+\frac{6a^{m+4}}{-3a^3}=-\frac{2}{3}a^{m-3}+a^{m-1}-2a^{m+1}$$

12. $$\frac{a^mb^n+a^{m-1}b^{n+2}-a^{m-2}b^{n+4}}{a^2b^3}$$
$$=\frac{a^mb^n}{a^2b^3}+\frac{a^{m-1}b^{n+2}}{a^2b^3}-\frac{a^{m-2}b^{n+4}}{a^2b^3}$$
$$=a^{m-2}b^{n-3}+a^{m-3}b^{n-1}-a^{m-4}b^{n+1}$$

13. $$\frac{x^{m+2}-5x^m+6x^{m+1}-x^{m-1}}{x^{m-2}}$$
$$=\frac{x^{m+2}}{x^{m-2}}-\frac{5x^m}{x^{m-2}}+\frac{6x^{m+1}}{x^{m-2}}-\frac{x^{m-1}}{x^{m-2}}$$
$$=x^4-5x^2+6x^3-x\Rightarrow x^4+6x^3-5x^2-x$$

◄DIVISIÓN DE DOS POLINOMIOS :

Para facilitar la comprensión de los procedimientos recomendados en este trabajo, colocaremos a continuación una división de dos polinomios donde se identificará cada una de las partes que la conforman:



En las divisiones exactas :

$$\frac{Dividendo}{Divisor} = Cociente$$

En las divisiones donde el residuo es distinto de cero:

$$\frac{Dividendo}{Divisor} = Cociente + \frac{Residuo}{Divisor}$$

Dividir $-11X^2 + X^4 - 18X - 8$ entre $X + 1$

Primero se debe ***ordenar y completar*** *el dividendo* ***($-11X^2 + X^4 - 18X - 8$)*** *con relación a una misma letra. En aquellos casos donde falte un término se colocará cero para garantizar que el polinomio esté completo.*

Dividir $X^4 + 0X^3 - 11X^2 - 18X - 8$ *entre* $X + 1$

Se colocan los dos polinomios de manera similar a como lo hacemos para realizar la división en aritmética:

$$X^4 + 0X^3 - 11X^2 - 18X - 8 \quad \big| \; X + 1$$

Se divide el primer término del dividendo (X^4) entre el primer término del divisor (X) y tendremos el primer término del cociente (X^3).

$$X^4 + 0X^3 - 11X^2 - 18X - 8 \quad \big| \; X + 1$$
$$X^3$$

Este primer término del cociente se multiplica por todo el divisor y al producto se le cambia el signo, escribiendo cada término debajo de su semejante.

X^3 *por* $X = X^4$ *y al cambiarle el signo queda* $-X^4$ *y lo coloco debajo del dividendo*

$$X^4 + 0X^3 - 11X^2 - 18X - 8 \quad \big| \; X + 1$$
$$-X^4 \qquad\qquad X^3$$

$\boldsymbol{X^3}$ *por* $\boldsymbol{1}$ = $\boldsymbol{X^3}$ *y al cambiarle el signo queda* $\boldsymbol{-X^3}$ *y lo coloco debajo del dividendo*

$$\begin{array}{rl} X^4 + 0X^3 - 11X^2 - 18X - 8 & \underline{|\ X+1} \\ -X^4 - X^3 & X^3 \end{array}$$

Ahora efectuamos la operación :

$$\begin{array}{rl} X^4 + 0X^3 - 11X^2 - 18X - 8 & \underline{|\ X+1} \\ \underline{-X^4 - X^3} & X^3 \\ -X^3 - 11X^2 - 18X - 8 & \end{array}$$

Se divide el primer término del resto ($-X^3$) entre el primer término del divisor (X) y tendremos el segundo término del cociente ($-X^2$).

$$\begin{array}{rl} X^4 + 0X^3 - 11X^2 - 18X - 8 & \underline{|\ X+1} \\ \underline{-X^4 - X^3} & X^3 - X^2 \\ -X^3 - 11X^2 - 18X - 8 & \end{array}$$

Este segundo término del cociente ($-X^2$). se multiplica por todo el divisor y al producto se le cambia el signo.

$\boldsymbol{-X^2}$ *por* $\boldsymbol{X}$ = $\boldsymbol{-X^3}$ *y al cambiarle el signo queda* $\boldsymbol{X^3}$ *y lo coloco debajo del dividendo*

$$\begin{array}{rl} X^4 + 0X^3 - 11X^2 - 18X - 8 & \underline{|\ X+1} \\ \underline{-X^4 - X^3} & X^3 - X^2 \\ -X^3 - 11X^2 - 18X - 8 & \\ X^3 & \end{array}$$

$\boldsymbol{-X^2}$ *por* $\boldsymbol{1}$ = $\boldsymbol{-X^2}$ *y al cambiarle el signo queda* $\boldsymbol{X^2}$ *y lo coloco debajo del dividendo*

$$\begin{array}{rl} X^4 + 0X^3 - 11X^2 - 18X - 8 & \underline{|\ X+1} \\ \underline{-X^4 - X^3} & X^3 - X^2 \\ -X^3 - 11X^2 - 18X - 8 & \\ X^3 + X^2 & \end{array}$$

Al efectuar la operación (restarlo) :

$$\begin{array}{rl} X^4 + 0X^3 - 11X^2 - 18X - 8 & \underline{|\ X+1} \\ \underline{-X^4 - X^3} & X^3 - X^2 \\ -X^3 - 11X^2 - 18X - 8 & \\ \underline{X^3 + X^2} & \\ -10X^2 - 18X - 8 & \end{array}$$

Se divide el primer término del resto ($-10X^2$) entre el primer término del divisor (X) y tendremos el tercer término del cociente ($-10X$).

$$\begin{array}{rl} X^4 + 0X^3 - 11X^2 - 18X - 8 & \underline{|\ X+1} \\ \underline{-X^4 - X^3} & X^3 - X^2 - 10X \\ -X^3 - 11X^2 - 18X - 8 & \\ \underline{X^3 + X^2} & \\ -10X^2 - 18X - 8 & \end{array}$$

Este tercer término del cociente ($-10X$). se multiplica por todo el divisor y al producto se le cambian los signos.

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
X^4 & +\ 0X^3 & -\ 11X^2 & -\ 18X & -\ 8 & X+1 \\ \cline{6-6}
-X^4 & -\ X^3 & & & & X^3 - X^2 - 10X \\ \cline{1-2}
 & -\ X^3 & -\ 11X^2 & -\ 18X & -\ 8 & \\
 & X^3 & +\ X^2 & & & \\ \cline{2-3}
 & & -\ 10X^2 & -\ 18X & -\ 8 & \\
 & & +\ 10X^2 & +\ 10X & &
\end{array}
$$

Al efectuar la operación (restarlo) :

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
X^4 & +\ 0X^3 & -\ 11X^2 & -\ 18X & -\ 8 & X+1 \\ \cline{6-6}
-X^4 & -\ X^3 & & & & X^3 - X^2 - 10X \\ \cline{1-2}
 & -\ X^3 & -\ 11X^2 & -\ 18X & -\ 8 & \\
 & X^3 & +\ X^2 & & & \\ \cline{2-3}
 & & -\ 10X^2 & -\ 18X & -\ 8 & \\
 & & +\ 10X^2 & +\ 10X & & \\ \cline{3-4}
 & & & -\ 8X & -\ 8 &
\end{array}
$$

Se divide el primer término del resto (– 8X) entre el primer término del divisor (X) y tendremos el cuarto término del cociente (– 8).

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
X^4 & +\ 0X^3 & -\ 11X^2 & -\ 18X & -\ 8 & X+1 \\ \cline{6-6}
-X^4 & -\ X^3 & & & & X^3 - X^2 - 10X - 8 \\ \cline{1-2}
 & -\ X^3 & -\ 11X^2 & -\ 18X & -\ 8 & \\
 & X^3 & +\ X^2 & & & \\ \cline{2-3}
 & & -\ 10X^2 & -\ 18X & -\ 8 & \\
 & & +\ 10X^2 & +\ 10X & & \\ \cline{3-4}
 & & & -\ 8X & -\ 8 &
\end{array}
$$

Este cuarto término del cociente (– 8). se multiplica por todo el divisor y al producto se le cambian los signos.

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
X^4 & +\ 0X^3 & -\ 11X^2 & -\ 18X & -\ 8 & X+1 \\ \cline{6-6}
-X^4 & -\ X^3 & & & & X^3 - X^2 - 10X - 8 \\ \cline{1-2}
 & -\ X^3 & -\ 11X^2 & -\ 18X & -\ 8 & \\
 & X^3 & +\ X^2 & & & \\ \cline{2-3}
 & & -\ 10X^2 & -\ 18X & -\ 8 & \\
 & & +\ 10X^2 & +\ 10X & & \\ \cline{3-4}
 & & & -\ 8X & -\ 8 & \\
 & & & +\ 8X & +\ 8 &
\end{array}
$$

Al efectuar la operación (restarlo) :

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
X^4 & +\ 0X^3 & -\ 11X^2 & -\ 18X & -\ 8 & X+1 \\ \cline{6-6}
-X^4 & -\ X^3 & & & & \mathbf{X^3 - X^2 - 10X - 8} \\ \cline{1-2}
 & -\ X^3 & -\ 11X^2 & -\ 18X & -\ 8 & \\
 & X^3 & +\ X^2 & & & \\ \cline{2-3}
 & & -\ 10X^2 & -\ 18X & -\ 8 & \\
 & & +\ 10X^2 & +\ 10X & & \\ \cline{3-4}
 & & & -\ 8X & -\ 8 & \\
 & & & +\ 8X & +\ 8 & \\ \cline{4-5}
 & & & & 0 &
\end{array}
$$

Como el residuo es igual a cero, la división es exacta y el resultado es:

$$\boxed{\frac{X^4 - 11X^2 - 18X - 8}{X+1} = X^3 - X^2 - 10X - 8}$$

EJEMPLO: Dividir $3X^2 + 2X - 8$ entre $X + 2$

Se colocan los dos polinomios de manera similar a como lo hacemos para realizar la división en aritmética:

Se divide el primer término del dividendo ($3X^2$) entre el primer término del divisor (X) y tendremos el primer término del cociente.

$$\begin{array}{l|l} 3X^2 + 2X - 8 & X + 2 \\ \hline & \mathbf{3X} \end{array}$$

Este primer término del cociente se multiplica por todo el divisor y al producto se le cambia el signo, escribiendo cada término debajo de su semejante y se efectúa la operación :

$$\begin{array}{r|l} 3X^2 + 2X - 8 & X + 2 \\ \underline{-\,3X^2 - 6X} & \mathbf{3X} \\ -\,4X - 8 & \end{array}$$

Se divide el primer término del resto (– 4X) entre el primer término del divisor (X) y tendremos el segundo término del cociente.

$$\begin{array}{r|l} 3X^2 + 2X - 8 & X + 2 \\ \underline{-\,3X^2 - 6X} & \mathbf{3X - 4} \\ -\,4X - 8 & \end{array}$$

Este segundo término del cociente (– 4) se multiplica por todo el divisor y al producto se le cambian los signos y se efectúa la operación :

$$\begin{array}{r|l} 3X^2 + 2X - 8 & X + 2 \\ \underline{-\,3X^2 - 6X} & \mathbf{3X - 4} \\ -\,4X - 8 & \\ \underline{4X + 8} & \\ 0 & \end{array}$$

Como el residuo es igual a cero, la división es exacta y el resultado es:

$$\boxed{\mathbf{3X^2 + 2X - 8 \quad entre \quad X + 2 \quad = \quad 3X - 4}}$$

Ejercicios :

1. $$\begin{array}{r|l} a^2+2a-3 & a+3 \\ \underline{-a^2-3a} & a-1 \\ -\,a-3 & \\ \underline{+\,a+3} & \end{array}$$

2. $$\begin{array}{r|l} a^2-2a-3 & a+1 \\ \underline{-a^2-a} & a-3 \\ -\,3a-3 & \\ \underline{+\,3a+3} & \end{array}$$

3. $$\begin{array}{r|l} x^2+x-20 & x+5 \\ \underline{-x^2-5x} & x-4 \\ -4x-20 & \\ \underline{+4x+20} & \end{array}$$

4. $$\begin{array}{r|l} m^2-11m+30 & m-6 \\ \underline{-m^2+6m} & m-5 \\ -5m+30 & \\ \underline{+5m-30} & \end{array}$$

5. $$\begin{array}{r|l} x^2-8x+15 & -x+3 \\ \underline{-x^2+3x} & -x+5 \\ -5x+15 & \\ \underline{+5x-15} & \end{array}$$

6. $$\begin{array}{r|l} a^2+5a+6 & a+2 \\ \underline{-a^2-2a} & a+3 \\ 3a+6 & \\ \underline{-3a-6} & \end{array}$$

7. $$\begin{array}{r|l} 6x^2-xy-2y^2 & 2x+y \\ \underline{-6x^2-3xy} & 3x-2y \\ -4xy-2y^2 & \\ \underline{+4xy+2y^2} & \end{array}$$

8. $$\begin{array}{r|l} -15x^2+22xy-8y^2 & -3x+2y \\ \underline{+15x^2-10xy} & 5x-4y \\ 12xy-8y^2 & \\ \underline{-12xy+8y^2} & \end{array}$$

9. $$\begin{array}{r|l} 5a^2+8ab-21b^2 & a+3b \\ \underline{-5a^2-15ab} & 5a-7b \\ -7ab-21b^2 & \\ \underline{+7ab+21b^2} & \end{array}$$

10. $$\begin{array}{r|l} 14x^2-22x-12 & 7x-3 \\ \underline{-14x^2-6x} & 2x-4 \\ 28x-12 & \\ \underline{-28x-12} & \end{array}$$

11. $$\begin{array}{r|l} -8a^2+12ab-4b^2 & -a+b \\ \underline{+8a^2-8ab} & 8a-4b \\ 4ab-4b^2 & \\ \underline{-4ab+4b^2} & \end{array}$$

Mas Ejercicios :

1.
$$
\begin{array}{l|l}
a^4 \qquad -a^2-2a-1 & a^2+a+1 \\ \cline{2-2}
\underline{-a^4-a^3-a^2} \qquad\qquad\qquad & a^2-a-1 \\
\quad -a^3-2a^2-2a \qquad & \\
\quad \underline{+a^3+a^2+a} \qquad & \\
\qquad -a^2-a-1 & \\
\qquad \underline{+a^2+a+1} &
\end{array}
$$

2.
$$
\begin{array}{l|l}
x^5 \qquad\qquad +12x^2-5x & x^2-2x+5 \\ \cline{2-2}
\underline{-x^5+2x^4-5x^3} \qquad\qquad & x^3+2x^2-x \\
\quad 2x^4-5x^3+12x^2 & \\
\quad \underline{-2x^4+4x^3-10x^2} & \\
\qquad -x^3+2x^2-5x & \\
\qquad \underline{+x^3-2x^2+5x} &
\end{array}
$$

3.
$$
\begin{array}{l|l}
m^5-5m^4n \qquad\qquad +20m^2n^3-16mn^4 & m^2-2mn-8n^2 \\ \cline{2-2}
\underline{-m^5+2m^4n+8m^3n^2} \qquad\qquad & m^3-3m^2n+2mn^2 \\
\quad -3m^4n+8m^3n^2+20m^2n^3 & \\
\quad \underline{+3m^4n-6m^3n^2-24m^2n^3} & \\
\qquad 2m^3n^2-4m^2n^3-16mn^4 & \\
\qquad \underline{-2m^3n^2+4m^2n^3+16mn^4} &
\end{array}
$$

4.
$$
\begin{array}{l|l}
x^4 \qquad -x^2-2x-1 & x^2-x-1 \\ \cline{2-2}
\underline{-x^4+x^3+x^2} \qquad\qquad & x^2+x+1 \\
\quad +x^3 \qquad -2x & \\
\quad \underline{-x^3+x^2+x} & \\
\qquad x^2-x-1 & \\
\qquad \underline{-x^2+x+1} &
\end{array}
$$

5.
$$
\begin{array}{l|l}
x^6-2x^5 \qquad +6x^3-7x^2-4x+6 & x^4-3x^2+2 \\ \cline{2-2}
\underline{-x^6 \qquad +3x^4 \qquad -2x^2} \qquad\qquad & x^2-2x+3 \\
\quad -2x^5+3x^4+6x^3-9x^2-4x & \\
\quad \underline{+2x^5 \qquad -6x^3 \qquad +4x} & \\
\qquad 3x^4 \qquad -9x^2 \qquad +6 & \\
\qquad \underline{-3x^4 \qquad +9x^2 \qquad -6} &
\end{array}
$$

6.
$$
\begin{array}{l|l}
m^6+m^5-4m^4 \qquad +m^2-4m-1 & m^3+m^2-4m-1 \\ \cline{2-2}
\underline{-m^6-m^5+4m^4+m^3} \qquad\qquad & m^3+1 \\
\quad m^3+m^2-4m-1 & \\
\quad \underline{-m^3-m^2+4m+1} &
\end{array}
$$

<u>NOTA IMPORTANTE:</u> En la división de polinomios, el exponente del término de mayor grado del cociente es igual a la diferencia del exponente del término de mayor grado del dividendo menos el exponente del término de mayor grado del divisor.

COCIENTE MIXTO

En los casos de división estudiados anteriormente el dividendo era divisible exactamente por el divisor (el residuo final era igual a cero). Cuando el dividendo no es divisible exactamente por el divisor, la división no es exacta, nos da un residuo y esto origina los ***cocientes mixtos****, así llamados porque constan de entero y quebrado.*

En las divisiones donde el residuo es distinto de cero:

$$\frac{Dividendo}{Divisor} = Cociente + \frac{Residuo}{Divisor}$$

EJEMPLO: Dividir $X^2 - X - 6$ entre $X + 3$

$$\begin{array}{rrr|l} X^2 & -X & -6 & X+3 \\ \cline{4-4} -X^2 & -3X & & X-4 \\ \cline{1-2} & -4X & -6 & \\ & 4X & +12 & \\ \cline{2-3} & & 6 & \end{array}$$

$$\frac{X^2 - X - 6}{X + 3} = X - 4 + \frac{6}{X + 3}$$

EJEMPLO: Dividir $4X^3 + 3X$ entre $2X - 3$

$$\begin{array}{rrrr|l} 4X^3 & +0X^2 & +3X & +0 & 2X-3 \\ \cline{5-5} -4X^3 & +6X^2 & & & 2X^2+3X+6 \\ \cline{1-2} & +6X^2 & +3X & +0 & \\ & -6X^2 & +9X & & \\ \cline{2-3} & & 12X & +0 & \\ & & -12X & +18 & \\ \cline{3-4} & & & 18 & \end{array}$$

$$\frac{4X^3 + 3X}{2X - 3} = 2X^2 + 3X + 6 + \frac{18}{2X - 3}$$

EJEMPLO: Dividir $6X^2 + 7X + 2$ entre $2X + 3$

$$\begin{array}{rrr|l} 6X^2 & +7X & +2 & 2X+3 \\ \cline{4-4} -6X^2 & -9X & & 3X-1 \\ \cline{1-2} & -2X & +2 & \\ & 2X & +3 & \\ \cline{2-3} & & 5 & \end{array}$$

$$\frac{6X^2 + 7X + 2}{2X + 3} = 3X - 1 + \frac{5}{2X + 3}$$

◄DIVISIÓN DE POLINOMIOS UTILIZANDO LA REGLA DE RUFFINI :

Esta regla solo puede ser utilizada cuando el divisor es un binomio del tipo (X + a) o del tipo (X – a).

Ejemplo 1 : ***Dividir*** $X^4 - 4X^3 - X^2 + 16X - 12$ ***entre*** $X - 1$

Para aplicar la REGLA DE RUFFINI en la división de dos polinomios se deben seguir los siguientes pasos :

Primero los polinomios deben estar ordenados en forma descendente (decreciente). Cuando sea necesario se debe ***completar*** *el dividendo.*

Luego se copian los coeficientes del polinomio "dividendo" en una tabla similar a la siguiente:

	X^4	$-4X^3$	$-X^2$	$+16X$	-12
	1	– 4	– 1	16	– 12

Se coloca el segundo término del divisor en la parte izquierda pero con el signo cambiado (X – 1). Este valor recibe el nombre de ***raíz*** *del polinomio :*

	X^4	$-4X^3$	$-X^2$	$+16X$	-12
1	1	– 4	– 1	16	– 12
	1				

Se copia el primer coeficiente del dividendo debajo de él mismo :

	X^4	$-4X^3$	$-X^2$	$+16X$	-12
	1	– 4	– 1	16	– 12
	1				

Se multiplica la raíz con el primer coeficiente que se bajó y el producto se copia debajo del segundo coeficiente :

	X^4	$-4X^3$	$-X^2$	$+16X$	-12
1	1	– 4	– 1	16	– 12
	1	1			

Luego se efectúa la suma algebraica de las dos cantidades ubicadas en la columna donde se colocó el producto:

	X^4	$-4X^3$	$-X^2$	$+16X$	-12
1	1	– 4 1	– 1	16	– 12
	1	– 3			

Se multiplica la raíz por el resultado de la suma algebraica realizada y este producto se copia debajo del tercer coeficiente :

	X^4	$-4X^3$	$-X^2$	$+16X$	-12
1	1	– 4 1	– 1 – 3	16	– 12
	1	– 3			

Luego se efectúa la suma algebraica de las dos cantidades ubicadas en la columna donde se colocó el producto:

	X^4	$-4X^3$	$-X^2$	$+16X$	-12
1	1	– 4 1	– 1 – 3	16	– 12
	1	– 3	– 4		

Se multiplica la raíz por el resultado de la suma algebraica realizada y este producto se copia debajo del cuarto coeficiente :

	X^4	$-4X^3$	$-X^2$	$+16X$	-12
1	1	– 4 1	– 1 – 3	16 – 4	– 12
	1	– 3	– 4		

Luego se efectúa la suma algebraica de las dos cantidades ubicadas en la columna donde se colocó el producto:

	X^4	$-4X^3$	$-X^2$	$+16X$	-12
1	1	– 4 1	– 1 – 3	16 – 4	– 12
	1	– 3	– 4	12	

Se multiplica la raíz por el resultado de la suma algebraica realizada y este producto se copia debajo del quinto coeficiente :

	X^4	$-4X^3$	$-X^2$	$+16X$	-12
1	1	– 4 1	– 1 – 3	16 – 4	– 12 12
	1	– 3	– 4	12	

Luego se efectúa la suma algebraica de las dos cantidades ubicadas en la columna donde se colocó el producto:

	X^4	$-4X^3$	$-X^2$	$+16X$	-12
1	1	– 4 1	– 1 – 3	16 – 4	– 12 12
	1	– 3	– 4	12	0

Como el resultado final es cero (0), esto nos indica que la división es exacta (no hay resto),

La información que queda en la última fila representa el polinomio "cociente" (el resultado de dividir $X^4 - 4X^3 - X^2 + 16X - 12$ *entre* $X - 1$*)*

Para llegar a esa deducción debo tener presente que en la división de polinomios, el exponente del término de mayor grado del cociente es igual

a la diferencia del exponente del término de mayor grado del dividendo (X^4) menos el exponente del término de mayor grado del divisor (X).

	X^4	$-4X^3$	$-X^2$	$+16X$	-12
1	1	– 4 1	– 1 – 3	16 – 4	– 12 12
	1	– 3	– 4	12	0

Con esta información se deduce que :

$$(X^4 - 4X^3 - X^2 + 16X - 12) \div (X - 1) = X^3 - 3X^2 - 4X + 12$$

Ejemplo 2 : **Dividir $X^4 - 11X^2 - 18X - 8$ entre $X + 1$**

Para aplicar la REGLA DE RUFFINI en aquellos polinomios donde falta un término debemos colocar el mismo acompañado del coeficiente cero (Completar el dividendo).

En este caso en particular notamos que el dividendo no tiene el termino de grado tres, se conformará de la siguiente manera :

$$X^4 + 0X^3 - 11X^2 - 18X - 8$$

	X^4	$+0X^3$	$-11X^2$	$-18X$	-8
-1	1	0 -1	-11 1	-18 10	-8 8
	1	-1	-10	-8	0

$$(X^4 - 11X^2 - 18X - 8) \div (X + 1) = X^3 - X^2 - 10X - 8$$

Ejemplo 3 : **Dividir $X^3 - 3X^2 - 4X + 12$ entre $X - 1$**

Recuerde que hay que cambiarle el signo a

	X^3	$-3X^2$	$-4X$	$+12$	
1	1	– 3 1	– 4 – 2	12 – 6	
	1	– 2	– 6	6	

Como el resultado final es distinto de cero (6 en este caso), significa que la división no es exacta. Este 6 representa el residuo de la división.

Con esta información se deduce que el cociente de dicha división es $X^2 - 2X - 6$ *y el resto o residuo es* **6**.

Ejemplo 4 : **Dividir $X^3 - 3X^2 - 4X + 12$ entre $X + 1$**

Recuerde que hay que cambiarle el signo a

	X^3	$-3X^2$	$-4X$	$+12$	
– 1	1	– 3 – 1	– 4 4	12 0	
	1	– 4	0	12	

Como el resultado final es distinto de cero (12 en este caso), significa que la división no es exacta. Este 12 representa el residuo de la división.

Con esta información se deduce que el cociente de dicha división es $X^2 - 4X$ *y el resto o residuo es* **12**.

◄PRODUCTOS NOTABLES : *Se llama productos notables a ciertos productos que cumplen reglas fijas y cuyo resultado puede ser escrito por simple inspección, es decir, sin realizar la multiplicación.*

CUADRADO DE LA SUMA DE DOS CANTIDADES :

El cuadrado de la suma de dos cantidades es igual al ***cuadrado*** *de la primera cantidad* ***más*** *el doble producto de la primera cantidad por la segunda* ***más*** *el cuadrado de la segunda cantidad.*

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Para comprobar el enunciado anterior resolveremos este ejercicio "paso a paso" :

(a + b)² ***=*** *elevar al cuadrado (a + b) equivale a multiplicar este binomio por si mismo* ***= (a + b). (a + b)***

Efectuando la multiplicación (recordando lo indicado en Multiplicación de Polinomios pág. 14) tendremos :

$$\begin{array}{lll} a & +b & \\ a & +b & \\ \hline a^2 & +ab & \\ & +ab & +b^2 \\ \hline \mathbf{a^2} & \mathbf{+2ab} & \mathbf{+b^2} \end{array}$$

Ejemplos :

1. $(m+3)^2 = m^2 + 6m + 9$
2. $(5+x)^2 = 25 + 10x + x^2$
3. $(6a+b)^2 = 36a^2 + 12ab + b^2$
4. $(9+4m)^2 = 81 + 72m + 16m^2$
5. $(7x+11)^2 = 49x^2 + 154x + 121$
6. $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
7. $(1+3x^2)^2 = 1 + 6x^2 + 9x^4$
8. $(2x+3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2$
9. $(a^2x+by^2)^2 = a^4x^2 + 2a^2xby^2 + b^2y^4$
10. $(3a^3+8b^4)^2 = 9a^6 + 48a^3b^4 + 64b^8$
11. $(4m^5+5n^6)^2 = 16m^{10} + 40m^5n^6 + 25n^{12}$
12. $(7a^2b^3+5x^4)^2 = 49a^4b^6 + 70a^2b^3x^4 + 25x^8$
13. $(4ab^2+5xy^3)^2 = 16a^2b^4 + 40ab^2xy^3 + 25x^2y^6$
14. $(8x^2y+9m^3)^2 = 64x^4y^2 + 144x^2ym^3 + 81m^6$

CUADRADO DE LA DIFERENCIA DE DOS CANTIDADES :

El cuadrado de la diferencia de dos cantidades es igual al ***cuadrado*** *de la primera cantidad* ***menos*** *el doble producto de la primera cantidad por la segunda* ***más*** *el cuadrado de la segunda cantidad.*

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Para comprobar el enunciado anterior resolveremos este ejercicio "paso a paso" :

(a – b)² ***=*** *elevar al cuadrado (a – b) equivale a multiplicar este binomio por si mismo* ***= (a – b). (a – b)***

Efectuando la multiplicación (recordando lo indicado en Multiplicación de Polinomios pág. 14) tendremos :

$$
\begin{array}{lll}
a & -b & \\
a & -b & \\
\hline
a^2 & -ab & \\
 & -ab & +b^2 \\
\hline
\mathbf{a^2} & \mathbf{-2ab} & \mathbf{+b^2}
\end{array}
$$

Ejemplos :

1. $(a-3)^2 = a^2 - 6a + 9$
2. $(x-7)^2 = x^2 - 14x + 49$
3. $(9-a)^2 = 81 - 18a + a^2$
4. $(2a-3b)^2 = 4a^2 - 12ab + 9b^2$
5. $(4ax-1)^2 = 16a^2x^2 - 8ax + 1$
6. $(a^3-b^3)^2 = a^6 - 2a^3b^3 + b^6$
7. $(3a^4-5b^2)^2 = 9a^8 - 30a^4b^2 + 25b^4$
8. $(x^2-1)^2 = x^4 - 2x^2 + 1$
9. $(x^5-3ay^2)^2 = x^{10} - 6ax^5y^2 + 9a^2y^4$
10. $(a^7-b^7)^2 = a^{14} - 2a^7b^7 + b^{14}$
11. $(2m-3n)^2 = 4m^2 - 12mn + 9n^2$
12. $(10x^3-9xy^5)^2 = 100x^6 - 180x^4y^5 + 81x^2y^{10}$
13. $(x^m-y^n)^2 = x^{2m} - 2x^my^n + y^{2n}$
14. $(a^{x-2}-5)^2 = a^{2x-4} - 10a^{x-2} + 25$

PRODUCTO DE LA SUMA POR LA DIFERENCIA DE DOS CANTIDADES : *La suma de dos cantidades multiplicada por su diferencia es igual al cuadrado del minuendo (en la diferencia) menos el cuadrado del sustraendo. Generalmente acostumbramos a definirlo como : El cuadrado del primero menos el cuadrado del segundo.*

$$\mathbf{(a+b).(a-b) = a^2 - b^2}$$

Para comprobar el enunciado anterior efectuaremos la multiplicación (recordando lo indicado en Multiplicación de Polinomios pág. 14) :

$$
\begin{array}{lll}
a & +b & \\
a & -b & \\
\hline
a^2 & +ab & \\
 & -ab & -b^2 \\
\hline
\mathbf{a^2} & \mathbf{0} & \mathbf{-b^2}
\end{array}
$$

Ejemplos :

1. $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$
2. $(m-n)(m+n) = m^2 - n^2$
3. $(a-x)(x+a) = a^2 - x^2$
4. $(x^2+a^2)(x^2-a^2) = x^4 - a^4$
5. $(2a-1)(1+2a) = 4a^2 - 1$
6. $(n-1)(n+1) = n^2 - 1$
7. $(1-3ax)(3ax+1) = 1 - 9a^2x^2$
8. $(2m+9)(2m-9) = 4m^2 - 81$
9. $(a^3-b^2)(a^3+b^2) = a^6 - b^4$
10. $(y^2-3y)(y^2+3y) = y^4 - 9y^2$

CUBO DE UN BINOMIO (CUANDO EL BINOMIO ES LA SUMA DE DOS CANTIDADES) : *El cubo de la suma de dos cantidades es igual al **cubo** de la primera cantidad **más** el triple producto del cuadrado de la primera cantidad por la segunda sin exponente, **más** el triple producto del cuadrado de la segunda cantidad por la primera sin exponente, **más** el **cubo** de la segunda cantidad.*

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$(a + b)^3$ = *elevar al cubo (a + b) equivale a multiplicar este binomio por si mismo dos veces* ***= (a + b) . (a + b) . (a + b)***

Efectúe la multiplicación recordando lo indicado en Producto Continuado de Polinomios pág. 19 y notará que el resultado será

$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

CUBO DE UN BINOMIO (CUANDO EL BINOMIO ES LA DIFERENCIA DE DOS CANTIDADES) : *El cubo de la diferencia de dos cantidades es igual al **cubo** de la primera cantidad **menos** el triple producto del cuadrado de la primera cantidad por la segunda sin exponente, **más** el triple producto del cuadrado de la segunda cantidad por la primera sin exponente, **menos** el cubo de la segunda cantidad.*

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$(a - b)^3$ = *elevar al cubo (a – b) equivale a multiplicar este binomio por si mismo dos veces* ***= (a – b) . (a – b) . (a – b)***

Efectúe la multiplicación recordando lo indicado en Producto Continuado de Polinomios pág. 19 y notará que el resultado será

$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Ejemplos :

1. $(a+2)^3 = a^3 + 6a^2 + 12a + 8$
2. $(x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

3. $(m+3)^3 = m^3 + 9m^2 + 27m + 27$
4. $(n-4)^3 = n^3 - 12n^2 + 48n - 64$
5. $(2x+1)^3 = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$
6. $(1-3y)^3 = 1 - 9y + 27y^2 - 27y^3$
7. $(2+y^2)^3 = 8 + 12y^2 + 6y^4 + y^6$
8. $(1-2n)^3 = 1 - 6n + 12n^2 - 8n^3$
9. $(4n+3)^3 = 64n^3 + 144n^2 + 108n + 27$
10. $(a^2-2b)^3 = a^6 - 6a^4b + 12a^2b^2 - 8b^3$
11. $(2x+3y)^3 = 8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$
12. $(1-a^2)^3 = 1 - 3a^2 + 3a^4 - a^6$

PRODUCTO DE DOS BINOMIOS DE LA FORMA (X + a).(X + b) : *Estos productos cumplen las siguientes reglas:*

1) *El primer término del producto es el producto de los primeros términos de los binomios (primer término elevado al cuadrado).*
2) *El coeficiente del segundo término del producto es la suma algébrica de los segundos términos de los binomios y se acompañará del primer termino de los dos binomios (X).*
3) *El tercer término del producto es el producto de los segundos términos de los binomios (multiplicar los segundos términos de los dos binomios). El signo lo da la Ley de los signos :*

Ejemplo:

$$(X + 3).(X + 2) = X^2 + 5X + 6$$

A continuación realizaremos la multiplicación de estos dos binomios para verificar lo anterior.

$$
\begin{array}{lll}
X & +3 & \\
X & +2 & \\
\hline
X^2 & +3X & \\
 & +2X & +6 \\
\hline
\mathbf{X^2} & \mathbf{+5X} & \mathbf{+6}
\end{array}
$$

Ejemplos :

1. $(a+1)(a+2)=a^2+3a+2$
2. $(x+2)(x+4)=x^2+6x+8$
3. $(x+5)(x-2)=x^2+3x-10$
4. $(m-6)(m-5)=m^2-11m+30$
5. $(x+7)(x-3)=x^2+4x-21$
6. $(x+2)(x-1)=x^2+x-2$
7. $(x-3)(x-1)=x^2-4x+3$
8. $(x-5)(x+4)=x^2-x-20$
9. $(a-11)(a+10)=a^2-a-110$
10. $(n-19)(n+10)=n^2-9n-190$
11. $(a^2+5)(a^2-9)=a^4-4a^2-45$
12. $(x^2-1)(x^2-7)=x^4-8x^2+7$
13. $(n^2-1)(n^2+20)=n^4+19n^2-20$
14. $(n^3+3)(n^3-6)=n^6-3n^3-18$
15. $(x^3+7)(x^3-6)=x^6+x^3-42$
16. $(a^4+8)(a^4-1)=a^8+7a^4-8$

17. $(a^5-2)(a^5+7)=a^{10}+5a^5-14$
18. $(a^6+7)(a^6-9)=a^{12}-2a^6-63$
19. $(ab+5)(ab-6)=a^2b^2-ab-30$
20. $(xy^2-9)(xy^2+12)=x^2y^4+3xy^2-108$
21. $(a^2b^2-1)(a^2b^2+7)=a^4b^4+6a^2b^2-7$
22. $(x^3y^3-6)(x^3y^3+8)=x^6y^6+2x^3y^3-48$

◄ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA :

IGUALDAD *es la expresión de que dos cantidades o expresiones algebraicas tienen el mismo valor.*

Ejemplos : $4+5=9$; $a=b+c$; $3X^2=4X+15$

ECUACIÓN *es una igualdad en la que hay una o varias cantidades desconocidas llamadas* **incógnitas** *y que sólo se verifica o es verdadera para* **determinados valores** *de las incógnitas.*

Así, **5X + 2 = 17** *es* **una ecuación**, *porque es una igualdad en la que hay una incógnita, la "X", y esta igualdad sólo se verifica, o sea que solo es verdadera, para el* **valor** *"X = 3". En efecto, si sustituimos la "X" por "3", tenemos :*

5(3) + 2 = 17 ; 15 + 2 = 17, o sea : 17 = 17

Si le damos a "X" un valor distinto de "3", la igualdad **no se verifica** *o no es verdadera.*

MIEMBROS *de una ecuación son las expresiones que están a ambos lados de la igualdad.*

Se llama **primer miembro** *a la expresión que está a la izquierda del signo de igualdad, y* **segundo miembro**, *a la expresión que está a la derecha.*

Así, en la ecuación $3X - 5 = 2X - 3$ *, el primer miembro es* $3X - 5$ *y el segundo miembro* $2X - 3$.

CLASES DE ECUACIONES

Una **ecuación numérica** *es una ecuación que no tiene más letras que las incógnitas,*

Ejemplo : $3X - 5 = 2X - 3$ *donde la única letra es la incógnita "X".*

Una **ecuación literal** *es una ecuación que además de las incógnitas tiene otras letras, que representan cantidades conocidas.*

Ejemplo : $3X - 5a = 2b - 3bX$

Una ecuación es **entera** *cuando ninguno de sus términos tiene denominador como en los dos ejemplos anteriores, y es* **fraccionada** *cuando algunos o todos sus términos tienen denominador.*

Ejemplo : $\frac{3X}{2} + \frac{6X}{5} = 5 + \frac{X}{3}$

GRADO *de una ecuación con una sola incógnita es el mayor exponente que tiene la incógnita en la ecuación.*

Ejemplo : $4X - 6 = 3X - 1$ *y* $aX + b = b^2X + c$ *son ecuaciones de* **primer grado** *porque el mayor exponente de "X" es "1".*

Ejemplo : $4X^2 - 6X + 5 = 0$ *es una ecuación de* **segundo grado** *porque el mayor exponente de "X" es "2".*

Las ecuaciones de primer grado se llaman ecuaciones simples o ecuaciones lineales.

RAICES O SOLUCIONES *de una ecuación son los valores de las incógnitas que verifican o* **satisfacen** *la ecuación, es decir, que sustituidos en lugar de las incógnitas, convierten la ecuación en* **identidad.**

Ejemplo : En la ecuación $5X - 6 = 3X + 8$ *, la raíz es "7" porque haciendo* $X=7$ *se tiene*

$5(7) - 6 = 3(7) + 8$; $35 - 6 = 21 + 8$; $29 = 29$

Donde se puede observar que "7" **satisface** *la ecuación.*

Las ecuaciones de primer grado con una incógnita tienen una sola raíz.

