Trigonometría

- ✓ Ángulos
- ✓ S. coordenados
- ✓ Triángulos
- ✓ Funciones
- ✓ Triángulos rectángulos
- ✓ Triángulos oblicuángulos, acutángulos
- ✓ Ley de senos
- ✓ Ley de cosenos
- ✓ Casos y soluciones
- ✓ Tabla fórmulas
- ✓ Tablas logarítmicas

Apuntes elaborados por el Ing. Pedro Ramos Valdés C.

TRIGONOMETRÍA
CONTENIDO

TRIGONOMETRÍA

	Tema.	**Pág.**
1	Conceptos y definiciones.	***3***
2	Ángulos. Grados. Arcos. Radianes	***4***
3	Polígonos y circunferencia.	***5***
4	Sistemas coordenados. Rectangulares. Polares.	***6***
5	Triángulos. Definición. Clasificación.	***7***
6	Círculo trigonométrico (unitario)	***12***
7	Funciones trigonométricas.	***10***
8	Valores exactos de funciones trigonométricas para ángulos de 30°, 45° y 60°	***13***
9	Identidades fundamentales, recíprocas, cocientes, pitagóricas	***15***
10	Triángulos rectángulos. Casos y soluciones	***16***
11	Triángulos acutángulos y oblicuángulos	***18***
12	Ley de senos	***18***
13	Ley de cósenos	***19***
14	Casos y solución. “L L L”, “A L A”, “L A L”	***20***
15	Aplicaciones. Área del triángulo	***21***
16	Ángulos adyacentes. Funciones seno, coseno, tangente y cotangente.	***22***
17	Función seno, suma de dos ángulos	***22***
18	Función coseno, suma de dos ángulos	***22***
19	Función tangente, suma de dos ángulos	***23***
20	Función cotangente suma de dos ángulos	***23***
21	Ejemplo de aplicación	***23***
22	Función seno diferencia de dos ángulos	***24***
23	Función coseno diferencia de dos ángulos	***24***
24	Función tangente diferencia de dos ángulos	***24***
25	Función cotangente diferencia de dos ángulos	***24***
26	Ejemplo de aplicación	***24***
27	Función seno de ángulo doble	***25***
28	Función coseno de ángulo doble	***25***
29	Función tangente de ángulo doble	***25***
30	Función cotangente de ángulo doble	***25***
31	Ejemplo de aplicación	***25***
32	Función seno en función del semiángulo	***26***
33	Función coseno en función del semiángulo	***26***
34	Función tangente en función del semiángulo	***26***
35	Ejemplo de aplicación	***27***
36	Función seno de un semiángulo, a partir del coseno del doble del ángulo	***28***
37	Función coseno de un semiángulo, a partir del ángulo coseno del doble del ángulo.	***28***
38	Función tangente de un semiángulo, a partir del ángulo coseno del doble del ángulo	***28***
39	Función tangente de un semiángulo, a partir del ángulo coseno del doble del ángulo	***27***
40	Ejemplo de aplicación	***28***
41	Transformación de suma de senos de ángulos, en productos.	***29***
42	Transformación de diferencia senos de ángulos, en productos.	***29***
43	Transformación de suma de cosenos de ángulos, en productos.	***29***
44	Transformación de diferencia de cosenos de ángulos, en productos.	***30***
45	Transformación de suma de tangentes de ángulos, en productos.	***30***
46	Transformación de diferencia de tangentes de ángulos, en productos. Ejemplo de aplicación	***30***
47	Ecuaciones trigonométricas	***31***
48	**Tabla de fórmulas de trigonometría**	***34***
49	**Tablas de logaritmos**	***37***
50	**Vínculos con archivos relacionados.**	***46***
51	**Índice**	***46***
	Última modificación: 20/05/03 11:05 AM	

	Última apertura controlada: 11/05/03 11:16 AM Sin control 22/07/10 10:17 a.m.	

"Sonido"

CONCEPTOS Y DEFINICIONES.

Ángulo agudo.	Es el menor que el recto, y que sus límites son de 0° a 90°; o de 0 a ½ π radián.
Ángulo cóncavo.	Es mayor que un llano, pero menor que 360°.
Ángulo convexo.	Es menor que el llano, pero mayor que 0°.
Ángulo de revolución (Perígono).	Es el generado al girar una recta sobre un punto, y dar más de una vuelta. Mide más de 360° o 2 π radianes.
Ángulo llano.	Es el formado por un solo lado, se dice también que sus lados son colineales; y que mide 180° o π radianes.
Ángulo obtuso.	Es mayor que el recto, y que sus límites son de 90° a 180°, o de ½ a π radián.
Ángulo recto.	Es el formado por los lados perpendiculares, y que mide 90° o ½ π radián.
Ángulo.	Es el espacio comprendido entre dos rectas que se cortan, o el generado al girar sobre uno de sus extremos. El punto sobre el que gira, o aquel en el que se cortan se llama vértice. Y las rectas que lo limitan lados.
Ángulos adyacentes.	Son los que tienen un lado común.
Ángulos complementarios.	Son los adyacentes o al sumarse, equivalen a un recto o 90°.
Ángulos opuestos por el vértice.	Son los que tienen el vértice común, sus lados son unos la prolongación de los otros, por lo que también son adyacentes, y equivalen a uno de revolución o 360°.
Ángulos suplementarios.	Son los adyacentes, o los que al sumarse equivalen a un llano o 180°. Las funciones trigonométricas de estos ángulos son equivalentes.
Axioma.	Es toda proposición verdadera que por evidente, no necesita demostrarse, por lo es aceptada.
Congruencia.	Decimos que dos figuras son congruentes cuando tienen la misma forma, disposición y tamaño. O que al colocarse una sobre la otra coinciden todos sus puntos.
Convergentes y divergentes.	Son aquellas que no son paralelas. Al aproximarse se llaman convergentes, al separarse divergentes. Todas las rectas "no" paralelas son convergentes en uno de los extremos, y divergentes en el opuesto.
Corolario.	Es la proposición que por extensión se fundamenta en la demostración de un teorema, o en la aplicación de un axioma.
Demostración.	Es el procedimiento que por razonamientos, y basado en principios básicos aceptados convencen sin lugar a dudas, de la verdad o error de una proposición.
Escolio.	Es toda referencia a lo demostrado en un teorema.
Lados o partes homólogas.	Son aquellos que ocupan la misma posición y arreglo, en las figuras congruentes.
Lema.	Proposición que sirve como base para el enunciado de un teorema.
Línea.	Es una sucesión de puntos, limitados a una sola dimensión, la longitud. Si siguen la misma dirección pertenecen a una recta. Si no siguen la misma dirección pertenecen a una curva.
Medir.	Consiste en comparar elementos de la misma especie, tomando a uno de ellos como unidad o patrón. El que debe tener propiedades y características definidas, fijas y de aceptación universal.
Oblicuas.	Son las rectas que al caer una sobre otra esta, se inclina hacia cualquiera de los extremos de la que cae.

Paralelas.	Son dos o más rectas que se encuentran en el mismo plano no tienen ningún punto en común.
Perpendicular.	Son aquellas rectas que al caer una sobre otra los ángulos adyacentes formados son iguales, es decir estas no se inclinan hacia ningún lado.
Plano.	Es la superficie generada por una línea al desplazarse. O también el espacio comprendido entre dos líneas.
Postulado.	Es una proposición verdadera, pero no evidente aunque no necesita demostrase.
Problema.	Proposición en la que se pide encontrar una respuesta o solución, basándonos en conocimientos fundamentales, y la información conocida.
Punto.	En el espacio es una referencia mediante tres distancias conocidas, o distancias y direcciones; que nos determina una posición.
Razón o relación.	Es el resultado o cociente numérico, de comparar una cantidad con otra de su misma especie. Expresada en forma decimal, o de quebrado.
Segmento de recta.	Es la parte de recta limitada por dos puntos definidos.
Superficie.	Parte del espacio limitado por dos dimensiones, y definido por lo menos tres puntos no consecutivos, pertenecientes a dicho espacio.
Teorema.	Es toda proposición que necesariamente debe ser demostrada. Consta de hipótesis que es el enunciado de los elementos en que se basa la suposición. Y la tesis que es lo que se quiere demostrar.

TRIGONOMETRÍA.

1 Definición.- Es la parte de la matemática que estudia los elementos, que configuran los triángulos; y la relación entre ellos; para la determinación de sus medidas, a partir de la clasificación, bases, axiomas, teoremas, y postulados hechos por la geometría, así su como la aplicación para las diferentes ciencias. Dado que los triángulos están formados por tres líneas (lados) que se cortan entre sí (para formar la figura plana, cerrada, más simple.), formando en la intersección de ellas (vértices) espacios llamados ángulos (interiores, y exteriores), por lo que para determinar dichas figuras es necesario saber sus dimensiones, y poder clasificar los triángulos, aplicando los métodos necesarios para su medición.

2 **Ángulos, grados, arcos y radianes.-** Los ángulos se pueden medir en grados en el sistema sexagesimal, en el que se considera la apertura entre la posición inicial y la final; de un segmento de recta, que gira sobre uno de sus extremos. De manera que al efectuarse un giro completo el espacio generado equivale a 360º, teniendo como submúltiplos 60’ (minutos); y estos a los segundos 60”.

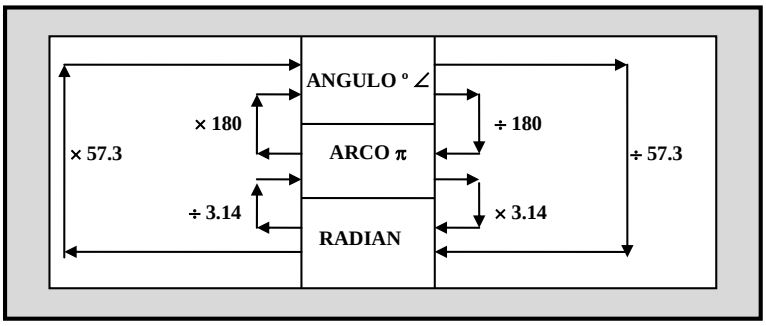
Comentario [PRVC1]: Consta de grados, minutos y segundos. Divididos en 60 partes

a) Los ángulos también se pueden medir, por la longitud del arco **“*s*”**, que es la parte de circunferencia comprendida entre los extremos de la línea que gira (radio). Para ello aplicamos la fórmula

correspondiente a la longitud de la circunferencia y que es **"** $\boldsymbol{c = 2\pi \times r \times \frac{n}{360} = \pi \times r \times \frac{n}{180}}$ **"**. Haciendo el radio r = 1, mediante una regla de tres se determina que sí 360º equivalen a 2π , la longitud "***s***" del arco de "**n**" grados serían $\boldsymbol{s = \frac{n}{180} \times \pi}$, por lo que para convertir grados a longitud de arco en función de $\boldsymbol{\pi}$, basta dividir el número de grados entre 180, y el cociente es factor de $\boldsymbol{\pi}$. Cuando la circunferencia tiene un radio diferente de "uno", el resultado se multiplica por **"*r*"**. Si no se requiere expresar la longitud como factor de **"$\boldsymbol{\pi}$"**, multiplicar el resultado por el equivalente numérico de este (3.1416) Y para convertir arcos a grados se multiplica la longitud del arco por 180. Ej. ¿Cuál es el arco de 105º ? R = 105/180= **0.58** π. Convertir el arco 1.14π, a grados. R = 1.14 × 180 = **205.2º.**

b) Se define la unidad ***"radian"***, como la medida del ángulo en que la longitud del arco es igual, a la del radio. Como 360º describen un arco (circunferencia), que su longitud es 2 π r, en una circunferencia unitaria (radio =1); 360º= 2 π = 2 × 3.1416 = **6.28** radianes; y mediante una regla de tres se determina que **1 radian ≈ 57.3º** y su inverso; **1º = 0.017 radianes.** Ej. Convertir 202º a radianes: **202 ÷57.3 = 3.53 radianes.** Convertir 2.25 radianes a grados: **2.25 × 57.3= 128.93º**

Diagrama 1 De Conversiones:



3 **<u>Polígonos y circunferencia</u>.-** Considerando que todo conjunto de puntos constituyen una figura, sus formas fundamentales son la recta y el plano. Y la relación entre estos son estudiados por la geometría, manifestándose por medio de axiomas, enunciados, postulados, hipótesis, teoremas, etc.