RESOLVER UNA ECUACIÓN *es hallar sus raíces, o sea el valor o los valores de las incógnitas que satisfacen la ecuación.*

AXIOMA FUNDAMENTAL DE LAS ECUACIONES :

Si con cantidades iguales se verifican operaciones iguales (en ambos miembros de la ecuación), los resultados serán iguales.

REGLAS QUE SE DERIVAN DE ESTE AXIOMA:

1) **Si a los dos miembros de una ecuación se suma una misma cantidad, positiva o negativa, la igualdad subsiste.**
2) **Si a los dos miembros de una ecuación se resta una misma cantidad, positiva o negativa, la igualdad subsiste.**
3) **Si los dos miembros de una ecuación se multiplican por una misma cantidad, positiva o negativa, la igualdad subsiste.**
4) **Si los dos miembros de una ecuación se dividen por una misma cantidad, positiva o negativa, la igualdad subsiste.**
5) **Si los dos miembros de una ecuación se elevan a una misma potencia o si a los dos miembros se extrae la misma raíz, la igualdad subsiste**

LA TRANSPOSICIÓN DE TERMINOS *consiste en cambiar los términos de una ecuación de un miembro al otro.* **Cualquier término de una ecuación se puede pasar de un miembro al otro pero cambiándole el signo.**

CAMBIO DE SIGNOS DE UNA ECUACIÓN : **Los signos de todos los miembros de una ecuación se pueden cambiar sin que la ecuación varíe**, *porque equivale a multiplicar los dos miembros de la ecuación por "– 1", con lo cual la igualdad no varía. (Regla 3 del Axioma Fundamental de las ecuaciones. Pág.39).*

◄RESOLUCION DE ECUACIONES ENTERAS DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA :

Generalmente para resolver este tipo de ecuaciones se siguen los siguientes pasos:

1) *Se hace la transposición de términos, reuniendo en el primer miembro (izquierda) los términos que contengan la incógnita y en el otro miembro (derecho) todas las cantidades conocidas.*
2) *Se reducen los términos semejantes en cada miembro.*
3) *Se despeja la incógnita.*

Ejemplo 1 : *Resolver la ecuación* ***5X = 8X – 15***

Se hace la transposición de términos, reuniendo en el primer miembro (izquierda) los términos que contengan la incógnita y en el otro miembro (derecho) todas las cantidades conocidas. Recordar el cambio del signo de los términos que se pasen de un lado al otro.

$$5X - 8X = -15$$

Se reducen los términos semejantes en cada miembro.

$$-3X = -15$$

Se despeja la incógnita.

$$x = \frac{-15}{-3}$$

$$x = 5$$

Toda la operación se muestra a continuación:

$$5x = 8x - 15$$

$$5x - 8x = -15$$

$$-3x = -15$$

$$x = \frac{-15}{-3}$$

$$x = 5$$

VERIFICACION:

La verificación es la prueba de que el valor obtenido para la incógnita es correcto.

La verificación se realiza sustituyendo en los dos miembros de la ecuación dada la incógnita por el valor obtenido, y si éste es correcto, la ecuación dada se convertirá en identidad.

Así, en la ecuación anterior, haciendo "X = 5" en la ecuación dada tenemos:

5(5) = 8(5) – 15 ; 25 = 40 – 15 ; ***15 = 15***

Ejemplo 2 : *Resolver la ecuación* ***4X + 1 = 2***

Se hace la transposición de términos, reuniendo en el primer miembro (izquierda) los términos que contengan la incógnita y en el otro miembro (derecho) todas las cantidades conocidas. Recordar el cambio del signo de los términos que se pasen de un lado al otro.

$$4X = 2 - 1$$

Se reducen los términos semejantes en cada miembro.

$$4X = 1$$

Se despeja la incógnita.

$$x=\frac{1}{4}$$

Toda la operación se muestra a continuación:

$$4x+1=2$$
$$4x=2-1$$
$$4x=1$$
$$x=\frac{1}{4}$$

Ejemplos :

3.
$$y-5=3y-25$$
$$y-3y=-25+5$$
$$-2y=-20$$
$$y=\frac{-20}{-2}$$
$$y=10$$

4.
$$5x+6=10x+5$$
$$5x-10x=5-6$$
$$-5x=-1$$
$$x=\frac{-1}{-5}$$
$$x=\frac{1}{5}$$

5.
$$9y-11=-10+12y$$
$$9y-12y=-10+11$$
$$-3y=1$$
$$y=-\frac{1}{3}$$

6.
$$21-6x=27-8x$$
$$-6x+8x=27-21$$
$$2x=6$$
$$x=\frac{6}{2}$$
$$x=3$$

Hay ejercicios donde resulta más cómodo reducir los términos semejantes en cada miembro y después aplicar los pasos recomendados en la página anterior.

7.
$$11x+5x-1=65x-36$$
$$16x=65x-36+1$$
$$16x-65x=-35$$
$$-49x=-35$$
$$x=\frac{-35}{-49}$$
$$x=\frac{5}{7}$$

8.
$$8x-4+3x=7x+x+14$$
$$11x-4=8x+14$$
$$11x-8x=14+4$$
$$3x=18$$
$$x=\frac{18}{3}$$
$$x=6$$

9.
$$8x+9-12x=4x-13-5x$$
$$-4x+9=-x-13$$
$$-4x+x=-13-9$$
$$-3x=-22$$
$$x=\frac{-22}{-3}$$
$$x=\frac{22}{3}$$

10.
$$5y+6y-81=7y+102+65y$$
$$11y-81=72y+102$$
$$11y-72y=102+81$$
$$-61y=183$$
$$y=\frac{183}{-61}$$
$$y=-3$$

11.
$$16-7x-5-x=11x-3-x$$
$$8x-11=10x-3$$
$$8x-10x=-3-11$$
$$-2x=-14$$
$$x=\frac{-14}{-2}$$
$$x=7$$

12.
$$3x+101-4x-33=108-16x-100$$
$$-x+68=8-16x$$
$$-x+16x=8-68$$
$$15x=-60$$
$$x=\frac{-60}{15}$$
$$x=-4$$

13.
$$14-12x-39x-18x=256-60x-657x$$
$$9x-14=-717x-256$$
$$9x-717x=256-14$$
$$726x=242$$
$$x=\frac{242}{726}$$
$$x=\frac{1}{3}$$

14.
$$8x-15x-30x-51x=53x-31x-172$$
$$-88x=84x-172$$
$$-88x-84x=-172$$
$$-172x=-172$$
$$x=\frac{-172}{-172}$$
$$x=1$$

Verificando la respuesta del ***ejercicio 6*** *tenemos :*

21 – 6(3) = 27 – 8(3) ; 21 – 18 = 27 – 24 ; ***3 = 3***

Verificando la respuesta del ***ejercicio 14*** *tenemos :*

8(1) – 15(1) – 30(1) – 51(1) = 53(1) – 31(1) – 172

8 – 15 – 30 – 51 = 53 – 31 – 172 ; ***88 = 88***

◄RESOLUCION DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON SIGNOS DE AGRUPACIÓN :

Antes de abordar este aspecto se recomienda "repasar" lo indicado en "SIGNOS DE AGRUPACIÓN" (páginas 7, 8 y 9).

Este tipo de ecuaciones se resuelve de manera similar a las Ecuaciones Enteras De Primer Grado Con Una Incógnita (página 40), una vez que se hayan suprimido los signos de agrupación.

Ejemplo 1 : *Resolver la ecuación* ***X – (2X + 1) = 8 – (3X + 3)***

Se suprimen los signos de agrupación en ambos miembros de la ecuación.

$$X - 2X - 1 = 8 - 3X - 3$$

Se reducen términos semejantes en ambos miembros de la ecuación.

$$-X - 1 = 5 - 3X$$

Se hace la transposición de términos, reuniendo en el primer miembro (izquierda) los términos que contengan la incógnita y en el otro miembro (derecho) todas las cantidades conocidas. Recordar el cambio del signo de los términos que se pasen de un lado al otro.

$$-X + 3X = 5 + 1$$

Se reducen los términos semejantes en cada miembro.

$$2X = 6$$

Se despeja la incógnita.

$$x = \frac{6}{2}$$

$$x = 3$$

Toda la operación se muestra a continuación:

$$x - (2x + 1) = 8 - (3x + 3)$$

$$x - 2x - 1 = 8 - 3x - 3$$

$$-x - 1 = 5 - 3x$$

$$-x + 3x = 5 + 1$$

$$2x = 6$$

$$x = \frac{6}{2}$$

$$x = 3$$

Ejemplos :

2. $15x - 10 = 6x - (x + 2) + (-x + 3)$

$$15x - 10 = 6x - x - 2 - x + 3$$

$$15x - 10 = 4x + 1$$

$$15x - 4x = 10 + 1$$

$$x = \frac{11}{11}$$

$$x = 1$$

3. $(5 - 3x) - (-4x + 6) = (8x + 11) - (3x - 6)$

$$5 - 3x + 4x - 6 = 8x + 11 - 3x + 6$$

$$x - 1 = 5x + 17$$

$$x - 5x = 17 + 1$$

$$-4x = 18$$

$$x = \frac{18}{-4}$$

$$x = -\frac{9}{2}$$

4. $30x - (-x + 6) + (-5x + 4) = -(5x + 6) + (-8 + 3x)$

$$30x + x - 6 - 5x + 4 = -5x - 6 - 8 + 3x$$

$$26x - 2 = -2x - 14$$

$$26x + 2x = -14 + 2$$

$$28x = -12$$

$$x = -\frac{12}{28}$$

$$x = -\frac{3}{7}$$

5. $15x+(-6x+5)-2-(-x+3)=-(7x+23)-x+(3-2x)$

$$15x-6x+5-2+x-3=-7x-23-x+3-2x$$
$$10x=-10x-20$$
$$10x+10x=-20$$
$$20x=-20$$
$$x=\frac{-20}{20}$$
$$x=-1$$

6. $3x+[-5x-(x+3)]=8x+(-5x-9)$

$$3x+[-5x-x-3]=8x-5x-9$$
$$3x+[-6x-3]=3x-9$$
$$3x-6x-3=3x-9$$
$$-3x-3=3x-9$$
$$-x-1=x-3$$
$$-x-x=-3+1$$
$$-2x=-2 \Rightarrow x=\frac{-2}{-2}=1$$

7. $16x-[3x-(6-9x)]=30x+[-(3x+2)-(x+3)]$

$$16x-[3x-6+9x]=30x+[-3x-2-x-3]$$
$$16x-[12x-6]=30x+[-4x-5]$$
$$16x-12x+6=30x-4x-5$$
$$4x+6=26x-5$$
$$4x-26x=-5-6$$
$$-22x=-11$$
$$x=\frac{-11}{-22}=\frac{1}{2}$$

8. $x-[5+3x-\{5x-(6+x)\}]=-3$

$$x-[5+3x-\{5x-6-x\}]=-3$$
$$x-[5+3x-\{4x-6\}]=-3$$
$$x-[5+3x-4x+6]=-3$$
$$x-[11-x]=-3$$
$$x-11+x=-3$$
$$2x=-3+11$$
$$2x=8 \Rightarrow x=\frac{8}{2}=4$$

9. $9x-(5x+1)-\{2+8x-(7x-5)\}+9x=0$

$$9x-5x-1-\{2+8x-7x+5\}+9x=0$$
$$4x-1-\{x+7\}+9x=0$$
$$4x-1-x-7+9x=0$$
$$12x-8=0$$
$$12x=8$$
$$x=\frac{8}{12}$$
$$x=\frac{2}{3}$$

10. $71+[-5x+(-2x+3)]=25-[-(3x+4)-(4x+3)]$

$$71+[-5x-2x+3]=25-[-3x-4-4x-3]$$
$$71+[-7x+3]=25-[-7x-7]$$
$$71-7x+3=25+7x+7$$
$$74-7x=32+7x$$
$$74-32=7x+7x$$
$$42=14x$$
$$\frac{42}{14}=x$$
$$3=x$$

◄RESOLUCION DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON PRODUCTOS INDICADOS :

Antes de abordar este aspecto se recomienda "repasar" lo indicado en "MULTIPLICAIÓN DE POLINOMIOS POR MONOMIOS" (página 12) y en "MULTIPLICACIÓN DE POLINOMIOS" (página 14).

Este tipo de ecuaciones se resuelve de manera similar a las Ecuaciones Enteras De Primer Grado Con Una Incógnita (página 40), con la salvedad de que inicialmente se deben efectuar los productos indicados en la ecuación.

Ejemplo 1 : *Resolver la ecuación* ***X + 3(X – 1) = 6 – 4(2X + 3)***

Se efectúan los productos indicados.

$$X + 3X - 3 = 6 - 8X - 12$$

Se reducen términos semejantes en ambos miembros de la ecuación.

$$4X - 3 = -8X - 6$$

Se hace la transposición de términos, reuniendo en el primer miembro (izquierda) los términos que contengan la incógnita y en el otro miembro (derecho) todas las cantidades conocidas. Recordar el cambio del signo de los términos que se pasen de un lado al otro.

$$4X + 8X = -6 + 3$$

Se reducen los términos semejantes en cada miembro.

$$12X = -3$$

Se despeja la incógnita.

$$x = \frac{-3}{12} \Rightarrow x = -\frac{1}{4}$$

Toda la operación se muestra a continuación:

$$x + 3(x-1) = 6 - 4(2x+3)$$
$$x + 3x - 3 = 6 - 8x - 12$$
$$4x - 3 = -8x - 6$$
$$4x + 8x = -6 + 3$$
$$12x = -3$$
$$x = \frac{-3}{12} \Rightarrow x = -\frac{1}{4}$$

Ejemplos :

2. $5(x-1) + 16(2x+3) = 3(2x-7) - x$

$$5x - 5 + 32x + 48 = 6x - 21 - x$$
$$37x + 43 = 5x - 21$$
$$37x - 5x = -21 - 43$$
$$32x = -64$$
$$x = \frac{-64}{32} \Rightarrow x = -2$$

3. $2(3x+3) - 4(5x-3) = x(x-3) - x(x+5)$

$$6x + 6 - 20x + 12 = x^2 - 3x - x^2 - 5x$$
$$-14x + 18 = -8x$$
$$-14x + 8x = -18$$
$$-6x = -18$$
$$x = \frac{-18}{-6} \Rightarrow x = 3$$

4. $184 - 7(2x+5) = 301 + 6(x-1) - 6$

$$184 - 14x - 35 = 301 + 6x - 6 - 6$$
$$149 - 14x = 289 + 6x$$
$$149 - 289 = 6x + 14x$$
$$-140 = 20x$$
$$\frac{-140}{20} = x$$
$$-7 = x$$

5. $7(18-x)-6(3-5x)=-(7x+9)-3(2x+5)-12$

$$126-7x-18+30x=-7x-9-6x-15-12$$
$$108+23x=-13x-36$$
$$23x+13x=-36-108$$
$$36x=-144$$
$$x=\frac{-144}{36}$$
$$x=-4$$

6. $3x(x-3)+5(x+7)-x(x+1)-2(x^2+7)+4=0$

$$3x^2-9x+5x+35-x^2-x-2x^2-14+4=0$$
$$-5x+25=0$$
$$-5x=-25$$
$$x=\frac{-25}{-5}$$
$$x=5$$

7. $-3(2x+7)+(-5x+6)-8(1-2x)-(x-3)=0$

$$-6x-21-5x+6-8+16x-x+3=0$$
$$4x-20=0$$
$$4x=20$$
$$x=\frac{20}{4}$$
$$x=5$$

8. $(3x-4)(4x-3)=(6x-4)(2x-5)$

$$12x^2-9x-16x+12=12x^2-38x+20$$
$$-25x+38x=20-12$$
$$13x=8$$
$$x=\frac{8}{13}$$

9. $(4-5x)(4x-5)=(10x-3)(7-2x)$

$$-20x^2+41x-20=-20x^2+76x-21$$
$$41x-76x=-21+20$$
$$-35x=-1$$
$$x=\frac{-1}{-35}$$
$$x=\frac{1}{35}$$

10. $(x+1)(2x+5)=(2x+3)(x-4)+5$

$$2x^2+7x+5=2x^2-5x-12+5$$
$$7x+5x=-7-5$$
$$12x=-12$$
$$x=\frac{-12}{12}$$
$$x=-1$$

11. $(x-2)^2-(3-x)^2=1$

$$x^2-4x+4-9+6x-x^2=1$$
$$2x-5=1$$
$$2x=6$$
$$x=\frac{6}{2}$$
$$x=3$$

12. $14-(5x-1)(2x+3)=17-(10x+1)(x-6)$

$$14-(10x^2+13x-3)=17-(10x^2-59x-6)$$
$$14-10x^2-13x+3=17-10x^2+59x+6$$
$$-13x-59x=6$$
$$-72x=6$$
$$x=\frac{6}{-72}$$
$$x=-\frac{1}{12}$$

◄RESOLUCION DE ECUACIONES LITERALES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA :

Las ECUACIONES LITERALES, son aquellas en las que algunos o todos los coeficientes de las incógnitas o las cantidades conocidas que figuran en la ecuación están representadas por letras.

Estas letras suelen ser a, b, c, d, m, y n *según costumbre, representando la "X" la incógnita.*

Las ecuaciones literales de primer grado con una incógnita se resuelven aplicando las mismas reglas que hemos empleado en las ecuaciones numéricas.

Ejemplos :

1.

$$ax - 4 = bx - 2$$
$$ax - bx = 4 - 2$$
$$x(a - b) = 2$$
$$x = \frac{2}{a - b}$$

2.

$$a(x + b) + x(b - a) = 2b(2a - x)$$
$$ax + ba + xb - ax = 4ab - 2bx$$
$$xb + 2bx = 4ab - ab$$
$$3bx = 3ab$$
$$x = \frac{3ab}{3b}$$
$$x = a$$

3.

$$(x - a)^2 - (x + a)^2 = a(a - 7x)$$
$$x^2 - 2ax + a^2 - x^2 - 2ax - a^2 = a^2 - 7ax$$
$$-4ax + 7ax = a^2$$
$$3ax = a^2$$
$$x = \frac{a^2}{3a}$$
$$x = \frac{a}{3}$$

◄RESOLUCION DE ECUACIONES FRACCIONARIAS DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA :

Antes de abordar este tema se recomienda "repasar" lo indicado en "DIVISIÓN" pág. 23, "DIVISIÓN DE DOS MONOMIOS" pág. 24 y "DIVISIÓN DE UN POLINOMIO POR UN MONOMIO" pág. 25.

De igual manera se recomienda "repasar" de nuestras clases de bachillerato CÓMO CALCULAR EL MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO (mcm).

SUPRESIÓN DE DENOMINADORES : *Esta es una operación importantísima que consiste en convertir una ecuación fraccionaria en una ecuación equivalente entera, es decir sin denominadores.*

La supresión de denominadores se funda en la propiedad, ya conocida, de las igualdades : **Una igualdad no varía si sus dos miembros se multiplican por una misma cantidad.**

Para suprimir denominadores en una ecuación se multiplican todos los términos de la ecuación por el mínimo común múltiplo (mcm) de los denominadores.

Ejemplo : ***Suprimir denominadores en la ecuación*** $\frac{X}{2} = \frac{X}{6} - \frac{1}{4}$

El m.c.m. de los denominadores 2, 6 y 4 es 12. Multiplicamos todos los términos por 12 y tendremos :

$$\frac{12X}{2} = \frac{12X}{6} - \frac{12}{4}$$

Y simplificando estas fracciones, queda

$$6X = 2X - 3$$

Ecuación que es equivalente a la ecuación dada y entera que es lo que buscábamos, porque la resolución de ecuaciones enteras ya la hemos estudiado.

Ahora bien, la operación que hemos efectuado equivale a dividir el m.c.m. de los denominadores entre cada denominador y multiplicar cada resultado por el numerador respectivo.

Ejemplo : ***Suprimir denominadores en la ecuación***

$$2 - \frac{X-1}{40} = \frac{2X-1}{4} - \frac{4X-5}{8}$$

El m.c.m. de 4, 8 y 40 es 40. El primer término "2" equivale a 2/1.

Entonces, divido 40÷1 = 40 y este cociente 40 lo multiplico por 2; 40÷40 = 1 y este cociente 1 lo multiplico por X – 1; 40÷4 = 10 y este cociente 10 lo multiplico por 2X – 1; 40÷8 = 5 y este cociente 5 lo multiplico por 4X – 5 y tendremos :

$$2\,(40) - 1\,(X-1) = 10\,(2X-1) - 5\,(4X-5)$$

Efectuando las multiplicaciones indicadas y quitando paréntesis, queda :

$$80 - X + 1 = 20X - 10 - 20X + 25$$

Ecuación que ya es entera.

Ejemplos : ***Resolver las ecuaciones siguientes***

1. $\frac{x}{6}+5=\frac{1}{3}-x$

$$\Rightarrow \frac{x+30}{6}=\frac{1-3x}{3}$$
$$x+30=2(1-3x)$$
$$x+30=2-6x$$
$$x+6x=2-30$$
$$7x=-28$$
$$x=\frac{-28}{7}$$
$$x=-4$$

2. $\frac{3x}{5}-\frac{2x}{3}+\frac{1}{5}=0 \quad mcm=15$

$$9x-10x+3=0$$
$$-x=-3$$
$$x=3$$

3. $\frac{1}{2x}+\frac{1}{4}-\frac{1}{10x}=\frac{1}{5} \quad mcm=20x$

$$10+5x-2=4x$$
$$5x-4x=-10+2$$
$$x=-8$$

4. $\frac{x}{2}+2-\frac{x}{12}=\frac{x}{6}-\frac{5}{4} \quad mcm=12$

$$6x+24-x=2x-15$$
$$6x-x-2x=-15-24$$
$$3x=-39$$
$$x=\frac{-39}{3}$$
$$x=-13$$

5. $\frac{3x}{4}-\frac{1}{5}+2x=\frac{5}{4}-\frac{3x}{20} \quad mcm=20$

$$15x-4+40x=25-3x$$
$$55x+3x=25+4$$
$$58x=29$$
$$x=\frac{29}{58}$$
$$x=\frac{1}{2}$$

6. $\frac{2}{3x}-\frac{5}{x}=\frac{7}{10}-\frac{3}{2x}+1 \quad mcm=30x$

$$20-150=21x-45+30x$$
$$-130+45=51x$$
$$\frac{-85}{51}=x$$
$$\frac{-5}{3}=x$$

7. $\frac{x-4}{3}-5=0 \quad mcm=3$

$$x-4-15=0$$
$$x-19=0$$
$$x=19$$

8. $x-\frac{x+2}{12}=\frac{5x}{2} \quad mcm=12$

$$12x-x-2=30x$$
$$11x-30x=2$$
$$-19x=2$$
$$x=-\frac{2}{19}$$

La experiencia, como instructor de la materia, me ha demostrado que la mayor dificultad que presentan los estudiantes en la resolución de este tipo de problemas viene dada en el manejo de los signos de los términos fraccionarios negativos.

En atención a lo apuntado anteriormente, me permito recomendar que el primer paso en la resolución de estos problemas sea pasar los términos negativos al otro miembro para evitar cometer errores. Es decir, garantizar que todos los términos fraccionarios de la ecuación tengan signo positivo.

Ejemplo : ***Resolver la siguiente ecuación***

$$\frac{x-1}{2}-\frac{x-2}{3}-\frac{x-3}{4}=-\frac{x-5}{5}$$

Primero paso los términos negativos al otro miembro cambiándole el signo, entendiendo que ***el signo que se cambia es el que está antes de la raya-fracción y no los que estén dentro del numerador****.*

$$\frac{X-1}{2}+\frac{X-5}{5}=\frac{X-2}{3}+\frac{X-3}{4}$$

m.c.m. = 60

$$30(X-1)+12(X-5)=20(X-2)+15(X-3)$$

$$30X-30+12X-60=20X-40+15X-45$$

Ya la hemos convertido en una ecuación entera y su resolución es conocida por nosotros.

$$42X-90=35X-85$$

$$42X-35X=-85+90$$

$$7X=5 \quad ; \quad X=\frac{5}{7}$$

◄ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO CON UNA INCÓGNITA :

Una ecuación de segundo grado es toda ecuación en la cual, una vez simplificada, el mayor exponente de la incógnita es 2.

Así, $4X^2 + 7X + 6 = 0$ *es una ecuación de segundo grado.*

Ecuaciones completas *de 2do. grado son ecuaciones de la forma* $ax^2 + bx + c = 0$*, que tienen un término en* x^2*, un término en* x *y un término independiente de* x*.*

Así, $2X^2 + 7X - 15 = 0$; $X^2 - 8X = -15$ *ó* $3X^2 = 6X + 9$ *son ecuaciones completas de 2do. grado.*

Ecuaciones incompletas *de 2do. grado son ecuaciones de la forma* $ax^2 + c = 0$ *que carecen del término en* x *o de la forma* $ax^2 + bx = 0$ *que carecen del término independiente.*

Así, $X^2 - 16 = 0$ *y* $3X^2 + 5X = 0$ *son ecuaciones incompletas de 2do. grado.*

Raíces de una ecuación de segundo grado *son los valores de la incógnita que satisfacen la ecuación.*

Toda ecuación de 2do. grado tiene ***dos raíces****. Así, las raíces de la ecuación* $X^2 - 2X - 3 = 0$ *son* $X = 3$ *y* $X = -1$*, ambos valores satisfacen esta ecuación.*

Resolver una ecuación de 2do. grado *es hallar las raíces de la ecuación.*

La **fórmula para resolver una ecuación de 2do. grado** *es :*

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Esta fórmula nos dará dos raíces de la ecuación $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$ *(porque salen dos valores de* x *según se tome el valor de la raíz cuadrada de* $\mathbf{b^2 - 4ac}$ *con signo positivo o negativo ±).*

*El valor de "***a***" será el coeficiente del término en* x^2 *en la ecuación.*

*El valor de "***b***" será el coeficiente del término en* x *en la ecuación (en las ecuaciones incompletas del tipo* $ax^2 + c = 0$ *se asume que el valor de* $b = 0$*).*

*El valor de "***c***" será el término independiente de la ecuación (en las ecuaciones incompletas del tipo* $ax^2 + bx = 0$ *se asume que el valor de* $c = 0$*).*

.

<u>Ejemplo 1 :</u> ***Resolver la ecuación*** $\mathbf{2X^2 - 4X = 6}$

Primero se ordena la ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$

$$2X^2 - 4X - 6 = 0$$

Se identifican los valores de a, b y c.

$$a = 2 \quad ; \quad b = -4 \quad ; \quad c = -6$$

Se introducen estos valores en la fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Para evitar errores con el manejo de los signos negativos se recomienda que, antes de introducir los valores dentro de la fórmula anterior, primero se indiquen paréntesis en el espacio donde va cada letra.

$$x = \frac{-(\ ) \pm \sqrt{(\ )^2 - 4(\ )(\ )}}{2(\ )}$$

Ahora se introducen los valores de a, b, c y se resuelve la ecuación :

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(2)(-6)}}{2(2)} \quad ; \quad x = \frac{+4 \pm \sqrt{16+48}}{4}$$

$$x = \frac{+4 \pm \sqrt{64}}{4} \quad ; \quad x = \frac{+4 \pm 8}{4}$$

$$X_1 = \frac{+4+8}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

$$X_2 = \frac{+4-8}{4} = \frac{-4}{4} = -1$$

Las raíces de la ecuación $\mathbf{2X^2 - 4X - 6 = 0}$ *son* $\mathbf{X = 3}$ *y* $\mathbf{X = -1}$*, porque ambos valores satisfacen esta ecuación.*

<u>Ejemplo 2 :</u> ***Resolver la ecuación*** $\mathbf{2X^2 - 4X = 0}$

Se identifican los valores de a, b y c.

$$a = 2 \quad ; \quad b = -4 \quad ; \quad c = 0$$

Se introducen estos valores en la fórmula

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(2)(0)}}{2(2)} \quad ; \quad x = \frac{+4 \pm \sqrt{16+0}}{4}$$

$$x = \frac{+4 \pm \sqrt{16}}{4} \quad ; \quad x = \frac{+4 \pm 4}{4}$$

$$X_1 = \frac{+4+4}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

$$X_2 = \frac{+4-4}{4} = \frac{0}{4} = 0$$

Las raíces de la ecuación **$2X^2 - 4X = 0$** *son* **$X = 2$** *y* **$X = 0$**, *porque ambos valores satisfacen esta ecuación.*

Ejemplo 3 : ***Resolver la ecuación $2X^2 - 8 = 0$***

Se identifican los valores de a, b y c.

$$a = 2 \quad ; \quad b = 0 \quad ; \quad c = -8$$

Se introducen estos valores en la fórmula

$$x = \frac{-(0) \pm \sqrt{(0)^2 - 4(2)(-8)}}{2(2)} \quad ; \quad x = \frac{0 \pm \sqrt{0+64}}{4}$$

$$x = \frac{\pm\sqrt{64}}{4} \quad ; \quad x = \frac{\pm 8}{4}$$

$$X_1 = \frac{8}{4} = 2 \quad ; \quad X_2 = \frac{-8}{4} = -2$$

Las raíces de la ecuación **$2X^2 - 8 = 0$** *son* **$X = 2$** *y* **$X = -2$**, *porque ambos valores satisfacen esta ecuación.*

Ejemplo 4 :

$$49x^2 - 70x + 25 = 0$$

$$x = \frac{70 \pm \sqrt{(-70)^2 - 4(49)(25)}}{2(49)}$$

$$x = \frac{70 \pm \sqrt{4.900 - 4.900}}{98}$$

$$x_1 = x_2 = \frac{70}{98} = \frac{5}{7}$$

Ejemplo 5 :

$$27x^2 + 12x - 7 = 0$$

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{(12)^2 - 4(27)(-7)}}{2(27)}$$

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{144 + 756}}{54}$$

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{900}}{54}$$

$$x_1 = \frac{-12 + 30}{54} = \frac{18}{54} = \frac{1}{3}$$

$$x_2 = \frac{-12 - 30}{54} = \frac{-42}{54} = -\frac{7}{9}$$

Ejemplo 6 :

$$15x = 25x^2 + 2$$

$$25x^2 - 15x + 2 = 0$$

$$x = \frac{15 \pm \sqrt{(-15)^2 - 4(25)(2)}}{2(25)}$$

$$x = \frac{15 \pm \sqrt{225 - 200}}{50}$$

$$x = \frac{15 \pm \sqrt{25}}{50}$$

$$x_1 = \frac{15 + 5}{50} = \frac{20}{50} = \frac{2}{5}$$

$$x_2 = \frac{15 - 5}{50} = \frac{10}{50} = \frac{1}{5}$$

◄DESCOMPOSICIÓN FACTORIAL (FACTORIZACIÓN) :

Se llama **factores** *o divisores de una expresión algebraica a las expresiones algebraicas que multiplicadas entre sí dan como producto la primera expresión.*

Así, multiplicando "a" *por* "a + b" *tenemos :*

$$a.(a + b) = a^2 + ab$$

"a" *y* "a + b", *que multiplicadas entre sí dan como producto* "a^2 + ab", *son factores o divisores de* "$a^2 + ab$".

Del mismo modo.

$$(X + 2).(X + 3) = X^2 + 5X + 6$$

Luego, "X + 2" *y* "X + 3" *son factores de* "$X^2 + 5X + 6$"

Descomponer en factores o Factorizar *una expresión algébrica es convertirla en el producto indicado de sus factores.*

FACTORIZAR UN MONOMIO : *Los factores de un monomio se pueden hallar por simple inspección.*

Así, los factores de 15ab son 3, 5, a *y* b. *Por tanto :*

$$15ab = (3).(5).(a).(b)$$

FACTORIZAR UN POLINOMIO : *No todo polinomio se puede descomponer en dos o más factores distintos de 1, pues del mismo modo que, en Aritmética, hay números primos que solo son divisibles por ellos mismos y por 1, hay expresiones algebraicas que solo son divisibles por ellos mismos y por 1, y que por tanto, no son el producto de otras expresiones algebraicas. Así "a + b" no puede descomponerse en dos factores distintos de "1" porque solo es divisible por "a + b" y por "1".*

CUANDO TODOS LOS TERMINOS DE UN POLINOMIO TIENEN UN FACTOR COMÚN :

a) FACTOR COMÚN MONOMIO:

Ejemplo 1 : Descomponer en factores $a^2 + 2a$

a^2 *y* 2a *contienen el factor común* a. *Escribimos el factor común* "a" *como coeficiente de un paréntesis; dentro del paréntesis escribimos los* **cocientes** *de dividir* $a^2 \div a = a$ *y* $2a \div a = 2$, *y tendremos ;*

$$a^2 + 2a = a.(a + 2)$$

Ejemplo 2 : Descomponer en factores $10b - 30ab^2$

Los coeficientes 10 y 30 tienen los factores 2, 5 y 10, Tomamos 10 porque siempre se saca el **mayor** *factor común. De las letras el único factor común es "b" porque está en los dos términos de la expresión dada y la tomamos con su* **menor** *exponente "b".*

El factor común es 10b. Lo escribimos como coeficiente de un paréntesis y dentro ponemos los cocientes de dividir $10b \div 10b = 1$ *y* $-30ab^2 \div 10b = -3ab$ y tendremos

$$10b - 30ab^2 = 10b.(1 - 3ab)$$

Ejercicios :

1. $a^2 + ab = a\left(a + b\right)$
2. $b + b^2 = b\left(1 + b\right)$
3. $x^2 + x = x\left(x + 1\right)$
4. $3a^3 - a^2 = a^2\left(3a - 1\right)$
5. $x^3 - 4x^4 = x^3\left(1 - 4x\right)$
6. $5m^2 + 15m^3 = 5m^2\left(1 + 3m\right)$
7. $ab - bc = b\left(a - c\right)$
8. $x^2y + x^2z = x^2\left(y + z\right)$
9. $2a^2x + 6ax^2 = 2ax\left(a + 3x\right)$
10. $8m^2 - 12mn = 4m\left(2m - 3n\right)$

11. $9a^3x^2 - 18ax^3 = 9ax^2\left(a^2 - 2x\right)$

12. $15c^3d^2 + 60c^2d^3 = 15c^2d^2\left(c + 4d\right)$

13. $35m^2n^3 - 70m^3 = 35m^2\left(n^3 - 2m\right)$

14. $abc + abc^2 = abc\left(1 + c\right)$

15. $24a^2xy^2 - 36x^2y^4 = 12xy^2\left(2a^2 - 3xy^2\right)$

16. $a^3 + a^2 + a = a\left(a^2 + a + 1\right)$

17. $4x^2 - 8x + 2 = 2\left(2x^2 - 4x + 1\right)$

18. $15y^3 + 20y^2 - 5y = 5y\left(3y^2 + 4y - 1\right)$

19. $a^3 - a^2x + ax^2 = a\left(a^2 - ax + x^2\right)$

20. $2a^2x + 2ax^2 - 3ax$
$= ax\left(2a + 2x - 3\right)$

21. $x^3 + x^5 - x^7 = x^3\left(1 + x^2 - x^4\right)$

22. $14x^2y^2 - 28x^3 + 56x^4$
$= 14x^2\left(y^2 - 2x + 4x^2\right)$

23. $34ax^2 + 51a^2y - 68ay^2$
$= 17a\left(2x^2 + 3ay - 4y^2\right)$

24. $96 - 48mn^2 + 144n^3$
$= 48\left(2 - mn^2 + 3n^3\right)$

25. $a^2b^2c^2 - a^2c^2x^2 + a^2c^2y^2$
$= a^2c^2\left(b^2 - x^2 + y^2\right)$

b) FACTOR COMÚN POLINOMIO:

Ejemplo 1 : **Descomponer en factores X(a + b) + m(a + b)**

Los dos términos de esta expresión tienen como factor común el binomio (a + b)

Escribo este factor común (a + b) y lo multiplico por otro paréntesis que tendrá dentro los dos coeficientes que tiene el factor común en la ecuación inicial (respetando el signo que tenga cada uno). O sea :

X(a + b) + m(a + b) = (a + b).(X + m)

Ejercicios :

1. $a\left(x+1\right)+b\left(x+1\right)=\left(x+1\right)\left(a+b\right)$
2. $x\left(a+1\right)-3\left(a+1\right)=\left(a+1\right)\left(x-3\right)$
3. $2\left(x-1\right)+y\left(x-1\right)=\left(x-1\right)\left(2+y\right)$
4. $m\left(a-b\right)+\left(a-b\right)n=\left(a-b\right)\left(m+n\right)$
5. $2x\left(n-1\right)-3y\left(n-1\right)=\left(n-1\right)\left(2x-3y\right)$
6. $a\left(n+2\right)+n+2=\left(n+2\right)\left(a+1\right)$
7. $x\left(a+1\right)-a-1=\left(a+1\right)\left(x-1\right)$
8. $a^2+1-b\left(a^2+1\right)=\left(a^2+1\right)\left(1-b\right)$
9. $3x\left(x-2\right)-2y\left(x-2\right)=\left(x-2\right)\left(3x-2y\right)$
10. $1-x+2a\left(1-x\right)=\left(1-x\right)\left(1+2a\right)$
11. $4x\left(m-n\right)+n-m=\left(m-n\right)\left(4x-1\right)$
12. $-m-n+x\left(m+n\right)=\left(m+n\right)\left(x-1\right)$
13. $a^3\left(a-b+1\right)-b^2\left(a-b+1\right)=\left(a-b+1\right)\left(a^3-b^2\right)$
14. $4m\left(a^2+x-1\right)+3n\left(x-1+a^2\right)=\left(a^2+x-1\right)\left(4m+3n\right)$
15. $x\left(2a+b+c\right)-2a-b-c$
$=x\left(2a+b+c\right)-\left(2a+b+c\right)=\left(2a+b+c\right)\left(x-1\right)$
16. $\left(x+y\right)\left(n+1\right)-3\left(n+1\right)=\left(n+1\right)\left(x+y-3\right)$
17. $\left(x+1\right)\left(x-2\right)+3y\left(x-2\right)=\left(x-2\right)\left(x+1+3y\right)$
18. $\left(a+3\right)\left(a+1\right)-4\left(a+1\right)=\left(a+1\right)\left(a+3-4\right)=\left(a+1\right)\left(a-1\right)$

19. $(x^2+2)(m-n)+2(m-n)=(m-n)(x^2+4)$

20. $a(x-1)-(a+2)(x-1)=(x-1)(a-a-2)=-2(x-1)$

21. $5x(a^2+1)+(x+1)(a^2+1)=(a^2+1)(6x+1)$

22. $(a+b)(a-b)-(a-b)(a-b)$
$=(a-b)(a+b-a+b)=2b(a-b)$

23. $(m+n)(a-2)+(m-n)(a-2)=2m(a-2)$

24. $(x+m)(x+1)-(x+1)(x-n)$
$=(x+1)(x+m-x+n)=(x+1)(m+n)$

25. $(x-3)(x-4)+(x-3)(x+4)=(x-3)2x$

26. $(a+b-1)(a^2+1)-a^2-1=(a^2+1)(a+b-2)$

27. $(a+b-c)(x-3)-(b-c-a)(x-3)$
$=(x-3)(a+b-c+a-b+c)=(x-3)2a$

28. $3x(x-1)-2y(x-1)+z(x-1)=(x-1)(3x-2y+z)$

29. $a(n+1)-b(n+1)-n-1=(n+1)(a-b-1)$

30. $x(a+2)-a-2+3(a+2)=(a+2)(x+2)$

31. $(1+3a)(x+1)-2a(x+1)+3(x+1)=(x+1)(a+4)$

FACTOR COMÚN POR AGRUPACIÓN DE TÉRMINOS:

Ejemplo 1 : **Descomponer en factores aX + bX + aY + bY**

Los dos primeros términos tienen el factor común "X" y los dos últimos el factor común "Y".