Definiéndose la línea recta como la figura formada por un conjunto de puntos que siguen la misma dirección, expresamos entre las primeras relaciones; la que se refiere al espacio de plano comprendido entre dos de ellas que tienen un punto en común (vértice), y que conocemos con el nombre de ángulo. Otra relación es la que se refiere al plano definido entre mínimo tres rectas (lados), que tienen un punto en común diferente (vértices), consideradas en pares; y que a este conjunto de rectas le llamamos polígono. Dentro de estas figuras la más simple es el triángulo, y la formada por un número infinito de ellas circunferencia. En estos apuntes consideraremos primordialmente la primera, y solo trataremos algunos conceptos de la segunda, que tengan que ver con los valores de los ángulos, sus equivalencias y mediciones. A continuación se condensan estas, mediante una tabla.

CLASES DE ÁNGULOS DE ACUERDO CON SU POSICIÓN EN LA CIRCUNFERENCIA

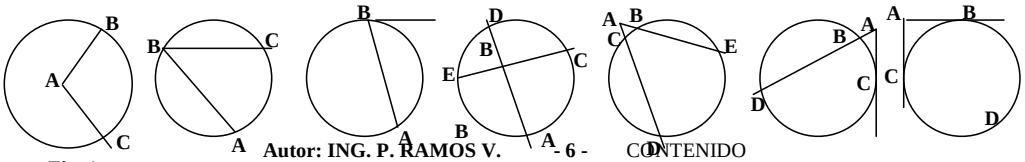


Fig. 1 **Fig. 2** **Fig. 3** **Fig. 4** **Fig. 5** **Fig. 6** **Fig. 7**

VÉRTICE	CLASE	FIGURA	FÓRMULA	VALOR
Centro	Central	Fig. 1	**∠ A = BC**	Arco BC
Circunferencia	Inscrito	Fig. 2	**∠ B = ½ AC**	Mitad arco AC
Circunferencia	Semi-inscrito	Fig. 3	**∠ B = ½ AB**	Mitad arco AC
Interior	Interior	Fig. 4	**∠B = ½ (AC +ED)**	Semi suma de arcos
Fuera	Dos secantes	Fig. 5	**∠A = ½ (DE –BC)**	Semi diferencia de arcos
Fuera	Secante y tangente	Fig. 6	**∠A = ½ (BC –DC)**	Semi diferencia de arcos
Fuera	Dos tangentes	Fig. 7	**∠A = ½ (BDC –BC)**	Semi diferencia de arcos

Comentario [PRVC2]: Punto en el que se cortan dos rectas

Comentario [PRVC3]: De acuerdo a la posición del vértice

Comentario [PRVC4]: Las letras indican vértice en el cruce de dos líneas. O punto de contacto con la circunferencia.

a) Ejemplos.

1) Cuanto vale el ángulo central **"A"** de una circunferencia de radio 1, si el arco **"BC"** mide 1.8π radianes? Dar la respuesta en grados.

R: **∠ A = 1.8π radianes =** $1.8\pi \times 57.3 = 1.8 \times 3.14 \times 57.3 = 324.02°$

2) El arco de un ángulo inscrito mide "¾ **π**" radianes. Cuanto vale en grados el **∠ B**?

R: $\angle B = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}\pi = \frac{3}{8} \times 180 = 67.5°$

3) En un **∠ B** interior sus arcos opuestos miden 0.9π, y 1.25π radianes respectivamente. Cuál es el valor en radianes, y grados; de dicho ángulo?

R: $\angle B = \frac{1}{2}(0.9 + 1.25)\pi = 1.08\pi \times 180 = 194.4°$

4) El arco mayor de ∠ A exterior mide ½ p radianes, y el arco menor 0.16p. Cuál es la medida de el expresada en grados?

R: $\angle A = \frac{1}{2} \times (\frac{1}{2} - 0.16)\pi = 0.17\pi \times 180 = 30.6°$

4 **<u>Sistemas coordenados</u>**.- Para poder determinar la posición de un punto, un objeto, una figura, etc. en un plano, o en el espacio debemos referirnos siempre a posiciones conocidas, de manera que cualquiera pueda saber con exactitud su localización; mediante la medición de distancias (líneas rectas), direcciones (ángulos), o la combinación de ambas. De esta referencia se emplean dos sistemas, coordenados rectangulares o Cartesianos, y polares. **Conversiones, R → P, y P → R**.- Para convertir del sistema rectangular al polar, o viceversa lo podemos efectuar de manera analítica, o mecánica.

a) Coordenadas rectangulares.- Consisten en el empleo de coordenadas (distancias), a un punto fijo (origen), y a líneas fijas imaginarias (ejes), perpendiculares entre sí que dividen todo plano o espacio, en cuadrantes. Llamándose las líneas conocidas, eje horizontal, abscisas, "x", considerándose positivas hacia la derecha; y eje vertical, ordenadas, "y", siendo positivas hacia arriba; y al punto donde se cruzan ambas origen. Situados en un sistema bidimensional (plano), si es un sistema tridimensional (espacio), se usa un 3er. eje perpendicular a los anteriores, eje "z". Y mediante las perpendiculares "x", e "y" (distancias), bajadas a los ejes se determina la posición. Esto se puede hacer de manera gráfica, y/o analítica.

b) ***<u>Método gráfico</u>***: Se trazan dos líneas perpendiculares mediante escuadras, o por medio de regla y compás. Después sobre cada eje se miden las distancias correspondientes a partir del origen, si las medidas son pequeñas se usan las dimensiones normales, si son grandes se emplean escalas, levantándose perpendiculares en dichas distancias, y el punto donde se corten, es la posición buscada, formándose un rectángulo. Cuando se conoce la diagonal del rectángulo, se trabaja con regla y compás,

abriendo el compás con la medida correspondiente a la diagonal (natural, o a escala), y haciendo centro en el origen, se traza un arco; después con la medida de la coordenada conocida, se abre el compás traza un arco hasta cruzar su eje, y a partir de este punto se levanta una perpendicular para encontrar el arco de la diagonal, siendo este el punto de posición y determinándose el valor de la otra coordenada.

c) ***Método analítico***: Basándonos en el teorema de Pitágoras, conocidas las coordenadas (catetos),se calcula la diagonal (hipotenusa) $\mathbf{d^2 = x^2 + y^2}$. Si se conoce la diagonal y una de las coordenadas, de la misma fórmula se despeja la coordenada desconocida, y se resuelve.

d) Coordenadas Polares.- En este sistema se determina la posición mediante el empleo de la distancia al origen **" r "**, y la dirección **"∠"** (ángulo) respecto a uno de los ejes, por costumbre se emplea el positivo de las **"x".**

e) Método para conversiones.

1) Rectangulares a polares:

(1) ***Método analítico***: Se emplea para convertir de un sistema a otro, las fórmulas correspondientes al teorema de Pitágoras, o las funciones trigonométricas. Dados las coordenadas, **"x"** e **"y"**, encontrar el radio "r", y la dirección **"∠"** ángulo.

a) Mediante el teorema de Pitágoras, calculamos el radio r = hipotenusa. $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

b) Ejemplo. x = –7; y = 5: $r = \sqrt{(-7)^2 + (5)^2} = \sqrt{49 + 25} = \sqrt{74} = 8.6$

c) Se divide **"y" ÷ "x"**, y el cociente se calcula la tangente inversa, para darnos el valor del ángulo (dirección).

d) Ejemplo. ∠ = 5 ÷ –7 = – 0.7143; Tan $^{-1}$ = – 35º32'15". Se convierte a ∠ positivo: 180º - 35º32'15" = 144º27'45"

(2) ***Método mecánico.***

Se usa la calculadora para hacer la conversión; usando la secuencia siguiente. **Modo Deg ⇒ x (valor) –7 ⇒ Shift ⇒ R → P (+)⇒ y(valor) 5⇒ = aparece el valor de "r" (8.60)⇒ Shift ⇒ x ↔ y ⇒ aparece el valor del "∠" 114.4625 Shift ⇒ º ' " aparece el valor angular 144º27'15"". Ejemplo: Usando la secuencia dada, con los valores del inciso anterior.**

2) Polares a rectangulares:

(1) ***Método analítico***:

a) Se calcula "x" e "y" aplicando las funciones "seno" y "coseno", puesto que la hipotenusa es el radio (r), y el ∠ es el opuesto a la ordenada.

Ejemplo. "r"=24; "∠"= 37º12'25"

b) Se calcula la ordenada **"y = r × Seno ∠".y = 24 × Seno 37º12'25" = 24 × 0.6047 = 14.51**

c) Se calcula la absisa **"x = r × Coseno ∠": x = 24 × Coseno 37º12'25" = 24 × 0.7965 = 19.12**

(2) ***Método mecánico***: Se usa la calculadora para hacer la conversión; usando la secuencia siguiente. **Modo Deg., ⇒ r (valor) 24⇒ Shift ⇒ P → R (–) ⇒ ∠ (valor) 37 º'" ⇒ 12 º'" ⇒ 25 º'" ⇒ = aparece el valor de "x" (19.11) ⇒ Shift ⇒ x ↔ y aparece el valor de "y" (14.51). Ejemplo. usar la secuencia dada, con los valores del inciso anterior.**

5 Triángulos.- Triángulo es la figura plana cerrada más simple, que consta de tres lados, formando tres ángulos uno en cada intersección de ellos. Es el polígono que tiene mayor importancia, debido a que cualquier otro sea regular o irregular; los podemos descomponer en triángulos para determinar su superficie, y otras dimensiones; a este método le llamamos triangulación. Y de esta manera resolver muchos problemas.

Los triángulos se pueden clasificar por la longitud de sus lados, y por la apertura de sus ángulos.

a) Por sus lados los triángulos son:

1) Equiláteros cuando tienen sus lados iguales.
2) Isósceles si tienen 2 lados iguales.
3) Escaleno todos sus lados son diferentes.

b) Por los ángulos son:

1) Acutángulos, si tienen todos los ángulos agudos.
2) Rectángulos cuando uno de sus ángulos es recto.
3) Obtusángulos si tienen un ángulo obtuso.

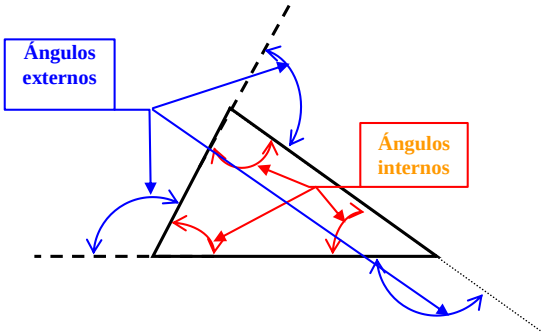
c) Propiedades, teoremas y corolarios:

1) Existe una relación directa entre el tamaño de los lados, y los ángulos opuestos, de manera que a mayor lado, se opone mayor ángulo; y viceversa.
2) Teorema.- La suma de los ángulos interiores de todo triángulo son 180º.
3) Corolario.- Los ángulos agudos de un triángulo rectángulo suman 90°.
4) Teorema.- Los ángulos externos de todo triángulo equivalen a cuatro rectos, o 360°.
5) Teorema.- Todo ángulo externo equivale a dos internos no adyacentes.
6) Dos o más triángulos son semejantes, cuando todos sus ángulos son iguales.
7) Los triángulos semejantes tienen sus lados homólogos (correspondientes) proporcionales, es decir al dividir la longitud de ellos (los correspondientes), tienen el mismo cociente. (Ver definiciones en la página 3, y razones y proporciones en Álgebra en la página 46)

Comentario [PRVC5]: Son de la misma clase, pero de diferente tamaño.

Comentario [PRVC6]: Es decir el lado (a) del triángulo mayor, es el homólogo del lado (a') del triángulo menor.

Comentario [PRVC7]: Es el resultado de la división.



Líneas principales y puntos notables. Definiciones.

Altura.- Línea perpendicular que baja del vértice al lado opuesto. En los triángulo obtusángulo, las alturas de los vértices adyacentes caen sobre la prolongación del lado mayor, fuera del triángulo. Figura 4.