Agrupamos los dos primeros términos en un paréntesis y los dos últimos en otro precedido del signo "+" porque el tercer término tiene el signo "+" y tendremos :

(aX + bX) + (aY + bY)

Notamos que la expresión está conformada ahora por dos binomios "(aX + bY)" y "(aY + bY)". Cada binomio puede descomponerse en factores (Factor común monomio pág. 51).

(aX + bX) = X.(a + b)
(aY + bY) = Y.(a + b)

Una vez realizada la descomposición de ambos monomios la expresión "(aX + bX) + (aY + bY)" quedaría como :

X.(a + b) + Y.(a + b)

Esta expresión puede descomponerse sacando factor común polinomio de acuerdo a lo explicado en la página 52.

X.(a + b) + Y.(a + b) = (a + b).(X + Y)

Resumiendo podemos indicar toda la operación así:

aX + bX + aY + bY

(aX + bX) + (aY + bY)

= X.(a + b) + Y.(a + b)

= (a + b).(X + Y)

La agrupación puede hacerse generalmente de más de un modo con tal que los dos términos que se agrupan tengan algún factor común, y siempre que las cantidades que quedan dentro de los paréntesis después de sacar el factor común en cada grupo sean exactamente iguales. Si esto no es posible lograrlo la expresión dada no se puede descomponer por este método.

Así, en el ejemplo anterior podemos agrupar el primero y tercer término que tienen el factor común "a" y el segundo y cuarto término que tienen el factor común "b" y tendremos:

$$aX + bX + aY + bY$$

$$(aX + aY) + (bX + bY)$$

$$= a.(X + Y) + b.(X + Y)$$

$$= (X + Y).(a + b)$$

El resultado obtenido es el mismo con ambos métodos.

Ejercicios :

1. $a^2 + ab + ax + bx$
$= (a^2 + ab) + (ax + bx)$
$= a(a+b) + x(a+b)$
$= (a+b)(a+x)$

2. $am - bm + an - bn$
$= (am - bm) + (an - bn)$
$= m(a-b) + n(a-b)$
$= (a-b)(m+n)$

3. $ax - 2bx - 2ay + 4by$
$= (ax - 2bx) - (2ay - 4by)$
$= x(a-2b) - 2y(a-2b)$
$= (a-2b)(x-2y)$

4. $a^2x^2 - 3bx^2 + a^2y^2 - 3by^2$
$= (a^2x^2 - 3bx^2) + (a^2y^2 - 3by^2)$
$= x^2(a^2 - 3b) + y^2(a^2 - 3b)$
$= (a^2 - 3b)(x^2 + y^2)$

5. $3m - 2n - 2nx^4 + 3mx^4$
$= (3m + 3mx^4) - (2n + 2nx^4)$
$= 3m(1 + x^4) - 2n(1 + x^4)$
$= (1 + x^4)(3m - 2n)$

6. $x^2 - a^2 + x - a^2x$
$= -(a^2 + a^2x) + (x^2 + x)$
$= -a^2(1+x) + x(x+1)$
$= (x+1)(x - a^2)$

7. $4a^3 - 1 - a^2 + 4a$
$= (4a^3 + 4a) - (1 + a^2)$
$= 4a(a^2 + 1) - (1 + a^2)$
$= (a^2 + 1)(4a - 1)$

8. $x + x^2 - xy^2 - y^2$
$= (x + x^2) - (xy^2 + y^2)$
$= x(1+x) - y^2(x+1)$
$= (x+1)(x - y^2)$

9. $3abx^2 - 2y^2 - 2x^2 + 3aby^2$
$= (3abx^2 + 3aby^2) - (2y^2 + 2x^2)$
$= 3ab(x^2 + y^2) - 2(x^2 + y^2)$
$= (x^2 + y^2)(3ab - 2)$

10. $3a - b^2 + 2b^2x - 6ax$
$= (3a - 6ax) - (b^2 - 2b^2x)$
$= 3a(1 - 2x) - b^2(1 - 2x)$
$= (1 - 2x)(3a - b^2)$

11. $4a^3x - 4a^2b + 3bm - 3amx$
$= (4a^3x - 4a^2b) + (3bm - 3amx)$
$= 4a^2(ax - b) + 3m(b - ax)$
$= 4a^2(ax - b) - 3m(ax - b)$
$= (ax - b)(4a^2 - 3m)$

12. $6ax + 3a + 1 + 2x$
$= (6ax + 3a) + (1 + 2x)$
$= 3a(2x+1) + (2x+1)$
$= (2x+1)(3a+1)$

13. $3x^3 - 9ax^2 - x + 3a$
$= (3x^3 - x) - (9ax^2 - 3a)$
$= x(3x^2 - 1) - 3a(3x^2 - 1)$
$= (3x^2 - 1)(x - 3a)$

14. $2a^2x - 5a^2y + 15by - 6bx$
$= (2a^2x - 5a^2y) + (15by - 6bx)$
$= a^2(2x - 5y) + 3b(5y - 2x)$
$= a^2(2x - 5y) - 3b(2x - 5y)$
$= (2x - 5y)(a^2 - 3b)$

15. $2x^2y + 2xz^2 + y^2z^2 + xy^3$
$= (2x^2y + xy^3) + (2xz^2 + y^2z^2)$
$= xy(2x + y^2) + z^2(2x + y^2)$
$= (2x + y^2)(xy + z^2)$

16. $6m - 9n + 21nx - 14mx$
$= (6m - 14mx) - (9n - 21nx)$
$= 2m(3 - 7x) - 3n(3 - 7x)$
$= (3 - 7x)(2m - 3n)$

17. $n^2x - 5a^2y^2 - n^2y^2 + 5a^2x$
$= (n^2x - n^2y^2) - (5a^2y^2 - 5a^2x)$
$= n^2(x - y^2) - 5a^2(y^2 - x)$
$= n^2(x - y^2) + 5a^2(x - y^2)$
$= (x - y^2)(n^2 + 5a^2)$

18. $1 + a + 3ab + 3b$
$= (1 + a) + (3ab + 3b)$
$= (1 + a) + 3b\,(a + 1)$
$= (1 + a)(3b + 1)$

19. $4am^3 - 12amn - m^2 + 3n$
$= (4am^3 - 12amn) - (m^2 - 3n)$
$= 4am(m^2 - 3n) - (m^2 - 3n)$
$= (m^2 - 3n)(4am - 1)$

20. $20ax - 5bx - 2by + 8ay$
$= (20ax + 8ay) - (5bx + 2by)$
$= 4a(5x + 2y) - b(5x + 2y)$
$= (5x + 2y)(4a - b)$

TRINOMIO CUADRADO PERFECTO :

Un trinomio es cuadrado perfecto cuando es el cuadrado de un binomio, o sea, el producto de dos binomios iguales.

Así, $a^2 + 2ab + b^2$ *es cuadrado perfecto de* $a + b$ *porque :*

$(a + b)^2 = (a + b).(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$

Del mismo modo, $(2X + 3Y)^2 = 4X^2 + 12XY + 9Y^2$ *luego* $4X^2 + 12XY + 9Y^2$ *es un trinomio cuadrado perfecto.*

Para factorizar un trinomio cuadrado perfecto se extrae la raíz cuadrada al primero y tercer término del trinomio y se separan estas raíces por el signo del segundo término. El binomio así formado, que es la raíz cuadrada del trinomio, se multiplica por sí mismo o se eleva al cuadrado.

Ejemplo 1 : **Factorizar** $m^2 + 2m + 1$

Se extrae la raíz cuadrada al primero y tercer término del trinomio

$\sqrt{m^2} = m \quad ; \quad \sqrt{1} = 1$

y se separan estas raíces por el signo del segundo término. El binomio así formado, que es la raíz cuadrada del trinomio, se multiplica por sí mismo o se eleva al cuadrado.

$m^2 + 2m + 1 = (m + 1).(m+1) = (m + 1)^2$

Ejercicios :

1. $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$
2. $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$
3. $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$
4. $y^4 + 2y^2 + 1 = (y^2 + 1)^2$
5. $a^2 - 10a + 25 = (a - 5)^2$
6. $9 - 6x + x^2 = (3 - x)^2$
7. $16 + 40x^2 + 25x^4 = (4 + 5x^2)^2$
8. $1 - 14a + 49a^2 = (1 - 7a)^2$
9. $36 + 12m^2 + m^4 = (6 + m^2)^2$
10. $1 - 2a^3 + a^6 = (1 - a^3)^2$
11. $a^8 + 18a^4 + 81 = (a^4 + 9)^2$
12. $a^6 - 2a^3b^3 + b^6 = (a^3 - b^3)^2$
13. $4x^2 - 12xy + 9y^2 = (2x - 3y)^2$
14. $9b^2 - 30a^2b + 25a^4 = (3b - 5a^2)^2$
15. $1 + 14x^2y + 49x^4y^2 = (1 + 7x^2y)^2$
16. $1 - 2a^5 + a^{10} = (1 - a^5)^2$
17. $49m^6 - 70am^3n^2 + 25a^2n^4$
$= (7m^3 - 5an^2)^2$
18. $100x^{10} - 60a^4x^5y^6 + 9a^8y^{12}$
$= (10x^5 - 3a^4y^6)^2$
19. $121 + 198x^6 + 81x^{12} = (11 + 9x^6)^2$
20. $a^2 - 24am^2x^2 + 144m^4x^4$
$= (a - 12m^2x^2)^2$
21. $16 - 104x^2 + 169x^4 = (4 - 13x^2)^2$
22. $400x^{10} + 40x^5 + 1 = (20x^5 + 1)^2$

DIFERENCIA DE CUADRADOS PERFECTOS :

En los productos notables (PRODUCTO DE LA SUMA POR LA DIFERENCIA DE DOS CANTIDADES pág. 36) se vió que la suma de dos cantidades multiplicadas por su diferencia es igual al cuadrado del minuendo menos el cuadrado del sustraendo, o sea:

$$(a + b).(a - b) = a^2 - b^2$$

Luego, recíprocamente;

$$a^2 - b^2 = (a + b).(a - b)$$

Para factorizar una diferencia de cuadrados se extrae la raíz cuadrada al minuendo y al sustraendo y se multiplica la suma de estas raíces cuadradas por la diferencia entre la raíz del minuendo y la del sustraendo.

Ejemplos :

1. $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$
2. $a^2 - 1 = (a+1)(a-1)$
3. $a^2 - 4 = (a+2)(a-2)$
4. $9 - b^2 = (3+b)(3-b)$
5. $1 - 4m^2 = (1+2m)(1-2m)$
6. $16 - n^2 = (4+n)(4-n)$
7. $a^2 - 25 = (a+5)(a-5)$
8. $1 - y^2 = (1+y)(1-y)$
9. $4a^2 - 9 = (2a+3)(2a-3)$
10. $25 - 36x^4 = (5+6x^2)(5-6x^2)$
11. $1 - 49a^2b^2 = (1+7ab)(1-7ab)$
12. $4x^2 - 81y^4 = (2x+9y^2)(2x-9y^2)$
13. $a^2b^8 - c^2 = (ab^4+c)(ab^4-c)$
14. $100 - x^2y^6 = (10+xy^3)(10-xy^3)$
15. $a^{10} - 49b^{12} = (a^5+7b^6)(a^5-7b^6)$
16. $25x^2y^4 - 121 = (5xy^2+11)(5xy^2-11)$
17. $100m^2n^4 - 169y^6$
    $= (10mn^2+13y^3)(10mn^2-13y^3)$
18. $a^2m^4n^6 - 144 = (am^2n^3+12)(am^2n^3-12)$

TRINOMIO DE LA FORMA $X^2 + bX + c$:

Trinomios de la forma $X^2 + bX + c$ son trinomios como :

$$X^2 + 5X + 6 \quad ; \quad m^2 + 15m - 14 \quad ; \quad X^2 - 8X + 18$$

que cumplen las condiciones siguientes :

1. *El coeficiente del primer término es 1.*
2. *El primer término es una letra cualquiera elevada al cuadrado.*
3. *El segundo término tiene la misma letra que el primero con exponente 1 y su coeficiente es una cantidad cualquiera, positiva o negativa.*
4. *El tercer término es independiente de la letra que aparece en el primero y segundo término y es una cantidad cualquiera, positiva o negativa.*

REGLA PRÁCTICA PARA FACTORIZAR UN TRINOMIO DE LA FORMA $X^2 + bX + c$

Ejemplo 1 : ***Factorizar $X^2 + 5X + 6$***

El trinomio se descompone en dos binomios cuyo primer término es la raíz cuadrada del primer término del trinomio (X^2), o sea X :

$$X^2 + 5X + 6 = (X \quad).(X \quad)$$

En el primer binomio después de X se escribe el signo del segundo término del trinomio (+5X).

$$X^2 + 5X + 6 = (X + \quad).(X + \quad)$$

En el segundo binomio después de X se escribe el signo que resulta de multiplicar el signo del segundo término del trinomio por el signo del tercer término del trinomio (en este caso multiplicamos los signos de +5X y de +6)

$$X^2 + 5X + 6 \quad = \quad (X + \quad).(X + \quad)$$

Ahora, buscamos dos números que sumados den "+5" y multiplicados den "+6". Esos números son 2 y 3, luego :

$$X^2 + 5X + 6 \quad = \quad (X + 2).(X + 3)$$

Ejemplo 2 : **Factorizar $m^2 - 7m + 12$**

El trinomio se descompone en dos binomios cuyo primer término es la raíz cuadrada del primer término del trinomio (m^2), o sea m :

$$m^2 - 7m + 12 \quad = \quad (m \quad).(m \quad)$$

En el primer binomio después de m se escribe el signo del segundo término del trinomio (– 7m).

$$m^2 - 7m + 12 \quad = \quad (m - \quad).(m - \quad)$$

En el segundo binomio después de m se escribe el signo que resulta de multiplicar el signo del segundo término del trinomio por el signo del tercer término del trinomio (en este caso multiplicamos los signos de – 7m y de +12)

$$m^2 - 7m + 12 \quad = \quad (m - \quad).(m - \quad)$$

Ahora, buscamos dos números que sumados den "–7" y multiplicados den "+12". Esos números son " – 3" y "– 4", luego :

$$m^2 - 7m + 12 \quad = \quad (m - 3).(m - 4)$$

Ejercicios :

1. $x^2+7x+10=(x+5)(x+2)$
2. $x^2-5x+6=(x-3)(x-2)$
3. $x^2+3x-10=(x+5)(x-2)$
4. $x^2+x-2=(x+2)(x-1)$
5. $a^2+4a+3=(a+3)(a+1)$
6. $m^2+5m-14=(m+7)(m-2)$
7. $y^2-9y+20=(y-5)(y-4)$
8. $x^2-x-6=(x-3)(x+2)$
9. $x^2-9x+8=(x-8)(x-1)$
10. $c^2+5c-24=(c+8)(c-3)$
11. $x^2-3x+2=(x-2)(x-1)$
12. $a^2+7a+6=(a+6)(a+1)$
13. $y^2-4y+3=(y-3)(y-1)$
14. $n^2-8n+12=(n-6)(n-2)$
15. $x^2+10x+21=(x+7)(x+3)$
16. $a^2+7a-18=(a+9)(a-2)$
17. $m^2-12m+11=(m-11)(m-1)$
18. $x^2-7x-30=(x-10)(x+3)$
19. $n^2+6n-16=(n+8)(n-2)$
20. $a^2-21a+20=(a-20)(a-1)$
21. $y^2+y-30=(y+6)(y-5)$
22. $a^2-11a+28=(a-7)(a-4)$
23. $n^2-6n-40=(n-10)(n+4)$
24. $x^2-5x-36=(x-9)(x+4)$

El procedimiento anterior es aplicable a la factorización de trinomios que no siendo de la forma $X^2 + bX + c$ se parecen mucho ya que podemos notar que la letra del primer término tiene raíz cuadrada exacta y la letra del segundo término tiene la misma letra que el primero y su exponente es la raíz cuadrada del exponente del primer término.

Ejemplos :

1. $x^4+5x^2+4=(x^2+4)(x^2+1)$
2. $x^6-6x^3-7=(x^3-7)(x^3+1)$
3. $x^8-2x^4-80=(x^4-10)(x^4+8)$
4. $x^2y^2+xy-12=(xy+4)(xy-3)$
5. $(4x)^2-2(4x)-15=(4x-5)(4x+3)$
6. $(5x)^2+13(5x)+42=(5x+7)(5x+6)$

7. $x^2 + 2ax - 15a^2 = (x+5a)(x-3a)$

8. $a^2 - 4ab - 21b^2 = (a-7b)(a+3b)$

9. $(x-y)^2 + 2(x-y) - 24 = (x-y+6)(x-y-4)$

10. $-x^2 + 4x + 5$

$= -(x^2 - 4x - 5) = -(x-5)(x+1) = (5-x)(x+1)$

11. $x^{10} + x^5 - 20 = (x^5+5)(x^5-4)$

FACTORIZACIÓN UTILIZANDO LA FÓRMULA GENERAL DE SEGUNDO GRADO :

La Forma Factorizada de un polinomio de segundo grado es :

$$P(x) = a.(X - X_1).(X - X_2)$$

Donde "X_1" y "X_2" son las dos raíces del polinomio y **"a"** *es el coeficiente principal.*

$aX^2 + bX + c$

En estos apuntes, a partir de la página 48, hemos estudiado las ecuaciones de segundo grado con una incógnita. Hemos dicho que las raíces de una ecuación de segundo grado son los valores de la incógnita que satisfacen la ecuación y que toda ecuación de segundo grado tiene ***dos raíces****.*

La fórmula para hallar las dos raíces de una ecuación de segundo grado es :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Podemos entonces deducir la siguiente ***REGLA PRÁCTICA PARA FACTORIZAR UN TRINOMIO DE LA FORMA $aX^2 + bX + c$:***

1) ***Se calculan las dos raíces que satisfagan la ecuación $aX^2 + bX + c = 0$ con la utilización de la fórmula general de 2do. Grado (también conocida como resolvente).***

2) ***Se descompone el trinomio en dos binomios cuyo primer término sea la X.***

3) ***A continuación de cada X se coloca cada una de las raíces pero con signo cambiado.***

4) ***Se indica la multiplicación de los dos binomios anteriores por el valor de "a".***

$$\boxed{aX^2 + bX + c = a.(X - X_1).(X - X_2)}$$

Ejemplo 1 : **Factorizar la ecuación $2X^2 - 4X = 6$**

En la página 49 de estos apuntes calculamos las dos raíces de esta ecuación con la utilización de la fórmula general de segundo grado.

Las raíces de la ecuación **$2X^2 - 4X - 6 = 0$** *son* **$X = 3$** *y* **$X = -1$**, *porque ambos valores satisfacen esta ecuación.*

Conociendo las dos raíces y tomando en cuenta la Forma Factorizada de un polinomio de 2do grado, podemos decir que :

$$2X^2 - 4X - 6 = 2.(X - 3).(X + 1)$$

Note que los números que acompañan a la X en los dos binomios del miembro de la derecha son las raíces calculadas anteriormente pero con el signo cambiado.

Ejemplo 2 : **Factorizar el trinomio $49X^2 - 70X + 25$**

En la página 50 de estos apuntes calculamos las dos raíces de esta ecuación con la utilización de la fórmula general de segundo grado.

$$49x^2 - 70x + 25 = 0$$

$$x = \frac{70 \pm \sqrt{(70)^2 - 4(49)(25)}}{2(49)}$$

$$x = \frac{70 \pm \sqrt{4.900 - 4.900}}{98}$$

$$x_1 = x_2 = \frac{70}{98} = \frac{5}{7}$$

$$49X^2 - 70X + 25 = 49.\left(X - \frac{5}{7}\right).\left(X - \frac{5}{7}\right)$$

Note que los números que acompañan a la X en los dos binomios del miembro de la derecha son las raíces calculadas anteriormente pero con el signo cambiado.

Ejemplo 3 : ***Factorizar el trinomio*** **$-X^2 - 56 - 15X$**

Primero ordenados el trinomio : **$-1X^2 - 15X - 56$** *y luego aplicamos la fórmula general de segundo grado (resolvente) :*

$$x = \frac{-(-15) \pm \sqrt{(-15)^2 - 4(-1)(-56)}}{2(-1)}$$

$$x = \frac{+15 \pm \sqrt{225 - 224}}{-2} = \frac{15 \pm \sqrt{1}}{-2} = \frac{15 \pm 1}{-2}$$

$$x_1 = \frac{15 + 1}{-2} = \frac{16}{-2} = -8$$

$$x_2 = \frac{15 - 1}{-2} = \frac{14}{-2} = -7$$

Conocidas las raíces decimos que :

$$-1X^2 - 15X - 56 = -1.(X + 8).(X + 7)$$

Ejemplo 4 : ***Factorizar el trinomio*** **$-3X^2 + 5X - 2 = 0$**

$$x = \frac{-(5) \pm \sqrt{(5)^2 - 4(-3)(-2)}}{2(-3)} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{-6} = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{-6}$$

$$x = \frac{-5 \pm 1}{-6} \qquad x_1 = \frac{-5 + 1}{-6} = \frac{-4}{-6} = \frac{2}{3}$$

$$x_2 = \frac{-5 - 1}{-6} = \frac{-6}{-6} = 1$$

Conocidas las raíces decimos que :

$$-3X^2 + 5X - 2 = -3.(X - 2/3).(X - 1)$$

Note que los números que acompañan a la X en los dos binomios del miembro de la derecha son las raíces calculadas anteriormente pero con el signo cambiado.

Ejemplo 5 : ***Factorizar el trinomio*** **$25X^2 - 15X + 2$**

$$x = \frac{15 \pm \sqrt{(15)^2 - 4(25)(2)}}{2(25)}$$

$$x = \frac{15 \pm \sqrt{225 - 200}}{50}$$

$$x = \frac{15 \pm \sqrt{25}}{50}$$

$$x_1 = \frac{15 + 5}{50} = \frac{20}{50} = \frac{2}{5}$$

$$x_2 = \frac{15 - 5}{50} = \frac{10}{50} = \frac{1}{5}$$

Conocidas las raíces decimos que :

$$25X^2 - 15X + 2 = 25.(X - 2/5).(X - 1/5)$$

Note que los números que acompañan a la X en los dos binomios del miembro de la derecha son las raíces calculadas anteriormente pero con el signo cambiado.

FACTORIZACIÓN DE UN POLINOMIO APLICANDO LA REGLA DE RUFFINI :

CONSIDERACIONES :

1) *Para factorizar por el método de RUFFINI, es necesario que el polinomio posea un término independiente.*

2) *El polinomio se debe ordenar en forma decreciente, es decir desde la potencia más alta hasta el término independiente.*

3) *Se debe vigilar que el polinomio esté completo, en aquellos polinomios donde falta un término debemos colocar el mismo acompañado del coeficiente cero.*

4) *Las posibles raíces del polinomio son todos aquellos números positivos y negativos que dividan, en forma exacta, al término independiente.*

5) *Cuando se determine el valor de una raíz, para los efectos de colocarlo como factor siempre se le debe cambiar el signo, esto ocurre porque al igualarlo a cero el número cambia de signo.*

6) *El polinomio se puede factorizar total o parcialmente. Está factorizado en forma total cuando el número de factores coincide con el grado del polinomio, en caso contrario se dice que está factorizado parcialmente.*

Factorizar $X^4 - 4X^3 - X^2 + 16X - 12$

Para aplicar la REGLA DE RUFFINI debo tener presente que las raices enteras que puede tener el polinomio serán algunos de los divisores del término independiente. (en este caso en particular de 12) o sea que se prueba con 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 6, -6, 12 y -12.

Primero se copian los coeficientes del polinomio en una tabla similar a la siguiente:

	X^4	$-4X^3$	$-X^2$	$+16X$	-12
	1	– 4	– 1	16	– 12

Se copia el primer coeficiente debajo de él mismo :

	X^4	$-4X^3$	$-X^2$	$+16X$	-12
	1	– 4	– 1	16	– 12
	1				

*Se prueba con el primer divisor del término independiente (a esto lo llamaremos raiz)(**1** en ese caso):*

	X^4	$-4X^3$	$-X^2$	$+16X$	-12
1	1	– 4	– 1	16	– 12
	1				

Se multiplica la raiz con el primer coeficiente que se bajó y el producto se copia debajo del segundo coeficiente :

	X^4	$-4X^3$	$-X^2$	$+16X$	-12
1	1	– 4	– 1	16	– 12
	1	1			

Luego se efectúa la suma algebraica de las dos cantidades ubicadas en la columna donde se colocó el producto:

	X^4	$-4X^3$	$-X^2$	$+16X$	-12
1	1	– 4 1	– 1	16	– 12
	1	– 3			

Se multiplica la raiz por el resultado de la suma algebraica realizada y este producto se copia debajo del tercer coeficiente :

	X^4	$-4X^3$	$-X^2$	$+16X$	-12
1	1	– 4 1	– 1 – 3	16	– 12
	1	– 3			

Luego se efectúa la suma algebraica de las dos cantidades ubicadas en la columna donde se colocó el producto:

	X^4	$-4X^3$	$-X^2$	$+16X$	-12
1	1	– 4 1	– 1 – 3	16	– 12
	1	– 3	– 4		

Se multiplica la raiz por el resultado de la suma algebraica realizada y este producto se copia debajo del cuarto coeficiente :

	X^4	$-4X^3$	$-X^2$	$+16X$	-12
1	1	– 4 1	– 1 – 3	16 – 4	– 12
	1	– 3	– 4		

Luego se efectúa la suma algebraica de las dos cantidades ubicadas en la columna donde se colocó el producto:

	X^4	$-4X^3$	$-X^2$	$+16X$	-12
1	1	– 4	– 1	16	– 12
		1	– 3	– 4	
	1	– 3	– 4	12	

Se multiplica la raíz por el resultado de la suma algebraica realizada y este producto se copia debajo del quinto coeficiente :

	X^4	$-4X^3$	$-X^2$	$+16X$	-12
1	1	– 4	– 1	16	– 12
		1	– 3	– 4	12
	1	– 3	– 4	12	

Luego se efectúa la suma algebraica de las dos cantidades ubicadas en la columna donde se colocó el producto:

	X^4	$-4X^3$	$-X^2$	$+16X$	-12
1	1	– 4	– 1	16	– 12
		1	– 3	– 4	12
	1	– 3	– 4	12	0

*Como el resultado final es cero (0), esto nos indica que el **1** si es una raiz del polinomio y nos sirve para factorizar.*

Si el resultado hubiese sido distinto de cero, habría que seguir probando los demás divisores de 12.

Hasta ahora tenemos un producto como se observa al utilizar los nuevos coeficientes obtenidos:

	X^4	$-4X^3$	$-X^2$	$+16X$	-12
1	1	– 4	– 1	16	– 12
		1	– 3	– 4	12
	1	– 3	– 4	12	0
$(X-1)$.	$(X^3$	$-3X^2$	$-4X$	$+12)$	

*Note que la raiz calculada es **1** , pero por lo indicado en la consideración 5 se debe colocar **– 1***

Lo que hemos hecho hasta ahora es conseguir la primera raiz entera del polinomio que queremos factorizar, tenemos entonces que:

$$X^4 - 4X^3 - X^2 + 16X - 12 = (X-1)(X^3 - 3X^2 - 4X + 12)$$

De hecho ya hemos factorizado el polinomio, pero el segundo factor de tercer grado debemos intentar seguir factorizándolo.

Para buscar la segunda raíz se recomienda utilizar el método de Ruffini para el segundo factor de tercer grado $(X^3 - 3X^2 - 4X + 12)$ *probando con los divisores del término independiente (12 en este caso también)*

Procedemos entonces de manera similar a lo explicado al inicio de este ejercicio pero ahora con el polinomio de grado tres :

*De nuevo pruebo con **1** :*

	X^3	$-3X^2$	$-4X$	$+12$	
1	1	– 3	– 4	12	
		1	– 2	– 6	
	1	– 2	– 6	6	

Como el resultado final es distinto de cero (6 en este caso), sigo probando los demás divisores de 12.

*Probando ahora con **– 1** :*

	X^3	$-3X^2$	$-4X$	$+12$	
– 1	1	– 3	– 4	12	
		– 1	4	0	
	1	– 4	0	12	

Como el resultado final es distinto de cero (12 en este caso), sigo probando los demás divisores de 12.

*Probando ahora con **2** :*

	X^3	$-3X^2$	$-4X$	$+12$	
2	1	– 3	– 4	12	
		2	– 2	– 12	
	1	– 1	– 6	0	

Como el resultado final es cero, hemos conseguido la segunda raiz:

	X^3	$-3X^2$	$-4X$	$+12$	
2	1	– 3	– 4	12	
		2	– 2	– 12	
	1	– 1	– 6	0	
$(X-2)$.	$(X^2$	$-X$	$-6)$		

De donde $X^3 - 3X^2 - 4X + 12 = (X-2)\ (X^2 - X - 6)$

El polinomio inicial va quedando factorizado de la siguiente manera :

$$X^4 - 4X^3 - X^2 + 16X - 12 = (X-1)(X-2)\ (X^2 - X - 6)$$

Solo nos queda factorizar el tercer factor que es un polinomio de segundo grado $(X^2 - X - 6)$

*Para algunos alumnos resulta mas fácil factorizar buscando dos números que sumados den **–1** y multiplicados den **–6** (es decir 2 y – 3).*

Como la finalidad de este trabajo es mostrar la utilización de la Regla de Ruffini, vamos a continuar con su aplicación.

*Probando con **– 2** :*

	X^2	$-X$	-6		
– 2	1	– 1	– 6		
		– 2	6		
	1	– 3	0		
$(X+2)$.	$(X$	$-3)$			

*La nueva raiz es **– 2** y el último factor es* $(X-3)$:

De donde $X^2 - X - 6 = (X + 2)(X - 3)$

El polinomio inicial quedará factorizado de la siguiente manera:

$$X^4 - 4X^3 - X^2 + 16X - 12 = (X - 1)(X - 2)(X + 2)(X - 3)$$

Según como sea el polinomio hay métodos que se pueden aplicar y otros que no.

Se aconseja que se intenten aplicar los cinco métodos sucesivamente, es decir, en primer lugar se puede extraer el factor común, y luego se pueden seguir aplicando otros de los métodos.

Algunas veces es posible combinar varios métodos a la vez. Lo importante es que el alumno se ejercite en los métodos existentes y cuando se presente el problema tenga suficientes y claros criterios para afrontar la situación.

En algunas ocasiones y de acuerdo al problema planteado se puede paralizar el proceso de factorización de acuerdo a nuestra conveniencia; en este ejercicio en particular podemos señalar varias formas de factorización de este polinomio:

Con una raíz:

$$X^4 - 4X^3 - X^2 + 16X - 12 = (X - 1)(X^3 - 3X^2 - 4X + 12)$$

Con dos raíces:

$$X^4 - 4X^3 - X^2 + 16X - 12 = (X - 1)(X - 2)(X^2 - X - 6)$$

Con todas sus raíces:

$$X^4 - 4X^3 - X^2 + 16X - 12 = (X - 1)(X - 2)(X + 2)(X - 3)$$

Para aplicar la REGLA DE RUFFINI debo tener presente que las raices enteras que puede tener el polinomio serán algunos de los divisores del término independiente.

Esta condición no nos obliga a que probemos una sola vez cada raiz; por ejemplo si probamos con "1" y la suma final nos da "0" , esto significa que "1" es una raiz (la primera), pero como un polinomio puede tener dos o más raices iguales se recomienda que a continuación pruebe con la misma raiz ("1" en este caso)

El ejercicio siguiente persigue demostrar que lo indicado anteriormente es recomendable hacerlo

Factorizar $X^4 + 3X^3 - 15X^2 + 17X - 6$

Probando con ***1*** *:*

	X^4	$+ 3X^3$	$- 15X^2$	$+ 17X$	$- 6$
1	1	3 1	-15 4	17 -11	-6 6
	1	4	-11	6	0
$(X - 1) \cdot (X^3$		$+ 4X^2$	$- 11X$	$+ 6)$	

Lo que hemos hecho hasta ahora es conseguir la primera raiz entera del polinomio que queremos factorizar, tenemos entonces que:

$$X^4 + 3X^3 - 15X^2 + 17X - 6 = (X - 1)(X^3 + 4X^2 - 11X + 6)$$

Para buscar la segunda raiz se recomienda utilizar el método de Ruffini para el segundo factor de tercer grado indicado anteriormente $(X^3 + 4X^2 - 11X + 6)$ *probando con los divisores del término independiente (6 en este caso también)*

*De nuevo pruebo con **1***

	X^3	$+4X^2$	$-11X$	$+6$	
1	1	4 1	-11 5	6 -6	
	1	5	-6	0	
$(X-1)\,.\,(X^2$		$+5X$	$-6)$		

Hemos encontrado la segunda raíz (en este caso también es 1) y el polinomio inicial va quedando factorizado así :

$$X^4 + 3X^3 - 15X^2 + 17X - 6 = (X-1)(X-1)(X^2+5X-6)$$

Solo nos queda factorizar el tercer factor que es un polinomio de segundo grado (X^2+5X-6)

*Probando de nuevo con **1** :*

	X^2	$+5X$	-6		
1	1	5 1	-6 6		
	1	6	0		
$(X-1)\,.\,(X$		$+6)$			

*La nueva raiz es **1** y el último factor es* $(X+6)$:

Calculadas como han sido todas las raices podemos decir que:

$$X^4 + 3X^3 - 15X^2 + 17X - 6 = (X-1)(X-1)(X-1)(X+6)$$

Note que las tres primeras raices son iguales y podemos decir que:

$$X^4 + 3X^3 - 15X^2 + 17X - 6 = (X-1)^3\,(X+6)$$

Factorizar $X^4 - 11X^2 - 18X - 8$

Para aplicar la REGLA DE RUFFINI en aquellos polinomios donde falta un término debemos colocar el mismo acompañado del coeficiente cero.

En este caso en particular notamos que el polinomio no tiene el termino de grado tres, se conformará de la siguiente manera :

$$X^4 + 0X^3 - 11X^2 - 18X - 8$$

*Probando con **1** :*

	X^4	$+0X^3$	$-11X^2$	$-18X$	-8
1	1	0 1	-11 1	-18 -10	-8 -28
	1	1	-10	-28	-36

*Como el resultado es distinto de cero quiere decir que **1** no es raiz.*

*Probando con **- 1** :*

	X^4	$+0X^3$	$-11X^2$	$-18X$	-8
-1	1	0 -1	-11 1	-18 10	-8 8
	1	-1	-10	-8	0

*Como el resultado es igual a cero quiere decir que **– 1** si es una raiz.*

El polinomio va quedando factorizado así :

$$X^4 - 11X^2 - 18X - 8 = (X + 1)(X^3 - X^2 - 10X - 8)$$

Probando de nuevo con ***– 1*** *pero ahora con el segundo factor de tercer grado* $(X^3 - X^2 - 10X - 8)$

	X^3	$-X^2$	$-10X$	-8	
	1	-1	-10	-8	
-1		-1	2	8	
	1	-2	-8	0	

La segunda raíz también es ***– 1*** *, el polinomio va quedando factorizado así :*

$$X^4 - 11X^2 - 18X - 8 = (X + 1)(X + 1)(X^2 - 2X - 8)$$

Solo nos falta factorizar el polinomio $(X^2 - 2X - 8)$

Para factorizar el polinomio $(X^2 - 2X - 8)$ *buscamos dos números que sumados den* ***– 2*** *y multiplicados den* ***– 8*** *(en este caso* ***2*** *y* ***– 4*** *)*

Como $(X^2 - 2X - 8) = (X + 2)(X - 4)$

El polinomio inicial quedará factorizado así :

$$\boxed{X^4 - 11X^2 - 18X - 8 = (X + 1)(X + 1)(X + 2)(X - 4)}$$

O también puede ser indicado así :

$$X^4 - 11X^2 - 18X - 8 = (X + 1)^2 (X + 2)(X - 4)$$

FACTORIZAR : $2X^3 + 3X^2 - 3X - 2$

	$2X^3$	$+3X^2$	$-3X$	-2
	2	3	– 3	– 2
1		2	5	2
	2	5	2	**0**
– 2		– 4	– 2	
	2	1	**0**	

$$2X^3 + 3X^2 - 3X - 2 = (X - 1)(X + 2)(2X + 1)$$

FACTORIZAR : $2X^3 - 12X^2 + 64$

	$2X^3$	$-12X^2$	$+0X$	$+64$
	2	– 12	0	64
– 2		– 4	32	– 64
	2	– 16	32	**0**
4		8	– 32	
	2	– 8	**0**	
4		8		
	2	**0**		

$$2X^3 - 12X^2 + 64 = 2(X + 2)(X - 4)(X - 4)$$

COCIENTE NO FACTORIZABLE

(Factorización Parcial)

No todos los polinomios pueden ser factorizados totalmente. Algunas veces nos encontraremos con polinomios que NO permiten conseguir todas sus raíces ya que dentro de su factorización presentan en su cociente un polinomio no factorizable.

FACTORIZAR : $X^4 + 5X^3 + 8X^2 + 7X + 3$

*Probamos con **"1"** y el resultado no fue igual a cero por lo que **"1"** no es una raíz.*

Probando con "– 1" :

	X^4	$+ 5X^3$	$+ 8X^2$	$+ 7X$	$+ 3$
– 1	1	5 – 1	8 – 4	7 – 4	3 – 3
	1	4	4	3	0
$(X + 1)$	$(X^3$	$+ 4X^2$	$+ 4X$	$+ 3)$	

*Como el resultado es igual a cero, **"– 1"** si es raíz, entonces podemos decir que :*

$$X^4 + 5X^3 + 8X^2 + 7X + 3 = (X + 1)(X^3 + 4X^2 + 4X + 3)$$

Ahora tratamos de factorizar al polinomio $X^3 + 4X^2 + 4X + 3$

Probamos con 1, - 1. 2, - 2 y 3 y detrminamos que ninguno de esos valores son raíces.