Bisectriz.- Linea que partiendo del vértice, divide al ángulo en dos partes iguales. Figura 2.

Mediana.- Líneas que van de un vértice a la mitad del lado opuesto. Figura 1.

Mediatriz.- Línea perpendicular que se levanta en el punto medio del lado. Figura 3.

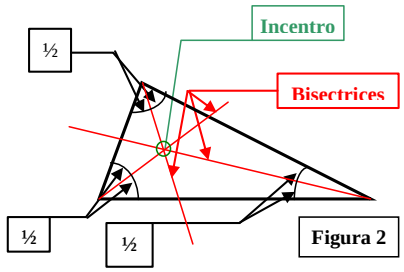
Recta de Euler.- Línea que pasa por el baricentro, ortocentro y circuncentro.

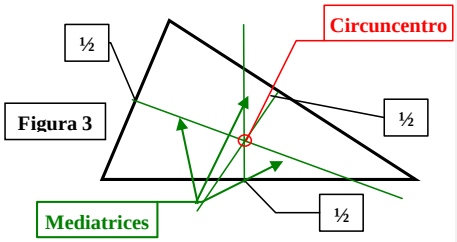
Baricentro.- Es el punto donde se cortan las medianas, y es donde sitúa el centro de gravedad del triángulo. Fig. 1.

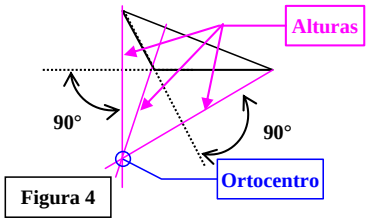
Circuncentro.- Es el punto donde se interceptan las mediatrices, y es el centro del círculo que inscribe al triángulo. Figura 3.

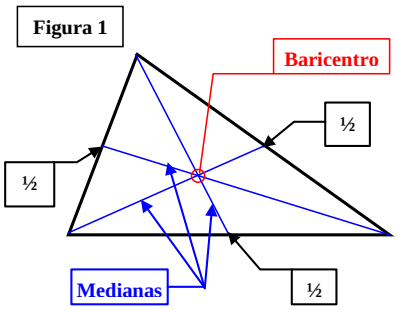
Incentro.- Punto de intersección de las bisectrices, y donde recae el centro del círculo inscrito en el triángulo. Fig. 2.

Ortocentro.- Punto de intersección de las alturas del triángulo. Figura 4.









Polígonos, definición, elementos y propiedades.

Las figuras planas cerradas formadas por más de tres rectas, se llaman polígonos.

Los elementos (Ver figura 1) son:

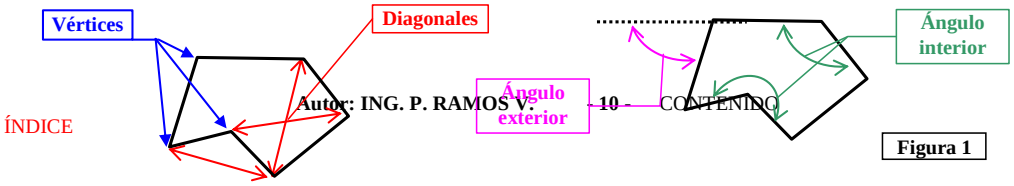
a) Lados.- Son las rectas que limitan el espacio comprendido entre ellas, del resto del plano que las contienen.

b) Vértices.- Es el punto de intersección de dos lados.

c) Diagonal.- Son las rectas que unen dos vértices no consecutivos, o adyacentes.

d) Ángulos interiores.- Son formados por dos lados consecutivos y que tienen su vértice hacia el espacio externo del polígono.

e) Ángulos exteriores.- Son los adyacentes a los internos que se forman al prolongar uno de los lados, y que están en espacio fuera del limitado por el polígono.



Los polígonos según sus lados y sus ángulos se pueden clasificar (Figura 2)en:

a) Equilátero.- El que sus lados están formado por rectas iguales.

b) Equiángulo.- Cuando todos sus ángulos son iguales.

c) Convexo.- Cuando ningún vértice del ángulo formado por dos de sus lados está dirigido hacia adentro.

d) Cóncavo.- Cuando al menos uno de sus ángulos tiene su vértice dirigido hacia adentro.

e) Regular.- Es el que tiene sus lados y sus ángulos iguales, o es equilátero y equiángulo.

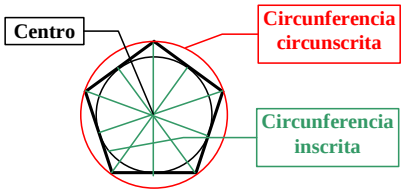
En los polígonos regulares se identifican los siguientes elementos adicionales:

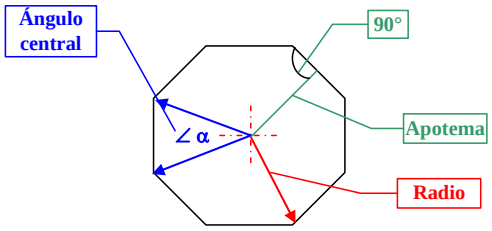
a) Centro.- Punto de intersección de las líneas que van de cada vértice a la mitad del lado opuesto. Y es el centro de las circunferencias inscrita, y la circunscrita.

b) Radio.- Toda línea que va de un vértice al centro. Y es igual al radio de la circunferencia circunscrita.

c) Ángulo central.- El formado por dos radios consecutivos.

d) Apotema.- Es la perpendicular bajada del centro a un lado. Y es igual al radio de la circunferencia inscrita.





Propiedades de los polígonos de ***"n"*** lados.

1 Medida del ángulo central ***"α"***.- $\angle\alpha = 360° \div n$

2 Medida de cada ángulo interno ***"ι"***.- $\angle\iota = 180° \times (n-2) \div n$

3 Suma de los ángulos internos ***"Σι"***.- $\Sigma\iota = 180° \times (n-2)$

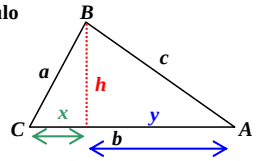
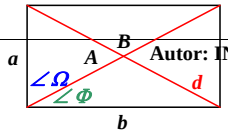
4 Medida de cada ángulo externo ***"ε"***.- $\varepsilon = 360° \div n$

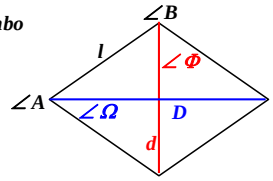
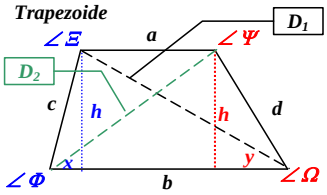
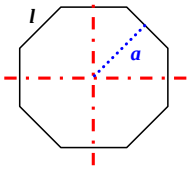
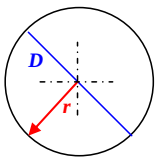
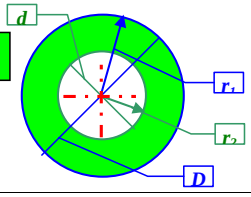
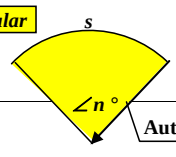
5 Suma delos ángulos externos ***"Σε"***.- $\Sigma\varepsilon = 360°$

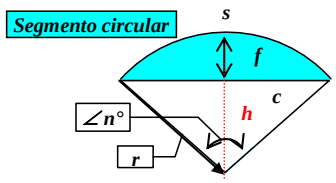
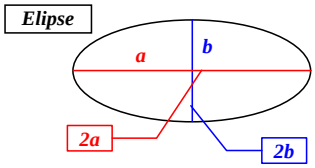
6 Número de diagonales de cada vértice ***"δ"***.- $\delta = (n-3)$

7 Total de diagonales ***"Tδ"***.- $T\delta = n \times (n-3) \div 2$

Tabla de fórmulas de polígonos.

Figura	**Elementos, perímetro y área.**	
Triángulo 	$b = x + y$; $x = a \times Cos\,C$; $y = c \times Cos\,A$ $h = a \times Sen\,C$; $h = c \times Sen\,A$ **Ángulos:** $A + B + C = 180°$ $p = a + b + c$ **Semi perímetro:** $s = \frac{a+b+c}{2}$	$A = \frac{b \times h}{2}$ $A = \sqrt{s \times (s-a) \times (s-b) \times (s-c)}$ **Ver.- Ley de senos en la Pág. 18, Ley de cosenos en la Pág. 19. Hipervínculos.- Hoja de cálculo Pág. 46.**
Rectángulo 	$d = \sqrt{a^2 + b^2}$; $d = b \div Cos\Phi$; $d = a \div Cos\,\Omega$	$p = 2 \times (a + b)$ $A = a \times b$ **Ver.- Funciones 10**

	Ángulos: $\angle\Omega = \frac{b}{a} Tan^{-1}$; $\angle\Phi = \frac{a}{b} Tan^{-1}$ $\angle A = 180 - 2\Omega$; $\angle B = 180 - 2\Phi$	**Hipervínculos.- Hoja de cálculo Pág. 46.**
Rombo  	$l = \sqrt{D^2 + d^2}$ **Ángulos:** $\angle A = 2\Omega$; $\angle B = 2\Phi$ $\angle\Omega = \frac{d}{D} Tan^{-1}$; $\angle\Omega = \frac{d \div 2}{l} Sen^{-1}$ $\angle\Omega = \frac{D \div 2}{l} Cos^{-1}$; $\angle\Phi = \frac{D}{d} Tan^{-1}$ $\angle\Phi = \frac{D \div 2}{l} Sen^{-1}$; $\angle\Phi = \frac{d \div 2}{l} Cos^{-1}$	$p = 4 \times l = 4 \times \sqrt{D^2 + d^2}$ $A = \frac{D \times d}{2}$ **Ver.- Funciones 10** **Hipervínculos.- Hoja de cálculo Pág. 46.**
Trapezoide  	$\angle\Phi = \frac{h}{c} Sen^{-1}$; $\angle\Omega = \frac{h}{d} Sen^{-1}$ $x = \sqrt{c^2 - h^2}$; $y = \sqrt{d^2 - h^2}$ $D_1 = \sqrt{h^2 + (b - x)^2}$ $D_2 = \sqrt{h^2 + (b - y)^2}$	$\angle\Psi = \frac{(a^2 + d^2) - D_1^2}{2 \times a \times d} Cos^{-1}$ $\angle\Xi = \frac{(a^2 + c^2) - D_2^2}{2 \times a \times c} Cos^{-1}$ $p = a + b + c + d$ $A = \frac{a + b}{2} \times h$
Polígono "n" lados  **Ver página 10**	1. Medida del ángulo central **"α"**.- $\angle\alpha = 360° \div n$ 2. Medida de cada ángulo interno **"ι"**.- $\angle\iota = 180° \times (n - 2) \div n$ 3. Suma delos ángulos internos **"Σι"**.- $\Sigma\iota = 180° \times (n - 2)$ 4. Mediada de cada ángulo externo **"ε"**.- $\varepsilon = 360° \div n$	5. Suma delos ángulos externos **"Σε"**.- $\Sigma\varepsilon = 360°$ 6. Número de diagonales **"δ"**.- $\delta = (n - 3)$ 7. Total de diagonales **"Tδ"**.- $T\delta = n \times (n - 3) \div 2$ $p = l \times n$ $A = (p \times a) \div 2$
Círculo  	$c = 2 \times \pi \times r = \pi \times D$ $A = \pi \times r^2 = \pi \times D^2 \div 4$	
Figura	**Elementos, perímetro y área.**	
Corona circular  	$C = \pi \times D = \pi \times 2 \times r_1$ $c = \pi \times d = \pi \times 2 \times r_2$ $A_1 = \pi \times r_1^2 = \pi \times D^2 \div 4$ $A_2 = \pi \times r_2^2 = \pi \times d^2 \div 4$	**Corona:** $C = \pi \times (D + d) = \pi \times 2 \times (r_1 + r_2)$ $A = \pi \times (r_1^2 - r_2^2) = \pi \times (D^2 - d^2) \div 4$
Sector circular  	**Arco "s":** $s = \frac{n}{180} \times \pi \times r$ $p = (2 \times r) + s$	**Área:** $A = \frac{n}{360} \times \pi \times r^2 = r \times s \div 2$ $s = 2A \div r$

		Hipervínculos.- Hoja de cálculo Pág. 46.
	$s=\frac{n}{180}\times\pi\times r$ $c=Sen\frac{n}{2}\times r\times 2$ $h=r\times Cos\frac{n}{2}$ $f=r-h$	$p=s+c$ $A=\frac{n}{360}\times\pi\times r^2-\frac{(c\times h)}{2}=\frac{r\times s-(c\times h)}{2}$ **Hipervínculos.- Hoja de cálculo Pág. 46.**
	$p=(a+b)\times\pi$	$A=a\times b\times\pi$

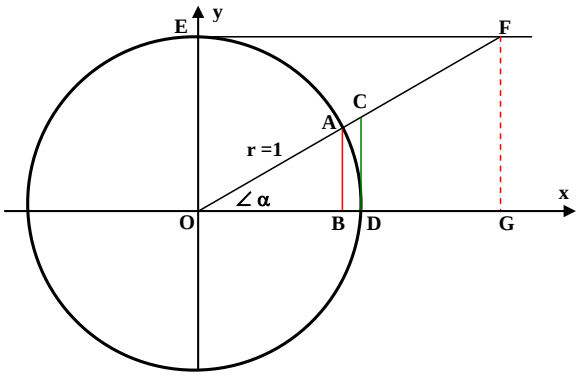
Funciones trigonométricas.- Son las diferentes relaciones de los triángulos rectángulos. Entre los valores de los ángulos, con la longitud de los catetos opuestos, y la hipotenusa.