*Probamos con **– 3 :***

	X^3	$+ 4X^2$	$+ 4X$	$+ 3$	
– 3	1	4 – 3	4 – 3	3 – 3	
	1	1	1	0	
$(X + 3)$	$(X^2$	$+ X$	$+ 1)$		

*Como el resultado es igual a cero, **"– 3"** si es raíz, entonces podemos decir que :*

$$X^3 + 4X^2 + 4X + 3 = (X + 3)(X^2 + X + 1)$$

Cuando tratamos de factorizar al polinomio $X^2 + X + 1$ *notaremos que no es factorizable (ni siquiera utilizando la fórmula cuadrática* $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ *) , luego podemos afirmar que:*

$$X^4 + 5X^3 + 8X^2 + 7X + 3 = (X + 1)(X + 3)(X^2 + X + 1)$$

◄FUNCIONES

Cuando una **cantidad variable** *depende de otra se dice que está en* **función** *de esta última.*

Se dice que **"y"** *es función de* **"x"** *cuando al valor de la variable* **"x"** *corresponde uno y solamente un valor de la variable* **"y".**

La notación para expresar que **"y"** *es función de* **"x"** *es :*

$$Y = f(x)$$

CONSTANTES Y VARIABLES

Son **constantes** *las cantidades que intervienen en una cuestión matemática cuando tienen un valor fijo y determinado, y* **variables** *cuando toman diversos valores. Veamos dos ejemplos:*

1) *Si un metro de tela cuesta $2, el* **costo** *de una pieza de tela dependerá de su* **número de metros**. *Si la pieza tiene 5* **metros**, *el* **costo** *será de $10, si tiene 8* **metros**, *será $16, etc. Aquí, el* **costo de un metro** *de tela que siempre es el mismo ($2), es una* **constante**; *el* **número de metros** *y el* **costo de la pieza**, *que toman diversos valores, son* **variables**.

   En este caso el **costo de la pieza** *depende del* **número de metros** *que tenga. El* **costo de la pieza** *es la variable* **dependiente** *y el* **número de metros** *la variable* **independiente.**

2) *Si un automóvil desarrolla una* **velocidad** *de 100 kilómetros por hora, el* **espacio** *que recorra dependerá del* **tiempo** *que esté en movimiento. Si avanza durante 2* **horas**, *recorrerá un* **espacio** *de 200 kilómetros y durante 3* **horas** *recorrerá 300 kilómetros. Aquí, la* **velocidad** *de 100 kilómetros es constante ;* **el tiempo y el espacio** *recorrido, que toman sucesivos valores, son* **variables**.

   En este caso el **espacio** *recorrido depende del* **tiempo** *que esté avanzando el automóvil. El* **tiempo** *es la variable* **independiente** *y el* **espacio** *recorrido la variable* **dependiente.**

FUNCIONES EXPRESABLES POR FÓRMULAS

En general, las funciones son expresables por fórmulas o ecuaciones cuando se conoce la relación matemática que liga a la variable dependiente o función con las variables independientes, es decir, cuando se conoce la ley de dependencia. En estos casos habrá una ecuación que será la expresión analítica de la función y que define la función.

Así, $y = 2x + 1$, $y = 2x^2$, $y = x^3 + 2x - 1$

son funciones expresadas por ecuaciones o fórmulas.

2x + 1 *es una función de primer grado,* $\mathbf{2x^2}$ *es de segundo grado y* $\mathbf{x^3 + 2x - 1}$ *es de tercer grado (el grado lo define la mayor potencia a la que esté elevada la variable independiente)*

Los ejemplos anteriores son funciones de la variable "x" porque a cada valor de "x" corresponde un valor determinado de la función.

Considerando la función 2x + 1, que representamos por "y", tendremos : y = 2x + 1.

Para

$X = 0, \quad y = 2*\mathbf{0} + 1 = 1$
$X = 1, \quad y = 2*\mathbf{1} + 1 = 3$
$X = 2, \quad y = 2*\mathbf{2} + 1 = 5$

Para

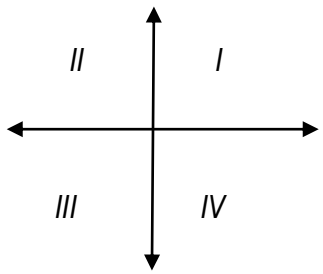
$X = -1, \quad y = 2(\mathbf{-1}) + 1 = -1$
$X = -2, \quad y = 2(\mathbf{-2}) + 1 = -3,$ etc

"x" es la variable **independiente**; *"y" es la variable* **dependiente**..

◄COMO GRAFICAR UNA FUNCIÓN CONOCIENDO SU ECUACIÓN :

La representación gráfica de una función algebraica se hace sobre un SISTEMA RECTANGULAR DE COORDENADAS CARTESIANAS.

Dos líneas rectas que se cortan constituyen un sistema de ejes coordenados. Cuando las líneas son perpendiculares entre sí, se denomina sistema de ejes coordenados rectangulares o ***sistema rectangular de coordenadas cartesianas.***



Los ejes dividen al plano del papel en cuatro partes llamadas cuadrantes (I, II, III y IV).

El punto donde se cortan los dos ejes se denomina ***"origen".***

Cualquier distancia medida sobre el eje horizontal desde el "origen" ***hacia la derecha es positiva*** *y desde el "origen"* ***hacia la izquierda es negativa.***

Cualquier distancia medida sobre el eje vertical desde el "origen" ***hacia arriba es positiva*** *y desde el "origen"* ***hacia abajo es negativa****.*

Cualquier representación se inicia con la ubicación de los puntos que están contenidos en la función, es decir : Los puntos que cumplen con la función que va a ser graficada.

Dado un punto ***P(x,y)****, su ubicación en el sistema de coordenadas se realizará de la siguiente manera:*

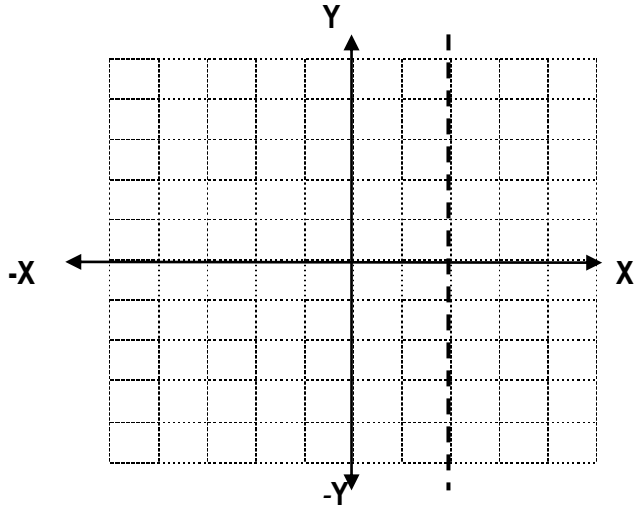
"x" *representará el número de unidades que se encuentra alejado del eje vertical (a la derecha o a la izquierda del "origen").*

"y" *representará el número de unidades que se encuentra alejado del eje horizontal (arriba o debajo del "origen").*

Para fijar mejor la idea realizaremos algunos ejemplos :

Ejemplo: *Graficar el punto* ***A(2,3)***

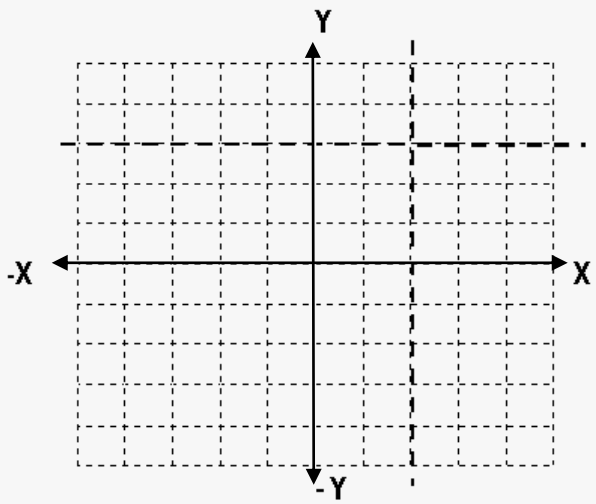
Sobre el eje de coordenadas grafico una recta auxiliar que pase por donde el eje horizontal indica 2 unidades positivas (a la derecha del "origen")



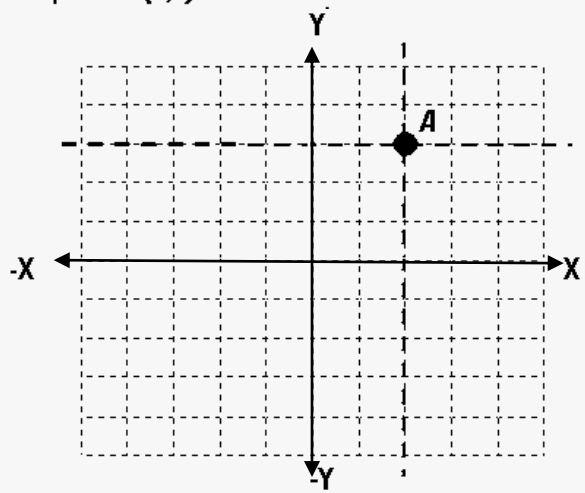
Esta recta auxiliar que acabamos de trazar no tiene ninguna utilización significativa en la gráfica, "simplemente" es una ayuda visual para la localización del punto que queremos graficar (se recomienda hacerlo en un trazo "suave" o "claro" para evitar confusiones).

Recuerde que el número que aparece a la izquierda dentro del paréntesis siempre se refiere a las unidades del eje horizontal (eje X) y el número que aparece a la derecha se refiere a las unidades del eje vertical (eje Y).

A continuación grafico otra recta auxiliar pero ahora pasará por donde el eje vertical indique 3 unidades positivas (arriba del "origen").

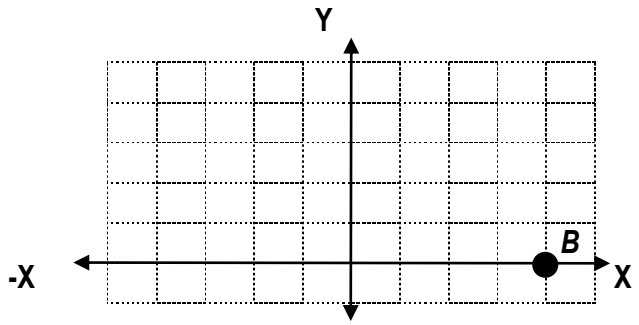


*El punto donde se cortan estas dos "rectas auxiliares" señala la ubicación del punto **A(2,3)**.*

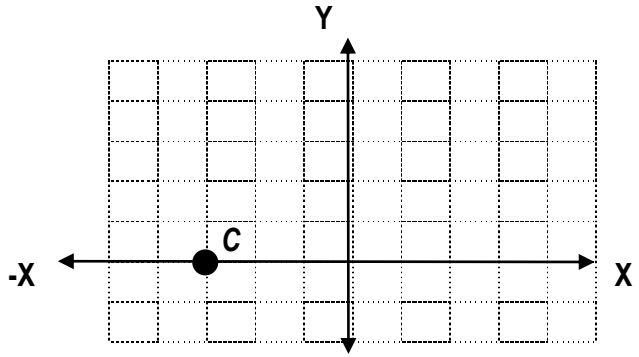


Algunos autores recomiendan el siguiente método : Ubíquese en el "origen", observe el primer número que aparece en el paréntesis, si es positivo trasládese tantas unidades a la derecha (2 en este caso), desde allí trasládese tantas unidades hacia arriba o hacia abajo (como es positivo, me traslado 3 unidades hacia arriba).

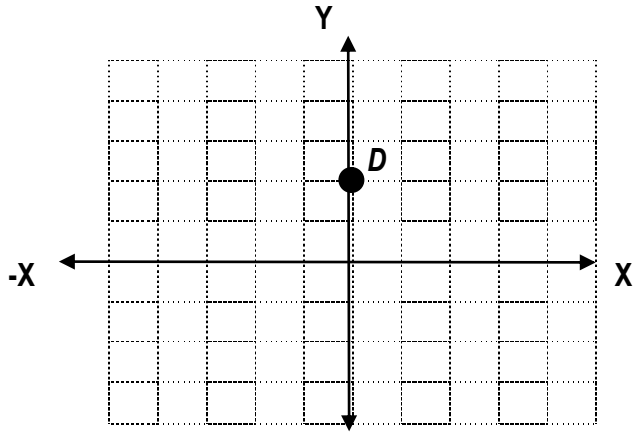
Ejemplo: *Graficar el punto **B(4,0)***



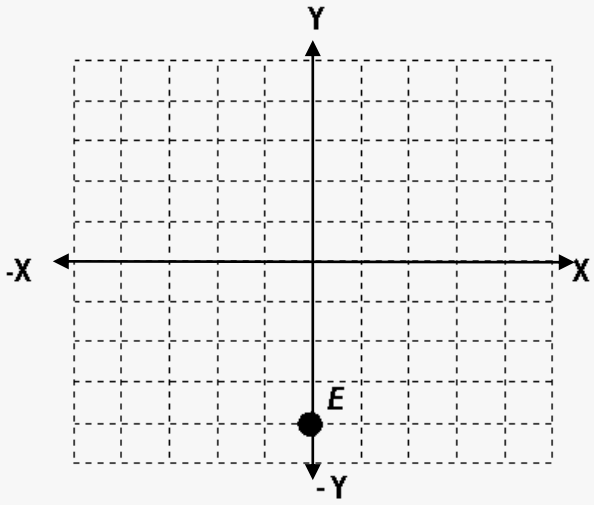
Ejemplo: *Graficar el punto **C(-3,0)***



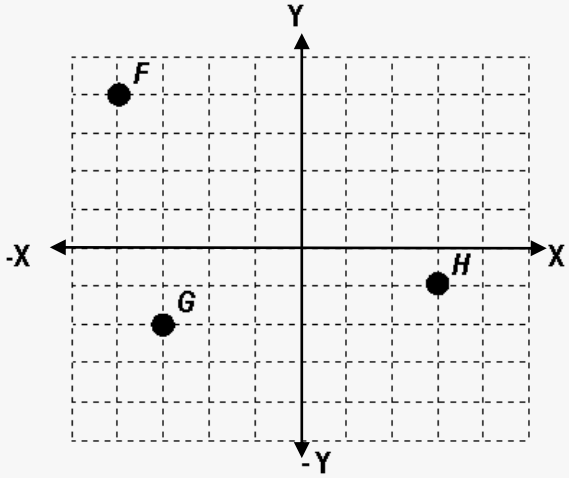
Ejemplo: *Graficar el punto **D(0,2)***



Ejemplo: *Graficar el punto* ***E(0,-4)***



Ejemplo: *Graficar los puntos* ***F(-4,4), G(-3,-2), H(3,-1)***



Recuerde: *El valor que está del lado izquierdo dentro del paréntesis representa las unidades que debo desplazarme sobre el eje horizontal (positivo hacia la derecha y negativo hacia la izquierda). El valor que está del lado derecho dentro del paréntesis representa las unidades que debo desplazarme sobre el eje vertical (positivo hacia arriba y negativo hacia abajo).*

Una RECTA puede ser indicada con la siguiente ecuación general : aX + bY – c = 0 , en donde para cada valor de "x" existirá UNO Y SOLO UN valor de "y" (y viceversa). El par de números o "par ordenado" (x,y) obtenido por medio de esta ecuación representa un punto que está ubicado o contenido en la recta indicada por dicha ecuación.

Para calcular cualquier punto perteneciente o contenido en una recta basta con dar CUALQUIER valor a "x" y obtener el ÚNICO valor correspondiente a "y" (o viceversa).

Conocidos dos puntos de una recta puedo graficarla trazando una línea recta que pase por dichos puntos.

Vamos a utilizar un ejemplo para fijar mejor la idea :

Ejemplo: *Graficar la recta identificada por la ecuación* ***3X + 2Y – 6 = 0***

Cuando estudiamos bachillerato nos enseñaron a dibujar "una cruz" donde colocábamos del lado izquierdo los valores que le asignamos a "x" y al lado derecho los valores que calculábamos de "y" (o viceversa).

X	Y

Respetando este criterio, procederemos de la siguiente manera:

Para **X = 0**

Sustituyo este valor en la ecuación $3X + 2Y - 6 = 0$

$3\,(0) + 2Y = 6$; $0 + 2Y = 6$: $Y = 6 / 2$; **Y = 3**

X	Y
0	**3**

En tal sentido el primer punto o par ordenado calculado será A(0,3)

Ahora le doy CUALQUIER OTRO VALOR a "x" o "y". Entiéndase bien, ***cualquier valor que se nos ocurra****. La ecuación de una recta se cumple para cualquier valor de "x" o para cualquier valor de "y".*

Para **Y = 0**

Sustituyo este valor en la ecuación $3X + 2Y - 6 = 0$

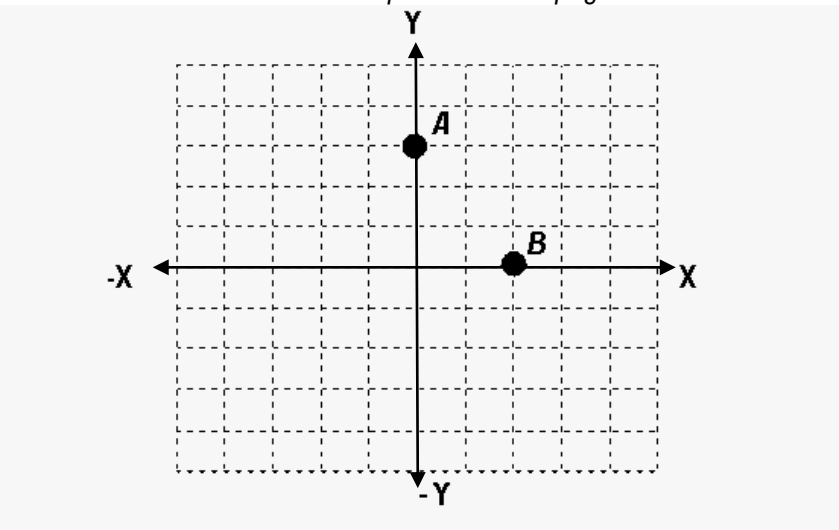
$3X + 2\,\mathbf{(0)} = 6$; $3X + 0 = 6$: $X = 6 / 3$; **X = 2**

X	Y
0	3
2	**0**

Los dos puntos que hemos calculado y que están contenidos en la recta $3X + 2Y - 6 = 0$ *son :*

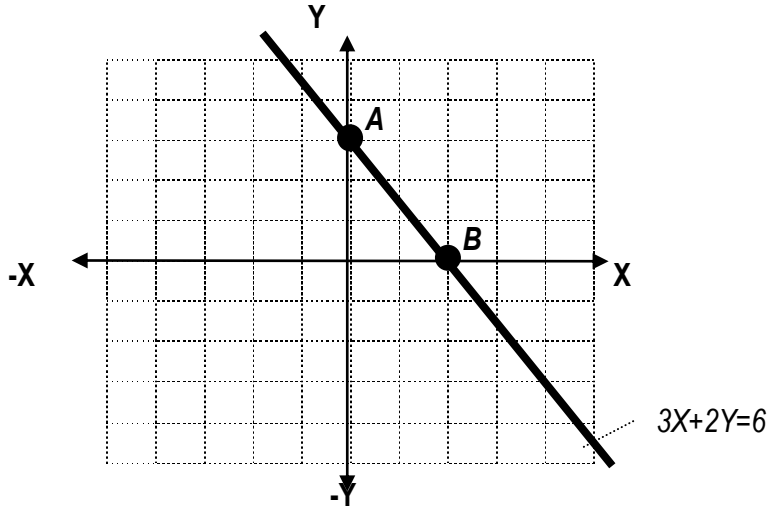
A(0,3) *y* ***B(2,0)***

Conocidos los dos puntos procederemos a graficarlo en el sistema de coordenadas recordando lo explicado en las páginas anteriores:



Graficados como han sido los dos puntos calculados, solo nos queda trazar la recta que pase por los mencionados puntos.

Se aclara que la recta abarcará todo el plano ya que los valores que pueden tomar ***"x"*** *y* ***"y"*** *van desde* **- ∞** *hasta* **+∞**



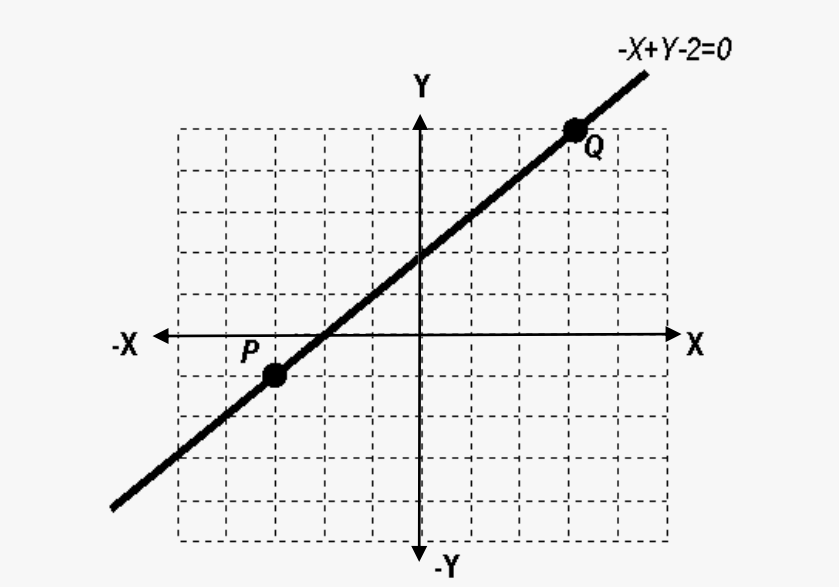
Ejemplo: *Graficar la recta identificada por la ecuación* **-X + Y – 2 = 0**

Algunos autores suelen utilizar una tabla escribiendo debajo de cada valor de "x" el correspondiente valor de "y". Resaltando que aunque solo es necesario conocer dos puntos para graficar la recta, los otros puntos sirven para verificar que la misma fue bien trazada al notar que todos están contenidos en ella.

X	-3	-2	-1	0	1	2	3
Y	-1	0	1	2	3	4	5

Para calcular los valores anteriores utilizo el procedimiento explicado en el ejercicio anterior. ***REPITO: Le damos cualquier valor a "x" y calculamos el respectivo valor de "y" (y viceversa).***

Escojamos los puntos ***P(-3,-1)*** *y* ***Q(3,5)*** *y tracemos la recta por ellos dos. Después verifiquemos que todos los demás puntos estén contenidos en ella.*



Ejemplo: *Graficar la recta identificada por la ecuación* ***X – 2Y = 0***

Generalmente, para facilitar el cálculo de los dos puntos necesarios para graficar la recta, procedemos a utilizar "X=0" y después "Y=0" obteniendo los dos puntos donde la recta corta a los dos ejes (horizontal y vertical).

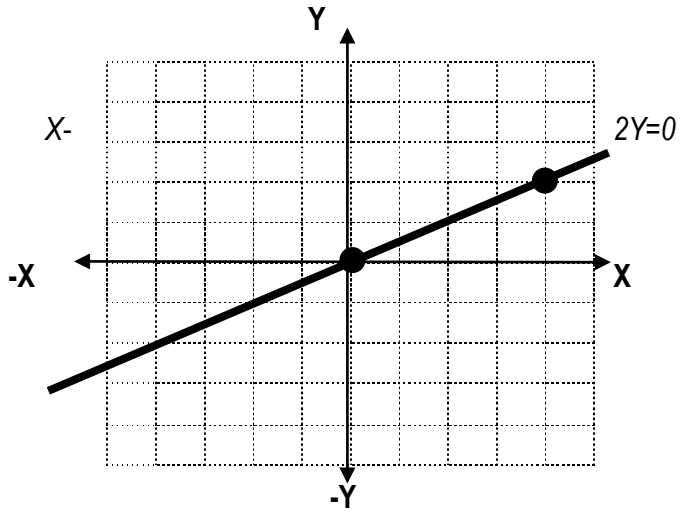
Pero en aquellas rectas que pasan por el "origen" (como en este caso) los dos cálculos nos llevarán al mismo resultado (0,0). Esto es lógico ya que hemos visto que para cada valor de "x" existe UNO Y SOLO UN valor de "y" (y viceversa).

Este "problema" lo evitamos si nos acostumbramos a darle CUALQUIER valor a alguna de las dos variables y calcular el valor de la otra (no siempre "X=0" y " Y=0") .

Para $Y = 0$; $X - 2(0) = 0$; $X = 0$

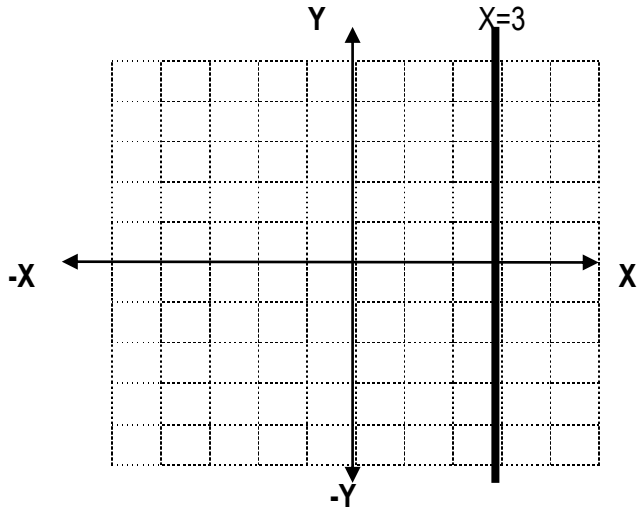
Para $Y = 2$; $X - 2(2) = 0$; $X = 4$

x	y
0	0
4	2



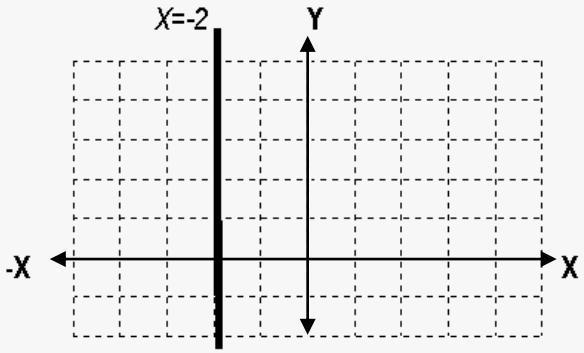
Ejemplo: *Graficar la recta identificada por la ecuación* ***X = 3***

Este tipo especial de rectas no necesitan del calculo de alguno de sus puntos ya que ella "nos dice" que "pasará" por todos aquellos donde X = 3 , y esto sucede en una recta paralela al eje vertical alejada tres unidades en sentido positivo (a la derecha del origen).



Ejemplo: *Graficar la recta identificada por la ecuación* ***X = - 2***

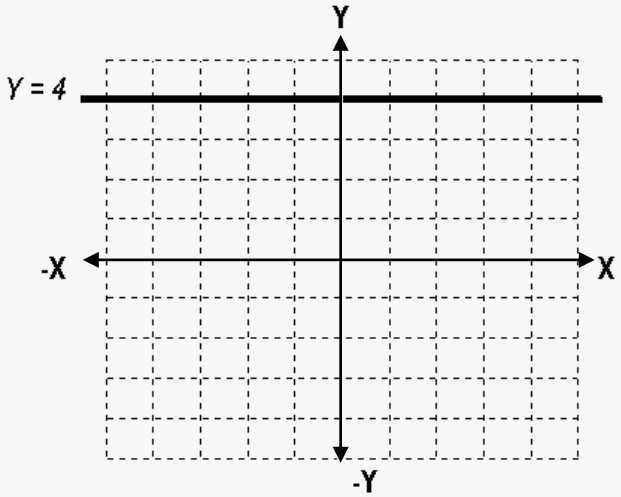
Este tipo especial de rectas no necesitan del calculo de alguno de sus puntos ya que ella "nos dice" que "pasará" por todos aquellos donde X = -2 , y esto sucede en una recta paralela al eje vertical alejada dos unidades en sentido negativo (a la izquierda del origen).



NOTA: La recta X = 0 estará representada por el eje vertical (eje Y)

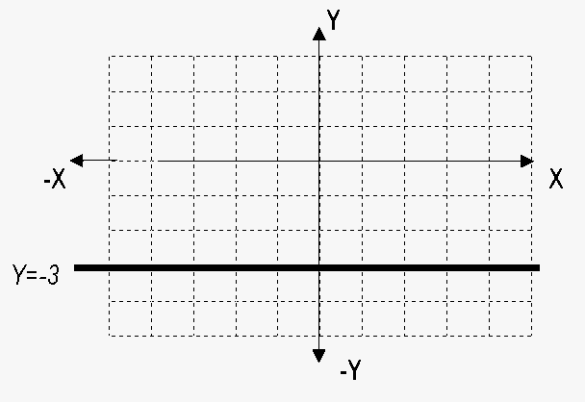
Ejemplo: *Graficar la recta identificada por la ecuación* ***Y = 4***

Este tipo especial de rectas no necesitan del calculo de alguno de sus puntos ya que ella "nos dice" que "pasará" por todos aquellos donde Y = 4 , y esto sucede en una recta paralela al eje horizontal alejada cuatro unidades en sentido positivo (arriba del origen).



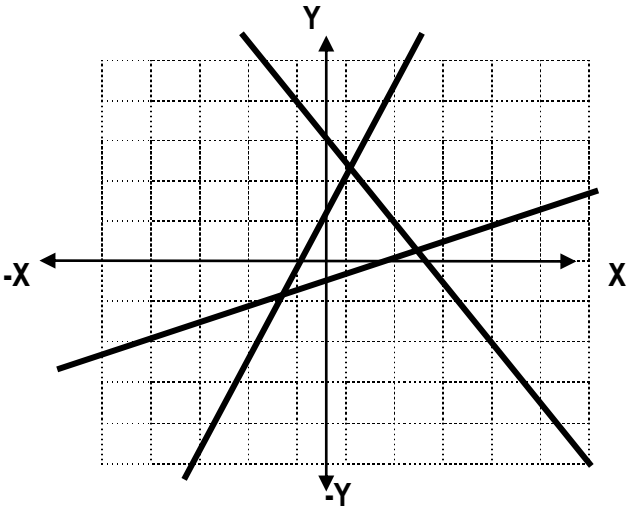
Ejemplo: *Graficar la recta identificada por la ecuación* ***Y = -3***

Este tipo especial de rectas no necesitan del calculo de alguno de sus puntos ya que ella "nos dice" que "pasará" por todos aquellos donde Y = -3 , y esto sucede en una recta paralela al eje horizontal alejada tres unidades en sentido negativo (debajo del origen).



NOTA: ***La recta Y = 0 estará representada por el eje horizontal (eje X).***

Sobre un mismo sistema rectangular de coordenadas se pueden graficar varias rectas



GRAFICAS DE ALGUNAS RELACIONES Y FUNCIONES DE SEGUNDO GRADO

1) Gráfico de $y = x^2$

Se forma una tabla con los valores de x y los correspondientes de y:

x	-3	- 2.5	- 2	- 1.5	- 1	0	1	1.5	2	2.5	3	...
	9	6.25	4	2.25	1	0	1	2.25	4	6.25	9	...

En el gráfico (Fig. 35) aparecen representados los valores de y correspondientes a los dados para x.

La posición de esos puntos nos indica la forma de la curva; es una **parábola**, una curva ilimitada.

El trazado de la curva uniendo entre sí los puntos que encontramos de cada lado del eje de las y es aproximado. Cuantos más puntos se localicen, mayor aproximación se obtendrá.

A la operación de trazar la curva después de obtener sólo algunos puntos se le llama **interpolación**, y consiste en hacer pasar la curva por muchos otros puntos que no hemos hallado, pero que suponemos pertenecen a la curva.

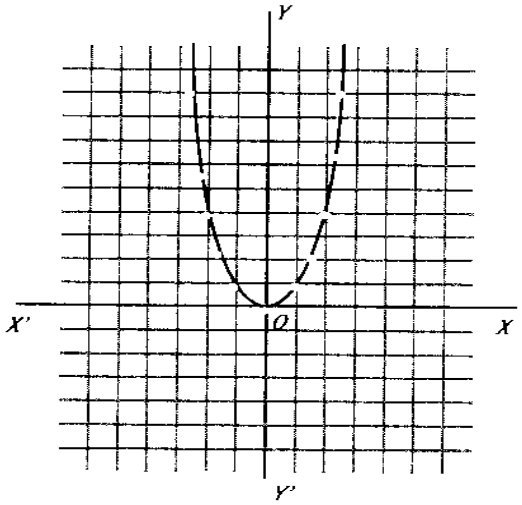


Figura 35

2) Gráfico de $X^2 + Y^2 = 16$

Despejando y tendremos:

$$y^2 = 16 - x^2; \text{ luego, } y = \pm\sqrt{16 - x^2}$$

El signo ± proviene de que la raíz cuadrada de una cantidad positiva tiene dos signos + y -. Por ejemplo, $\sqrt{4} = \pm 2$ porque

$$(+2) \times (+2) = +4 \text{ y } (-2) \times (-2) = +4$$

Por tanto, en este caso, a cada valor de x corresponderán dos valores de y, uno positivo y otro negativo.

Dando valores a x:

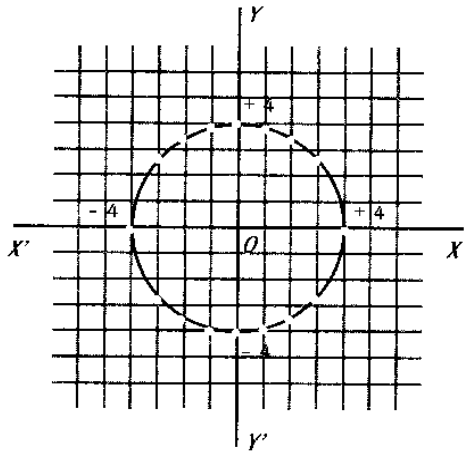


Figura 36

x	- 4	- 3	- 2	- 1	0	1	2	3	4
y	0	± 2.6	± 3.4	± 3.8	± 4	± 3.8	± 3.4	± 2.6	0

La curva (Fig. 36) es un círculo cuyo centro está en el origen.

Toda ecuación de la forma $x^2 + y^2 = r^2$ representa un círculo cuyo radio es r. En el caso anterior, el radio es 4, que es la raíz cuadrada de 16.

3) Gráfico de $9x^2 + 25y^2 = 225$

Despejando y tendremos:

$$25y^2 = 225 - 9x^2 \quad \therefore \quad y^2 = \frac{225 - 9x^2}{25}$$

$$y^2 = 9 - \frac{9x^2}{25} \quad \therefore \quad y = \pm\sqrt{9 - \frac{9x^2}{25}}$$

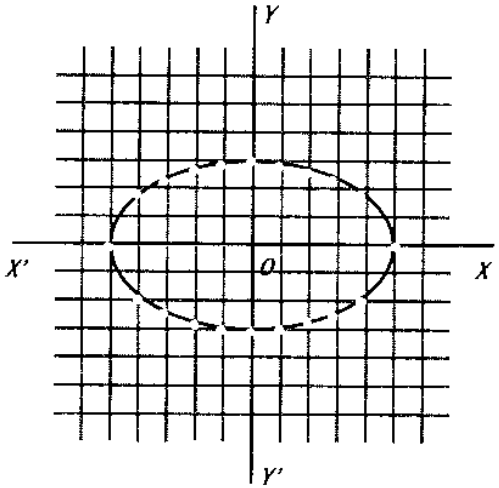


Figura 37

Dando valores a x tendremos:

x	- 5	- 4	- 3	- 2	- 1	0	1	2	3	4	5
y	0	± 1.8	± 2.4	± 2.6	± 2.8	± 3	± 2.8	± 2.6	± 2.4	± 1.8	0

En la figura 37 aparecen representados los valores de y correspondientes a los que dimos para x. La curva obtenida es una **elipse** o curva cerrada.

Toda ecuación de la forma $a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b^2$, o sea $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$, representa una elipse.

4) Gráfico de $xy = 5$ ó $y = \frac{5}{x}$

Dando a x valores positivos tenemos:

x	0	½	1	2	3	4	5	6	7	8	....	± ∞
y	± ∞	10	5	2.5	1.6	1.25	1	0.8	0.7	0.6	....	0

Si marcamos cuidadosamente estos puntos obtendremos la curva situada en el primer cuadrante de la figura 38.

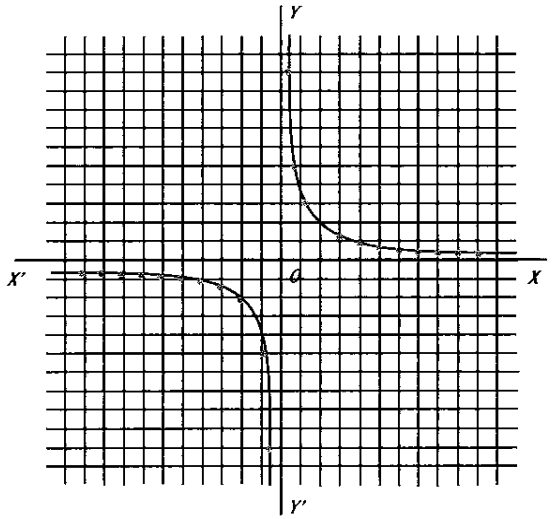


Figura 38

Dando a x valores negativos tenemos:

x	0	- ½	- 1	- 2	- 3	- 4	- 5	- 6	- 7	- 8	....	±∞
y	±∞	10	- 5	- 2.5	- 1.6	- 1.25	- 1	- 0.8	- 0.7	- 0.6	....	0

Al marcar cuidadosamente estos puntos se obtiene la curva situada en el tercer cuadrante de la figura 38.

La curva obtenida es una hipérbola rectangular. Toda ecuación de la forma $xy = a$ ó $y = \frac{a}{x}$ donde a es constante, representa una hipérbola de este tipo.

La **parábola**, la **elipse** y la **hipérbola** son conocidas como **secciones cónicas** o simplemente **cónicas.** El **círculo** es un caso especial de la elipse.

En los gráficos no es imprescindible que la unidad sea una división del papel cuadriculado. Se puede tomar como unidad dos, tres o más divisiones, lo que en muchos casos resulta muy conveniente.

La unidad para las ordenadas puede ser diferente a la de las abscisas.

◄SISTEMAS DE ECUACIONES :

ECUACIONES SIMULTANEAS : *Dos o más ecuaciones con dos o más incógnitas son simultaneas cuando se satisfacen para iguales valores de las incógnitas.*

Así, las ecuaciones

$$X + Y = 5$$
$$X - Y = 1$$

Son simultaneas porque $X = 3$ *y* $Y = 2$ *satisfacen ambas ecuaciones.*

ECUACIONES EQUIVALENTES *son las que se obtienen una de la otra.*

Así,

$$X + Y = 4$$
$$2X + 2Y = 8$$

Son equivalentes porque dividiendo por 2 la segunda ecuación se obtiene la primera o multiplicando por 2 la primera se obtiene la segunda.

Las ecuaciones equivalentes tienen infinitas soluciones comunes.

ECUACIONES INDEPENDIENTES *son las que no se obtienen una de las otras.*

Cuando las ecuaciones independientes tienen una sola solución común son simultaneas.

ECUACIONES INCOMPATIBLES *son ecuaciones independientes que no tienen solución común.*

Así,

$$X + 2Y = 10$$
$$2X + 4Y = 5$$

Son incompatibles porque no hay ningún par de valores de "X" y "Y" que verifique ambas ecuaciones.

SISTEMA DE ECUACIONES *es la reunión de dos o más ecuaciones con dos o más incógnitas.*

Así,

$$\begin{cases} 2X + 3Y = 13 \\ 4X - Y = 5 \end{cases}$$

Es un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.

SOLUCIÓN DE UN SISTEMA DE ECUACIONES *es un grupo de valores de las incógnitas que satisface todas las ecuaciones del sistema. La solución del sistema anterior es* $X = 2$, $Y = 3$.

Un sistema de ecuaciones es ***posible o compatible*** *cuando tiene solución y es* ***imposible o incompatible*** *cuando no tiene solución.*

Un sistema compatible es ***determinado*** *cuando tiene una sola solución e* ***indeterminado*** *cuando tiene infinitas soluciones.*

Para la ***RESOLUCIÓN DE UN SISTEMA DE ECUACIONES*** *se utilizan cuatro métodos algebraicos:*

1. *Método de igualación.*
2. *Método de sustitución.*
3. *Método de reducción (suma y resta)*
4. *Por determinantes.*

MÉTODO DE IGUALACIÓN :

Ejemplo 1 : **Resolver el sistema**

$$\begin{cases} 7X + 4Y = 13 & \textbf{(1)} \\ 5X - 2Y = 19 & \textbf{(2)} \end{cases}$$

Despejamos una cualquiera de las incógnitas; por ejemplo "X", en ambas ecuaciones

Despejando X en ***(1)*** *:* $7X = 13 - 4Y$; $X = \frac{13 - 4Y}{7}$

Despejando X en ***(2)*** *:* $5X = 19 + 2Y$; $X = \frac{19 + 2Y}{5}$

Ahora se ***igualan*** *entre sí los dos valores de X que hemos obtenido*

$$\frac{13 - 4Y}{7} = \frac{19 + 2Y}{5}$$

Y ya tenemos una sola ecuación con una incógnita; hemos eliminado la X.

Resolviendo esta ecuación (recordar Resolución de Ecuaciones Fraccionarias pág. 46) :

$$5(13 - 4Y) = 7(19 + 2Y)$$
$$65 - 20Y = 133 + 14Y$$
$$-20Y - 14Y = 133 - 65$$
$$-34Y = 68$$
$$Y = -2$$

Sustituyendo este valor de "Y" en cualquiera de las dos ecuaciones dadas, por ejemplo en ***(1)*** *(generalmente se sustituye en la más sencilla), se tiene :*

$$7X + 4(-2) = 13$$
$$7X - 8 = 13$$
$$7X = 21$$
$$X = 3$$

El resultado es : ***X = 3*** *y* ***Y = – 2***

VERIFICACIÓN : Sustituyendo estos dos valores en las dos ecuaciones dadas, ambas se convierten en identidad.

Ejemplo 2 : ***Resolver el sistema*** $\begin{cases} X + 6Y = 27 \\ 7X - 3Y = 9 \end{cases}$

$$x + 6y = 27 \quad ; \quad 7x - 3y = 9$$
$$x = 27 - 6y \qquad 7x = 9 + 3y$$
$$x = \frac{9 + 3y}{7}$$
$$27 - 6y = \frac{9 + 3y}{7}$$
$$7(27 - 6y) = 9 + 3y$$
$$189 - 42y = 9 + 3y$$

$$180 = 45y$$
$$4 = y$$
$$x + 6(4) = 27$$
$$x + 24 = 27$$
$$x = 3$$
$$sol: \ x = 3 \quad y = 4$$

Ejemplo 3 : ***Resolver el sistema*** $\begin{cases} 3X - 2Y = -2 \\ 5X + 8Y = -60 \end{cases}$

$$3x - 2y = -2 \quad ; \quad 5x + 8y = -60$$
$$3x = -2 + 2y \qquad 5x = -60 - 8y$$
$$x = -\frac{2 - 2y}{3} \qquad x = -\frac{60 + 8y}{5}$$
$$-\frac{2 - 2y}{3} = -\frac{60 + 8y}{5}$$
$$5(2 - 2y) = 3(60 + 8y)$$
$$10 - 10y = 180 + 24y$$

$$-170 = 34y$$
$$-5 = y$$
$$3x - 2(-5) = -2$$
$$3x + 10 = -2$$
$$3x = -12$$
$$x = -4$$
$$sol: x = -4 \quad y = -5$$

Ejemplo 4 : ***Resolver el sistema*** $\begin{cases} 3X + 5Y = 7 \\ 2X - Y = -4 \end{cases}$

$$3x + 5y = 7 \quad ; \qquad 2x - y = -4$$
$$5y = 7 - 3x \qquad -y = -4 - 2x$$
$$y = \frac{7 - 3x}{5} \qquad y = 4 + 2x$$
$$\frac{7 - 3x}{5} = 4 + 2x$$
$$7 - 3x = 5(4 + 2x)$$
$$7 - 3x = 20 + 10x$$

$$-13 = 13x$$
$$-1 = x$$
$$2(-1) - y = -4$$
$$-2 - y = -4$$
$$-y = -2$$
$$y = 2$$
$$sol: \ x = -1 \quad y = 2$$

MÉTODO DE SUSTITUCIÓN :

Ejemplo 1 : **Resolver el sistema** $\begin{cases} X + Y = 5 & (1) \\ X - Y = 1 & (2) \end{cases}$

Despejamos una cualquiera de las incógnitas; por ejemplo "X", en alguna de las dos ecuaciones. Vamos a despejarla en la ecuación ***(2)****.*

Tendremos :

$$X = 1 + Y$$

Este valor de X se sustituye en la otra ecuación ***(1).***

$$X + Y = 5 \quad ; \quad (1 + Y) + Y = 5$$

Ya tenemos una ecuación con una incógnita; hemos eliminado la X.

Resolviendo esta ecuación:

$$1 + 2Y = 5 \quad ; \quad 2Y = 5 - 1 \quad ; \quad 2Y = 4 \quad ; \quad Y = 4 \div 2 \quad ; \quad Y = 2$$

Sustituyendo este valor de "Y" en cualquiera de las dos ecuaciones dadas, por ejemplo en ***(1)*** *(generalmente se sustituye en la más sencilla), se tiene :*

$$X + Y = 5 \quad ; \quad X + 2 = 5 \quad ; \quad X = 5 - 2 \quad ; \quad X = 3$$

El resultado es : ***X = 3*** *y* ***Y = 2***

VERIFICACIÓN : Sustituyendo estos dos valores en las dos ecuaciones dadas, ambas se convierten en identidad.

Ejemplo 2 : **Resolver el sistema** $\begin{cases} X + 3Y = 6 \\ 5X - 2Y = 13 \end{cases}$

$$x + 3y = 6 \quad ; \quad 5x - 2y = 13$$
$$x = 6 - 3y$$
$$5(6 - 3y) - 2y = 13$$
$$30 - 15y - 2y = 13$$
$$-17y = -17$$
$$y = 1$$

$$x + 3(1) = 6$$
$$x + 3 = 6$$
$$x = 3$$
$$sol: \ x = 3 \quad y = 1$$

Ejemplo 3 : **Resolver el sistema** $\begin{cases} 5X + 7Y = -1 \\ -3X + 4Y = -24 \end{cases}$

$$5x + 7y = -1 \quad ; \quad -3x + 4y = -24$$
$$5x = -1 - 7y$$
$$x = -\frac{1 + 7y}{5}$$
$$3\left(\frac{1 + 7y}{5}\right) + 4y = -24$$
$$\frac{3 + 21y}{5} + 4y = -24$$
$$3 + 21y + 20y = -120$$

$$41y = -123$$
$$y = -3$$
$$-3x + 4(-3) = -24$$
$$-3x - 12 = -24$$
$$-3x = -12$$
$$x = 4$$
$$sol: \ x = 4 \quad y = -3$$

Ejemplo 4 : **Resolver el sistema** $\begin{cases} 3X + 4Y = 8 \\ 8X - 9Y = -77 \end{cases}$

$$3x + 4y = 8 \quad ; \quad 8x - 9y = -77$$
$$4y = 8 - 3x$$
$$y = \frac{8 - 3x}{4}$$
$$8x - 9\left(\frac{8 - 3x}{4}\right) = -77$$
$$32x - 9(8 - 3x) = -308$$
$$32x - 72 + 27x = -308$$

$$59x = -236$$
$$x = -4$$
$$3(-4) + 4y = 8$$
$$-12 + 4y = 8$$
$$4y = 20$$
$$y = 5$$
$$sol: \quad x = -4 \quad y = 5$$

MÉTODO DE REDUCCIÓN (SUMA Y RESTA) :

Por considerar que este es el método más expedito o de más fácil aplicación, le dedicaremos más atención que a los demás con la finalidad de que el estudiante se familiarice más con él.

Ejemplo 1 : ***Resolver el sistema*** $\begin{cases} 5X + 6Y = 20 & (1) \\ 4X - 3Y = -23 & (2) \end{cases}$

Este método consiste en sumar algebraicamente las dos ecuaciones de manera tal que el resultado sea una sola ecuación con una sola incógnita.

Esto solo es posible si los coeficientes de alguna de las dos incógnitas son iguales pero con signos distintos.

*En este sistema notamos que en la ecuación **(1)** la letra "Y" está acompañada del coeficiente "6" y en la ecuación **(2)** está acompañada del coeficiente " – 3".*

*Si la ecuación **(2)** la multiplicamos por "2" el coeficiente de "Y" será " – 6" y de esa manera si es posible aplicar este método (recuerde que se deben multiplicar todos los términos de la ecuación) :*

$4X - 3Y = -23$ *por " 2" es igual a* $8X - 6Y = -46$

Ahora el sistema puede ser expresado como :

$$\begin{cases} 5X + 6Y = 20 \\ \underline{8X - 6Y = -46} \end{cases}$$

Al sumar las dos ecuaciones : $13X = -26$

Realizando el despeje :

$$X = -26 / 13 \quad : \quad X = -2$$

*Sustituyendo "X = – 2" en cualquiera de las dos ecuaciones dadas, por ejemplo en **(1)**, se tiene :*

$$5X + 6Y = 20 \quad ; \quad 5(-2) + 6Y = 20 \quad ; \quad -10 + 6Y = 20$$

$$6Y = 20 + 10 \quad ; \quad 6Y = 30 \quad ; \quad Y = 30 / 6 \quad ; \quad Y = 5$$

El resultado es : ***X = – 2*** *y* ***Y = 5***

VERIFICACIÓN : Sustituyendo estos dos valores en las dos ecuaciones dadas, ambas se convierten en identidad.

Es indiferente igualar los coeficientes de "X" o de "Y" para su posterior eliminación en la suma algebraica inicial. Generalmente se igualan aquellos en que la operación sea más sencilla.

Para comprobar lo expresado anteriormente vamos a resolver el mismo sistema de ecuaciones pero igualando los valores de "X" inicialmente :

*En este sistema notamos que en la ecuación **(1)** la letra "X" está acompañada del coeficiente "5" y en la ecuación **(2)** está acompañada del coeficiente "4".*

*Se recomienda que la ecuación **(1)** se multiplique por el coeficiente que tiene la "X" en la ecuación **(2)** y que la ecuación **(2)** se multiplique por el coeficiente que tiene la letra "X" en la ecuación **(1)** (la ecuación de arriba por el coeficiente de abajo y la ecuación de abajo por el coeficiente de arriba). Para garantizar que los signos sean distintos, en este caso en particular, se utiliza "– 4" o "– 5".*

$$\begin{cases} 5X + 6Y = 20 & *(+4) \\ 4X - 3Y = -23 & *(-5) \end{cases}$$

Una vez efectuada la multiplicación el sistema quedará :

$$\begin{cases} 20X + 24Y = 80 \\ \underline{-20X + 15Y = 115} \end{cases}$$

Al sumar : $39Y = 195$

Realizando el despeje :

$$Y = 195 / 39 \quad ; \quad \mathbf{Y = 5}$$

*Sustituyendo "Y = 5" en cualquiera de las dos ecuaciones dadas, por ejemplo en **(2)**, se tiene :*

$4X - 3Y = -23$; $4X - 3(5) = -23$: $4X - 15 = -23$

$4X = -23 + 15$; $4X = -8$; $X = -8/4$; $\mathbf{X = -2}$

Notamos que los resultados son los mismos obtenidos cuando igualamos los valores de "Y".

Ejemplo 2 : **Resolver el sistema** $\begin{cases} 6X - 5Y = -9 & (1) \\ 4X + 3Y = 13 & (2) \end{cases}$

*Si quiero eliminar inicialmente la letra "Y" puedo notar que en la ecuación **(1)** dicha letra tiene coeficiente "– 5" y en la ecuación **(2)** tiene coeficiente "3".*

*Se recomienda que la ecuación **(1)** se multiplique por el coeficiente que tiene la "Y" en la ecuación **(2)** y que la ecuación **(2)** se multiplique por el coeficiente que tiene la letra "Y" en la ecuación **(1)** (la ecuación de arriba por el coeficiente de abajo y la ecuación de abajo por el coeficiente de arriba).*

*Al multiplicar la ecuación **(1)** por **3** y la ecuación **(2)** por **5** :*

$$\begin{cases} 18X - 15Y = -27 \\ 20X + 15Y = 65 \end{cases}$$

Al sumar : $38X = 38$

Despejando :

$X = 38/38$; $X = 1$

*Sustituyendo "X = 1" en cualquiera de las dos ecuaciones dadas, por ejemplo en **(2)**, se tiene :*

$4X + 3Y = 13$; $4.(1) + 3Y = 13$; $4 + 3Y = 13$

$3Y = 13 - 4$; $3Y = 9$; $Y = 9/3$; $Y = 3$

El resultado es : $\mathbf{X = 1}$ *y* $\mathbf{Y = 3}$

Ejemplo 3 :

$$\begin{cases} 9x + 7y = -4 \quad *(-11) \\ 11x - 13y = -48 \quad *(9) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -99x - 77y = 44 \\ 99x - 117y = -432 \end{cases}$$

$$-194y = -388$$

$$y = 2$$

$$9x + 7(2) = -4$$

$$9x + 14 = -4$$

$$9x = -18$$

$$x = -2$$

$$sol: x = -2 \quad y = 2$$

Ejemplo 4 : *En este sistema noto rápidamente que para eliminar la "X" solo debo multiplicar la ecuación de abajo por 7.*

$$\begin{cases} 7x - 15y = 1 \\ -x - 6y = 8 \quad *(7) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x - 15y = 1 \\ -7x - 42y = 56 \end{cases}$$

$$-57y = 57$$

$$y = -1$$

$$7x - 15(-1) = 1$$

$$7x + 15 = 1$$

$$7x = -14$$

$$x = -2$$

$$sol: \ x = -2 \quad y = -1$$

Ejemplo 5 : *En este sistema noto rápidamente que para eliminar la "X" solo debo multiplicar la ecuación de abajo por – 5.*

$$\begin{cases} 10x - 3y = 36 \\ 2x + 5y = -4 \quad *(-5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10x - 3y = 36 \\ -10x - 25y = 20 \end{cases}$$

$$-28y = 56$$

$$y = -2$$

$$10x - 3(-2) = 36$$

$$10x = 30$$

$$x = 3$$

$$sol: x = 3 \quad y = -2$$

RESOLUCIÓN POR DETERMINANTES :

Para aplicar este procedimiento las ecuaciones tienen que estar preparadas, de tal manera, que las incógnitas estén a la izquierda de la igualdad y el término independiente a la derecha.

Las incógnitas deben estar en el mismo orden en ambas ecuaciones (primero X y después Y).

En forma general $\begin{cases} a_1 X + b_1 Y = c_1 \\ a_2 X + b_2 Y = c_2 \end{cases}$

Al determinante formado por los cocientes de las incógnitas se le llama **determinante del sistema***; que en este caso es :*

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 \,.\, b_2 - a_2 \,.\, b_1$$

porque como es un determinante de segundo orden su valor es igual al producto de los números que forman la diagonal principal menos el producto de los números que forman la diagonal secundaria.

Cada incógnita es igual a un quebrado que tiene por **denominador** *el determinante del sistema y por* **numerador** *este mismo determinante, en el que se ha sustituido la columna formada por los coeficientes de la incógnita por la columna formada por los términos independientes; así :*

$$X = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{c_1} & b_1 \\ \mathbf{c_2} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{c_1 \,.\, b_2 - c_2 \,.\, b_1}{a_1 \,.\, b_2 - a_2 \,.\, b_1}$$

$$Y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & \mathbf{c_1} \\ a_2 & \mathbf{c_2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{a_1 \,.\, c_2 - a_2 \,.\, c_1}{a_1 \,.\, b_2 - a_2 \,.\, b_1}$$

Ejemplo 1 : **Resolver el sistema** $\begin{cases} 2X + 3Y = \mathbf{14} \\ 3X - 2Y = \mathbf{-5} \end{cases}$

$$X = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{14} & 3 \\ \mathbf{-5} & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{(14).(-2) - (-5).(3)}{(2).(-2) - (3).(3)}$$

$$X = \frac{-28+15}{-4-9} = \frac{-13}{-13} \quad , \quad \mathbf{X = 1}$$

$$Y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & \mathbf{14} \\ 3 & \mathbf{-5} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{(2).(-5) - (3).(14)}{(2).(-2) - (3).(3)}$$

$$Y = \frac{-10-42}{-4-9} = \frac{-52}{-13} \quad , \quad \mathbf{Y = 4}$$

Ejemplo 2 : **Resolver el sistema** $\begin{cases} X + 3Y = \mathbf{6} \\ 5X - 2Y = \mathbf{13} \end{cases}$

$$X = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{6} & 3 \\ \mathbf{13} & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{(6).(-2) - (13).(3)}{(1).(-2) - (5).(3)}$$

$$X = \frac{-12-39}{-2-15} = \frac{-51}{-17} \quad , \quad \mathbf{X = 3}$$

$$Y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \mathbf{6} \\ 5 & \mathbf{13} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{(1).(13) - (5).(6)}{(1).(-2) - (5).(3)}$$

$$Y = \frac{13-30}{-2-15} = \frac{-17}{-17} \quad , \quad \mathbf{Y = 1}$$

Ejemplo 3 : **Resolver el sistema** $\begin{cases} 3X + 5Y = 7 \\ 2X - Y = -4 \end{cases}$

$$X = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{7} & 5 \\ \mathbf{-4} & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{(7).(-1) - (-4).(5)}{(3).(-1) - (2).(5)}$$

$$X = \frac{-7+20}{-3-10} = \frac{13}{-13} \quad , \quad \mathbf{X = -1}$$

$$Y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & \mathbf{7} \\ 2 & \mathbf{-4} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{(3).(-4) - (2).(7)}{(3).(-1) - (2).(5)}$$

$$Y = \frac{-12-14}{-3-10} = \frac{-26}{-13} \quad , \quad \mathbf{Y = 2}$$

Ejemplo 4 : **Resolver el sistema** $\begin{cases} 6X - 5Y = -9 \\ 4X + 3Y = 13 \end{cases}$

$$X = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{-9} & -5 \\ \mathbf{13} & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & -5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{(-9).(3) - (13).(-5)}{(6).(3) - (4).(-5)}$$

$$X = \frac{-27+65}{18+20} = \frac{38}{38} \quad , \quad \mathbf{X = 1}$$

$$Y = \frac{\begin{vmatrix} 6 & \mathbf{-9} \\ 4 & \mathbf{13} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & -5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{(6).(13) - (4).(-9)}{(6).(3) - (4).(-5)}$$

$$Y = \frac{78+36}{18+20} = \frac{114}{38} \quad , \quad \mathbf{Y = 3}$$

◄POTENCIACIÓN : *Es la multiplicación del mismo factor varias veces.*

La expresión que se multiplica varias veces se llama **base**, *el número de veces que se multiplica la base se llama* **exponente** *y el resultado de la multiplicación se llama* **potencia** *:*

Exponente

$$2^3 = 8$$

Base — Potencia

La operación que se realiza se puede resumir así : Se multiplica la base (2) tantas veces como lo indica el exponente (3).

$$2^3 = 2 \text{ por } 2 \text{ por } 2 = 2 * 2 * 2 = 8$$

Ejemplos :

$(2X)^2 = 2X * 2X = (2)*(2)*(X)*(X) = = 4X^2$

$(3X)^3 = 3X * 3X * 3X = (3)*(3)*(3)*(X)*(X)*(X) = 27X^3$

$(aX)^n = aX * aX * aX$……..n veces $= a^nX^n$

SIGNO DE LAS POTENCIAS : *Cualquier potencia de una* **cantidad positiva** *evidentemente es positiva porque equivale a un producto en que todos los factores son positivos.*

En cuanto a las potencias de una **cantidad negativa** *se tiene que :*

1) *Toda potencia* **par** *de una cantidad negativa es* **positiva.**
2) *Toda potencia* **impar** *de una cantidad negativa es* **negativa.**

Así,

$(-2X)^2 = (-2X) * (-2X) = 4X^2$

$(-2X)^3 = (-2X)*(-2X)*(-2X) = -8X^3$

$(-2X)^4 = (-2X)*(-2X)*(-2X)*(-2X) = +16X^4$

POTENCIA DE UN MONOMIO : *Para elevar un monomio a una potencia se eleva su coeficiente a esa potencia y se multiplica el exponente de cada letra por el exponente que indica la potencia.*

Si el monomio es negativo, el signo de la potencia es positiva cuando el exponente es par, y es negativo cuando el exponente es impar.

$$(4X^5Y^2)^3 = 4^3 . X^{5*3} . Y^{2*3} = 64X^{15}Y^6$$

Ejemplos :

1. $(4a^2)^2 = 16a^4$
2. $(-5a)^3 = -125a^3$
3. $(3xy)^3 = 27x^3y^3$
4. $(-6a^2b)^2 = 36a^4b^2$
5. $(-2x^2y^3)^3 = -8x^6y^9$
6. $(4a^2b^3c^4)^3 = 64a^6b^9c^{12}$
7. $(-6x^4y^5)^2 = 36x^8y^{10}$
8. $(-7ab^3c^4)^3 = -343a^3b^9c^{12}$
9. $(a^mb^n)^x = a^{mx}b^{nx}$
10. $(-2x^3y^5z^6)^4 = 16x^{12}y^{20}z^{24}$
11. $(-3m^3n)^3 = -27m^9n^3$
12. $(a^2b^3c)^m = a^{2m}b^{3m}c^m$
13. $(-m^2nx^3)^4 = m^8n^4x^{12}$
14. $(-3a^2b)^5 = -243a^{10}b^5$
15. $(7x^5y^6z^8)^2 = 49x^{10}y^{12}z^{16}$
16. $\left(-\frac{x}{2y}\right)^2 = \frac{x^2}{4y^2}$
17. $\left(-\frac{2m}{n^2}\right)^3 = -\frac{8m^3}{n^6}$
18. $\left(\frac{ab^2}{5}\right)^3 = \frac{a^3b^6}{125}$

POTENCIA DE UN POLINOMIO : *Para elevar un polinomio a una potencia se multiplica dicho polinomio tantas veces como lo indique el exponente:*

Ejemplo 1 : **Resolver $(X + 3)^2$**

$$(X + 3)^2 = (X + 3).(X + 3)$$

La operación "(X + 3).(X + 3)" se realiza poniendo en práctica lo explicado en MULTIPLICACIÓN DE POLINOMIOS pág. 14.

Ejemplo 2 : **Resolver $(X^2 + 2X + 1)^2$**

$$(X^2 + 2X + 1)^2 = (X^2 + 2X + 1).(X^2 + 2X + 1)$$

La operación "$(X^2 + 2X + 1).(X^2 + 2X + 1)$" se realiza poniendo en práctica lo explicado en MULTIPLICACIÓN DE POLINOMIOS pág. 14.

Ejemplo 3 : **Resolver $(X^2 – 5X + 6)^3$**

$$(X^2 – 5X + 6)^3 = (X^2 – 5X + 6).(X^2 – 5X + 6).(X^2 – 5X + 6)$$

La operación "$(X^2 – 5X + 6).(X^2 – 5X + 6).(X^2 – 5X + 6)$" se realiza poniendo en práctica lo explicado en PRODUCTO CONTINUADO DE POLINOMIOS pág. 19.

Ejemplo 3 : **Resolver $(X^2 – 2)^4$**

$$(X^2 – 2)^4 = (X^2 – 2).(X^2 – 2).(X^2 – 2).(X^2 – 2)$$

La operación "$(X^2 – 2).(X^2 – 2).(X^2 – 2).(X^2 – 2)$" se realiza poniendo en práctica lo explicado en PRODUCTO CONTINUADO DE POLINOMIOS pág. 19.

PROPIEDADES DE LA POTENCIACIÓN :

Exponente cero : *Toda expresión algebraica elevada a cero equivale a 1:*

- $X^0 = 1$
- $(2X)^0 = 1$
- $(2X^3)^0 = 1$
- $(X^2 + 3)^0 = 1$

Exponente uno (1) : *Toda expresión algebraica elevada a uno es la misma expresión :*

- $(2X)^1 = 2X$
- $(X^2)^1 = X^2$
- $(X^2 + 3)^1 = X^2 + 3$

Multiplicación de potencias de la misma base : *Para multiplicar potencias de la misma base se escribe la misma base y se le pone por exponente la suma de los exponentes de los factores (Ley de los exponentes de la multiplicación pág. 10) :*

- $(X^m).(X^n) = X^{m+n}$
- $(X^mY^n).(X^sY^t) = X^{m+s}Y^{n+t}$

Potencia de productos : *Todo producto elevado a una potencia equivale al producto de los términos elevados a dicha potencia :*

$$(X.Y.Z)^n = X^n.Y^n.Z^n$$

Potencia de potencias : *Para elevar una potencia a otras potencias se escribe la base y se pone por exponente la multiplicación de dichas potencias :*

- $(X^m)^n = X^{mn}$
- $[(X^m)^n]^s = X^{mns}$

División de potencias de la misma base : *Para dividir potencias de la misma base se escribe la misma base y se le pone por exponente la diferencia entre el exponente del dividendo y el exponente del divisor (Ley de los exponentes de la división pág.23) :*

$$(X^m) \div (X^n) = X^{m-n}$$

División de potencias de bases distintas: *La división de dos expresiones elevada a una potencia equivale a la división de cada expresión elevada a dicha potencia :*

$$\left(\frac{X}{Y}\right)^n = \frac{X^n}{Y^n}$$

Exponente fraccionario : *Toda expresión algebraica elevada a un exponente fraccionario equivale a una raíz cuyo índice es el denominador del exponente y la cantidad sub-radical o radicando la misma cantidad elevada a la potencia que indica el numerador del exponente :*

- $X^{m/n} = \sqrt[n]{X^m}$
- $X^{2/3} = \sqrt[3]{X^2}$
- $(2X)^{3/2} = \sqrt[2]{2^3X^3}$
- $2X^{3/2} = 2.\sqrt[2]{X^3}$

Exponente negativo : *Toda cantidad elevada a un exponente negativo equivale a una fracción cuyo numerador es 1, y su denominador la misma cantidad con el exponente positivo :*

- $X^{-n} = \frac{1}{X^n}$
- $3.X^{-2}Y^{-5} = 3.\frac{1}{X^2Y^5}$
- $X^{-m/n} = \frac{1}{\sqrt[n]{X^m}}$

Pasar los factores del numerador de una expresión al denominador o viceversa : *Cualquier factor del numerador de una expresión se puede pasar al denominador y viceversa con tal de cambiarle el signo a su exponente :*

- $\frac{a^{-2}b^{-3}}{X^{-4}Y^{-5}} = \frac{X^4Y^5}{a^2b^3}$
- $\frac{a^2b}{X^4Y^5} = a^2bX^{-4}Y^{-5}$

Ejercicios de potenciación :

Expresar con signo radical las expresiones dadas *:*

1. $x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$
2. $m^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{m^3}$
3. $4a^{\frac{3}{4}} = 4\sqrt[4]{a^3}$
4. $xy^{\frac{1}{2}} = x\sqrt{y}$
5. $a^{\frac{4}{5}}b^{\frac{3}{2}} = \sqrt[5]{a^4}\sqrt{b^3}$
   $= \sqrt[5]{a^4}\sqrt{b^2b}$
   $= b\sqrt[5]{a^4}\sqrt{b}$
6. $x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{4}}z^{\frac{1}{5}} = \sqrt{x^3}\sqrt[4]{y}\sqrt[5]{z}$
   $= \sqrt{x^2x}\sqrt[4]{y}\sqrt[5]{z}$
   $= x\sqrt{x}\sqrt[4]{y}\sqrt[5]{z}$
7. $2a^{\frac{4}{5}}b^{\frac{5}{2}} = 2\sqrt[5]{a^4}\sqrt{b^5}$
   $= 2\sqrt[5]{a^4}\sqrt{b^2b^2b}$
   $= 2b^2\sqrt[5]{a^4}\sqrt{b}$
8. $3x^{\frac{2}{7}}y^{\frac{4}{5}}z^{\frac{2}{7}} = 3\sqrt[7]{x^2}\sqrt[5]{y^4}\sqrt[7]{z^2}$
9. $a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{5}{4}}c^{\frac{7}{4}} = \sqrt[4]{ab^5c^7}$
   $= \sqrt[4]{ab^4bc^4c^3}$
   $= bc\sqrt[4]{abc^3}$
10. $8mn^{\frac{8}{3}} = 8m\sqrt[3]{n^8}$
    $= 8m\sqrt[3]{n^3n^3n^2}$
    $= 8mn^2\sqrt[3]{n^2}$
11. $4a^2b^{\frac{7}{3}}c^{\frac{5}{6}} = 4a^2\sqrt[3]{b^7}\sqrt[6]{c^5}$
    $= 4a^2\sqrt[3]{b^3b^3b}\sqrt[6]{c^5}$
    $= 4a^2b^2\sqrt[3]{b}\sqrt[6]{c^5}$
12. $5m^{\frac{2}{5}}n^{\frac{3}{5}}x^{\frac{4}{5}} = 5\sqrt[5]{m^2n^3x^4}$

Expresar con exponentes positivos las expresiones dadas :

1. $a^2b^{-3}=\dfrac{a^2}{b^3}$

2. $3x^{-5}=\dfrac{3}{x^5}$

3. $a^{-4}b^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{a^4b^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{1}{a^4\sqrt{b}}$

4. $3x^{-2}y^{-\frac{1}{3}}=\dfrac{3}{x^2y^{\frac{1}{3}}}=\dfrac{3}{x^2\sqrt[3]{y}}$

5. $m^{-\frac{1}{2}}n^{-5}=\dfrac{1}{m^{\frac{1}{2}}n^5}$

6. $a^2b^{-1}c=\dfrac{a^2c}{b}$

7. $4x^2y^{-\frac{3}{5}}=\dfrac{4x^2}{y^{\frac{3}{5}}}$

8. $5a^{-\frac{1}{3}}b^{-\frac{3}{4}}c^{-1}=\dfrac{5}{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{3}{4}}c}$

9. $\dfrac{1}{2x^{-2}}=\dfrac{x^2}{2}$

10. $\dfrac{3}{x^{-1}y^{-5}}=3xy^5$

11. $\dfrac{2a^{-2}b^{-3}}{a^{-4}c^{-1}}=\dfrac{2a^4c}{a^2b^3}=\dfrac{2a^2c}{b^3}$

12. $\dfrac{x^{-1}y^{-2}z^{-3}}{a^{-2}b^{-5}c^{-8}}=\dfrac{a^2b^5c^8}{xy^2z^3}$

13. $\dfrac{3m^{-4}n^{-\frac{1}{2}}}{8m^{-3}n^{-4}}=\dfrac{3m^3n^{-\frac{1}{2}}n^4}{8m^4}=\dfrac{3n^{\frac{7}{2}}}{8m}$

14. $\dfrac{4a^{\frac{1}{2}}}{7a^{-4}b^2c^{-\frac{2}{3}}}=\dfrac{4a^{\frac{1}{2}}a^4c^{\frac{2}{3}}}{7b^2}$

$=\dfrac{4a^{\frac{9}{2}}c^{\frac{2}{3}}}{7b^2}$

15. $\dfrac{2m^{-5}n^{-7}}{a^2m^3n^{-4}}=\dfrac{2}{a^2m^3m^5n^{-4}n^7}$

$=\dfrac{2}{a^2m^8n^3}$

Pasar los factores literales del numerador al denominador :

1. $\dfrac{a^2}{b^2}=\dfrac{1}{a^{-2}b^2}$

2. $\dfrac{3x^{-1}}{y^2}=\dfrac{3}{xy^2}$

3. $\dfrac{4mn^2}{x^3}=\dfrac{4}{m^{-1}n^{-2}x^3}$

4. $\dfrac{a^{-1}b^{-3}}{3}=\dfrac{1}{3ab^3}$

5. $\dfrac{3c^{-\frac{2}{3}}}{7}=\dfrac{3}{7c^{\frac{2}{3}}}$

6. $\dfrac{2x^{\frac{1}{4}}}{5y^2}=\dfrac{2}{5x^{-\frac{1}{4}}y^2}$

7. $\dfrac{m^{-3}}{5}=\dfrac{1}{5m^3}$

8. $\dfrac{3a^{-2}b^3}{c^4}=\dfrac{3}{a^2c^4b^{-3}}$

9. $x^{-\frac{1}{2}}y^2=\dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}y^{-2}}$

10. $a^{-\frac{2}{3}}b^3c^{-2}=\dfrac{1}{a^{\frac{2}{3}}c^2b^{-3}}$

11. $\dfrac{3x^{-1}y^{-\frac{1}{2}}}{y^3}=\dfrac{3}{xy^3y^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{3}{xy^{\frac{7}{2}}}$

12. $\dfrac{2m^{-2}n^{\frac{1}{2}}}{9}=\dfrac{2}{9m^2n^{-\frac{1}{2}}}$

Pasar los factores literales del denominador al numerador :

13. $\dfrac{2}{a}=2a^{-1}$

14. $\dfrac{3a}{b^2}=3ab^{-2}$

15. $\dfrac{x^2y}{y^{-2}}=x^2yy^2=x^2y^3$

16. $\dfrac{4}{x^{-\frac{1}{2}}y^2}=4x^{\frac{1}{2}}y^{-2}$

17. $\dfrac{3a^5}{7x^{-5}y^{-\frac{3}{4}}}=\dfrac{3a^5x^5y^{\frac{3}{4}}}{7}$

18. $\dfrac{1}{a^{-4}b^{-\frac{1}{3}}}=a^4b^{\frac{1}{3}}$

19. $\dfrac{2m^2}{3m^{-3}n^{-\frac{1}{4}}}=\dfrac{2m^2m^3n^{\frac{1}{4}}}{3}=\dfrac{2m^5n^{\frac{1}{4}}}{3}$

20. $\dfrac{a^3}{x^2y^{-\frac{1}{2}}}=a^3x^{-2}y^{\frac{1}{2}}$

Expresar sin denominador :

21. $\dfrac{3a^2b^3}{a^{-1}x}=3a^2ab^3x^{-1}=3a^3b^3x^{-1}$

22. $\dfrac{3xy^2z^3}{x^{-1}y^{-2}z^{-3}}=3xxy^2y^2z^3z^3=3x^2y^4z^6$

23. $\dfrac{m^{-2}n^{-1}x^{-\frac{1}{2}}}{m^{-4}n^{-5}x^{-2}}=m^{-2}m^4n^{-1}n^5x^{-\frac{1}{2}}x^2$

$=m^2n^4x^{\frac{3}{2}}$

Expresar con signo radical y exponente positivos :

1. $x^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

2. $\dfrac{1}{a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{2}{3}}}=\dfrac{a^{\frac{1}{2}}}{\sqrt[3]{b^2}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{b^2}}$

3. $5a^{\frac{5}{7}}b^{-\frac{1}{3}}=\dfrac{5\sqrt[7]{a^5}}{b^{\frac{1}{3}}}=\dfrac{5\sqrt[7]{a^5}}{\sqrt[3]{b}}$

4. $\dfrac{3x^{-1}}{x^{-\frac{1}{2}}}=\dfrac{3}{x^{-\frac{1}{2}}x}=\dfrac{3}{x^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{3}{\sqrt{x}}$

5. $2m^{-\frac{2}{5}}n^{\frac{3}{4}}=\dfrac{2\sqrt[4]{n^3}}{m^{\frac{2}{5}}}=\dfrac{2\sqrt[4]{n^3}}{\sqrt[5]{m^2}}$

6. $\dfrac{1}{4x^{\frac{1}{3}}}=\dfrac{1}{4\sqrt[3]{x}}$

7. $\dfrac{x^{\frac{3}{5}}}{y^{-\frac{2}{3}}}=\sqrt[5]{x^3}\,y^{\frac{2}{3}}=\sqrt[5]{x^3}\,\sqrt[3]{y^2}$

Multiplicación de monomios con exponentes negativos o fraccionarios :

1. $x^2x^{-3} = x^{2-3} = x^{-1}$
2. $a^{-2}a^{-3} = a^{-2-3} = a^{-5}$
3. $x^3x^{-3} = x^{3-3} = x^0 = 1$
4. $a^{\frac{1}{2}}a = a^{\frac{1}{2}+1} = a^{\frac{3}{2}}$
5. $x^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{4}} = x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} = x^{\frac{3}{4}}$
6. $a^{\frac{3}{4}}a^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}} = a^{\frac{4}{4}} = a$
7. $3m^{\frac{2}{5}}m^{-\frac{3}{5}} = 3m^{\frac{2}{5}-\frac{3}{5}} = 3m^{-\frac{1}{5}}$
8. $2a^{\frac{3}{4}}a^{-\frac{1}{2}} = 2a^{\frac{3}{4}-\frac{1}{2}} = 2a^{\frac{1}{4}}$
9. $x^{-2}x^{-\frac{1}{3}} = x^{-2-\frac{1}{3}} = x^{-\frac{7}{3}}$
10. $3n^2n^{-\frac{2}{3}} = 3n^{2-\frac{2}{3}} = 3n^{\frac{4}{3}}$
11. $4a^{-2}a^{-\frac{1}{2}} = 4a^{-2-\frac{1}{2}} = 4a^{-\frac{5}{2}}$
12. $a^{-1}b^{-2}ab^2$
$= a^{-1+1}b^{-2+2} = a^0b^0 = 1$

Multiplicación de polinomios con exponentes negativos o fraccionarios :

1.
$$\begin{array}{l} a^{-4}+3a^{-2}+2 \\ \underline{a^{-4}-a^{-2}+1} \\ a^{-8}+3a^{-6}+2a^{-4} \\ \quad -a^{-6}-3a^{-4}-2a^{-2} \\ \underline{\qquad\qquad a^{-4}+3a^{-2}+2} \\ a^{-8}+2a^{-6}\qquad\quad +a^{-2}+2 \end{array}$$

2.
$$\begin{array}{l} x^2-1+x^{-2} \\ \underline{x^2+2-x^{-2}} \\ x^4-x^2+1 \\ \quad 2x^2-2+2x^{-2} \\ \underline{\qquad -1+x^{-2}-x^{-4}} \\ x^4+x^2-2+3x^{-2}-x^{-4} \end{array}$$

3.
$$\begin{array}{l} x+2x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}} \\ \underline{x^{\frac{1}{3}}-2+x^{-\frac{1}{3}}} \\ x^{\frac{4}{3}}+2x+x^{\frac{2}{3}} \\ \quad -2x-4x^{\frac{2}{3}}-2x^{\frac{1}{3}} \\ \underline{\qquad x^{\frac{2}{3}}+2x^{\frac{1}{3}}+1} \\ x^{\frac{4}{3}}\qquad -2x^{\frac{2}{3}}\qquad +1 \end{array}$$

4.
$$\begin{array}{l} 2a^{\frac{3}{4}}-a^{\frac{1}{2}}+2a^{\frac{1}{4}} \\ \underline{a^{\frac{1}{4}}+1-a^{-\frac{1}{4}}} \\ 2a-a^{\frac{3}{4}}+2a^{\frac{1}{2}} \\ \quad 2a^{\frac{3}{4}}-a^{\frac{1}{2}}+2a^{\frac{1}{4}} \\ \underline{\qquad -2a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{4}}-2} \\ 2a+a^{\frac{3}{4}}-a^{\frac{1}{2}}+3a^{\frac{1}{4}}-2 \end{array}$$

División de monomios con exponentes negativos o fraccionarios :

1. $a^2 \div a^{-2} = a^{2-(-2)} = a^{2+2} = a^4$
2. $x^{-3} \div x^2 = x^{-3-2} = x^{-5}$
3. $m^{\frac{1}{2}} \div m^{-\frac{1}{4}} = m^{\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{4}\right)} = m^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} = m^{\frac{3}{4}}$
4. $a^2 \div a^5 = a^{2-5} = a^{-3}$
5. $x^{-3} \div x^{-7} = x^{-3-(-7)} = x^{-3+7} = x^4$
6. $a^{\frac{1}{2}} \div a = a^{\frac{1}{2}-1} = a^{-\frac{1}{2}}$
7. $x^{-\frac{2}{3}} \div x^{-\frac{1}{3}} = x^{-\frac{2}{3}-\left(-\frac{1}{3}\right)} = x^{-\frac{2}{3}+\frac{1}{3}} = x^{-\frac{1}{3}}$
8. $a^{\frac{2}{5}} \div a^{-\frac{1}{5}} = a^{\frac{2}{5}-\left(-\frac{1}{5}\right)} = a^{\frac{2}{5}+\frac{1}{5}} = a^{\frac{3}{5}}$
9. $m^{-\frac{3}{4}} \div m^{\frac{1}{2}} = m^{-\frac{3}{4}-\frac{1}{2}} = m^{-\frac{5}{4}}$
10. $a^{\frac{1}{3}} \div a = a^{\frac{1}{3}-1} = a^{-\frac{2}{3}}$

Potencias de monomios con exponentes negativos 0 fraccionarios :

1. $\left(a^{-1}\right)^2 = a^{-1\cdot 2} = a^{-2}$
2. $\left(a^{-2}b^{-1}\right)^3 = a^{-2\cdot 3}b^{-1\cdot 3} = a^{-6}b^{-3}$
3. $\left(a^{\frac{3}{2}}\right)^2 = a^{\frac{3}{2}\cdot 2} = a^{\frac{6}{2}} = a^3$
4. $\left(x^{\frac{3}{4}}\right)^3 = x^{\frac{3}{4}\cdot 3} = x^{\frac{9}{4}}$
5. $\left(m^{\frac{3}{4}}\right)^2 = m^{\frac{3}{4}\cdot 2} = m^{\frac{6}{4}} = m^{\frac{3}{2}}$
6. $\left(a^{-\frac{2}{3}}\right)^3 = a^{-\frac{2}{3}\cdot 3} = a^{-\frac{6}{3}} = a^{-2}$
7. $\left(x^{-4}y^{\frac{1}{4}}\right)^2 = x^{-4\cdot 2}y^{\frac{1}{4}\cdot 2} = x^{-8}y^{\frac{2}{4}} = x^{-8}y^{\frac{1}{2}}$
8. $\left(2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 2^2a^{\frac{1}{2}\cdot 2}b^{\frac{1}{3}\cdot 2} = 4a^{\frac{2}{2}}b^{\frac{2}{3}} = 4ab^{\frac{2}{3}}$

◄RADICACIÓN :

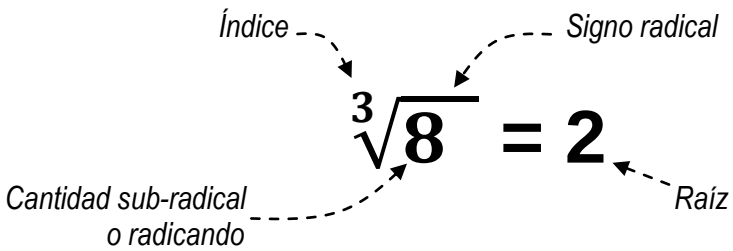
RAÍZ *de una expresión algebraica es toda expresión algebraica que elevada a una potencia reproduce la expresión dada.*

Así "2a" *es raíz cuadrada de* $4a^2$ *porque* $(2a)^2 = 4a^2$ *y* "– 2a" *también es raíz cuadrada de* $4a^2$ *porque* $(-2a)^2 = 4a^2$.