Comentario [PRVC8]: Es la representación numérica en forma de una división indicada, o quebrado.

6 Círculo trigonométrico.- Es un círculo de radio unitario (**r =1**), por lo que las funciones trigonométricas para triángulos rectángulos, toman las formas y valores, que se muestran en el diagrama, y tabla en la página "10". Si trazamos un círculo cuyo radio es igual a "1", y su centro se encuentra en el origen de un sistema coordenado, se establecen las diferentes relaciones entre el radio **" r ",** la absisa **"x",** y la ordenada **"y";** debido a los triángulos rectángulos que se forman. Y al cambiar de posición (ángulo) el radio, se producen variaciones de los tamaños máximos de los lados. Para comprender estas relaciones, analicemos el círculo trigonométrico, y los triángulos "ABO, CDO y FGO" formados por el radio, sus proyecciones y extensión considerando las igualdades siguientes:

Comentario [PRVC9]: Los triángulos se representan por medio de las letras de sus vértices, siendo la de en medio la que corresponde al ángulo recto, o mayor.

AB = y; CD =y
OB = x
OD = OA =FG = r = 1



Función Seno.- Es el valor del ∠ α que resulta de la relación del lado opuesto a él **"y"**, entre la hipotenusa **" r "** del triángulo formado. $Seno\angle\alpha = y \div r$

Función Coseno.- Es el valor del $\angle\alpha$ que resulta de la relación del lado adyacente a él **"x"**, entre la hipotenusa **" r "** del triángulo formado. $Coseno\ \angle\alpha = x \div r$

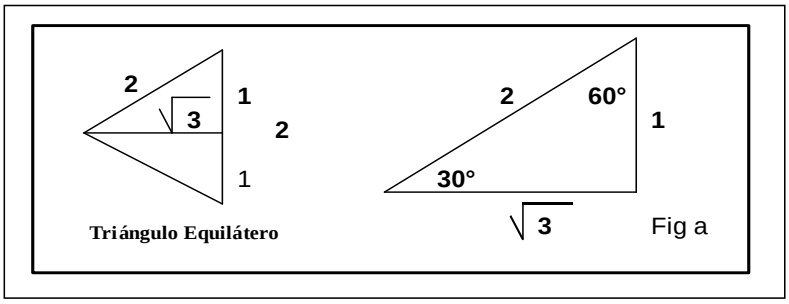
Función tangente.- Es el valor del $\angle\alpha$ que resulta de la relación del lado opuesto a él **"y"**, entre el adyacente **" x "** del triángulo formado. $Tangente \angle\alpha = y \div x$

Función Cotangente.- Es el valor del $\angle\alpha$ que resulta de la relación del lado adyacente a él **"x"**, entre el opuesto **" y "** del triángulo formado. $Cotangente \angle\alpha = y \div x$

Función Secante.- Es el valor del $\angle\alpha$ que resulta de la relación de la hipotenusa **" r "** **y** el lado adyacente **"x"** a él, del triángulo formado. $Secante\ \angle\alpha = r \div x$

Función Cosecante.- Es el valor del $\angle\alpha$ que resulta de la relación de la hipotenusa **" r "** **y** el lado opuesto a él, **"y",** del triángulo formado. $Cosecante \angle\alpha = r \div y$

7 Valores exactos de las funciones



trigonométricas, para ángulos de 30°, 45° y 60°.

Comentario [PRVC10]: Se basa en un triángulo equilátero de 2 unidades por lado. Cuyos ángulos miden 60°, y dividiendo el triángulo a partir de la mediana (línea que va de un vértice al punto medio del lado opuesto), que en este caso coincide con la mediatriz (línea que divide un ángulo en dos adyacentes iguales). Y aplicando el teorema de Pitágoras se establecen las relaciones.

De acuerdo con la figura "a" tenemos los valores siguientes para las funciones trigonométricas:

Funciones de 30°	Funciones de 60°
$sen = \frac{1}{2}$	$sen = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos = \frac{1}{2}$
$tg = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$tg = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$

$ctg = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$	$ctg = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
$\sec = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sec = \frac{2}{1} = 2$
$\csc = \frac{2}{1} = 2$	$\csc = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

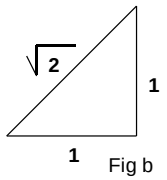


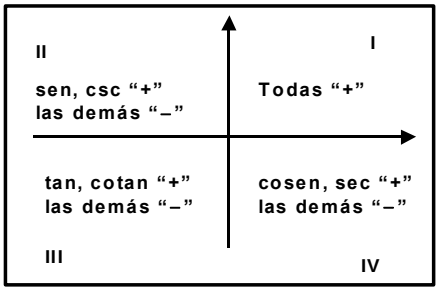
Fig b

Según la figura "b" tenemos, las siguientes funciones para el ∠ 45°.

$$sen = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ \cos = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Comentario [PRVC11]: Basándose en un triángulo rectángulo isósceles, de una unidad en los lados iguales, y aplicando el teorema de Pitágoras.

8 Signos de las funciones de acuerdo con el cuadrante de un sistema cartesiano.



9 Tabla de valores exactos para ángulos de 30°, 45° y 60°. Equivalencias en radianes

FUNCIONES

Grados	Seno	Coseno	Tangente	Cotangente	Secante	Cosecante	Radianes
0	0	1	0	$+\infty$	+ 1	$+\infty$	0
30	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{1}{6}\pi$
45	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$\frac{1}{8}\pi$
60	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{3}\pi$
90	1	0	$+\infty$	0	$+\infty$	+ 1	$\frac{1}{2}\pi$
120	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	– 2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\frac{2}{3}\pi$
135	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	– 1	– 1	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\frac{1}{4}\pi$

150	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	**2**	$\frac{5}{6}\pi$
180	**0**	**– 1**	**0**	$-\infty$	**– 1**	$+\infty$	π
210	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	**– 2**	$\frac{7}{6}\pi$
225	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	**1**	**1**	$-\sqrt{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{5}{8}\pi$
240	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	**– 2**	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\frac{4}{3}\pi$
270	**1**	**0**	$-\infty$	**0**	$+\infty$	**– 1**	$\frac{3}{2}\pi$
300	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	**2**	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\frac{5}{3}\pi$
315	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	**– 1**	**-1**	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$\frac{7}{8}\pi$
330	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	**– 2**	$\frac{11}{6}\pi$
360	**0**	**1**	**0**	$+\infty$	**+ 1**	$+\infty$	2π

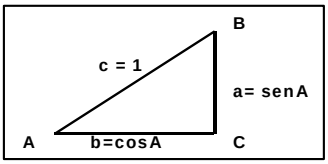
10 Identidades de igualdades de funciones.-

1) Funciones recíprocas:	2) Funciones cocientes:
(1) $\csc\theta = \frac{1}{sen\theta}$	(1) $tg\theta = \frac{sen\theta}{\cos\theta}$
(2) $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$	(2) $ctg\theta = \frac{\cos\theta}{sen\theta}$
(3) $ctg\theta = \frac{1}{tg\theta}$	

Comentario [PRVC12]: Son aquellas funciones que al multiplicarse entre si el producto es "1", o también son sus recíprocas

Comentario [PRVC13]: Son aquellas que provienen o se forman como resultado de la división de otras dos.

3) Funciones Pitagóricas.



(Ver Pág.12)

De acuerdo con la figura de la izquierda tenemos "c = 1", y las funciones serían:

$senA = \frac{a}{c} = \frac{a}{1} \therefore a = senA$

$\cos A = \frac{b}{c} = \frac{b}{1} \therefore b = \cos A$

Comentario [PRVC14]: Referidas al círculo trigonométrico, y considerando "a = x", "b = y".

Comentario [PRVC15]: Referidas al círculo trigonométrico, y considerando "a = x", "b = y".

(1) Aplicando el teorema de Pitágoras.- $a^2 + b^2 = c^2 \therefore sen^2 A + cos^2 A = 1$, **que es la identidad fundamental. Y despejando los diferentes términos ella tenemos:**

$a)\ sen^2 A + \cos^2 A = 1 \therefore$

$a.1)\ sen^2 A = 1 - \cos^2 A$

$a.2)\ \cos^2 A = 1 - sen^2 A$

(2) Dividiendo los términos de la identidad fundamental "a", entre "$cos^2 A$"tenemos

$a)\ sen^2 A + \cos^2 A = 1$

$\frac{sen^2 A}{\cos^2 A} + \frac{\cos^2 A}{\cos^2 A} = \frac{1}{\cos^2 A}$

$b)\ tg^2 A + 1 = \sec^2 A$

Despejando los diferentes términos de la identidad "b":

$b)\ tg^2 A + 1 = \sec^2 A$

$b.1)\ tg^2 A = \sec^2 A - 1$

$b.2)\ \sec^2 A - tg^2 A = 1$

(3) Dividiendo los términos de la identidad fundamental "a", entre "$sen^2 A$"tenemos

$a)\ sen^2 A + \cos^2 A = 1$

$\frac{sen^2 A}{sen^2 A} + \frac{\cos^2 A}{sen^2 A} = \frac{1}{sen^2 A} \therefore$

$c)\ 1 + \cot^2 A = \csc^2 A$

Despejando los diferentes términos de la identidad "c":

$c)\ 1 + ctg^2 A = \csc^2 A$

$c.1)\ ctg^2 A = \csc^2 A - 1$

$c.2)\ \csc^2 A - ctg^2 A = 1$

11 <u>Triángulos Rectángulos</u>.- Para determinar el valor de sus diferentes elementos; como son ángulos, catetos e hipotenusa, ***siempre se deben conocer dos elementos***. Y uno de sus ángulo siempre vale 90º. La nomenclatura que se emplea en la identificación de los elementos es el uso de letras mayúsculas para los ángulos, y letras minúsculas para los lados opuestos a ellos, empezando por nombrar al ∠ recto, con la **"A"** y la hipotenusa con **"a"**, y los otros ángulos con las letras **"B"** y **"C"**, siempre en sentido contrario a las manecillas del reloj. Para resolver las incógnitas nos tenemos que basar en el teorema de Pitágoras, las funciones trigonométricas, y en la propiedad de la suma de los ángulos interiores de todo triángulo; debiendo usarse preferentemente los datos conocidos, para evitar el arrastre de errores.

Se pueden presentar los siguientes cinco casos:

a) Conocidos los catetos, calcular la hipotenusa, y el valor de los ángulos agudos.

Ejemplo: b =15; c = 8; calcular ∠ B, ∠ C, y la hipotenusa "a".

1) Calculamos la hipotenusa, por medio del teorema de Pitágoras

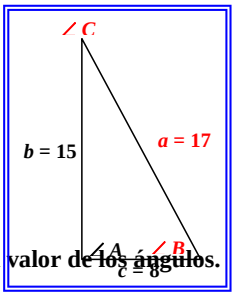
$a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{15^2 + 8^2} = \sqrt{225 + 64} = \sqrt{289} = 17$

2) Determinamos el valor del ∠ B, por medio de la función tangente,

Tan ∠ B = 15÷8 = 1.875 ∴ Tan^{-1} = 61.9275

∴∠ B = 61º55'39"

3) Obtenemos valor del ∠ C, restando de 90º el ángulo B, **∴∠ C = 90° – 61º55'39" = 28º04'21"**



b) Conocidos un cateto y la hipotenusa; calcular el otro cateto y el valor de los ángulos.

Ejemplo: a =17, c = 15; calcular b, ∠ B, ∠ C:

1. Calculamos el otro cateto, por medio del teorema de Pitágoras.-

$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{17^2 - 15^2} = \sqrt{289 - 225} = \sqrt{64} = 8$

2. **C**alculamos el **∠ C,** por medio de la función Seno.-

Seno C = c ÷a = 15÷17 = 0.8823

∴Seno $^{-1}$ = 61º55'39" ∴ ∠ C = 61º55'39"

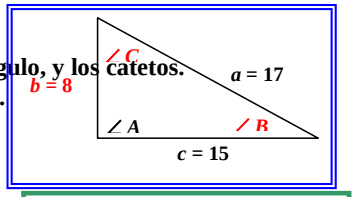
3. Calculamos el ∠ B, restando de 90º el ángulo C.-

Comentario [PRVC16]: Se les llama catetos a los lados que forman el ángulo recto en un triángulo rectángulo. Al más grande se le denomina cateto mayor, que se opone al ángulo mayor; y al otro cateto menor, el cuál lógicamente es el opuesto al ángulo menor.

Comentario [PRVC17]: En un triángulo rectángulo el lado mayor de él, y opuesto al ángulo recto se le llama hipotenusa.

Comentario [PRVC18]: El símbolo que sigue, y que se antepone a una letra mayúscula, se lee ángulo.

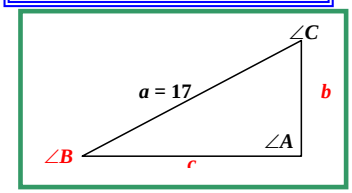
B = 90º – 61º55’39” = 28º04’21”



c) Conocidos un ángulo y la hipotenusa; calcular el otro ángulo, y los catetos.
Ejemplo.-∠ C = 61º55’39”, y a = 17; calcular ∠ B, b, y c.

1) Calculamos el **∠ B,** restando de 90º el ángulo C.-
B = 90º–61º55’39” = 28º4’21”

2) Calculamos el cateto **c** por medio de la función Seno.-
Seno C = c ÷ a ∴ c = Seno C × a =
Seno 61º55’39” ×17 =0.8823 × 17 = 15

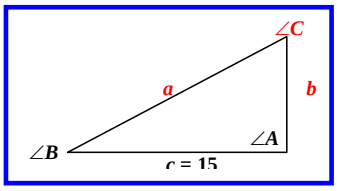


3) Calculamos el cateto b, por medio de la función coseno C.-
Coseno C = b ÷a ∴b = Coseno C × a =
Coseno 61º55’39” × 17= 0.4706 ×17 = 8

d) Conocidos un ángulo y el cateto opuesto; calcular el otro ángulo, y el cateto adyacente y la hipotenusa. Ejemplo.- ∠ C = 61º55’39” , c = 15

1) Calculamos el ángulo ∠ **B** restando de 90º el ángulo C.-
B = 90º - 61º55’39” = 28º04’21”

2) Calculamos la **hipotenusa** por medio de la función Seno C.-
Seno C = c ÷a ∴a = c ÷Seno C =
15 ÷ Seno 61º55’39”= 15 ÷ 0.8823 = 17

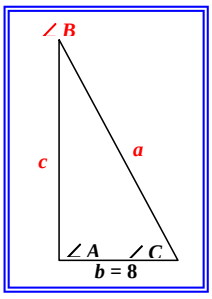


3) Calculamos **b** por medio de la función Tangente C.-
Tangente C = c ÷b ∴b = c ÷ Tangente C =
15 ÷ 61º55’39” = 15 ÷ 1.8750 = 8

e) Conocidos un ángulo y el cateto adyacente, calcular el otro ángulo, el cateto opuesto y la hipotenusa. Ejemplo ∠C = 61º55’39”, b = 8; calcular B, a, y c.

1. Calculamos el ∠ B, restándole a 90º el ∠ C.-
B = 90º - 61º55’39” = 28º04’21

2. Calculamos la hipotenusa por medio de la función Coseno C.- Coseno C = b ÷a ∴
a = b ÷ Coseno C = 8 ÷ Coseno 61º55’39” =
8 ÷ 0.4706 = 17



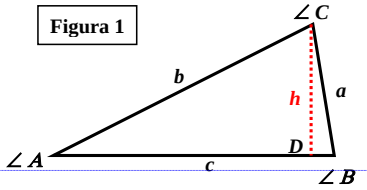
3. Calculamos el lado opuesto por medio de la función Tangente C.-
Tangente C = c ÷b ∴c = b × Tangente C =
8 × Tangente 61º55’39” = 8 ×1.8775 = 15

12 Triángulos oblicuángulos, y acutángulos.-

Decimos que un triángulo es oblicuángulo, cuando uno de sus ángulos es mayor de 90º; y acutángulo cuando sus tres ángulos son agudos. En ambos casos para poder resolver todos sus elementos es necesario conocer 3 de ellos. Para poder encontrar los elementos faltantes nos apoyamos en la propiedad de la suma de los ángulos interiores (180º), y en las leyes de los Senos, y Cosenos. Estas últimas resultan de la demostración geométrica de las propiedades de las alturas, semejanza de los triángulos, y propiedades de los ángulos formados por paralelas al ser cortadas por una secante.

En un triángulo no rectángulo trazamos la altura "C D"

Figura 1



De la "Figura 1" triángulo "ACD" deducimos.-

$Sen\ A = h \div b \therefore h = b \times Sen\ A$ ①

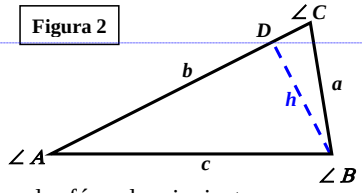
$Sen\ B = h \div a \therefore h = a \times Sen\ B$ ②

Igualando ① y ②: $b \times Sen\ A = a \times Sen\ B$ ③

De la igualdad ③ tenemos : $\frac{a}{Sen\ A} = \frac{b}{SenB}$ ⑦

En el mismo triángulo, trazamos la altura "B D"

Figura 2



De la "Figura 2" triángulo "ABD" deducimos.-

$Sen\ A = h \div c \therefore h = c \times Sen\ A$ ④

$Sen\ C = h \div a \therefore h = a \times Sen\ C$ ⑤

Igualando ④ y ⑤: $c \times Sen\ A = a \times Sen\ C$ ⑥

De la igualdad ⑥ tenemos: $\frac{a}{Sen\ A} = \frac{c}{SenC}$ ⑧

Por la propiedad de transitividad de las ecuaciones ⑦ y ⑧; tenemos las fórmulas siguientes:

Ley de Senos.- Los lados de los triángulos oblicuángulos, y acutángulos están en relación con el seno de sus ángulos opuestos. Al emplear estas igualdades debemos considerar que al determinar cualquier ángulo el valor ***siempre*** corresponderá a un ángulo agudo, por lo que se deberá verificar que la suma de ellos sea de 180°. En caso contrario el valor real del ángulo opuesto al mayor lado deberá ser el obtuso, y se determinará tomando el de su suplemento (Ver definiciones en la página 3). ***Y su fórmula es***.-

$\frac{a}{SenA} = \frac{b}{SenB} = \frac{c}{SenC}$ **De estas igualdades se derivan las siguientes fórmulas**

1 Cuando se conocen 2 ángulos. Se determina el 3er ángulo restando la suma de los conocidos a 180º.

a) $\angle A = 180 - (B + C)$**…(1)**

b) $\angle B = 180 - (A + C)$**…(2)**

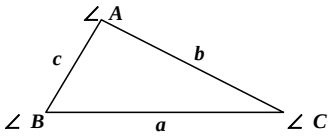
c) $\angle C = 180 - (A + B)$**…(3)**

2 Para determinar 1 lado, conociendo 2 ángulos y el lado opuesto a uno de ellos**.**

a) $\frac{a}{SenA} = \frac{b}{SenB} = \frac{c}{SenC} \therefore a = \frac{b}{SenB} \times SenA\,;\, a = \frac{c}{SenC} \times SenA$ **...(4)**

b) $\frac{a}{SenA} = \frac{b}{SenB} = \frac{c}{SenC} \therefore b = \frac{a}{SenA} \times SenB\,;\, b = \frac{c}{SenC} \times SenB$ **...(5)**

c) $\frac{a}{SenA} = \frac{b}{SenB} = \frac{c}{SenC} \therefore c = \frac{a}{SenA} \times SenC\,;\, c = \frac{b}{SenB} \times SenC$ **...(6)**



3 Cuando se busca un ángulo y se conocen 2 lados:

a) $\frac{a}{SenA} = \frac{b}{SenB} = \frac{c}{SenC} \therefore Sen^{-1}A = \frac{a}{b} \times SenB\,;\, Sen^{-1}A = \frac{a}{c} \times SenC$ **...(7)**

b) $\frac{a}{SenA} = \frac{b}{SenB} = \frac{c}{SenC} \therefore Sen^{-1}B = \frac{b}{a} \times SenA\,;\, Sen^{-1}B = \frac{b}{c} \times SenC$ **...(8)**

Comentario [PRVC21]: Recordar que la altura de un triángulo es cualquier línea perpendicular que cae, de un vértice al lado opuesto o a su prolongación.

Comentario [PRVC19]: Considerando que la altura "CD", divide al triángulo "ABC", en los triángulos rectángulos "ACD", y "CDB"

Comentario [PRVC20]: Considerando que la altura "BD", divide al triángulo "ABC", en los triángulos rectángulos "ADB", y "BDC"

Comentario [PRVC22]: Estas fórmulas se emplean cuando conocemos dos ángulos y un lado. O dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.

c) $\frac{a}{SenA}=\frac{b}{SenB}=\frac{c}{SenC}\therefore Sen^{-1}C=\frac{c}{a}\times SenA\,;\,Sen^{-1}C=\frac{c}{b}\times SenB$ **...(9)**

Ley de los cosenos.- Cuando se conocen 2 lados y el ángulo comprendido entre ellos, o los 3 lados empleamos esta ley; que se interpreta así, el cuadrado del lado es igual a la suma de los cuadrados de los lados conocidos, menos el doble producto de los lados conocidos, por el coseno del ángulo conocido. Se debe usar preferentemente esta ley en la determinación del valor de los ángulos de cualquier triángulo no rectángulo; debido a que cuando corresponda a un obtuso, su valor real se determinará directamente, sin necesidad de hacer conversiones.

En un triángulo no rectángulo Figura 1, trazamos la altura "C D". En el mismo triángulo, trazamos la altura "B D"

Comentario [PRVC23]: Recordar que la altura de un triángulo es cualquier línea perpendicular que cae, de un vértice al lado opuesto o a su prolongación.