"3X" es raíz cúbica de $27X^3$ *porque* $(3X)^3 = 27X^3$.

El **signo de raíz** *es* $\sqrt{}$ *, llamada* **signo radical**. *Debajo de este signo se coloca la cantidad a la cual se extrae la raíz llamada* **cantidad sub-radical o radicando**.

El signo $\sqrt{}$ *lleva un* **índice** *que indica la potencia a que hay que elevar la raíz para que reproduzca la cantidad sub-radical. Por convención el índice "2" se suprime y cuando el signo* $\sqrt{}$ *no lleve índice se entiende que el índice es 2.*



RADICAL O EXPRESIÓN RADICAL *es toda raíz indicada de un número o de una expresión algebraica.*

Así, $\sqrt{4}$, $\sqrt[5]{6X^3}$, $\sqrt[3]{16a^2}$ *son expresiones radicales.*

Si la raíz indicada es exacta, la expresión es **racional**, *si no es exacta, es* **irracional**.

Las expresiones irracionales como $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3a^2}$ *son las que comúnmente se llaman* **radicales**.

El **grado** *de un radical lo indica su índice. Así,* $\sqrt{2a}$ *es un radical de segundo grado;* $\sqrt[3]{5a^2}$ *es un radical de tercer grado;* $\sqrt[4]{3X}$ *es un radical de cuarto grado.*

SIGNOS DE LAS RAICES :

1) Las **raíces impares** *de una cantidad tienen el mismo signo que la cantidad sub-radical o radicando.*

Así,

- $\sqrt[3]{27a^3} = 3a$ *porque* $(3a)^3 = 27a^3$
- $\sqrt[3]{-27a^3} = -3a$ *porque* $(-3a)^3 = -27a^3$
- $\sqrt[5]{X^{10}} = X^2$ *porque* $(X^2)^5 = X^{10}$
- $\sqrt[5]{-X^{10}} = -X^2$ *porque* $(-X^2)^5 = -X^{10}$

2) Las **raíces pares** *de una cantidad positiva tienen doble signo.*

Así,

- $\sqrt{25X^2} = 5X$ *ó* $-5X$ *porque* $(5X)^2 = 25X^2$ *y* $(-5X)^2 = 25X^2$

  Esto se indica de este modo : $\sqrt{25X^2} = \pm 5X$
- $\sqrt[4]{16a^4} = 2a$ *y* $-2a$ *porque* $(2a)^4 = 16a^4$ *y* $(-2a)^4 = 16a^4$

  Esto se indica : $\sqrt[4]{16a^4} = \pm 2a$

3) Las **raíces pares** *de una cantidad negativa no se pueden extraer. Estas raíces se llaman* **cantidades imaginarias**.

Así,

$\sqrt{-4}$ *no se puede extraer. La raíz de – 4 no es 2 porque "*$2^2 = 4$*" y no – 4, y tampoco es – 2 porque* $(-2)^2 = 4$ *y no – 4. "*$\sqrt{-4}$ *" es una* **cantidad imaginaria**.

Del propio modo, $\sqrt{-9}$, $\sqrt{-a^2}$, $\sqrt[4]{-16X^2}$ *son* ***cantidades imaginarias.***

NOTA IMPORTANTE : *Sea muy cuidadoso al expresar o "leer" la cantidad sub-radical o radicando de las raíces pares; sobre todo, cuando se usan signos de agrupación (paréntesis, corchetes o llaves).*

Así,

- $\sqrt{-a^2}$ *es una cantidad imaginaria porque no existe un número o expresión algebraica que elevado a la "2" nos dé* $-a^2$.

  Sin embargo, $\sqrt{(-a)^2}$ *si es racional porque* $(-a)^2 = a^2$, *luego la expresión será* $\sqrt{a^2}$ *y esta es una raíz par de una cantidad positiva.* $\sqrt{a^2} = \pm a$

  Si el signo no está afectado por el paréntesis, es decir si el signo menos no está dentro del paréntesis; como en este caso : $\sqrt{-(a)^2}$ *también se dice que es una cantidad imaginaria porque no existe un número o expresión algebraica que elevado a la "2" nos dé* $-(a)^2$.

- $\sqrt{-5X^2}$ *es una cantidad imaginaria porque no existe una expresión algebraica que elevado a la "2" nos dé* $-5X^2$.

  Sin embargo, $\sqrt{(-5X)^2}$ *si es racional porque* $(-5X)^2 = 25X^2$, *luego la expresión será* $\sqrt{25X^2}$ *y esta es una raíz par de una cantidad positiva.* $\sqrt{25X^2} = \pm 5X$

  Si el signo no está afectado por el paréntesis, es decir si el signo menos no está dentro del paréntesis; como en este caso : $\sqrt{-(5X)^2}$ *también se dice que es una cantidad imaginaria porque no existe un número o expresión algebraica que elevado a la "2" nos dé* $-(5X)^2$.

- $\sqrt{(-2X)^3} = \sqrt{-2^3X^3} = \sqrt{-8X^3}$ *es una cantidad imaginaria porque no existe una expresión algebraica que elevado a la "2" nos dé* $-8X^3$.

Raíz de una potencia : *Para extraer una raíz a una potencia se divide el exponente de la potencia por el índice de la raíz.*

- $\sqrt[n]{X^m} = X^{m/n}$
- $\sqrt[2]{X^3} = X^{3/2}$

Raíz de un producto de varios factores : *Para extraer una raíz a un producto de varios factores se extrae dicha raíz a cada uno de los factores.*

$$\sqrt[n]{XYZ} = \sqrt[n]{X}.\ \sqrt[n]{Y}.\ \sqrt[n]{Z}$$

Raíz de un monomio : *De acuerdo con lo anterior, para extraer una raíz a un monomio se sigue la siguiente regla :*

1) *Se extrae la raíz del coeficiente y se divide el exponente de cada letra por el índice de la raíz.*
2) *Si el índice del radical es impar, la raíz tiene el mismo signo que la cantidad sub-radical o radicando, y si el índice es par y la cantidad sub-radical positiva, la raíz tiene el doble signo ±.*

Ejemplos :

1. $\sqrt{4a^2b^4} = \pm 2ab^2$
2. $\sqrt{25x^6y^8} = \pm 5x^3y^4$
3. $\sqrt[3]{27a^3b^9} = 3ab^3$
4. $\sqrt[3]{-8a^3b^6x^{12}} = -2ab^2x^4$
5. $\sqrt{64x^8y^{10}} = \pm 8x^4y^5$
6. $\sqrt[4]{16a^8b^{16}} = \pm 2a^2b^4$
7. $\sqrt[5]{x^{15}y^{20}z^{25}} = x^3y^4z^5$
8. $\sqrt[3]{-64a^3x^6y^{18}} = -4ax^2y^6$
9. $\sqrt[5]{-243m^5n^{15}} = -3mn^3$
10. $\sqrt{81x^6y^8z^{20}} = \pm 9x^3y^4z^{10}$
11. $\sqrt[3]{1.000x^9y^{18}} = 10x^3y^6$
12. $\sqrt[4]{81a^{12}b^{24}} = \pm 3a^3b^6$
13. $\sqrt[6]{64a^{12}b^{18}c^{30}} = \pm 2a^2b^3c^5$
14. $\sqrt{49a^{2n}b^{4n}} = \pm 7a^nb^{2n}$
15. $\sqrt[5]{-x^{5n}y^{10x}} = -x^ny^{2x}$

16. $\sqrt{\dfrac{9a^2}{25x^4}} = \pm\dfrac{3a}{5x^2}$

17. $\sqrt[3]{-\dfrac{27a^3}{64x^9}} = -\dfrac{3a}{4x^3}$

18. $\sqrt[5]{-\dfrac{a^5b^{10}}{32x^{15}}} = -\dfrac{ab^2}{2x^3}$

19. $\sqrt[4]{\dfrac{a^8}{81b^4c^{12}}} = \pm\dfrac{a^2}{3bc^3}$

20. $\sqrt[7]{\dfrac{128}{x^{14}}} = \dfrac{2}{x^2}$

21. $\sqrt{\dfrac{x^{2m}}{121y^{4n}}} = \pm\dfrac{x^m}{11y^{2n}}$

22. $\sqrt[3]{-\dfrac{125x^9}{216m^{12}}} = -\dfrac{5x^3}{6m^4}$

23. $\sqrt[9]{\dfrac{a^{18}}{b^9c^{27}}} = \dfrac{a^2}{bc^3}$

24. $\sqrt[10]{\dfrac{x^{20}}{1.024y^{30}}} = \pm\dfrac{x^2}{2y^3}$

RADICALES SEMEJANTES : *son radicales del mismo grado y que tienen la misma cantidad sub-radical o radicando.*

Así, $2\sqrt{3}$, $5\sqrt{3}$ y $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ son radicales semejantes; $2\sqrt{3}$ y $5\sqrt{2}$ no son semejantes.

Los radicales semejantes son considerados como términos semejantes y con ellos se pueden realizar las mismas operaciones que con estos últimos (ver Reducción de Términos Semejantes pág. 2).

Así,

- $2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$
- $2\sqrt{3} - 5\sqrt{3} = -3\sqrt{3}$
- $6\sqrt[3]{3aX^2} + 2\sqrt[3]{3aX^2} - 3\sqrt[3]{3aX^2} = 5\sqrt[3]{3aX^2}$
- $2\sqrt{3} - 5\sqrt{3} + 6\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = -3\sqrt{3} + 2\sqrt{2}$

REDUCCIÓN DE RADICALES :

Reducir un radical es cambiar su forma sin cambiar su valor.

Simplificar un Radical : *Es reducirlo a su más simple expresión. Un radical está reducido a su más simple expresión cuando la cantidad sub-radical o radicando es entera y del menor grado posible.*

Para simplificar radicales debe tenerse muy presente que para extraer una raíz a un producto se extrae dicha raíz a cada uno de sus factores, o sea :

$$\sqrt[n]{XYZ} = \sqrt[n]{X}.\ \sqrt[n]{Y}.\ \sqrt[n]{Z}$$

En la simplificación de radicales consideraremos los dos casos siguientes :

Caso 1 : Cuando la cantidad sub-radical contiene factores cuyo exponente es divisible por el índice de la raíz :

Ejemplo 1 : ***Simplificar*** $\sqrt{9a^3}$

Primero se descompone la cantidad sub-radical o radicando en sus factores primos. separando los factores con los exponentes que sean divisibles por "2" (índice de esta raíz) :

$$\sqrt{9a^3} = \sqrt{3^2.a^2.a}$$

Para extraer una raíz a un producto se extrae dicha raíz a cada uno de sus factores. o sea :

$$\sqrt{3^2.a^2.a} = \sqrt{3^2}\ .\ \sqrt{.a^2}.\ \sqrt{a}$$

Se calculan las raíces exactas y se dejan indicados los radicales irracionales :

$$\sqrt{3^2}\ .\ \sqrt{.a^2}.\ \sqrt{a} = 3a\sqrt{a}$$

Ejemplo 2 : **Simplificar** $2.\sqrt{75X^4Y^5}$

Primero se descompone la cantidad sub-radical o radicando en sus factores primos. separando los factores con los exponentes que sean divisibles por "2" (índice de esta raíz) :

$$2.\sqrt{75X^4Y^5} = 2.\sqrt{3.\ 5^2.X^4.Y^4.Y}$$

Para extraer una raíz a un producto se extrae dicha raíz a cada uno de sus factores. o sea :

$$2.\sqrt{3.\ 5^2.X^4.Y^4.Y} = 2.\ \sqrt{5^2}\ .\ \sqrt{X^4}.\ \sqrt{Y^4}.\ \sqrt{3Y}$$

Se calculan las raíces exactas y se dejan indicados los radicales irracionales :

$$2.\ \sqrt{5^2}\ .\ \sqrt{X^4}.\ \sqrt{Y^4}.\sqrt{3Y} = 2 * 5 * X^2 * Y^2 * \sqrt{3Y}$$

Se realiza la multiplicación de los números extraídos de las raíces :

$$2 * 5 * X^2 * Y^2 * \sqrt{3Y} = \mathbf{10X^2Y^2\sqrt{3Y}}$$

Ejercicios :

1. $\sqrt{18} = \sqrt{2\cdot 3^2} = 3\sqrt{2}$
2. $3\sqrt{48} = 3\sqrt{3\cdot 2^4} = 3\cdot 2^2\ \sqrt{3} = 12\sqrt{3}$
3. $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2\cdot 2^3} = 2\ \sqrt[3]{2}$
4. $\frac{1}{2}\sqrt[3]{128} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2^6\cdot 2} = \frac{1}{2}\cdot 2^2\ \sqrt[3]{2} = 2\ \sqrt[3]{2}$
5. $2\sqrt[4]{243} = 2\sqrt[4]{3^4\cdot 3} = 2\cdot 3\ \sqrt[4]{3} = 6\ \sqrt[4]{3}$
6. $\sqrt{50a^2b} = \sqrt{2\cdot 5^2\ a^2b} = 5a\sqrt{2b}$
7. $3\sqrt{81x^3y^4} = 3\sqrt{9^2\cdot x^2xy^4} = 3\cdot 9xy^2\ \sqrt{x} = 27xy^2\ \sqrt{x}$
8. $\frac{1}{2}\sqrt{108a^5b^7} = \frac{1}{2}\sqrt{2^2\cdot 3^2\cdot 3\cdot a^4ab^6b}$

   $= \frac{2}{2}\cdot 3a^2b^3\ \sqrt{3ab} = 3a^2b^3\ \sqrt{3ab}$

9. $\frac{3}{5}\sqrt{125mn^6} = \frac{3}{5}\sqrt{5^2\cdot 5mn^6} = \frac{3\cdot 5}{5}n^3\ \sqrt{5m} = 3n^3\ \sqrt{5m}$
10. $2a\sqrt{44a^3b^7c^9} = 2a\sqrt{2^2\cdot 11a^2ab^6bc^8c}$

    $= 2\cdot 2a\cdot ab^3c^4\ \sqrt{11abc} = 4a^2b^3c^4 = \sqrt{11abc}$
11. $2\ \sqrt[3]{16x^2y^7}$

    $= 2\ \sqrt[3]{2^3\cdot 2x^2y^6y} = 2\cdot 2y^2\ \sqrt[3]{2x^2y} = 4y^2\ \sqrt[3]{2x^2y}$
12. $\frac{2}{3}\ \sqrt[3]{27m^2n^8}$

    $= \frac{2}{3}\ \sqrt[3]{3^3m^2n^6n^2} = \frac{2\cdot 3}{3}n^2\ \sqrt[3]{m^2n^2} = 2n^2\ \sqrt[3]{m^2n^2}$
13. $5a\ \sqrt[3]{160x^7y^9z^{13}}$

    $= 5a\sqrt[3]{2^3\cdot 20x^6xy^9z^{12}z}$

    $= 5\cdot 2ax^2y^3z^4\ \sqrt[3]{20xz} = 10ax^2y^3z^4\ \sqrt[3]{20xz}$
14. $\sqrt[4]{80a^4b^5c^{12}} = \sqrt[4]{2^4\cdot 5a^4b^4bc^{12}} = 2abc^3\ \sqrt[4]{5b}$
15. $3\sqrt[4]{5x^8y^{14}z^{16}} = 3\sqrt[4]{5x^8y^{12}y^2z^{16}} = 3x^2y^3z^4\ \sqrt[4]{5y^2}$
16. $\frac{2}{5}\ \sqrt[5]{32x^2y^{11}}$

    $= \frac{2}{5}\ \sqrt[5]{2^5x^2y^{10}y} = \frac{2\cdot 2}{5}y^2\ \sqrt[5]{x^2y} = \frac{4y^2}{5}\ \sqrt[5]{x^2y}$
17. $2xy\sqrt[3]{128x^2y^8}$

    $= 2xy\ \sqrt[3]{2^6\cdot 2x^2y^6y^2}$

    $= 2\cdot 2^2xyy^2\ \sqrt[3]{2x^2y^2} = 8xy^3\ \sqrt[3]{2x^2y^2}$
18. $\frac{1}{3a}\sqrt{27a^3m^7}$

    $= \frac{1}{3a}\sqrt{3^2\cdot 3a^2am^6m} = \frac{3am^3}{3a}\sqrt{3am} = m^3\ \sqrt{3am}$

19. $\frac{3}{5x}\sqrt[3]{375a^8b}$

$$=\frac{3}{5x}\sqrt[3]{5^3\cdot 3a^6a^2b}=\frac{3\cdot 5a^2}{5x}\sqrt[3]{3a^2b}=\frac{3a^2}{x}\sqrt[3]{3a^2b}$$

20. $\frac{1}{3}\sqrt[4]{81a^4b}=\frac{1}{3}\sqrt[4]{3^4a^4b}=\frac{3}{3}a\sqrt[4]{b}=a\sqrt[4]{b}$

21. $\sqrt{9a+18b}=\sqrt{9(a+2b)}=\sqrt{3^2(a+2b)}=3\sqrt{a+2b}$

22. $\sqrt{3a^3b^2-3a^2b^2}$

$$=\sqrt{3a^2b^2(a-1)}=ab\sqrt{3(a-1)}=ab\sqrt{3a-3}$$

23. $\sqrt{8x^2y^4+16xy^4}$

$$=\sqrt{2^2\cdot 2xy^4(x+2)}=2y^2\sqrt{2x(x+2)}=2y^2\sqrt{2x^2+4x}$$

24. $\sqrt{2x^2-4xy+2y^2}$

$$=\sqrt{2(x^2-2xy+y^2)}=\sqrt{2(x-y)^2}=(x-y)\sqrt{2}$$

25. $\sqrt{(a-b)(a^2-b^2)}$

$$=\sqrt{(a-b)(a-b)(a+b)}$$

$$=\sqrt{(a-b)^2(a+b)}=(a-b)\sqrt{a+b}$$

26. $\sqrt{2am^2+4amn+2an^2}$

$$=\sqrt{2a(m^2+2mn+n^2)}=\sqrt{2a(m+n)^2}=(m+n)\sqrt{2a}$$

27. $\sqrt{9a^3-36a^2+36a}$

$$=\sqrt{3^2a(a^2-2a+4)}$$

$$=3\sqrt{a(a-2)^2}=3(a-2)\sqrt{a}=(3a-6)\sqrt{a}$$

Cuando la cantidad sub-radical o radicando es una fracción y el denominador es irracional hay que multiplicar ambos términos de la fracción por la cantidad necesaria para que el denominador tenga raíz exacta.

<u>Ejemplos :</u>

1. $\sqrt{\frac{1}{5}}=\sqrt{\frac{1\cdot 5}{5\cdot 5}}=\sqrt{\frac{5}{5^2}}=\frac{1}{5}\sqrt{5}$

2. $\sqrt{\frac{3}{8}}=\sqrt{\frac{3\cdot 2}{8\cdot 2}}=\sqrt{\frac{6}{2^4}}=\frac{1}{2^2}\sqrt{6}=\frac{1}{4}\sqrt{6}$

3. $2\sqrt{\frac{1}{2}}=2\sqrt{\frac{2\cdot 1}{2\cdot 2}}=2\sqrt{\frac{2}{2^2}}=\frac{2}{2}\sqrt{2}=\sqrt{2}$

4. $3\sqrt{\frac{1}{6}}=3\sqrt{\frac{1\cdot 6}{6\cdot 6}}=3\sqrt{\frac{6}{6^2}}=\frac{3}{6}\sqrt{6}=\frac{1}{2}\sqrt{6}$

5. $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\cdot 3}{3\cdot 3}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{6}{3^2}}=\frac{1}{2\cdot 3}\sqrt{6}=\frac{1}{6}\sqrt{6}$

6. $\sqrt{\frac{a^2}{8x}}=\sqrt{\frac{a^2x}{2^2\cdot 2x^2}}=\frac{a}{2x}\sqrt{\frac{x}{2}}=\frac{a}{2x}\sqrt{\frac{2x}{2^2}}=\frac{a}{4x}\sqrt{2x}$

7. $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{4a^2}{27y^3}}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3\cdot 2^2a^2y}{3^4y^4}}=\frac{3\cdot 2a}{2\cdot 3^2y^2}\sqrt{3y}=\frac{a}{3y^2}\sqrt{3y}$

8. $5\sqrt{\frac{9n}{5m^3}}=5\sqrt{\frac{3^2\cdot 5mn}{5^2m^4}}=\frac{5\cdot 3}{5m^2}\sqrt{5mn}=\frac{3}{m^2}\sqrt{5mn}$

9. $6\sqrt{\frac{5a^3}{24x^2}}=6\sqrt{\frac{5\cdot 6a^3}{2^4\cdot 3^2x^2}}=\frac{6}{2^2\cdot 3x}\sqrt{30a^2a}=\frac{a}{2x}\sqrt{30a}$

10. $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{\frac{2\cdot 3^2}{3^3}}=\frac{1}{3}\sqrt[3]{18}$

Caso 2 : ***Cuando los factores de la cantidad sub-radical y el índice de la raíz tienen un divisor común :***

Ejemplo 1 : ***Simplificar*** $\sqrt[4]{25a^2b^2}$

Se descomponen los factores de la cantidad sub-radical o radicando en sus factores primos :

$$=\sqrt[4]{5^2a^2b^2}$$

Recordando lo estudiado en la pág. 90. Raíz de un producto de varios factores : $\sqrt[n]{XYZ} = \sqrt[n]{X}.\ \sqrt[n]{Y}.\ \sqrt[n]{Z}$ *y Raíz de una potencia :* $\sqrt[n]{X^m} = X^{m/n}$ *se indica cada factor como una potencia :*

$$=5^{\frac{2}{4}}a^{\frac{2}{4}}b^{\frac{2}{4}}$$

Se efectúa la división de los exponentes de cada factor:

$$=5^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}$$

Y por último se indican estas potencias como raíz :

$$=\sqrt{5ab}$$

Ejercicios :

1. $\sqrt[4]{9}=\sqrt[4]{3^2}=3^{\frac{2}{4}}=3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$
2. $\sqrt[6]{4}=\sqrt[6]{2^2}=2^{\frac{2}{6}}=2^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{2}$
3. $\sqrt[9]{27}=\sqrt[9]{3^3}=3^{\frac{3}{9}}=3^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{3}$
4. $\sqrt[8]{16}=\sqrt[8]{2^4}=2^{\frac{4}{8}}=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$
5. $3\sqrt[12]{64}=3\sqrt[12]{2^6}=3\cdot 2^{\frac{6}{12}}=3\cdot 2^{\frac{1}{2}}=3\sqrt{2}$
6. $\sqrt[4]{25a^2b^2}$

   $=\sqrt[4]{5^2a^2b^2}=5^{\frac{2}{4}}a^{\frac{2}{4}}b^{\frac{2}{4}}=5^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}=\sqrt{5ab}$

7. $5\sqrt[6]{49a^2b^4}=5\sqrt[6]{7^2a^2b^4}=5\cdot 7^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}=5\sqrt[3]{7ab^2}$
8. $\sqrt[8]{81x^4y^8}=\sqrt[8]{3^4x^4y^8}=3^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}y=y\sqrt{3x}$
9. $\sqrt[10]{32x^{10}y^{15}}$

   $=\sqrt[10]{2^5x^{10}y^{15}}=2^{\frac{1}{2}}xy^{\frac{3}{2}}=x\sqrt{2y^3}=x\sqrt{2y^2y}=xy\sqrt{2y}$
10. $\sqrt[12]{64m^6n^{18}}$

    $=\sqrt[12]{2^6m^6n^{18}}=2^{\frac{1}{2}}m^{\frac{1}{2}}n^{\frac{3}{2}}=\sqrt{2mn^3}=\sqrt{2mn^2n}=n\sqrt{2mn}$
11. $\sqrt[6]{343a^9x^{12}}$

    $=\sqrt[6]{7^3a^9x^{12}}=7^{\frac{1}{2}}a^{\frac{3}{2}}x^2=x^2\sqrt{7a^3}=x^2\sqrt{7a^2a}=ax^2\sqrt{7a}$
12. $\sqrt[15]{m^{10}n^{15}x^{20}}$

    $=m^{\frac{2}{3}}nx^{\frac{4}{3}}=n\sqrt[3]{m^2x^4}=n\sqrt[3]{m^2x^3x}=nx\sqrt[3]{m^2x}$

INTRODUCCIÓN DE CANTIDADES BAJO EL SIGNO RADICAL : *Para introducir el coeficiente de un radical bajo el signo radical se eleva dicho coeficiente a la potencia que indica el índice del radical.*

1. $2\sqrt{3}=\sqrt{2^2\cdot 3}=\sqrt{12}$
2. $3\sqrt{5}=\sqrt{3^2\cdot 5}=\sqrt{45}$
3. $5a\sqrt{b}=\sqrt{(5a)^2b}=\sqrt{25a^2b}$
4. $\frac{1}{2}\sqrt{2}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot 2}=\sqrt{\frac{2}{4}}=\sqrt{\frac{1}{2}}$
5. $3a\sqrt{2a^2}=\sqrt{(3a)^2\cdot 2a^2}=\sqrt{9a^2\left(2a^2\right)}=\sqrt{18a^4}$

6. $5x^2y\sqrt{3}=\sqrt{\left(5x^2y\right)^2\ 3}=\sqrt{\left(25x^4y^2\right)3}=\sqrt{75x^4y^2}$

7. $ab^2\ \sqrt[3]{a^2b}$

$$=\sqrt[3]{\left(ab^2\right)^3\left(a^2b\right)}=\sqrt[3]{\left(a^3b^6\right)\left(a^2b\right)}=\sqrt[3]{a^5b^7}$$

8. $4m\ \sqrt[3]{2m^2}=\sqrt[3]{(4m)^3\left(2m^2\right)}=\sqrt[3]{\left(64m^3\right)\left(2m^2\right)}=\sqrt[3]{128m^5}$

9. $2a\ \sqrt[4]{8ab^3}=\sqrt[4]{(2a)^4\left(8ab^3\right)}=\sqrt[4]{\left(16a^4\right)\left(8ab^3\right)}=\sqrt[4]{128a^5b^3}$

10. $(a+b)\sqrt{\dfrac{a}{a+b}}=\sqrt{\dfrac{(a+b)^2(a)}{a+b}}=\sqrt{(a+b)(a)}=\sqrt{a^2+ab}$

11. $(x+1)\sqrt{\dfrac{2x}{x+1}}=\sqrt{\dfrac{(x+1)^2\,2x}{x+1}}=\sqrt{(x+1)2x}=\sqrt{2x^2+2x}$

12. $(x-1)\sqrt{\dfrac{x-2}{x-1}}$

$$=\sqrt{\frac{(x-1)^2(x-2)}{x-1}}=\sqrt{(x-1)(x-2)}=\sqrt{x^2-3x+2}$$

REDUCCIÓN DE RADICALES AL MÍNIMO COMÚN ÍNDICE : *Esta operación tiene por objeto convertir radicales de distinto índice en radicales equivalentes que tengan el mismo índice. Para ello se aplica la siguiente regla :*

Se halla el mínimo común múltiplo de los índices, que será el índice común, y se eleva cada cantidad sub-radical o radicando a la potencia que resulta de dividir el índice común entre el índice de su radical.

<u>Ejemplo :</u> Reducir al mínimo común índice $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[4]{2}$.

Se halla el mínimo común múltiplo de los índices,

El m.c.m de los índices 2, 3, y 4 es 12. Este será el índice común.

Se divide este índice común (12) entre el índice de cada raíz :

Trabajando con $\sqrt{3}$ *: divido 12 entre el índice de la raíz que es "2" y me queda "6". Luego se coloca este "6" como potencia del sub-radical o radicando.*

$$\sqrt[12]{3^6}$$

Trabajando con $\sqrt[3]{5}$ *: divido 12 entre el índice de la raíz que es "3" y me queda "4". Luego se coloca este "4" como potencia del sub-radical o radicando.*

$$\sqrt[12]{5^4}$$

Trabajando con $\sqrt[4]{2}$ *: divido 12 entre el índice de la raíz que es "4" y me queda "3". Luego se coloca este "3" como potencia del sub-radical o radicando.*

$$\sqrt[12]{2^3}$$

Por último se calculan las potencias que quedan dentro de la raíz (cantidad sub-radical o radicando).

- $\sqrt{3} = \sqrt[12]{3^6} = \sqrt[12]{729}$
- $\sqrt[3]{5} = \sqrt[12]{5^4} = \sqrt[12]{625}$
- $\sqrt[4]{2} = \sqrt[12]{2^3} = \sqrt[12]{8}$

Ahora podemos observar que las tres expresiones son radicales semejantes, todas son raíces de índice "12" , lo que facilita cualquier operación que tengamos que hacer con estas tres raíces.

Ejercicios :

1. $\sqrt{5} = \sqrt[6]{5^3} = \sqrt[6]{125}$

   $\sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{4}$

2. $\sqrt{2} = \sqrt[4]{2^2} = \sqrt[4]{4}$

   $\sqrt[4]{3} \qquad = \sqrt[4]{3}$

3. $\sqrt{3} = \sqrt[12]{3^6} = \sqrt[12]{729}$

   $\sqrt[3]{4} = \sqrt[12]{4^4} = \sqrt[12]{256}$

   $\sqrt[4]{8} = \sqrt[12]{8^3} = \sqrt[12]{512}$

4. $\sqrt{2} = \sqrt[12]{2^6} = \sqrt[12]{64}$

   $\sqrt[3]{3} = \sqrt[12]{3^4} = \sqrt[12]{81}$

   $\sqrt[4]{5} = \sqrt[12]{5^3} = \sqrt[12]{125}$

   $\sqrt[6]{7} = \sqrt[12]{7^2} = \sqrt[12]{49}$

5. $\sqrt{5x} \quad = \sqrt[6]{(5x)^3} \quad = \sqrt[6]{125x^3}$

   $\sqrt[3]{4x^2y} = \sqrt[6]{(4x^2y)^2} = \sqrt[6]{16x^4y^2}$

   $\sqrt[6]{7a^3b} \qquad = \sqrt[6]{7a^3b}$

6. $\sqrt[3]{2ab} \quad = \sqrt[15]{(2ab)^5} \quad = \sqrt[15]{32a^5b^5}$

   $\sqrt[5]{3a^2x} \quad = \sqrt[15]{(3a^2x)^3} = \sqrt[15]{27a^6x^3}$

   $\sqrt[15]{5a^3x^2} \qquad = \sqrt[15]{5a^3x^2}$

7. $\sqrt[4]{8a^2x^3} = \sqrt[12]{(8a^2x^3)^3} = \sqrt[12]{512a^6x^9}$

   $\sqrt[6]{3a^5m^4} = \sqrt[12]{(3a^5m^4)^2} = \sqrt[12]{9a^{10}m^8}$

8. $\sqrt[3]{x^2} \quad = \sqrt[18]{(x^2)^6} \quad = \sqrt[18]{x^{12}}$

   $\sqrt[6]{2y^3} \quad = \sqrt[18]{(2y^3)^3} \quad = \sqrt[18]{8y^9}$

   $\sqrt[9]{5m^7} = \sqrt[18]{(5m^7)^2} = \sqrt[18]{25m^{14}}$

9. $\sqrt[4]{3a} \quad = \sqrt[20]{(3a)^5} \quad = \sqrt[20]{243a^5}$

   $\sqrt[5]{2b^2} \quad = \sqrt[20]{(2b^2)^4} = \sqrt[20]{16b^8}$

   $\sqrt[10]{7x^3} = \sqrt[20]{(7x^3)^2} = \sqrt[20]{49x^6}$

10. $2\sqrt[3]{a} \quad = 2\sqrt[12]{a^4} \qquad = 2\sqrt[12]{a^4}$

    $3\sqrt{2b} \quad = 3\sqrt[12]{(2b)^6} \quad = 3\sqrt[12]{64b^6}$

    $4\sqrt[4]{5x^2} = 4\sqrt[12]{(5x^2)^3} = 4\sqrt[12]{125x^6}$

SUMA Y RESTA DE RADICALES : *Se simplifican los radicales dados; se reducen los radicales semejantes y a continuación se escriben los radicales no semejantes con su propio signo.*

Si entendemos que los radicales semejantes pueden ser "tratados" como términos semejantes, resultará fácil realizar las operaciones de suma o resta aplicando lo ya estudiado en Reducción de términos semejantes pág. 2.