Figura 1

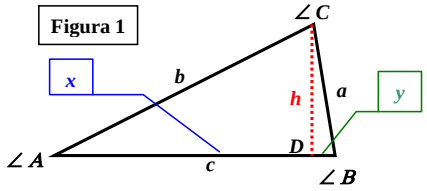
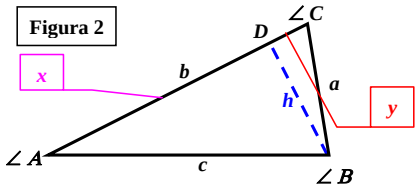


Figura 2



Deducción de las fórmulas.-

Basándonos en la figura 1:

Comentario [PRVC24]: Considerando que la altura "CD", divide al triángulo "ABC", en los triángulos rectángulos "ACD", y "CDB"

1 En los + "ADC", y "BDC" por el teorema de Pitágoras tenemos:

① $b^2=h^2+x^2$, y ② $a^2=h^2+y^2$

2 Restando ① de ②.-

$$\begin{array}{l} a^2=h^2+y^2 \\ \underline{b^2=h^2+x^2} \quad ③ \\ a^2-b^2=y^2-x^2 \end{array}$$

3 Factorizando el 2° miembro de ③.-

$a^2-b^2=(y+x)\times(y-x)$ ④

$Pero\ en\ la\ Fig.1\ "c=y+x"$ ⑤

Reemplazando ⑤, en

④: $a^2-b^2=c\times(y-x)\therefore(y-x)=\frac{a^2-b^2}{c}$ ⑥

4 Sumando ⑤ y ⑥:

$$\begin{array}{l} y+x=c \\ \underline{y-x=\frac{a^2-b^2}{c}} \\ 2y=c+\frac{a^2-b^2}{c}\therefore 2y=\frac{c^2+a^2-b^2}{c} \end{array}$$

$y=\frac{a^2+c^2-b^2}{2c}$ ⑦

5 Restando ⑤ y ⑥:

$$\begin{array}{l} y+x=c \\ \underline{y-x=\frac{a^2-b^2}{c}} \\ 2x=c-\frac{a^2-b^2}{c}\therefore 2x=\frac{c^2-a^2+b^2}{c} \end{array}$$

$x=\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}$ ⑧

6 De los + rectángulos"ADC", y "BDC" tenemos:

"$y=a\times CosB$"⑨

"$x=b\times CosA$"⑩

Comentario [PRVC25]: Aplicando una de la propiedad las funciones de dos ángulos suplementarios, que dice estas son iguales pero de signo contrario.

7 Sustituyendo "⑨ y ⑩" en "⑦ y ⑧" **respectivamente**:

$a\times CosB=\frac{a^2+c^2-b^2}{2c}\therefore CosB=\frac{a^2+c^2-b^2}{2\,a\,c}$

$b\times CosA=\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\therefore CosA=\frac{b^2+c^2-a^2}{2\,b\,c}$

8 Basándose en la figura 2, comprobamos la fórmula para el ángulo "*C*"

① $c^2 = h^2 + x^2$, y ② $a^2 = h^2 + y^2$; $b = y + x$ ⑤

$y = a \times CosC$ "⑨

9 Restando ① de ②.-

$$a^2 = h^2 + y^2$$
$$c^2 = h^2 + x^2 \quad ③$$
$$a^2 - c^2 = y^2 - x^2$$

10 Factorizando el 2° miembro de ③.-

$a^2 - c^2 = (y + x) \times (y - x)$ ④

Pero en la Fig.1 $"b = y + x"$ ⑤

11 Reemplazando ⑤, en ④:

$$a^2 - b^2 = b \times (y - x) \therefore (y - x) = \frac{a^2 - c^2}{b} \quad ⑥$$

12 Sumando ⑤ y ⑥:

$$y + x = b$$
$$y - x = \frac{a^2 - c^2}{b}$$
$$2y = b + \frac{a^2 - c^2}{b} \therefore 2y = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{b}$$
$$y = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b} \quad ⑦$$

13 Sustituyendo ⑨ en ⑦.-

$$a \times Cos\,C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b} \therefore Cos\,C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\,a\,b}$$

Fórmulas de acuerdo con los datos conocidos.-

1 2 lados y un ángulo.-

$$a^2 = (b^2 + c^2) - (2 \times b \times c \times CosA) \;\therefore\; a = \sqrt{(b^2 + c^2) - (2 \times b \times c \times CosA)} \;...(1)$$
$$b^2 = (a^2 + c^2) - (2 \times a \times c \times CosB) \;\therefore\; b = \sqrt{(a^2 + c^2) - (2 \times a \times c \times CosB)} \;...(2)$$
$$c^2 = (a^2 + b^2) - (2 \times a \times b \times CosC) \;\therefore\; c = \sqrt{(a^2 + b^2) - (2 \times a \times b \times CosC)} \;...(3)$$

2 Los 3 lados.-

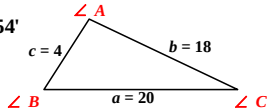
$$\angle A = \frac{(b^2 + c^2) - a^2}{2 \times b \times c} Cos^{-1} \;...(4)$$
$$\angle B = \frac{(a^2 + c^2) - b^2}{2 \times a \times c} Cos^{-1} \;...(5)$$
$$\angle C = \frac{(a^2 + b^2) - c^2}{2 \times a \times b} Cos^{-1} \;...(6)$$

Casos que se pueden presentar, para ambos tipos de triángulos (Ver: Hipervínculos.- Hoja de cálculo Pág. 46):

1 L L L, se conocen los tres lados.

Ejemplo.- a = 20, b = 18, c = 4. Calcular ∠s: A, B, C.

$$\angle A = \frac{(b^2 + c^2) - a^2}{2 \times b \times c} = \frac{(18^2 + 4^2) - 20^2}{2 \times 18 \times 4} = \frac{(324 + 16) - 400}{144} = \frac{-60}{144} = -0.4167\,Cos^{-1} = 114°37'$$
$$\angle B = \frac{(a^2 + c^2) - b^2}{2 \times a \times c} = \frac{(20^2 + 4^2) - 18^2}{2 \times 20 \times 4} = \frac{(400 + 16) - 324}{160} = \frac{92}{160} = 0.775\,Cos^{-1} = 54°54'$$
$$\angle C = 180° - (A + B) = 180° - (114°37' + 54°54') = 180 - 169°31' = 10°29'$$



2 L A L, dos lados y el ∠ comprendido entre ellos; dos lados y el ∠ adyacente a uno de ellos:

a) 1er. caso dos lados y ∠ comprendido entre ellos. 1º calculamos el lado desconocido.

Ejemplo.- A = 36º, b = 25, c = 25; calcular B, C, a.

1) Se calcula el otro lado:

Comentario [PRVC26]: Siempre se deben conocer tres datos, uno de ellos debe ser diferente. El único caso en que los tres son de la misma especie, son los tres lados.

Comentario [PRVC27]: Estas son la forma en que se aplica la ley de los cosenos, para calcular el ángulo. Mediante el arco coseno

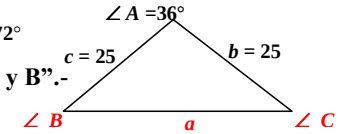
Comentario [PRVC28]: Oblicuángulo y obtusángulo.

$a=\sqrt{(b^2+c^2)-(2\times b\times c\times CosA)}=\sqrt{(25^2+25^2)-(2\times 25\times 25\times Cos36)}=\sqrt{(625+625)-(2\times 25\times 25\times 0.8090)}$

$=\sqrt{(1250-1011.27}=\sqrt{238.75}=15.45$

2) **Calculamos el otro ángulo mediante la ley de Senos.-**

$SenB=\frac{b}{a}\times SenA=\frac{25}{15.45}\times Sen36^\circ=\frac{25}{15.45}\times 0.5878=0.9511Sen^{-1}=\angle B=72^\circ$



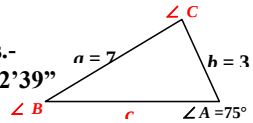
3) **Calculamos el otro ángulo restando de 180º la suma de los "A y B".-**

∠C = 180º– (A + B) = 180º –(36º + 72º) = 180 – 108 = 72º

b) L A L, 2º caso dos lados y ∠ adyacente, a uno de ellos; 1º se calcula el otro ∠.

Ejemplo.- ∠ A = 75º, a = 7, b =3; calcular B, C, c.-

1) $SenB=\frac{b}{a}\times SenA=\frac{3}{7}\times Sen75^\circ=\frac{3}{7}\times 0.9659=0.414Sen^{-1}=\angle B=24^\circ 27'21''$



2) **Calculamos el otro ángulo restando de 180º la suma de los conocidos.-**

C = 180º– (A + B) = 180º –(75º + 24º27'21") = 180 – 99º27'21" = 80º32'39"

3) **Calculamos el último lado.-**

$c=\sqrt{(a^2+b^2)-(2\times a\times b\times CosC)}=\sqrt{(7^2+3^2)-(2\times 7\times 3\times Cos80^\circ 32'39'')}=\sqrt{(49+9)-(2\times 7\times 3\times 0.1643)}$

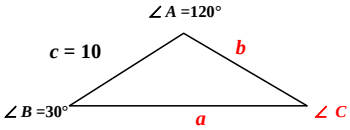
$=\sqrt{(58-6.90}=\sqrt{51.0999}=7.1484$

3 A L A, dos ángulos y un lado; 1º se calcula el 3er. ángulo. Ejemplo.- ∠A = 120º, ∠ B = 30º, c = 10, calcular C, b, c.

(1) ∠C = 180º– (A + B) = 180º –(120º + 30º) = 180 – 150º = 30º

(2) $a=\frac{c}{SenC}\times SenA=\frac{10}{Sen30}\times Sen120=\frac{10}{0.5}\times 0.866=17.32$

(3) $b=\frac{c}{SenC}\times SenB=\frac{10}{Sen30}\times Sen30=\frac{10}{0.5}\times 0.5=10.00$



Aplicaciones.-

1 Cálculo del área de triángulos, conociendo la longitud de sus lados. Sea "p" el perímetro de cualquier triángulo; y "s" el semi perímetro. p = a + b + c; s = p ÷2.

Fórmula de Heron de Alejandría $A=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ **.**

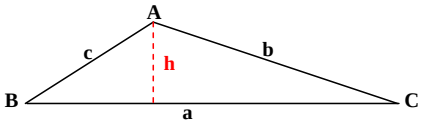
Ejemplo.- Determinar el área del triángulo de lados a =3; b =4; c =5.

1) **Calculamos el semi perímetro.- s = (3 + 4 + 5) ÷ 2 = 12 ÷ 2 = 6**
2) **Determinamos el área.-**

$A=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{6\times(6-3)\times(6-4)\times(6-5)}=\sqrt{6\times 3\times 2\times 1}=\sqrt{36}=6$

2 Cálculo de la altura en un triángulo no rectángulo.

1) **Base lado a.-** $h=c\times senB\,;h=b\times senC$
2) **Base lado b.-** $h=a\times senC\,;h=c\times senA$
3) **Base lado c.-** $h=b\times senA\,;h=a\times senB$



3 Cálculo del área: Por medio del semiproducto de dos lados consecutivos, por el seno del ángulo comprendido entre ellos.

1) $S=\frac{1}{2}a\times b\times SenC$

2) $S = \frac{1}{2} b \times c \times SenA$

3) $S = \frac{1}{2} a \times c \times SenB$

Ejemplo.- Dados ángulos, y un lado:

$\angle A = 67°15'; \angle B = 51°23'; a = 12.5m$

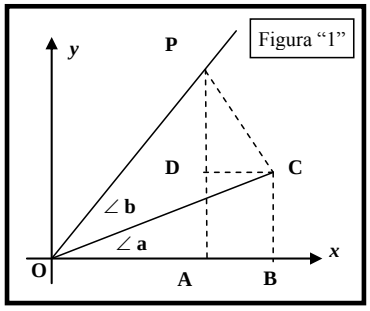
$\angle C = 180 - (67°15' + 51°23' = 118°38') = 61°22'$

$b = \frac{a \times SenB}{SenA} = \frac{12.5 \times Sen51°23'}{Sen67°15'} = \frac{12.5 \times .7813}{.9222} = 10.59m$

$c = \frac{a \times SenC}{SenA} = \frac{12.5 \times Sen61°22'}{Sen67°15'} = \frac{12.5 \times .8777}{.9222} = 11.9m$

$S = \frac{a \times b \times SenC}{2} = \frac{12.5 \div 10.59 \times .8777}{2} = 58.09m^2$

13 FUNCIONES SENO, COSENO Y TANGENTE, DE LA SUMA DE DOS ÁNGULOS.



Triángulo OAP de la figura .-

Funciones seno y coseno.

$sen(a+b) = senAOP = \frac{\overline{AP}}{\overline{OP}}$ **...(1)**

$cos(a+b) = cos\ AOP = \frac{\overline{OA}}{\overline{OP}}$ **...(2)**

En la figura tenemos: $\overline{AD} = \overline{BC}; \overline{AP} = \overline{AD} + \overline{DP} = \overline{BC} + \overline{DP}$

sustituyendo en (1).-

$sen(a+b) = \frac{\overline{AP}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{BC} + \overline{DP}}{\overline{OP}}$ **...(3)**

En la figura "1" por construcción los triángulos OBC , CPD y OCP ; son rectángulos de donde:

$\overline{BC} = \overline{OC} \times sen\,a$

$\overline{DP} = \overline{PC} \times \cos a$

$\overline{OC} = \overline{OP} \times \cos b$

$\overline{PC} = \overline{OP} \times sen\,b$

Por lo tanto sustituyendo " $\overline{OC}$ **" y "** $\overline{PC}$ **":**

$\overline{BC} = \overline{OP} \times \cos b \times sen\,a$**...(4)**

$\overline{DP} = \overline{OP} \times sen\,b \times \cos a$**...(5)**

Sustituyendo (4) y (5), en (3): $sen(a+b) = sena \cos b + senb \cos a$

De la misma manera: $\cos(a+b) = \frac{\overline{OA}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OB} - \overline{AB}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OB} - \overline{DC}}{\overline{OP}}$**...(6)**

$\overline{OB} = \overline{OC} \times \cos a$

Como: $\overline{DC} = \overline{PC} \times sen\,a$, $\overline{OC} = \overline{OP} \times \cos b$, $\overline{PC} = \overline{OP} \times sen\,b$ **; reemplazando en (6), tenemos:** $\cos(a+b) = \cos a \cos b - sen\,a\ sen\,b$

Por las demostraciones tenemos los enunciados siguientes:

1) El seno de la suma de dos ángulos, es igual al producto del seno del primero, por el coseno del segundo; más el producto del coseno del primero por el seno del segundo.

2) El coseno de la suma de dos ángulos, es igual al producto de los cósenos de los dos ángulos, menos el producto de los senos de ellos.

Funciones tangente y cotangente

Como la función tangente es igual al cociente de la función seno entre la función coseno; tenemos

$\tan(a+b)=\frac{sen(a+b)}{\cos(a+b)}=\frac{sen\,a\cos b+sen\,b\cos a}{\cos a\cos b-sen\,a\;sen\,b}$. Si dividimos la fórmula entre "$\cos a\cos b$" tenemos:

Como la función cotangente es igual al cociente de la función coseno entre la función seno; tenemos

$\cot(a+b)=\frac{\cos(a+b)}{sen(a+b)}=\frac{\cos a\cos b-sen\,a\;sen\,b}{sen\,a\cos b+\cos a\;sen\,b}$. Si dividimos todo entre "***sen a sen b***" tenemos

$$\cot(a+b)=\frac{\frac{\cos a\cos b}{sen\,a\;sen\,b}-\frac{sen\,a\;sen\,b}{sen\,a\;senb}}{\frac{sena\cos b}{senasenb}+\frac{\cos asenb}{senasenb}}=\frac{\cot a\cot b-1}{\cot b+\cot a}$$

Por lo anterior tenemos:

1 **La tangente de la suma de dos ángulos es igual al cociente de las suma de las tangentes de dichos ángulos, entre la diferencia de uno menos el producto de las tangentes.**

2 **La cotangente de la suma de dos ángulos es igual al cociente que resulta de dividir el producto de las cotangentes de los ángulos menos "uno"; entre la suma de las cotangentes de dichos ángulos.**

Método. Para emplear estas fórmulas, usar valores exactos (Ver página 13)

a) Se descompone el ∠ dado, en la suma de otros dos de 30°, 45° y 60°. O que sean múltiplos de ellos.

b) Se sustituyen los valores exactos de ellos en las fórmula y se simplifica.

c) Se comprueba el resultado calculando directamente el valor del ángulo, para cada función.

3 **Ejemplo de aplicación:** Calcular los valores exactos del ángulo de 90°, en todas las funciones. Y demostrar que sen 90° = 1, cos = 0, tan = ∞, cot = 0.

1) **Descomponemos el ∠90°, en función de la suma de dos ángulos:** $90°=60°+30°$

2) **Se buscan los valores exactos:**

$$\angle 60°: sen=\frac{\sqrt{3}}{2},\cos=\frac{1}{2},\tan=\sqrt{3},\cot=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\angle 30°: sen=\frac{1}{2},\cos=\frac{\sqrt{3}}{2},\tan=\frac{\sqrt{3}}{3},\cot=\sqrt{3}$$

3) $sen(a+b)=sena\cos b+senb\cos a=Sen60\cos 30+sen30\cos 60=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3^2}+1}{4}=\frac{3+1}{4}=1$

4) $\cos(a+b)=\cos a\cos b-senasenb=\cos 60\cos 30-sen60sen30=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}=0$

5) $\tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}=\frac{\tan 60+\tan 30}{1-\tan 60\tan 30}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}/3}{1-\sqrt{3}\times\sqrt{3}/3}=\frac{\sqrt{3}(1+1/3)}{1-\sqrt{3^2}/3}=\frac{4\sqrt{3}/3}{1-1}=\frac{4\sqrt{3}/3}{0}=\infty$

6) $\cot(a+b)=\frac{\cot a\cot b-1}{\cot a+\cot b}=\frac{\cot 60\cot 30-1}{\cot 60+\cot 30}=\frac{\sqrt{3}/3\times\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}/3+\sqrt{3}}=\frac{1-1}{\sqrt{3}/3+\sqrt{3}}=\frac{0}{\sqrt{3}/3+\sqrt{3}}=0$

4 **Por los valores obtenidos se comprueba la demostración.**

14 FUNCIONES SENO, COSENO Y TANGENTE DE LA DIFERENCIA DE DOS ÁNGULOS.

a) Funciones seno y coseno.

Si consideramos que: $(a+b)=(a+(-b))$ **Basta reemplazar en las fórmulas ya determinadas el valor "– b" en ellas. De manera que tenemos.**

1) $sen(a-b)=sen\,a\cos b-sen\,b\cos a$ **. De donde el seno de la diferencia de dos ángulos es igual a la diferencia del producto del seno del primer ángulo por el coseno del segundo; menos el coseno del primero por el seno del segundo.**

2) $\cos(a-b)=\cos a\cos b+sen\,a\;sen\,b$**. De manera que el coseno de la diferencia de dos ángulos es igual a la suma del producto de los cósenos, más el producto de los senos de dichos ángulos.**

b) Función tangente. Por las mismas consideraciones tenemos.

$\tan(a-b)=\dfrac{sen(a-b)}{\cos(a-b)}=\dfrac{sen a\cos b-\cos a\;sen\,b}{\cos a\cos b+sen\,a\;sen\,b}$. Si dividimos todo entre "***cosen a cosen b***" tenemos

$$\tan(a-b)=\frac{\dfrac{sen\,a\cos b}{\cos a\cos b}-\dfrac{\cos a\;sen\,b}{\cos a\cos b}}{\dfrac{\cos a\cos b}{\cos a\cos b}+\dfrac{sen\,a\;sen\,b}{\cos a\cos b}}=\frac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\tan b}$$

Que se enuncia como la tangente de la diferencia de dos ángulos, es igual al cociente de la diferencia de la tangente del primero menos la del segundo; entre la suma de uno, más el producto de las tangentes de los ángulos.

c) Función cotangente. Considerando que cotangente es igual a coseno entre seno, y que esta fórmula se obtiene del artificio de dividir el segundo término de la igualdad de la tangente, entre el producto de "sen a, por sen b".

$\cot(a-b)=\dfrac{\cos(a-b)}{sen(a-b)}=\dfrac{\cos a\cos b+sen\,a\;sen\,b}{sen\,a\cos b-\cos a\;sen\,b}$. Si dividimos todo entre "***sen a sen b***" tenemos

$$\cot(a-b)=\frac{\dfrac{\cos a\cos b}{sen\,a\;sen\,b}+\dfrac{sen\,a\;sen\,b}{sen\,a\;sen\,b}}{\dfrac{sen a\cos b}{sen\,a\;sen\,b}-\dfrac{\cos a\;sen\,b}{sen a\;sen\,b}}=\frac{\cot a\cot b+1}{\cot b-\cot a}$$

Que se enuncia la cotangente de la diferencia de dos ángulos es igual al cociente que resulta de dividir el producto de las cotangentes de los ángulos, más "uno"; entre la diferencia de las cotangentes del segundo ángulo menos el primero. Para el signo correspondiente al valor considerar el cuadrante al que pertenecen.

d) Método. Para emplear estas fórmulas, usar valores exactos (Ver página 13)

(1) Se busca el ∠ dado, por la diferencia de otros dos de 30°, 45° y 60°. O que sean múltiplos de ellos.

(2) Se sustituyen los valores exactos de ellos en las fórmula y se simplifica.

(3) Se comprueba el resultado calculando directamente el valor del ángulo, para cada función.

Ejemplo de aplicación: Calcular todas las funciones de un ángulo de 15°, usando valores exactos.

2) Buscamos el equivalente del $\angle 15°$**, en función de la diferencia de dos ángulos:** $15°=45°-30°$

3) Se buscan los valores exactos:

$$\angle 45°: sen=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2},\cos=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2},\tan=1,\cot=1$$

$$\angle 30°: sen=\frac{1}{2},\cos=\frac{\sqrt{3}}{2},\tan=\frac{\sqrt{3}}{3},\cot=\sqrt{3}$$

4) $sen(a-b)=sen a\cos b-sen b\cos a=Sen45\cos 30-sen30\cos 45=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}-\dfrac{\sqrt{2}}{4}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

5) $\cos(a-b)=\cos a\cos b+senasenb=\cos 45\cos 30+sen45sen30=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}+\dfrac{\sqrt{2}}{4}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

6) $\tan(a-b)=\dfrac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\tan b}=\dfrac{\tan 45-\tan 30}{1+\tan 45\tan 30}=\dfrac{1-\sqrt{3}/3}{1+1\times\sqrt{3}/3}=\dfrac{1-\sqrt{3}/3}{1+\sqrt{3}/3}=\dfrac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$

7) $\cot(a-b)=\dfrac{\cot a\cot b+1}{\cot b-\cot a}=\dfrac{\cot 45\cot 30+1}{\cot 30-\cot 45}=\dfrac{1\times\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$

15 FUNCIONES SENO, COSENO Y TANGENTE DEL ÁNGULO DOBLE.

Las fórmulas para las funciones de los ángulos dobles, se obtienen a partir de hacer "a = b"; en las fórmulas de la suma de dos ángulos.

1. Seno y coseno:

a) Seno.-

$$a=b$$
$$sen\,(a+b)=sen\,a\cos b+sen\,b\cos a$$
$$sen\,(a+a)=sen\,a\cos a+sen\,a\cos a$$
$$sen\,2a=2sen\,a\cos a$$

Por lo que el seno del doble de un ángulo, es igual al doble producto del seno por el coseno del ángulo.

b) Coseno.-

$$a=b$$
$$\cos(a+b)=\cos a\cos b-sen\,a\,sen\,b$$
$$\cos(a+a)=\cos a\cos a-sen\,a\,sena$$
$$\cos 2a=\cos^2 a-sen^2 a$$

Por lo que el coseno del doble de un ángulo, es igual a la diferencia del coseno cuadrado de él, menos el seno cuadrado del mismo ángulo.

c) Tangente.-

$$a=b$$
$$\tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}$$
$$\tan(a+a)=\frac{\tan a+\tan a}{1-\tan a\tan a}$$
$$\tan 2a=\frac{2\tan a}{1-\tan^2}$$

Por lo que la tangente del doble de un ángulo es igual al cociente que resulta de dividir el doble de la tangente del ángulo; entre la diferencia de uno menos la tangente cuadrada de dicho ángulo.

d) Cotangente.-

$$a=b$$
$$\cot(a+b)=\frac{\cot a\cot b+1}{\cot b+\cot a}$$
$$\cot(a+a)=\frac{\cot a\cot a+1}{\cot a+\cot a}$$
$$\cot 2a=\frac{\cot^2 a+1}{2\cot a}$$

e) Por lo que la cotangente del doble de un ángulo es igual al cociente que resulta de dividir la cotangente cuadrada del ángulo, más uno; entre el doble de la cotangente de dicho ángulo.

2. Método. Para emplear estas fórmulas, usar valores exactos (Ver página 13)

(1) Se descompone el ∠ dado, en la suma de otros dos iguales.