Ejercicios : *Simplificar : (Resueltos a partir de la página siguiente)*

1. $\sqrt{45} - \sqrt{27} - \sqrt{20}.$
2. $\sqrt{175} + \sqrt{243} - \sqrt{63} - 2\sqrt{75}.$
3. $\sqrt{80} - 2\sqrt{252} + 3\sqrt{405} - 3\sqrt{500}.$
4. $7\sqrt{450} - 4\sqrt{320} + 3\sqrt{80} - 5\sqrt{800}.$
5. $\frac{1}{2}\sqrt{12} - \frac{1}{3}\sqrt{18} + \frac{3}{4}\sqrt{48} + \frac{1}{6}\sqrt{72}.$
6. $\frac{3}{4}\sqrt{176} - \frac{2}{3}\sqrt{45} + \frac{1}{8}\sqrt{320} + \frac{1}{5}\sqrt{275}.$
7. $\frac{1}{7}\sqrt{147} - \frac{1}{5}\sqrt{700} + \frac{1}{10}\sqrt{28} + \frac{1}{3}\sqrt{2187}.$
8. $\sqrt{\frac{1}{3}} - \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{3}{4}}.$
9. $\sqrt{\frac{9}{5}} - \sqrt{\frac{1}{6}} - \sqrt{\frac{1}{20}} + \sqrt{6}.$
10. $\frac{5}{3}\sqrt{\frac{3}{5}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{4}} - 5\sqrt{\frac{1}{15}} + 3\sqrt{\frac{1}{12}}.$
11. $5\sqrt{128} - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} - 5\sqrt{98} + \sqrt{\frac{1}{27}}.$
12. $2\sqrt{700} - 15\sqrt{\frac{1}{45}} + 4\sqrt{\frac{5}{16}} - 56\sqrt{\frac{1}{7}}.$
13. $\sqrt{25ax^2} + \sqrt{49b} - \sqrt{9ax^2}.$
14. $2\sqrt{m^2n} - \sqrt{9m^2n} + \sqrt{16mn^2} - \sqrt{4mn^2}.$
15. $a\sqrt{320x} - 7\sqrt{5a^2x} - (a - 4b)\sqrt{5x}.$
16. $\sqrt{9x - 9} + \sqrt{4x - 4} - 5\sqrt{x - 1}.$

1. $\sqrt{45} = \sqrt{3^2 \cdot 5} = 3\sqrt{5}$

$-\sqrt{27} = -\sqrt{3^2 \cdot 3} = -3\sqrt{3}$

$-\sqrt{20} = -\sqrt{2^2 \cdot 5} = -2\sqrt{5}$

Entonces:

$= 3\sqrt{5} - 3\sqrt{3} - 2\sqrt{5}$

$= (3-2)\sqrt{5} - 3\sqrt{3} = \sqrt{5} - 3\sqrt{3}$

2. $\sqrt{175} = \sqrt{5^2 \cdot 7} = 5\sqrt{7}$

$\sqrt{243} = \sqrt{3^4 \cdot 3} = 9\sqrt{3}$

$-\sqrt{63} = -\sqrt{3^2 \cdot 7} = -3\sqrt{7}$

$-2\sqrt{75} = -2\sqrt{5^2 \cdot 3} = -10\sqrt{3}$

Entonces:

$= 5\sqrt{7} + 9\sqrt{3} - 3\sqrt{7} - 10\sqrt{3}$

$= (5-3)\sqrt{7} + (9-10)\sqrt{3} = 2\sqrt{7} - \sqrt{3}$

3. $\sqrt{80} = \sqrt{2^4 \cdot 5} = 2^2\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$

$-2\sqrt{252} = -2\sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 7} = -2 \cdot 2 \cdot 3\sqrt{7} = -12\sqrt{7}$

$3\sqrt{405} = 3\sqrt{3^4 \cdot 5} = 3 \cdot 3^2\sqrt{5} = 27\sqrt{5}$

$-3\sqrt{500} = -3\sqrt{2^2 \cdot 5^2 \cdot 5} = -3 \cdot 2 \cdot 5\sqrt{5} = -30\sqrt{5}$

Entonces:

$= 4\sqrt{5} + 27\sqrt{5} - 30\sqrt{5} - 12\sqrt{7}$

$= (4 + 27 - 30)\sqrt{5} - 12\sqrt{7} = \sqrt{5} - 12\sqrt{7}$

4. $7\sqrt{450} = 7\sqrt{3^2 \cdot 5^2 \cdot 2} = 7 \cdot 3 \cdot 5\sqrt{2} = 105\sqrt{2}$

$-4\sqrt{320} = -4\sqrt{2^6 \cdot 5} = -4 \cdot 2^3\sqrt{5} = -32\sqrt{5}$

$3\sqrt{80} = 3\sqrt{2^4 \cdot 5} = 3 \cdot 2^2\sqrt{5} = 12\sqrt{5}$

$-5\sqrt{800} = -5\sqrt{2^4 \cdot 2 \cdot 5^2} = -5 \cdot 2^2 \cdot 5\sqrt{2} = -100\sqrt{2}$

Entonces:

$= 105\sqrt{2} - 100\sqrt{2} - 32\sqrt{5} + 12\sqrt{5}$

$= (105 - 100)\sqrt{2} + (-32 + 12)\sqrt{5} = 5\sqrt{2} - 20\sqrt{5}$

5. $\frac{1}{2}\sqrt{12} = \frac{1}{2}\sqrt{2^2 \cdot 3} = \sqrt{3}$

$-\frac{1}{3}\sqrt{18} = -\frac{1}{3}\sqrt{3^2 \cdot 2} = -\sqrt{2}$

$\frac{3}{4}\sqrt{48} = \frac{3}{4}\sqrt{2^4 \cdot 3} = 3\sqrt{3}$

$\frac{1}{6}\sqrt{72} = \frac{1}{6}\sqrt{2^2 \cdot 2 \cdot 3^2} = \sqrt{2}$

Entonces:

$= \sqrt{3} + 3\sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{2} = (1+3)\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

6. $\frac{3}{4}\sqrt{176} = \frac{3}{4}\sqrt{2^4 \cdot 11} = \frac{2^2 \cdot 3}{4}\sqrt{11} = 3\sqrt{11}$

$-\frac{2}{3}\sqrt{45} = -\frac{2}{3}\sqrt{3^2 \cdot 5} = -\frac{2 \cdot 3}{3}\sqrt{5} = -2\sqrt{5}$

$\frac{1}{8}\sqrt{320} = \frac{1}{8}\sqrt{2^6 \cdot 5} = \frac{2^3}{8}\sqrt{5} = \sqrt{5}$

$\frac{1}{5}\sqrt{275} = \frac{1}{5}\sqrt{5^2 \cdot 11} = \frac{5}{5}\sqrt{11} = \sqrt{11}$

Entonces:

$= 3\sqrt{11} + \sqrt{11} - 2\sqrt{5} + \sqrt{5}$

$= (3+1)\sqrt{11} - (2+1)\sqrt{5} = 4\sqrt{11} - \sqrt{5}$

7. $\frac{1}{7}\sqrt{147} = \frac{1}{7}\sqrt{3 \cdot 7^2} = \sqrt{3}$

$-\frac{1}{5}\sqrt{700} = -\frac{1}{5}\sqrt{2^2 \cdot 5^2 \cdot 7} = -2\sqrt{7}$

$\frac{1}{10}\sqrt{28} = \frac{1}{10}\sqrt{2^2 \cdot 7} = \frac{1}{5}\sqrt{7}$

$\frac{1}{3}\sqrt{2.187} = \frac{1}{3}\sqrt{3^6 \cdot 3} = 9\sqrt{3}$

Entonces:

$= \sqrt{3} + 9\sqrt{3} - 2\sqrt{7} + \frac{1}{5}\sqrt{7}$

$= (1+9)\sqrt{3} + \left(-2 + \frac{1}{5}\right)\sqrt{7}$

$= 10\sqrt{3} - \frac{9}{5}\sqrt{7}$

8. $\sqrt{\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{3}{3^2}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

$-\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{2^2}} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

$\sqrt{\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{3}{2^2} = \frac{1}{2}}\sqrt{3}$

Entonces:

$= \frac{1}{3}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$= \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$= \frac{5}{6}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{2}$

9. $\sqrt{\frac{9}{5}} = \sqrt{\frac{3^2\cdot 5}{5^2}} = \frac{3}{5}\sqrt{5}$

$-\sqrt{\frac{1}{6}} = \sqrt{-\frac{6}{6^2}} = -\frac{1}{6}\sqrt{6}$

$-\sqrt{\frac{1}{20}} = -\sqrt{\frac{5}{2^2\cdot 5^2}} = -\frac{1}{10}\sqrt{5}$

$\sqrt{6} = \sqrt{6}$

Entonces:

$= \frac{3}{5}\sqrt{5} - \frac{1}{10}\sqrt{5} - \frac{1}{6}\sqrt{6} + \sqrt{6}$

$= \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{10}\right)\sqrt{5} + \left(-\frac{1}{6} + 1\right)\sqrt{6}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{5}{6}\sqrt{6}$

10. $\frac{5}{3}\sqrt{\frac{3}{5}} = \frac{5}{3}\sqrt{\frac{15}{5^2}} = \frac{1}{3}\sqrt{15}$

$-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{4}} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2^2}} = -\frac{1}{4}\sqrt{3}$

$-5\sqrt{\frac{1}{15}} = -5\sqrt{\frac{15}{3^2\cdot 5^2}} = -\frac{1}{3}\sqrt{15}$

$3\sqrt{\frac{1}{12}} = 3\sqrt{\frac{3}{2^2\cdot 3^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

Entonces:

$= \frac{1}{3}\sqrt{15} - \frac{1}{3}\sqrt{15} - \frac{1}{4}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$= \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)\sqrt{3} = \frac{1}{4}\sqrt{3}$

11. $5\sqrt{128} = 5\sqrt{2^6\cdot 2} = 40\sqrt{2}$

$-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} = -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{3^2}} = -\frac{1}{9}\sqrt{3}$

$-5\sqrt{98} = -5\sqrt{7^2\cdot 2} = -35\sqrt{2}$

$\sqrt{\frac{1}{27}} = \sqrt{\frac{3}{3^4}} = \frac{1}{9}\sqrt{3}$

Entonces:

$= 40\sqrt{2} - 35\sqrt{2} - \frac{1}{9}\sqrt{3} + \frac{1}{9}\sqrt{3}$

$= (40 - 35)\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

12. $2\sqrt{700} = 2\sqrt{2^2\cdot 5^2\cdot 7} = 20\sqrt{7}$

$-15\sqrt{\frac{1}{45}} = -15\sqrt{\frac{5}{3^2\cdot 5^2}} = -\sqrt{5}$

$4\sqrt{\frac{5}{16}} = 4\sqrt{\frac{5}{2^4}} = \sqrt{5}$

$-56\sqrt{\frac{1}{7}} = -56\sqrt{\frac{7}{7^2}} = -8\sqrt{7}$

Entonces:

$= 20\sqrt{7} - 8\sqrt{7} - \sqrt{5} + \sqrt{5}$

$= (20 - 8)\sqrt{7} = 12\sqrt{7}$

13. $\sqrt{25ax^2} = \sqrt{5^2ax^2} = 5x\sqrt{a}$

$\sqrt{49b} = \sqrt{7^2b} = 7\sqrt{b}$

$-\sqrt{9ax^2} = -\sqrt{3^2ax^2} = -3x\sqrt{a}$

entonces:

$= 5x\sqrt{a} - 3x\sqrt{a} + 7\sqrt{b}$

$= (5x - 3x)\sqrt{a} + 7\sqrt{b}$

$= 2x\sqrt{a} + 7\sqrt{b}$

14. $2\sqrt{m^2n} = 2m\sqrt{n}$

$-\sqrt{9m^2n} = -\sqrt{3^2m^2n} = -3m\sqrt{n}$

$\sqrt{16mn^2} = \sqrt{2^4mn^2} = 4n\sqrt{m}$

$-\sqrt{4mn^2} = -\sqrt{2^2mn^2} = -2n\sqrt{m}$

Entonces:

$= 2m\sqrt{n} - 3m\sqrt{n} + 4n\sqrt{m} - 2n\sqrt{m}$

$= (2m - 3m)\sqrt{n} + (4n - 2n)\sqrt{m}$

$= -m\sqrt{n} + 2n\sqrt{m}$

15. $a\sqrt{320x} = a\sqrt{2^6\cdot 5x} = 8a\sqrt{5x}$

$-7\sqrt{5a^2x} = -7a\sqrt{5x}$

$-(a - 4b)\sqrt{5x}$

Entonces:

$= 8a\sqrt{5x} - 7a\sqrt{5x} - (a - 4b)\sqrt{5x}$

$= (8a - 7a - a + 4b)\sqrt{5x} = 4b\sqrt{5x}$

16. $\sqrt{9x - 9} = \sqrt{3^2(x - 1)} = 3\sqrt{x - 1}$

$\sqrt{4x - 4} = \sqrt{2^2(x - 1)} = 2\sqrt{x - 1}$

$-5\sqrt{x - 1}$

Entonces:

$= 3\sqrt{x - 1} + 2\sqrt{x - 1} - 5\sqrt{x - 1}$

$= (3 + 2 - 5)\sqrt{x - 1} = 0$

MULTIPLICACIÓN DE RADICALES :

Multiplicación de radicales del mismo índice : *Se multiplican los coeficientes entre sí y las cantidades subradicales o radicandos entre sí, colocando este último producto bajo el signo radical común y se simplifica el resultado.*

$$a\sqrt[n]{X}\,.\,b\sqrt[n]{Y} = ab\sqrt[n]{XY}$$

Ejemplos :

1. $\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}=\sqrt{18}=\sqrt{3^2\cdot 2}=3\sqrt{2}$
2. $5\sqrt{21}\cdot 2\sqrt{3}=10\sqrt{63}=10\sqrt{3^2\cdot 7}=30\sqrt{7}$
3. $\frac{1}{2}\sqrt{14}\cdot\frac{2}{7}\sqrt{21}=\frac{1}{7}\sqrt{294}=\frac{1}{7}\sqrt{7^2\cdot 6}=\sqrt{6}$
4. $\sqrt[3]{12}\cdot\sqrt[3]{9}=\sqrt[3]{108}=\sqrt[3]{3^3\cdot 4}=3\sqrt[3]{4}$
5. $\frac{5}{6}\sqrt[3]{15}\cdot 12\sqrt[3]{50}=10\sqrt[3]{750}=10\sqrt[3]{5^3\cdot 6}=50\sqrt[3]{6}$
6. $x\sqrt{2a}\cdot\frac{1}{a}\sqrt{5a}=\frac{x}{a}\sqrt{10a^2}=x\sqrt{10}$
7. $5\sqrt{12}\cdot 3\sqrt{75}=15\sqrt{900}=15\sqrt{2^2\cdot 3^2\cdot 5^2}=450$
8. $\frac{3}{4}\sqrt[3]{9a^2}\cdot 8\sqrt[3]{3ab}=6\sqrt[3]{27a^3b}=6a\sqrt[3]{3^3b}=18a\sqrt[3]{b}$
9. $3\sqrt{6}\cdot\sqrt{14}\cdot 2\sqrt{35}=6\sqrt{2.940}=6\sqrt{2^2\cdot 7^2\cdot 15}=84\sqrt{15}$
10. $\frac{1}{2}\sqrt{21}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{42}\cdot\frac{3}{7}\sqrt{22}$
    $=\frac{1}{7}\sqrt{19.404}=\frac{1}{7}\sqrt{2^2\cdot 7^2\cdot 3^2\cdot 11}=6\sqrt{11}$
11. $3\sqrt[3]{45}\cdot\frac{1}{6}\sqrt[3]{15}\cdot 4\sqrt[3]{20}=2\sqrt[3]{13.500}=2\sqrt[3]{5^3\cdot 3^3\cdot 4}=30\sqrt[3]{4}$
12. $\frac{5}{6}\sqrt{\frac{7}{8}}\cdot\frac{3}{5}\sqrt{\frac{4}{7}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{2^2}}=\frac{1}{4}\sqrt{2}$
13. $\frac{2}{x}\sqrt{a^2x}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{a^3}}=\frac{3}{x}\sqrt{\frac{x}{a}}=\frac{3}{x}\sqrt{\frac{ax}{a^2}}=\frac{3}{ax}\sqrt{ax}$
14. $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{x}{y^2}}\cdot 6\sqrt{\frac{2}{y}}=2\sqrt{\frac{2x}{y^3}}=2\sqrt{\frac{2xy}{y^4}}=\frac{2}{y^2}\sqrt{2xy}$

Multiplicación de radicales compuestos : *El producto de un radical compuesto por uno simple se halla como el producto de un polinomio por un monomio pág. 12, y el producto de dos radicales compuestos se halla como el producto de dos polinomios pág. 14.*

Ejemplos :

1. $$\begin{array}{l} \sqrt{2}-\sqrt{3} \\ \underline{\sqrt{2}} \\ =\sqrt{4}-\sqrt{6} \\ =\ 2-\sqrt{6} \end{array}$$

2. $$\begin{array}{l} 7\sqrt{5}+5\sqrt{3} \\ \underline{2\sqrt{3}} \\ =14\sqrt{15}+10\sqrt{9} \\ =14\sqrt{15}+30 \end{array}$$

3. $$\begin{array}{l} 2\sqrt{3}+\sqrt{5}-5\sqrt{2} \\ \underline{4\sqrt{15}} \\ =8\sqrt{45}+4\sqrt{75}-20\sqrt{30} \\ =4\left(2\sqrt{3^2\cdot 5}+\sqrt{5^2\cdot 3}-5\sqrt{30}\right) \\ =4\left(6\sqrt{5}+5\sqrt{3}-5\sqrt{30}\right) \end{array}$$

4. $$\begin{array}{l} \sqrt{2}-\sqrt{3} \\ \underline{\sqrt{2}+2\sqrt{3}} \\ \sqrt{4}\ -\ \sqrt{6} \\ \underline{\quad +2\sqrt{6}-2\sqrt{9}} \\ =\sqrt{4}+\sqrt{6}\ -2\sqrt{9} \\ =\ 2+\sqrt{6}\ -6 \\ =\quad \sqrt{6}-4 \end{array}$$

5.
$$\begin{array}{l}
\sqrt{5}\ +5\sqrt{3} \\
2\sqrt{5}+3\sqrt{3} \\
\hline
2\sqrt{25}+10\sqrt{15} \\
\qquad\quad +\ 3\sqrt{15}+15\sqrt{9} \\
\hline
=2\sqrt{25}+13\sqrt{15}\ +15\sqrt{9} \\
=\ 10\ \ +13\sqrt{15}\ +\ \ 45 \\
=\ \ 55+13\sqrt{15}
\end{array}$$

6.
$$\begin{array}{l}
3\sqrt{7}-2\sqrt{3} \\
5\sqrt{3}+4\sqrt{7} \\
\hline
15\sqrt{21}-10\sqrt{9} \\
-\ 8\sqrt{21}\qquad\qquad +12\sqrt{49} \\
\hline
=7\sqrt{21}-10\sqrt{9}+12\sqrt{49} \\
=7\sqrt{21}-30+84 \\
=7\sqrt{21}+54
\end{array}$$

7.
$$\begin{array}{l}
\sqrt{a}\ -2\sqrt{x} \\
3\sqrt{a}\ +\sqrt{x} \\
\hline
3\sqrt{a^2}-6\sqrt{ax} \\
\qquad\quad +\sqrt{ax}\ \ -2\sqrt{x^2} \\
\hline
=3\sqrt{a^2}-5\sqrt{ax}-2\sqrt{x^2} \\
=3a-5\sqrt{ax}-2x
\end{array}$$

8.
$$\begin{array}{l}
7\sqrt{5}-11\sqrt{7} \\
5\sqrt{5}-8\sqrt{7} \\
\hline
35\sqrt{25}-55\sqrt{35} \\
\qquad\qquad -\ 56\sqrt{35}\ +88\sqrt{49} \\
\hline
=35\sqrt{25}-111\sqrt{35}+88\sqrt{49} \\
=175-111\sqrt{35}+616 \\
=791-111\sqrt{35}
\end{array}$$

9.
$$\begin{array}{l}
\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5} \\
\sqrt{2}-\sqrt{3} \\
\hline
\sqrt{4}+\sqrt{6}+\sqrt{10} \\
\qquad -\sqrt{6}\qquad\quad -\sqrt{9}-\sqrt{15} \\
\hline
=\sqrt{4}\qquad\quad +\sqrt{10}-\sqrt{9}-\sqrt{15} \\
=\ \ 2\qquad\quad +\sqrt{10}-\ 3\ -\sqrt{15} \\
=\sqrt{10}-\sqrt{15}-1
\end{array}$$

10.
$$\begin{array}{l}
\sqrt{2}-3\sqrt{3}+\sqrt{5} \\
\sqrt{2}+2\sqrt{3}-\sqrt{5} \\
\hline
\sqrt{4}-3\sqrt{6}+\sqrt{10} \\
\quad +2\sqrt{6}\qquad\quad -6\sqrt{9}+2\sqrt{15} \\
\qquad\qquad -\sqrt{10}\qquad\quad +3\sqrt{15}-\sqrt{25} \\
\hline
=\sqrt{4}-\sqrt{6}\qquad\quad -6\sqrt{9}+5\sqrt{15}-\sqrt{25} \\
=\ 2\ -\sqrt{6}\qquad\quad -\ 18\ \ +5\sqrt{15}-5 \\
=5\sqrt{15}-\sqrt{6}-21
\end{array}$$

11.
$$\begin{array}{l}
2\sqrt{3}-\sqrt{6}+\sqrt{5} \\
\sqrt{3}\ +\sqrt{6}+3\sqrt{5} \\
\hline
2\sqrt{9}-\ \sqrt{18}\ +\ \sqrt{15} \\
\qquad +2\sqrt{18}\qquad\quad -\sqrt{36}\ +\ \sqrt{30} \\
\qquad\qquad +6\sqrt{15}\qquad\quad -3\sqrt{30}+3\sqrt{25} \\
\hline
=2\sqrt{9}+\sqrt{3^2\cdot 2}+7\sqrt{15}-\sqrt{36}-2\sqrt{30}+3\sqrt{25} \\
=6+3\sqrt{2}+7\sqrt{15}-6-2\sqrt{30}\ +15 \\
=7\sqrt{15}+3\sqrt{2}-2\sqrt{30}\ +15
\end{array}$$

12.
$$\begin{array}{l}
\sqrt{a}+\sqrt{a+1} \\
\sqrt{a}+2\sqrt{a+1} \\
\hline
\sqrt{a^2}+\sqrt{a^2+a} \\
\qquad +2\sqrt{a^2+a}+2\sqrt{(a+1)^2} \\
\hline
=\sqrt{a^2}+3\sqrt{a^2+a}+2\sqrt{(a+1)^2} \\
=a+3\sqrt{a^2+a}+2a+2 \\
=3a+3\sqrt{a^2+a}+2
\end{array}$$

Multiplicación de radicales de distintos índices : *Se reducen los radicales al mínimo común índice (pág. 95) y se multiplican como radicales del mismo índice (pág. 99).*

Ejemplo 1 : **Multiplicar** $\sqrt{x}$ **por** $\sqrt[3]{2x^2}$

Primero se reducen los radicales a un índice común como lo explicamos en la pág. 95 :

$$\sqrt{x} = \sqrt[6]{x^3}$$

$$\sqrt[3]{2x^2} = \sqrt[6]{\left(2x^2\right)^2} = \sqrt[6]{4x^4}$$

Como ahora los dos radicales tienen el mismo índice ("6" en este caso), se multiplican como radicales del mismo índice (pág. 99).

$$\begin{aligned}\sqrt[6]{x^3}\cdot\sqrt[6]{4x^4} &= \sqrt[6]{4x^7}\\ &= \sqrt[6]{4x^6x}\\ &= x\sqrt[6]{4x}\end{aligned}$$

Ejemplo 2 : **Multiplicar** $3\sqrt{2ab}$ **por** $4\sqrt[4]{8a^3}$

$$\begin{aligned}3\sqrt{2ab} &= 3\sqrt[4]{(2ab)^2} = 3\sqrt[4]{4a^2b^2}\\ 3\sqrt[4]{4a^2b^2}\cdot 4\sqrt[4]{8a^3} &= 12\sqrt[4]{32a^5b^2}\\ &= 12\sqrt[4]{2^4\cdot 2a^4ab^2}\\ &= 24a\sqrt[4]{2ab^2}\end{aligned}$$

Ejemplo 3 : **Multiplicar** $\sqrt[3]{a^2b^2}$ **por** $2\sqrt[4]{3a^3b}$

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{a^2b^2} &= \sqrt[12]{\left(a^2b^2\right)^4}\\ &= \sqrt[12]{a^8b^8}\\ 2\sqrt[4]{3a^3b} &= 2\sqrt[12]{\left(3a^3b\right)^3}\\ &= 2\sqrt[12]{27a^9b^3}\\ \sqrt[12]{a^8b^8}\cdot 2\sqrt[12]{27a^9b^3} &= 2\sqrt[12]{27a^{17}b^{11}}\\ &= 2\sqrt[12]{27a^{12}a^5b^{11}}\\ &= 2a\sqrt[12]{27a^5b^{11}}\end{aligned}$$

Ejemplo 4 : **Multiplicar** $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2b}{a}}$ **por** $\frac{3}{8}\sqrt[3]{\frac{a^2}{4b^2}}$

$$\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2b}{a}} = \frac{2}{3}\sqrt[6]{\left(\frac{2b}{a}\right)^3} = \frac{2}{3}\sqrt[6]{\frac{8b^3}{a^3}}$$

$$\frac{3}{8}\sqrt[3]{\frac{a^2}{4b^2}} = \frac{3}{8}\sqrt[6]{\left(\frac{a^2}{2^2b^2}\right)^2} = \frac{3}{8}\sqrt[6]{\frac{a^4}{2^4b^4}}$$

$$\frac{2}{3}\sqrt[6]{\frac{2^3b^3}{a^3}}\cdot\frac{3}{8}\sqrt[6]{\frac{a^4}{2^4b^4}}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt[6]{\frac{a}{2b}} = \frac{1}{4}\sqrt[6]{\frac{2^5ab^5}{2^6b^6}} = \frac{1}{8b}\sqrt{32ab^5}$$

División de radicales del mismo índice : *Se dividen los coeficientes entre sí y las cantidades sub-radicales o radicandos entre sí, colocando este último cociente bajo el signo radical común y se simplifica el resultado.*

$$\frac{a\sqrt[n]{X}}{b\sqrt[n]{Y}} = \frac{a}{b} \cdot \sqrt[n]{\frac{X}{Y}}$$

También es bueno aclarar que la raíz de una fracción equivale a la fracción de las raíces con el mismo índice :

$$\sqrt[n]{\frac{X}{Y}} = \frac{\sqrt[n]{X}}{\sqrt[n]{Y}}$$

Ejemplos *:*

1. $\frac{4\sqrt{6}}{2\sqrt{3}} = 2\sqrt{\frac{6}{3}} = 2\sqrt{2}$

2. $\frac{2\sqrt{3a}}{10\sqrt{a}} = \frac{1}{5}\sqrt{\frac{3a}{a}} = \frac{1}{5}\sqrt{3}$

3. $\frac{\frac{1}{2}\sqrt{3xy}}{\frac{3}{4}\sqrt{x}} = \frac{4}{6}\sqrt{\frac{3xy}{x}} = \frac{2}{3}\sqrt{3y}$

4. $\frac{\sqrt{75x^2y^3}}{5\sqrt{3xy}} = \frac{1}{5}\sqrt{\frac{75x^2y^3}{3xy}} = \frac{1}{5}\sqrt{25xy^2} = \frac{1}{5}\sqrt{5^2xy^2} = y\sqrt{x}$

5. $\frac{3\sqrt[3]{16a^5}}{4\sqrt[3]{2a^2}} = \frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{16a^5}{2a^2}} = \frac{3}{4}\sqrt[3]{8a^3} = \frac{3}{4}\sqrt[3]{2^3a^3} = \frac{3}{2}a$

6. $\frac{5\sqrt[6]{\frac{1}{2}}}{\frac{10}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}} = \frac{15}{60}\sqrt{\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{2^2}} = \frac{1}{8}\sqrt{3}$

7. $\frac{4x\sqrt{a^3x^2}}{2\sqrt{a^2x^3}} = 2x\sqrt{\frac{a^3x^2}{a^2x^3}} = 2x\sqrt{\frac{a}{x}} = 2x\sqrt{\frac{ax}{x^2}} = 2\sqrt{ax}$

8. $\frac{\frac{2a}{3}\sqrt[3]{x^2}}{\frac{a}{3x^2}\sqrt[3]{x^3}} = \frac{6ax^2}{3a}\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^3}} = 2x^2\sqrt[3]{\frac{1}{x}} = 2x^2\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^3}} = 2x\sqrt[3]{x^2}$

9. $\frac{\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{6}\sqrt[3]{\frac{1}{3}}} = \frac{6}{3}\sqrt[3]{\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}}} = 2\sqrt[3]{\frac{3}{2}} = 2\sqrt[3]{\frac{3\cdot 2^2}{2^3}} = \sqrt[3]{12}$

División de radicales de distintos índices : *Se reducen los radicales al mínimo común índice (pág. 95) y luego se dividen como radicales del mismo índice.*

Ejemplo 1 ***: Dividir*** $\sqrt{9x}$ ***entre*** $\sqrt[3]{3x^2}$

Se reducen los radicales al mínimo común índice (pág. 95) :

$$\sqrt{9x} = \sqrt[6]{\left(3^2x\right)^3} = \sqrt[6]{3^6x^3} = 3\sqrt[6]{x^3}$$

$$\sqrt[3]{3x^2} = \sqrt[6]{\left(3x^2\right)^2} = \sqrt[6]{9x^4}$$

Como ya tienen el mismo índice (6) se efectúa la división de radicales del mismo índice explicada en esta misma página :

$$\frac{3\sqrt[6]{x^3}}{\sqrt[6]{9x^4}} = 3\sqrt[6]{\frac{x^3}{9x^4}} = 3\sqrt[6]{\frac{1}{9x}}$$

POTENCIACIÓN DE RADICALES (POTENCIA DE UNA RAÍZ) : *Para elevar un radical a una potencia se eleva a dicha potencia el coeficiente y la cantidad sub-radical o radicando, y se simplifica el resultado.*

$$(a\sqrt[n]{X})^m = a^m\sqrt[n]{X^m}$$

Un radical elevado a un exponente igual al índice de la raíz equivale a la cantidad sub-radical o radicando.

$$(\sqrt[n]{X^m})^n = X^m$$

Ejemplos :

1. $\left(4\sqrt{2}\right)^2 = 4^2\sqrt{2^2} = 16\cdot 2 = 32$

2. $\left(2\sqrt{3}\right)^2 = 2^2\sqrt{3^2} = 4\cdot 3 = 12$

3. $\left(5\sqrt{7}\right)^2 = 5^2\sqrt{7^2} = 25\cdot 7 = 175$

4. $\left(2\sqrt[3]{4}\right)^2 = 2^2\sqrt[3]{2^4} = 4\sqrt[3]{2^3\cdot 2} = 8\sqrt[3]{2}$

5. $\left(3\sqrt[3]{2a^2b}\right)^4 = 3^4\sqrt[3]{\left(2a^2b\right)^4} = 81\sqrt[3]{2^3\cdot 2\cdot a^3a^3a^2b^3b} = 162a^2b\sqrt{2a^2b}$

6. $\left(\sqrt[4]{8x^3}\right)^2 = \sqrt[4]{\left(2^3x^3\right)^2} = \sqrt[4]{2^4\cdot 2^2x^4x^2} = 2x\sqrt[4]{2^2x^2} = 2x(2x)^{\frac{2}{4}}$

$= 2x(2x)^{\frac{1}{2}} = 2x\sqrt{2x}$

7. $\left(\sqrt[5]{81ab^3}\right)^3 = \sqrt[5]{\left(3^4ab^3\right)^3} = \sqrt[5]{3^5\cdot 3^5\cdot 3^2a^3b^5b^4} = 9b\sqrt[5]{9a^3b^4}$

8. $\left(\sqrt[6]{18}\right)^3 = \sqrt[6]{18^3} = (18)^{\frac{3}{6}} = (18)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{18} = \sqrt{3^2\cdot 2} = 3\sqrt{2}$

9. $\left(4a\sqrt{2x}\right)^2 = (4a)^2\sqrt{(2x)^2} = 16a^2(2x) = 32a^2x$

10. $\left(2\sqrt{x+1}\right)^2 = 2^2\sqrt{(x+1)^2} = 4(x+1) = 4x+4$

11. $\left(3\sqrt{x-a}\right)^2 = 3^2\sqrt{(x-a)^2} = 9(x-a) = 9x-9a$

12. $\left(4\sqrt[6]{9a^3b^4}\right)^3$

$= 4^3\sqrt[6]{\left(3^2a^3b^4\right)^3}$

$= 64\sqrt[6]{3^6a^6a^3b^6b^6}$

$= 192ab^2\sqrt[6]{a^3}$

$= 192ab^2(a)^{\frac{3}{6}} = 192ab^2(a)^{\frac{1}{2}} = 192ab^2\sqrt{a}$

RADICACIÓN DE RADICALES (RAÍZ DE UNA RAÍZ) : *Para extraer una raíz a un radical se multiplica el índice del radical por el índice de la raíz y se simplifica el resultado.*

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{X}} = \sqrt[n.m]{X}$$

Ejemplos :

1. $\sqrt{\sqrt[3]{a^2}} = \sqrt[6]{a^2} = (a)^{\frac{2}{6}} = a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$

2. $\sqrt[3]{\sqrt{8}} = \sqrt[6]{8} = (2)^{\frac{3}{6}} = (2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

3. $\sqrt[4]{\sqrt{81}} = \sqrt[8]{3^4} = (3)^{\frac{4}{8}} = (3)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

4. $\sqrt{\sqrt{3a}} = \sqrt[4]{3a}$

5. $\sqrt{\sqrt[3]{4a^2}} = \sqrt[6]{2^2a^2} = (2a)^{\frac{2}{6}} = (2a)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2a}$

6. $\sqrt[3]{2\sqrt{2}} = \sqrt[3]{\sqrt{2^2\cdot 2}} = \sqrt[6]{2^3} = (2)^{\frac{3}{6}} = (2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

7. $\sqrt{\sqrt[4]{25a^2}} = \sqrt[8]{5^2a^2} = (5a)^{\frac{2}{8}} = (5a)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{5a}$

8. $\sqrt[3]{\sqrt[4]{27a^3}} = \sqrt[12]{3^3a^3} = (3a)^{\frac{3}{12}} = (3a)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{3a}$

9. $\sqrt{3\sqrt[5]{3}} = \sqrt{\sqrt[5]{3^5 \cdot 3}} = \sqrt[10]{3^6} = (3)^{\frac{6}{10}} = (3)^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{3^3} = \sqrt[5]{27}$

10. $\sqrt[4]{\sqrt{a^4b^6}} = \sqrt[8]{a^4b^4b^2} = (ab)^{\frac{4}{8}}(b)^{\frac{2}{8}} = (ab)^{\frac{1}{2}}(b)^{\frac{1}{4}}$

$= \sqrt{ab} \cdot \sqrt[4]{b}$

$\Rightarrow \sqrt{ab} = \sqrt[4]{(ab)^2} = \sqrt[4]{a^2b^2}$

$= \sqrt[4]{a^2b^2}\ \sqrt[4]{b} = \sqrt[4]{a^2b^3}$

11. $\sqrt[5]{\sqrt[3]{x^{10}}} = \sqrt[15]{x^{10}} = x^{\frac{10}{15}} = x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}$

12. $\sqrt{\sqrt[3]{(a+b)^2}} = \sqrt[6]{(a+b)^2} = (a+b)^{\frac{2}{6}} = (a+b)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a+b}$

Expresiones conjugadas : *Dos expresiones que contienen radicales de segundo grado (raíz cuadrada) como* $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ *y* $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ *ó* $a + \sqrt{b}$ *y* $a - \sqrt{b}$, *que difieren solamente en el signo que une sus términos, se dice que son* **conjugadas**.

Así, la conjugada de $3.\sqrt{2} - \sqrt{5}$ *es* $3.\sqrt{2} + \sqrt{5}$

la conjugada de $5 + \sqrt{3}$ *es* $5 - \sqrt{3}$

El producto de dos expresiones conjugadas es racional; Así :

$$(3.\sqrt{2} - \sqrt{5}).(3.\sqrt{2} + \sqrt{5}) = (3.\sqrt{2})^2 - (\sqrt{5})^2 = 18 - 5 = 13$$

RACIONALIZACIÓN

Racionalizar el denominador de una fracción: *es convertir una fracción cuyo denominador sea irracional en una fracción equivalente cuyo denominador sea racional.*

Cuando se racionaliza el denominador irracional de una fracción, desaparece todo signo radical del denominador.

Se consideran dos casos :

Caso 1 : Racionalizar el denominador de una fracción cuando el denominador es monomio : *Se multiplican los dos términos de la fracción por el radical del mismo índice del denominador y que multiplicado por éste dé como producto una cantidad racional.*

Ejemplo 1 : **Racionalizar el denominador de** $\dfrac{3}{\sqrt{2X}}$

Multiplicamos ambos términos de la fracción por $\sqrt{2X}$ *y tenemos:*

$$\frac{3}{\sqrt{2X}} = \frac{3.\sqrt{2X}}{\sqrt{2X}.\sqrt{2X}} = \frac{3.\sqrt{2X}}{\sqrt{2^2X^2}} = \frac{3\sqrt{2X}}{2X} = \frac{3}{2X}\sqrt{2X}$$

Ejemplo 2 : **Racionalizar el denominador de** $\dfrac{2a}{\sqrt{2ax}}$

$$\frac{2a}{\sqrt{2ax}} \cdot \frac{\sqrt{2ax}}{\sqrt{2ax}} = \frac{2a\sqrt{2ax}}{\sqrt{2^2a^2x^2}} = \frac{2a\sqrt{2ax}}{2ax} = \frac{\sqrt{2ax}}{x}$$

Ejemplo 3 : **Racionalizar el denominador de** $\dfrac{5}{\sqrt[3]{4a^2}}$

Como el denominador es una raíz con índice 3 se multiplicará por un radical que permita que una vez que se efectúe la multiplicación los factores de la cantidad sub radical o radicando queden elevados a la 3 cada uno para así sacarlos en forma entera de la raíz:

$$\frac{5}{\sqrt[3]{4a^2}}\cdot\frac{\sqrt[3]{2a}}{\sqrt[3]{2a}}=\frac{5\sqrt[3]{2a}}{\sqrt[3]{2^3a^3}}=\frac{5\sqrt[3]{2a}}{2a}$$

Ejemplo 4 : **Racionalizar el denominador de** $\frac{1}{\sqrt[3]{9x}}$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{9x}}\cdot\frac{\sqrt[3]{3x^2}}{\sqrt[3]{3x^2}}=\frac{\sqrt[3]{3x^2}}{\sqrt[3]{3^3x^3}}=\frac{\sqrt[3]{3x^2}}{3x}$$

Caso 2 : Racionalizar el denominador de una fracción cuando el denominador es un binomio que contiene radicales de segundo grado : *Se multiplican ambos términos de la fracción por la conjugada del denominador (pág. 103) y se simplifica el resultado :*

Ejemplo 1 : **Racionalizar el denominador de** $\frac{3-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$

Multiplicamos ambos términos de la fracción por la conjugada del denominador $1+\sqrt{2}$ *que es* $1-\sqrt{2}$ *y tenemos:*

$$\frac{3-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\cdot\frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}=\frac{3-3\sqrt{2}-\sqrt{2}+\sqrt{2^2}}{1-\sqrt{2^2}}$$

$$=\frac{3-4\sqrt{2}+2}{1-2}=\frac{5-4\sqrt{2}}{-1}=4\sqrt{2}-5$$

Ejemplo 2 : **Racionalizar el denominador de** $\frac{5+2\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}}$

$$\frac{5+2\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}}\cdot\frac{4+\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}=\frac{20+5\sqrt{3}+8\sqrt{3}+2\sqrt{3^2}}{4^2-\sqrt{3^2}}$$

$$=\frac{20+13\sqrt{3}+6}{16-3}=\frac{26+13\sqrt{3}}{13}=2+\sqrt{3}$$

Ejemplo 3 : **Racionalizar el denominador de** $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{x}}{2\sqrt{a}+\sqrt{x}}$

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{x}}{2\sqrt{a}+\sqrt{x}}\cdot\frac{2\sqrt{a}-\sqrt{x}}{2\sqrt{a}-\sqrt{x}}$$

$$=\frac{2\sqrt{a^2}-\sqrt{ax}+2\sqrt{ax}-\sqrt{x^2}}{2^2\sqrt{a^2}-\sqrt{x^2}}=\frac{2a+\sqrt{ax}-x}{4a-x}$$

Ejemplo 4 : **Racionalizar el denominador de** $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}$

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}\cdot\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}$$

$$=\frac{\sqrt{x^2}-2\sqrt{x}\sqrt{x-1}+\sqrt{(x-1)^2}}{\sqrt{x^2}-\sqrt{(x-1)^2}}$$

$$=\frac{x-2\sqrt{x^2-x}+x-1}{x-(x-1)}=2x-1-2\sqrt{x^2-x}$$

Ejemplo 5 : **Racionalizar el denominador de** $\dfrac{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$

$$\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{(x+2)^2}+2\sqrt{x+2}\ \sqrt{2}+\sqrt{2^2}}{\sqrt{(x+2)^2}-\sqrt{2^2}}$$

$$=\frac{x+2+2\sqrt{2x+4}+2}{x+2-2}=\frac{x+4+2\sqrt{2x+4}}{x}$$

Ejemplo 6 : **Racionalizar el denominador de** $\dfrac{\sqrt{a+4}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+4}+\sqrt{a}}$

$$\frac{\sqrt{a+4}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+4}+\sqrt{a}}\cdot\frac{\sqrt{a+4}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+4}-\sqrt{a}}$$

$$=\frac{\sqrt{(a+4)^2}-2\sqrt{a+4}\ \sqrt{a}+\sqrt{a^2}}{\sqrt{(a+4)^2}-\sqrt{a^2}}$$

$$=\frac{a+4-2\sqrt{a^2+4a}+a}{a+4-a}=\frac{2a+4-2\sqrt{a^2+4a}}{4}$$

$$=\frac{a+2-\sqrt{a^2+4a}}{2}$$

Para racionalizar el denominador de una expresión que contiene tres radicales de segundo grado hay que realizar dos veces la operación que hemos explicado anteriormente :

Ejemplo : **Racionalizar el denominador de** $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}$

Con el uso del paréntesis se separa el denominador de manera que quede coformado por un binomio y un monomio :

$$\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)+\sqrt{6}$$

Luego se multiplican ambos miembros de la fracción por la comjugada de este "nuevo" denominador :

$$\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)-\sqrt{6}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}\cdot\frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)-\sqrt{6}}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)-\sqrt{6}}$$

$$\frac{2+\sqrt{6}-\sqrt{12}}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{6}\right)^2}=\frac{2+\sqrt{6}-2\sqrt{3}}{2+2\sqrt{6}+3-6}=\frac{2+\sqrt{6}-2\sqrt{3}}{2\sqrt{6}-1}$$

Como el denimonador presenta un radical irracional utilizo la conjugada de dicha expresión ;

$$\frac{2+\sqrt{6}-2\sqrt{3}}{2\sqrt{6}-1}\cdot\frac{2\sqrt{6}+1}{2\sqrt{6}+1}=$$

$$=\frac{4\sqrt{6}+2+12+\sqrt{6}-4\sqrt{18}-2\sqrt{3}}{\left(2\sqrt{6}\right)^2-1}=\frac{5\sqrt{6}+14-12\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{23}$$

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES CON RADICALES QUE SE REDUCEN A PRIMER GRADO :

Ejemplo 1 : **Resolver** $\sqrt{x-8}=2$

Se elevan al cuadrado ambos miembros de la ecuación para eliminar el radical :

$$\left(\sqrt{x-8}\right)^2=2^2$$

Una vez eliminado el radical se resuelve la ecuación de primer grado con una incógnita (pág. 40) :

$$x-8=4$$
$$x=12$$

Ejemplo 2 : **Resolver** $7+\sqrt[3]{5x-2}=9$

Para facilitar la eliminación de los radicales se recomienda, cuando sea posible, aislarlo en alguno de los dos miembros de la ecuación (izquierdo o derecho) :

$$\sqrt[3]{5x-2}=2$$

Como el radical es de grado 3 se elevan al cubo ambos miembros de la ecuación para eliminar el radical y se resuelve la misma :

$$\left(\sqrt[3]{5x-2}\right)^3=2^3$$
$$5x-2=8$$
$$5x=10$$
$$x=2$$

Ejemplo 3 : **Resolver** $\sqrt{x+10}-\sqrt{x+19}=-1$

Para facilitar la eliminación de los radicales se recomienda, cuando sea posible, aislarlo en alguno de los dos miembros de la ecuación (izquierdo o derecho), como en este caso hay dos radicales en el miembro de la izquierda, paso uno al miembro de la derecha teniendo cuidado de cambiarle el signo que está fuera del radical (los signos que están dentro de la raíz no cambian) :

$$\sqrt{x+10}=\sqrt{x+19}-1$$

Se elevan al cuadrado ambos miembros de la ecuación para eliminar el radical y se resuelve la misma :

$$\left(\sqrt{x+10}\right)^2=\left(\sqrt{x+19}-1\right)^2$$

El radical del miembro izquierdo se elimina directamente, pero el miembro de la derecha se resuelve como un producto notable (cuadrado de la diferencia de dos cantidades pág. 35).

El cuadrado de la diferencia de dos cantidades es igual al ***cuadrado*** *de la primera cantidad* ***menos*** *el doble producto de la primera cantidad por la segunda* ***más*** *el cuadrado de la segunda cantidad.*

$$x+10=x+19-2\sqrt{x+19}+1$$
$$-10=-2\sqrt{x+19}$$
$$5=\sqrt{x+19}$$
$$5^2=\left(\sqrt{x+19}\right)^2$$
$$25=x+19$$
$$6=x$$

Ejemplo 4 : **Resolver** $\sqrt{18x-8}-\sqrt{2x-4}-2\sqrt{2x+1}=0$

Para facilitar la eliminación de los radicales se recomienda, cuando sea posible, aislarlo en alguno de los dos miembros de la ecuación

(izquierdo o derecho), como en este caso hay tres radicales en el miembro de la izquierda, paso uno o dos al miembro de la derecha teniendo cuidado de cambiarle el signo que está fuera del radical (los signos que están dentro de la raíz no cambian) :

Una vez separados los radicales, uno en un miembro y dos en el otro, elevo al cuadrado ambos miembros de la ecuación :

$$\left(\sqrt{18x-8}\right)^2=\left(\sqrt{2x-4}+2\sqrt{2x+1}\right)^2$$

El radical del miembro izquierdo se elimina directamente, pero el miembro de la derecha se resuelve como un producto notable (cuadrado de la suma de dos cantidades pág. 35).

*El cuadrado de la suma de dos cantidades es igual al **cuadrado** de la primera cantidad **más** el doble producto de la primera cantidad por la segunda **más** el cuadrado de la segunda cantidad.*

$$18x-8=2x-4+4\sqrt{4x^2-6x-4}+4\left(2x+1\right)$$

Simplificando la ecuación:

$$18x-8=10x+4\sqrt{4x^2-6x-4}$$
$$8x-8=4\sqrt{4x^2-6x-4}$$
$$2x-2=\sqrt{4x^2-6x-4}$$

Notamos que el miembro de la derecha es un radical de grado dos, luego puedo eliminarlo elevando ambos miembros al cuadrado :

$$\left(2x-2\right)^2=\left(\sqrt{4x^2-6x-4}\right)^2$$

$$4x^2-8x+4=4x^2-6x-4$$
$$-2x=-8$$
$$x=4$$

Ejemplo 4 : **Resolver** $\sqrt{9x+10}-2\sqrt{x+3}=\sqrt{x-2}$

$$\left(\sqrt{9x+10}-2\sqrt{x+3}\right)^2=\left(\sqrt{x-2}\right)^2$$
$$9x+10-4\sqrt{9x^2+37x+30}+4\left(x+3\right)=x-2$$
$$13x+22-x+2=4\sqrt{9x^2+37x+30}$$

$$12x+24=4\sqrt{9x^2+37x+30}$$
$$3x+6=\sqrt{9x^2+37x+30}$$
$$\left(3x+6\right)^2=\left(\sqrt{9x^2+37x+30}\right)^2$$
$$9x^2+36x+36=9x^2+37x+30$$
$$36-30=37x-36x$$
$$6=x$$

◄REGLA DE TRES CON BASE UNITARIA :

Ejercicio 1:

Usted pagó por la compra de tres (3) pantalones Bs 330,00. Si quiere comprar dos (2) pantalones más. ¿Cuántos bolívares necesita?

Solución :

En nuestros estudios de bachillerato se nos enseñó un método sencillo y eficaz que nos permite hacer el cálculo directo :

Situación conocida (Supuesto) : *3 pantalones cuestan Bs 330,00*

Situación desconocida (Pregunta) : *2 pantalones costarán Bs X*

Se nos dijo que para garantizar la exactitud del cálculo se colocaban las unidades similares una debajo de la otra (pantalones debajo de pantalones y bolívares debajo de bolívares).

3 pantalones ----------> Bs 330,00
2 pantalones ----------> Bs X

Posteriormente se procede a hacer el "despeje" de la incógnita, multiplicando los datos en forma de "equis" , el numerador estará representado por la multiplicación de los dos números conocidos y el denominador será el número que acompaña a la incógnita en la multiplicación en forma de "equis" :

$$X = \frac{(330).(2)}{3}$$

También podemos recordar que cuando estudiamos PROPORCIONES se nos enseñó otro método para este cálculo que consistía en indicar la proporcionalidad directa que existe entre dos valores. En este sentido se nos indicó igualmente que para garantizar la exactitud del cálculo se colocaban las unidades similares una debajo de la otra (pantalones debajo de pantalones y bolívares debajo de bolívares).

$$\frac{3 \text{ pantalones}}{2 \text{ pantalones}} = \frac{Bs\ 330,00}{Bs\ X}$$

Al efectuar el despeje:

$$X = \frac{(330).(2)}{3}$$

Podemos notar que por cualquiera de los dos procedimientos se llegará al mismo resultado :

$$X = \frac{660}{3} = 220,00$$

Concluyendo que dos (2) pantalones costarán Bs 220,00

Si posteriormente se nos preguntara el costo de cualquier cantidad de pantalones, tendríamos que hacer la misma operación (de principio a fin) tantas veces como se cambiara dicha cantidad.

Lo que pretendemos es recomendar un procedimiento que facilite los cálculos para situaciones más complejas o difíciles, pero que a su vez no implique el tener que "aprender" nuevas fórmulas o ecuaciones. Se persigue, que lo hagamos de la misma forma como acostumbramos en nuestra cotidianidad.

Lo anteriormente expuesto responde a la frecuencia que se observa en la mala utilización de la **Regla de Tres Inversa** *y la* **Regla de Tres Compuesta**.

Partiendo de la premisa anterior se recomienda que para problemas de este tipo se determine primero el costo unitario de cada artículo. Recuerde que cuando realiza una compra en cualquier establecimiento, en la factura que se le entrega, siempre viene reflejado el precio unitario de cada uno de los artículos adquiridos y el costo total

por artículo no es más que la multiplicación de dicho precio unitario por la cantidad del artículo comprado.

El cálculo del precio unitario se puede realizar utilizando la regla de tres o la proporcionalidad directa, tal como se hizo anteriormente, pero referido a un solo artículo (cantidad).

Una vez conocido este valor (que representa el costo unitario de cada artículo) se puede calcular fácilmente el precio de cualquier cantidad de dicho artículo a comprar.

Situación conocida (Supuesto) : *3 pantalones cuestan Bs 330,00*

Situación desconocida (Pregunta) : *1 pantalón costará Bs X*

$$X = \frac{(330).(1)}{3} = 110{,}00 = \text{precio unitario del pantalón}$$

Si llamamos "n" al número de pantalones a comprar, el costo total (C) de la compra de "n" pantalones estará representada por la expresión:

$$C = 110\,n$$

Nota: *No es que estamos memorizando otra fórmula. Es que estamos construyendo una expresión matemática que relaciona los valores de este problema en particular. Y algo muy importante, este es el procedimiento que hacemos comúnmente cuando vamos al supermercado o a la tienda, lo que significa que no es nada nuevo para nosotros ni debe representar grado de dificultad alguno ponerlo en práctica.*

Acostumbrarse a trabajar con estas expresiones algebraicas (y saberlas "construir") facilitan considerablemente los cálculos posteriores.

Imaginemos que se nos pregunte cuánto cuestan 9 de esos pantalones; solo basta sustituir el 9 en la ecuación ***C = 110 n*** *y el resultado lo tendremos de forma inmediata: C = 110.(9) = Bs 990,00*

Pero no solo esta expresión nos sirve para saber el costo del número de pantalones a comprar; con ella podemos determinar cuantos pantalones se pueden comprar con cierta cantidad de dinero. Por ejemplo, si se tienen Bs 660,00 y se quiere saber cuántos de esos pantalones se pueden comprar, se procede como sigue:

$$660 = 110 \,.\, n \qquad \text{luego} \qquad n = \frac{660}{110} = 6 \text{ pantalones}$$

Lo que significa que con Bs 660,00 podemos comprar 6 pantalones de Bs 110,00 cada uno.

Insistimos tanto en el cálculo del precio unitario (aporte individual o fuerza de trabajo individual) porque en la solución de problemas que necesiten la aplicación de la regla de tres inversa, de proporcionalidad inversa y de la regla de tres compuesta; es más fácil visualizarlo con el uso de este método propuesto.

El procedimiento recomendado consiste en calcular el aporte unitario por unidad de tiempo de la situación conocida (supuesto), posteriormente calcular el aporte unitario por unidad de tiempo de la situación desconocida (pregunta), y por último se igualan estas dos cantidades porque se asume que la capacidad de trabajo o aporte individual a una actividad de cada persona es la misma (condición lógica del problema).

Para fijar mejor la idea vamos a resolver varios ejercicios con el cálculo inicial del precio unitario de un artículo, el aporte individual en una actividad o la fuerza de trabajo individual en una obra.

Ejercicio 2:

Cuatro (4) obreros hacen una obra en 12 días ¿En cuántos días la harían seis (6) obreros?

Solución :

Como nos estamos refiriendo a una obra que necesita la intervención de varios obreros, lo ideal será determinar primero el aporte que cada obrero hace a la misma ("aporte unitario en la construcción").

Situación conocida (Supuesto) :

4 obreros --------> 1 obra --------> 12 días

Si cuatro (4) hombres construyen una obra en 12 días quiere decir que cada día 4 hombres construirán 1/12 de la obra.

Entiéndalo bien: cada día hacen 1/12 parte de la obra y al cabo de 12 días la terminarán. Por ejemplo, si una casa la construyen en dos (2) días quiere decir que cada día harán la mitad (1/2); si la hacen en tres (3) días quiere decir que cada día harán un tercio (1/3), y así sucesivamente.

Ahora bien, este 1/12 representa el "aporte" de los 4 hombres cada día, para saber cuál es el aporte de cada hombre (aporte unitario) basta con dividir esta cantidad entre el número de hombres.

Esto significa que cada uno de los 4 hombres aportará un cuarto (1/4) de los 1/12 de obra:

$$(1/4).(1/12) = \mathbf{1/48} = \textbf{aporte individual diario}$$

Situación desconocida (Pregunta) :

6 obreros -------> 1 obra --------> X días

Hacemos un procedimiento similar al anterior:

Si 6 obreros hacen una obra en "X" días quiere decir que cada día 6 hombres harán 1/X de la obra.

Este 1/X representa el aporte de los 6 hombres cada día, entonces cada uno de los 6 obreros aportará un sexto (1/6) de los 1/X de obra:

$$(1/6).(1/X) = \mathbf{1/6X} = \textbf{aporte individual diario}$$

Como el aporte unitario diario es una cantidad fija, ***1/48*** *tiene que ser igual a* ***1/6X***

$$\frac{1}{48} = \frac{1}{6X} \quad ; \quad X = \frac{48}{6} \quad ; \quad X = 8$$

Este resultado nos indica que los ***Seis (6) obreros harán la obra en 8 días.***

Otro método de resolución :

Hemos dicho varias veces que lo importante para resolver un problema matemático es utilizar algo que ya forme parte de nuestros conocimientos y no tener que aprendernos más fórmulas o ecuaciones. Para reafirmar lo dicho anteriormente vamos a resolver el problema anterior con el enfoque que generalmente hace el "maestro de obra" o el Ingeniero Civil encargado de una obra.

Cuatro (4) obreros hacen una obra en 12 días ¿En cuántos días la harían seis (6) obreros?

Situación conocida (Supuesto) :

4 obreros --------> 1 obra --------> 12 días

Primero se calcula la "fuerza laboral" necesaria para construir dicha obra (días-hombres en este caso) :

4 hombres trabajando por 12 días = (4).(12) = 48 días-hombres

Se dice entonces que esta obra necesita una "fuerza laboral" de 48 días-hombres.

Si llamamos "f" a la fuerza laboral que necesita esta obra, "n" a la cantidad de obreros que laboran en su construcción y "d" a los días necesarios para realizarla, podemos construir la expresión matemática que relaciona todos estos valores:

$$f = n.d$$

Para calcular cualquier variable basta con reemplazar en la expresión anterior las cantidades conocidas.

Situación desconocida (Pregunta) :

6 obreros -------> 1 obra --------> X días

En el problema en cuestión conozco la fuerza laboral que necesita esta obra ("f" = 48 días-hombres) y los obreros disponibles ("n" = 6

hombres); solo se desconocen los días necesarios para su construcción ("d" = ?).

$$f = n.d \quad ; \quad 48 \text{ días-hombres} = (6 \text{ hombres}).\ d \quad ; \quad 48 = 6d$$

$$d = 48 / 6 \quad ; \quad d = 8 \text{ días}$$

Este resultado nos indica que los ***Seis (6) obreros harán la obra en 8 días.***

Ejercicio 3 :

Diez (10) hombres trabajando ocho (8) horas diarias construyen una casa en treinta (30) días. ¿En cuántos días podrán construir la misma casa trabajando seis horas (6) diarias los mismos 10 hombres?

Solución :

Como nos estamos refiriendo a una obra que necesita la intervención de varios obreros, lo ideal será determinar primero el aporte que cada obrero hace a la misma ("aporte unitario en la construcción").

Situación conocida (Supuesto) : Diez (10) hombres trabajando ocho (8) horas diarias construyen una casa en treinta (30) días.

10 hombres --------> 30 días --------> 8 horas --------> 1 casa

Si en 30 días hacen una casa, cada día harán 1/30 partes de la casa.

Como trabajan 8 horas diarias y cada día hacen 1/30 partes de la casa quiere decir que cada hora harán 1/8 de 1/30 = 1/240 partes de la casa.

Como los 10 hombres hacen 1/240 partes de la casa cada hora quiere decir que cada obrero hará 1/10 de 1/240 = 1/2400 partes de la casa cada hora.

1/2400 partes de la casa = Aporte individual por hora

Situación desconocida (Pregunta) : ¿En cuántos días podrán construir la misma casa trabajando seis horas (6) diarias los mismos 10 hombres?

10 hombres --------> X días --------> 6 horas --------> 1 casa

Si en X días hacen una casa, cada día harán 1/X partes de la casa.

Como trabajan 6 horas diarias y cada día hacen 1/X partes de la casa quiere decir que cada hora harán 1/6 de 1/X = 1/6X partes de la casa.

Como los 10 hombres hacen 1/6X partes de la casa cada hora quiere decir que cada obrero hará 1/10 de 1/6X = 1/60X partes de la casa cada hora.

1/60X partes de la casa = Aporte individual por hora

Como el aporte unitario diario es una cantidad fija, ***1/2400*** *tiene que ser igual a* ***1/60X***

$$\frac{1}{2400} = \frac{1}{60X} \quad ; \quad X = \frac{2400}{60} \quad ; \quad X = 40$$

Este resultado nos indica que ***Diez (10) hombres trabajando seis (6) horas diarias harán esa casa en cuarenta (40) días.***

Otro método de resolución :

Hemos dicho varias veces que lo importante para resolver un problema matemático es utilizar algo que ya forme parte de nuestros conocimientos y no tener que aprendernos más fórmulas o ecuaciones. Para reafirmar lo dicho anteriormente vamos a resolver el problema anterior con el enfoque que generalmente hace el "maestro de obra" o el Ingeniero Civil encargado de una obra.

Diez (10) hombres trabajando ocho (8) horas diarias construyen una casa en treinta (30) días. ¿En cuántos días podrán construir la misma casa trabajando seis horas (6) diarias los mismos 10 hombres?

Situación conocida (Supuesto) : Diez (10) hombres trabajando ocho (8) horas diarias construyen una casa en treinta (30) días.

10 hombres --------> 30 días --------> 8 horas --------> 1 casa

Primero se calculan las horas-hombres que son necesarias para construir la casa :

10 hombres trabajando por 30 días = (10).(30) = 300 días-hombres

Como cada día se trabajan 8 horas, multiplico esta cantidad por los días hombres trabajados y obtendré las horas-hombres.

(8).(300) = 2400 horas-hombres

Se dice entonces que esta obra necesita una "fuerza laboral" de 2400 horas-hombres.

Si llamamos "f" a la fuerza laboral que necesita esta obra, "n" a la cantidad de obreros que laboran en su construcción , "d" a los días trabajados y "h" a las horas trabajadas cada día, podemos construir la expresión matemática que relaciona todos estos valores.

$$f = n.d.h$$

Para calcular cualquier variable basta con reemplazar en la expresión anterior las cantidades conocidas.

Situación desconocida (Pregunta) : ¿En cuántos días podrán construir la misma casa trabajando seis horas (6) diarias los mismos 10 hombres?

10 hombres --------> X días --------> 6 horas --------> 1 casa

En el problema en cuestión conozco la fuerza laboral que necesita esta obra ("f" = 2400 horas-hombres), los obreros disponibles ("n" = 10 hombres), las horas trabajadas diariamente ("h" = 6 horas); solo se desconocen los días necesarios para su construcción ("d" = ?).

f = n.d.h ; *2400 horas-hombres = (10 hombres). d.(6 horas)*

2400 = (10).d.(6) ; 2400 = 60.d ; d = 2400/60 ; d = 40 días

Este resultado nos indica que ***Diez (10) hombres trabajando seis (6) horas diarias harán esa casa en cuarenta (40) días.***

Ejercicio 4 :

Si 3 hombres trabajan 8 horas diarias y terminan 80 metros de una obra en 10 días, ¿cuántos días necesitarán 5 hombres trabajando 6 horas diarias para hacer 60 metros?

Solución :

Como nos estamos refiriendo a una obra que necesita la intervención de varios obreros, lo ideal será determinar primero el aporte que cada obrero hace a la misma ("aporte unitario en la construcción").

Situación conocida (Supuesto) : Tres (3) hombres trabajando 8 horas diarias terminan 80 metros de una obra en 10 días.

3 hombres --------> 10 días --------> 8 horas --------> 80 metros

Si en 10 días se hacen 80 metros de una obra, cada día se harán 80/10=8 metros de obra.

Como trabajan 8 horas diarias y cada día hacen 8 metros de obra quiere decir que cada hora harán 8/8 = 1 metro de obra.

Como los 3 obreros hacen 1 metro de obra cada hora quiere decir que cada obrero hará 1/3 de metro de obra cada hora.

1/3 de metro de obra = Aporte individual por hora

Situación desconocida (Pregunta) : ¿Cuántos días necesitarán 5 hombres trabajando 6 horas diarias para hacer 60 metros?

5 hombres --------> X días --------> 6 horas --------> 60 metros

Si en "X" días hacen 60 metros de obra quiere decir que harán 60/X metros de obra cada día.

Como trabajan 6 horas diarias quiere decir que harán 1/6 de 60/X = 60/6X = 10/X metros de obra cada hora.

Como 5 hombres hacen 10/X metros de obra cada hora quiere decir que cada hombre hará 1/5 de 10/X = 10/5X = 2/X

2/X de metro de obra = Aporte individual por hora

Como el aporte unitario diario es una cantidad fija, ***1/3*** *tiene que ser igual a* ***2/X***

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{X} \quad ; \quad X = (2).(3) \quad ; \quad X = 6$$

Este resultado nos indica que ***Cinco (5) hombres trabajando seis (6) horas diarias harán una obra de sesenta (60) metros en seis (6) días.***

Ejercicio 5 :

A puede hacer una obra en 3 días y B en 6 días. ¿En cuánto tiempo pueden hacer la obra trabajando los dos juntos?.

Solución :

Volvemos a insistir que la mejor forma de resolver las situaciones donde se hable de construir una obra o realización de cualquier actividad, es enfocarnos en el aporte unitario o individual que cada persona u obrero hace a la obra o actividad.

Situación conocida (Supuesto) :En este caso podemos decir que si "A" puede hacer una obra en 3 días, diariamente hará 1/3 de la obra.

De la misma forma podemos decir que si "B" puede hacer una obra en 6 días, diariamente hará 1/6 de la obra.

Queda entendido, que si los dos trabajan juntos, la fuerza de trabajo total cada día será la suma de sus aportes (1/3 + 1/6).

Situación desconocida (Pregunta) : ¿En cuánto tiempo pueden hacer la obra trabajando los dos juntos?.

Si trabajando juntos hacen la obra en X días, quiere decir que diariamente harán 1/X.

Como el aporte unitario diario es una cantidad fija, ***(1/3 + 1/6)*** *tiene que ser igual a* ***1/X***

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{X} \quad ; \quad X = 2$$

A y B trabajando juntos pueden hacer la obra en dos (2) días.

Ejercicio 6 :

Una llave puede llenar un depósito en 10 minutos y otra en 20 minutos. ¿En cuánto tiempo pueden llenar el depósito las dos juntas?.

Solución :

Una llave puede llenar un depósito en 10 minutos: En un minuto llenará 1/10 del depósito.

La otra llave puede llenar el tanque en 20 minutos: En un minuto llenará 1/20 del depósito.

Si en X minutos las dos llaves juntas pueden llenar el depósito, en 1 minuto llenarán 1/X del depósito.

Las dos llaves juntas llenarán en un minuto (1/10+1/20) del depósito; pero como en un minuto las dos llaves abiertas llenarán 1/X del depósito, tendremos:

$$1/10 + 1/20 = 1/X$$

Despejando X en la ecuación:

$$X = 6{,}67$$

Las dos llaves juntas llenarán el depósito en 6,67 minutos (6 minutos y 2/3 de minuto o lo que es lo mismo: 6 minutos y 40 segundos).

Ejercicio 7 :

Una llave puede llenar un depósito en 5 minutos, otra en 10 minutos y un desagüe puede vaciarlo, estando lleno, en 20 minutos. Si tenemos el tanque vacío y abierto el desagüe y se abren las dos llaves. ¿En cuánto tiempo se llenaría el depósito?.

Solución :

Una llave puede llenar un depósito en 5 minutos: En un minuto llenará 1/5 del depósito.

La otra llave puede llenar el tanque en 10 minutos: En un minuto llenará 1/10 del depósito.

Un desagüe puede vaciarlo, estando lleno, en 20 minutos: En un minuto vaciará 1/20 del depósito.

Si asumimos que abriendo las dos llaves y el desagüe el depósito se llenará en X minutos, podemos decir que en 1 minuto se llenará 1/X del depósito.

Las dos llaves juntas llenarán en un minuto (1/5 + 1/10) y el desagüe vaciará del depósito en un minuto (-1/20); y como en un minuto llenarán 1/X del depósito, tendremos:

$$1/5 + 1/10 - 1/20 = 1/X$$

Despejando X en la ecuación:

$$X = 4$$

Si tenemos el depósito vacío y abierto el desagüe y se abren las dos llaves el depósito se llenará en 4 minutos.

Ejercicio 8 :

A y B trabajando juntos hacen una obra en 6 días. B solo puede hacerla en 10 días. ¿En cuánto tiempo puede hacerla A?.

Solución :

Antes de resolver este ejercicio se recomienda consultar el ejercicio 5 de este trabajo (página anterior) para facilitar su enfoque.

Si en 6 días los dos juntos hacen toda la obra, en 1 día harán 1/6 de la obra.

A *Puede hacer la obra en X días: En un día hace 1/X de la obra.*

B *solo puede hacer la misma obra en 10 días: En un día hace 1/10 de la obra.*

Los dos juntos harán en un día (1/X + 1/10) de la obra; pero como en un día los dos hacen 1/6 de la obra, tendremos:

$$1/X + 1/10 = 1/6$$

Despejando X en la ecuación:

$$X = 15$$

A trabajando solo puede hacer la obra en 15 días.

Ejercicio 9 :

Un grupo de 6 excursionistas van a acampar con provisiones para 30 días, pero en el viaje se les une un grupo de 4 personas que no llevan alimento. ¿Cuántos días podrían acampar ahora?

Solución :

Como nos estamos refiriendo al consumo de unas provisiones, lo ideal será determinar primero el "consumo individual o unitario" de cada excursionista (la redundancia se hace a propósito para fijar mejor la idea de unitario).

Situación conocida (Supuesto) : Un grupo de 6 excursionistas van a acampar con provisiones para 30 días.

6 excursionistas --------> 30 días --------> 1 lote de provisiones

Si en 30 días los 6 excursionistas consumen todas las provisiones, quiere decir que diariamente consumirán 1/30 partes de provisiones.

Como los 6 excursionistas consumen diariamente 1/30 de provisiones, quiere decir que cada excursionista consumirá 1/6 de 1/30 = 1/180 partes de provisiones por día.

1/180 partes de provisiones = Consumo individual por día

Situación desconocida (Pregunta) : En el viaje se les une un grupo de 4 personas que no llevan alimento. ¿Cuántos días podrían acampar ahora?

Al unirse 4 personas el número de excursionistas aumentará hasta 10 y el enunciado del problema será:

10 excursionistas --------> X días --------> 1 lote de provisiones

Si en X días los 10 excursionistas consumen todas las provisiones, quiere decir que diariamente consumirán 1/X partes de provisiones.

Como los 10 excursionistas consumen diariamente 1/X de provisiones, quiere decir que cada excursionista consumirá 1/10 de 1/X = 1/10X partes de provisiones por día.

1/10X partes de provisiones = Consumo individual por día

Como el consumo unitario diario es una cantidad fija (se asume que las raciones de comida serán iguales para cada excursionista), ***1/180*** *tiene que ser igual a* ***1/10X***

$$\frac{1}{180} = \frac{1}{10X} \quad ; \quad X = \frac{180}{10} \quad ; \quad X = 18$$

Este resultado nos indica que ***Diez (10) excursionistas consumirán esas provisiones en 18 días (se deduce que podrán acampar esos 18 días).***

Otro método de resolución :

Hemos dicho varias veces que lo importante para resolver un problema matemático es utilizar algo que ya forme parte de nuestros conocimientos y no tener que aprendernos más fórmulas o ecuaciones. Para reafirmar lo dicho anteriormente vamos a resolver el problema anterior con el enfoque que haría la persona responsable de "administrar" los alimentos al grupo de excursionistas.

Situación conocida (Supuesto) : Un grupo de 6 excursionistas van a acampar con provisiones para 30 días.

Para garantizar que las provisiones "alcancen" para los 30 días resulta lógico pensar que pudiesen dividirse en "raciones" para darle una diaria a cada persona.

Si son 6 excursionistas que van a acampar 30 días se debe contar con 180 "raciones". (raciones totales = 6 raciones diarias por 30 días = 180).

"Raciones" de comida para cada persona por día = 180

Situación desconocida (Pregunta) : En el viaje se les une un grupo de 4 personas que no llevan alimento. ¿Cuántos días podrían acampar ahora?

Al unirse 4 personas el número de excursionistas aumentará hasta 10.

Si contamos con 180 "raciones" de comida para cada persona por día y tengo que suministrar 10 raciones diarias (10 excursionistas), es fácil concluir que las mismas me "alcanzarán" para 18 días.

$$180 \div 10 = 18$$

Este resultado nos indica que ***Diez (10) excursionistas consumirán esas provisiones en 18 días (se deduce que podrán acampar esos 18 días).***

Ejercicio 10 :

Si 4 ascensores consumen 40 Kw. de corriente para transportar 600 Kg cada uno a 8 m de altura. ¿Cuántos Kw. de corriente se necesitarán para que 6 ascensores puedan elevar 200 Kg. de peso cada uno a 5 m de altura?

Solución :

Como nos estamos refiriendo al consumo de corriente de unos ascensores y se nos habla de los kg que transporta y los metros que se eleva, es recomendable determinar el consumo unitario por cada kg que transporta y cada metro que se eleva (la redundancia se hace a propósito para fijar mejor la idea de unitario).

Situación conocida (Supuesto) : 4 ascensores consumen 40 Kw. de corriente para transportar 600 Kg cada uno a 8 m de altura.

4 ascensores --------> 40 kw --------> 600 kg --------> 8 m

Si 4 ascensores consumen 40 kw, quiere decir que cada uno consumirá 40/4 = 10 Kw.

Como cada ascensor consume 10 kw para transportar 600 kg, quiere decir que por cada kg transportado consume 1/600 de 10 = 10/600 = 1/60.

Como cada ascensor consume 1/60 kw para transportar cada kg en 8 metros de altura, quiere decir que cada metro consumirá 1/8 de 1/60 = 1/480.

1/480 kw = Consumo individual por cada kg y por cada metro

Una vez calculado el consumo individual (de cada ascensor) en kw por cada kg transportado y por cada metro elevado, podemos utilizar cualquier método para llegar a la solución del problema planteado:

- ✓ *Podemos enfocarlo como se hizo en los ejercicios 2, 3, 4 y 9.*
- ✓ *Podemos enfocarlo como se hizo en el "otro método de resolución" de los ejercicios 2 y 3.*
- ✓ *Podemos enfocarlo como se hizo en el ejercicio 1.*

Lo importante no es el método utilizado, lo importante es utilizar aquel con el que estemos más familiarizado y que nos de la seguridad de que lo estamos haciendo bien.

Lo más común es que si conocemos el consumo unitario de "algo", el consumo total será el resultado de multiplicar ese valor unitario por la cantidad que vamos a utilizar.

Situación desconocida (Pregunta) : ¿Cuántos Kw. de corriente se necesitarán para que 6 ascensores puedan elevar 200 Kg. de peso cada uno a 5 m de altura?.

Si ya conocemos que el ***Consumo individual por cada kg y por cada metro = 1/480 kw***

El consumo total en la "situación desconocida" será igual a 1/480 multiplicado por los ascensores que se van a utilizar (6), por los kilogramos a transportar (200 kg) y por los metros a que se van a elevar (5 m)

Consumo total = (1/480).(6).(200).(5) = 12,50 kw

Lo que significa que *6 ascensores para elevar 200 kg de peso cada uno a 5 metros de altura necesitarán 12,50 kw.*

INDICE

I N D I C E

Pág.

ÁLGEBRA 1
EXPRESIÓN ALGEBRAICA 1
TÉRMINO 1
Términos semejantes 2
Reducción de términos semejantes 2
MONOMIO 4
POLINOMIO 4
Suma de polinomios 4
Resta de polinomios 6
Signos de agrupación 7
MULTIPLICACIÓN 10
Leyes de los signos, de los exponentes y de los coeficientes 10
Multiplicación de monomios 11
Multiplicación de polinomios por monomios 12
Multiplicación de Polinomios 14
Producto continuado de polinomios 19
Multiplicación combinada con suma y resta 21
Supresión de signos de agrupación con productos indicados 22
DIVISIÓN 23
Leyes de los signos, de los exponentes y de los coeficientes 23
División de dos monomios 24
División de un polinomio por un monomio 25
División de dos polinomios 26
División de dos polinomios utilizando la regla de Ruffini 32
PRODUCTOS NOTABLES 35
Cuadrado de la suma de dos cantidades 35
Cuadrado de la diferencia de dos cantidades 35
Producto de la suma por la diferencia de dos cantidades 36
Cubo de un binomio 37
Producto de dos binomios de la forma $(X + a).(X + b)$ 37
ECUACIONES DE PRIMER GRADO 38
Raíces o soluciones 39
Axioma fundamental de las ecuaciones 39
Transposición de términos 40
Resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita 40
Resolución de ecuaciones con signos de agrupación 42
Resolución de ecuaciones con productos indicados 44
Resolución de ecuaciones literales 46
Resolución de ecuaciones fraccionarias 46
ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO 48
Raíces de una ecuación de segundo grado 48
Fórmula para resolver una ecuación de segundo grado 48
Descomposición Factorial (FACTORIZACIÓN) 51
Factorizar Un monomio 51
FACTORIZAR UN POLINOMIO 51
Cuando todos los términos tienen un factor común 51
Factor común por agrupación de términos 52
Trinomio cuadrado perfecto 55
Diferencia de cuadrados perfectos 56
Trinomio de la forma $X^2 + bX + c$ 56
Factorización utilizando la fórmula general de segundo grado 58
Factorización utilizando la Regla de Ruffini 60
Factorización parcial o cociente no factorizable 67
FUNCIONES 68
Constantes y variables 68
Cómo graficar una función conociendo su ecuación 69
Cómo graficar una recta 71
Gráficos de algunas funciones de segundo grado 75
SISTEMAS DE ECUACIONES 77
Método de igualación 77
Método de reducción (suma y resta) 80
Por determinantes 82
POTENCIACIÓN 84
Signo de las potencias 84

Potencia de un monomio 84
Potencia de un polinomio 85
Propiedades de la potenciación 85
Ejercicios 86
RADICACIÓN **89**
Radical o expresión radical 89
Signo de las raices 89
Raíz de un monomio 90
Radicales semejantes 91
Reducción de radicales 91
Introducción de cantidades bajo el signo radical 94
Reducción de radicales al mínimo común índice 95
Suma y resta de radicales 96
Multiplicación de radicales 99
Potenciación de radicales (potencia de una raíz) 103
Radicación de radicales (raíz de una raíz) 103
Expresiones conjugadas 104
Racionalización 104
Resolución de ecuaciones con radicales 107
REGLA DE TRES CON BASE UNITARIA **109**

El autor de este trabajo solicita su valiosa colaboración en el sentido de enviar cualquier sugerencia y/o recomendación a la siguiente dirección :

martilloatomico@gmail.com

Igualmente puede enviar cualquier ejercicio o problema que considere pueda ser incluido en el mismo.

Si en sus horas de estudio o práctica se encuentra con un problema que no pueda resolver, envíelo a la anterior dirección y se le enviará resuelto a la suya.