(2) Se sustituyen los valores exactos en las fórmula y se simplifica.

(3) Se comprueba el resultado calculando directamente el valor del ángulo, para cada función.

Ejemplo de aplicación: Calcular todas las funciones de un ángulo de 60°, usando valores exactos.

a) Buscamos el equivalente del ∠60°, en función de la suma de dos ángulos iguales: $60°=30°+30°$

b) **Se buscan los valores exactos:** $\angle 30° : sen = \frac{1}{2}, \cos = \frac{\sqrt{3}}{2}, \tan = \frac{\sqrt{3}}{3}, \cot = \sqrt{3}$

c) $sen\, 2a = 2\, sen\, a \cos a = 2\, sen\, 30 \cos 30 = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\cos 2a = \cos^2 a - sen\, a^2 = \cos^2 30 - sen^2 30 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

(4) $\tan 2a = \frac{2\tan a}{1-\tan^2 a} = \frac{2\tan 30}{1-\tan^2 30} = \frac{2 \times \sqrt{3}/3}{1-\left(\sqrt{3}/3\right)^2} = \frac{2\sqrt{3}/3}{1-3/9} = \frac{2\sqrt{3}/3}{2/3} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

(5) $\cot 2a = \frac{\cot^2 a - 1}{2\cot a} = \frac{\cot^2 30 - 1}{2\cot 30} = \frac{\left(\sqrt{3}\right)^2 - 1}{2\sqrt{3}} = \frac{3-1}{2\sqrt{3}} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

16 Funciones seno, coseno y tangente usando el semiángulo.

A partir de las fórmulas de los ángulos dobles, y haciendo $a = \frac{a}{2}$. Se obtienen las fórmulas para los semiángulo.

1) Función seno, haciendo " $a = \frac{a}{2}$ **"**

$$sen\, 2a = 2\, sen\, a \cos a$$

$$sen\, 2 \times \frac{a}{2} = 2 sen \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2}$$

$$sen\, a = 2\, sen \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2}$$

De manera que el seno de un ángulo es igual al doble producto del seno por el coseno del semiángulo.

2) Función coseno, haciendo " $a = \frac{a}{2}$ **"**

$$\cos 2a = \cos^2 a - sen^2 a$$

$$\cos 2 \times \frac{a}{2} = \cos^2 \frac{a}{2} - sen^2 \frac{a}{2}$$

$$\cos a = \cos^2 \frac{a}{2} - sen^2 \frac{a}{2}$$

De manera que el coseno de un ángulo es igual al coseno cuadrado menos el seno cuadrado del semiángulo.

3) Función tangente, haciendo " $a = \frac{a}{2}$ **"**

$$\tan 2a = \frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$$

$$\tan 2\frac{a}{2} = \frac{2\tan \frac{a}{2}}{1-\tan^2 \frac{a}{2}}$$

$$\tan a = \frac{2\tan \frac{a}{2}}{1-\tan^2 \frac{a}{2}}$$

De manera que la tangente de un ángulo es igual al cociente del doble de la tangente del semiángulo; entre la diferencia de "uno" menos el cuadrado de la tangente del semiángulo.

4) Función cotangente, haciendo "*a = a/2*"

$$\cot 2a = \frac{\cot^2 a + 1}{2\cot a}$$

$$\cot 2\frac{a}{2} = \frac{\cot^2 \frac{a}{2} + 1}{2\cot \frac{a}{2}} \quad a = \frac{a}{2}$$

$$\cot a = \frac{\cot^2 \frac{a}{2} + 1}{2\cot \frac{a}{2}}$$

De manera que la cotangente de un ángulo es igual al cociente de "1" más el cuadrado de la tangente del semiángulo; entre el doble de la tangente del semiángulo.

3. Método. Para emplear estas fórmulas, usar valores exactos (Ver página 13)

(1) Se descompone el ∠ dado, en la suma de sus mitades.

(2) Se sustituyen los valores exactos en las fórmula y se simplifica.

(3) Se comprueba el resultado calculando directamente el valor del ángulo, para cada función.

Ejemplo de aplicación: Calcular todas las funciones de un ángulo de 120°, usando valores exactos.

a) Buscamos el equivalente del ∠120°, en función de la suma de dos ángulos iguales:

$$120° = 60° + 60° \therefore \frac{a}{2} = 60°$$

b) Se buscan los valores exactos: $\angle 60° : sen = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos = \frac{1}{2}, \tan = \sqrt{3}, \cot = \frac{\sqrt{3}}{3}$

c) $sen\, a = 2\, sen \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2} = 2\, Sen\, 60 \cos 60 = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\cos a = \cos^2 \frac{a}{2} - sen^2 \frac{a}{2} = \cos^2 60 - sen^2 60 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$

e) $\tan a = \frac{2\tan \frac{a}{2}}{1 - \tan^2 \frac{a}{2}} = \frac{2\tan 60}{1 - \tan^2 60} = \frac{2 \times \sqrt{3}}{1 - \left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{1-3} = \frac{2\sqrt{3}}{-2} = -\sqrt{3}$

f) $\cot a = \frac{\cot^2 \frac{a}{2} - 1}{2\cot \frac{a}{2}} = \frac{\cot^2 60 - 1}{2\cot 60} = \frac{\left(\sqrt{3}/3\right)^2 - 1}{2 \times \sqrt{3}/3} = \frac{3/9 - 1}{2\sqrt{3}/3} = \frac{1/3 - 1}{2\sqrt{3}/3} = \frac{1-3}{2\sqrt{3}} = \frac{-2}{2\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

17 Funciones del ángulo $\frac{a}{2}$ (semi-ángulo), a partir del cos ∠a " Doble"

A partir de la fórmulas "$\cos^2 a + sen^2 a = 1$", fundamental; y $\cos^2 a - sen^2 a = \cos 2a$, ángulo doble. Y haciendo $a = \frac{a}{2}$ se tiene:

$$\cos^2 \frac{a}{2} + sen^2 \frac{a}{2} = 1 \quad (1)$$

$$\cos^2 \frac{a}{2} - sen^2 \frac{a}{2} = \cos a \quad (2).$$

a) Restando 1 de 2: $2sen^2\frac{a}{2}=1-\cos a \therefore$ $sen\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}}$ **...(3)**

De donde el seno del semiángulo es igual a la mitad de la raíz cuadrada de "1" menos el coseno del ángulo,

b) Sumado 1 y 2: $2\cos^2\frac{a}{2}=1+\cos a \therefore$ $\cos\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}$ **...(4)**

De donde el coseno del semiángulo es igual a la raíz cuadrada de la mitad de "1" más el coseno del ángulo.

c) Dividiendo 3 entre 4: $\tan\frac{a}{2}=\frac{sen\frac{a}{2}}{\cos\frac{a}{2}}=\frac{\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}}}{\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}}=\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}\times\frac{2}{1+\cos a}}=\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}}$

(1) De donde la tangente del semiángulo es igual a la raíz cuadrada del cociente de dividir la diferencia de "1" menos el coseno del ángulo; entre la suma de "1" más el coseno del mismo ángulo.

d) Dividiendo 4 entre 3: $ctg\frac{a}{2}=\frac{\cos\frac{a}{2}}{sen\frac{a}{2}}=\frac{\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}}{\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}}}=\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}\times\frac{2}{1-\cos a}}=\sqrt{\frac{1+\cos a}{1-\cos a}}$

(1) De donde la tangente del semiángulo es igual a la raíz cuadrada del cociente de dividir la suma de "1" más el coseno del ángulo; entre la diferencia de "1" menos el coseno del mismo ángulo.

1. **Método. Para emplear estas fórmulas, usar valores exactos de ser posible. (Ver página 13)**
   a) **Se busca el doble del $\angle$ dado.**
   b) **Se sustituyen los valores exactos en las fórmula y se simplifica.**
   c) **Se comprueba el resultado calculando directamente el valor del ángulo, para cada función.**

Ejemplo de aplicación: Calcular todas las funciones de un ángulo de 15°, usando valores exactos.

a) **Buscamos el doble del $\angle 15°$: $\angle 30°$**

b) **Se buscan los valores exactos:** $\angle 30°: sen=\frac{1}{2}, \cos=\frac{\sqrt{3}}{2}, \tan=\frac{\sqrt{3}}{3}, \cot=\sqrt{3}$

c) $sen\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}} \therefore sen15°=\sqrt{\frac{1-\cos 30}{2}}=\sqrt{\frac{1-\sqrt{3}/2}{2}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}/2}{2}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}=0.2588$

d) $\cos\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}} \therefore \cos 15°=\sqrt{\frac{1+\cos 30}{2}}=\sqrt{\frac{1+\sqrt{3}/2}{2}}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}/2}{2}}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}=0.9659$

e) $\tan\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}} \therefore \tan 15=\sqrt{\frac{1-\cos 30}{1+\cos 30}}=\sqrt{\frac{1-\sqrt{3}/2}{1+\sqrt{3}/2}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}=$

$$\sqrt{\frac{(2-\sqrt{3})\times(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})\times(2-\sqrt{3})}}=\sqrt{\frac{(2-\sqrt{3})^2}{2^2-(\sqrt{3})^2}}=\sqrt{\frac{(2-\sqrt{3})^2}{4-3}}=\sqrt{\frac{(2-\sqrt{3})^2}{1}}=2-\sqrt{3}=0.2679$$

f)

$$ctg\,\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos a}{1-\cos a}}\ \therefore\ \tan 15=\sqrt{\frac{1+\cos 30}{1-\cos 30}}=\sqrt{\frac{1+\sqrt{3}/2}{1-\sqrt{3}/2}}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}}=$$

$$\sqrt{\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)\times\left(2+\sqrt{3}\right)}{\left(2+\sqrt{3}\right)\times\left(2+\sqrt{3}\right)}}=\sqrt{\frac{2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}}=\sqrt{\frac{4-3}{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}}=\sqrt{\frac{1}{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}}=\frac{1}{2-\sqrt{3}}=3.7321$$

18 Transformaciones de sumas y diferencias en productos, de funciones.

$$sen\,(a+b)=sen\,a\cos b+sen\,b\cos a\ \ldots(1)$$

$$sen\,(a-b)=sen\,a\cos b-sen\,b\cos a\ \ldots(2)$$

1. Suma y diferencia de senos de dos ángulos.

a) Sumando (1) y (2)

$$\begin{array}{l} sen\,(a+b)=sen\,a\cos b+sen\,b\cos a \\ \underline{sen\,(a-b)=sen\,a\cos b-sen\,b\cos a} \\ sen\,(a+b)+sen\,(a-b)=2\,sen\,a\cos b \end{array}\ \ldots(3)$$

b) Formando las igualdades: $A=a+b$, **y** $B=a-b$

c) Sumándolas tenemos:

$$\begin{array}{l} A=a+b \\ \underline{B=a-b} \\ A+B=2a \end{array}$$

Despejando "a": $a=\dfrac{A+B}{2}$ **...(4)**

d) Restándolas tenemos:

$$\begin{array}{l} A=a+b \\ \underline{B=a-b} \\ A-B=2b \end{array}$$

Despejando "b": $b=\dfrac{A-B}{2}$ **...(5)**

e) Sustituyendo (4) y (5) en (3):

$$sen\,(a+b)+sen\,(a-b)=2\,sen\,a\cos b$$

$$sen\left(\frac{(A+B)}{2}+\frac{(A-B)}{2}\right)+sen\left(\frac{(A+B)}{2}-\frac{(A-B)}{2}\right)=2\,sen\,\frac{(A+B)}{2}\cos\frac{(A-B)}{2}$$

$$sen\,A+sen\,B=2\,sen\,\frac{(A+B)}{2}\cos\frac{(A-B)}{2}$$

De donde la suma de los senos de dos ángulos es igual al doble producto de la semi suma del seno de dichos ángulos, por la semidiferencia del coseno de los mismos.

2. Restando la igualdad (2) de la (1)

$$\begin{array}{l} sen\,(a+b)=sen\,a\cos b+sen\,b\cos a \\ \underline{-sen\,(a-b)=-sen\,a\cos b-sen\,b\cos a} \\ sen\,(a+b)-sen\,(a-b)=2\,sen\,a\cos b \end{array}$$

, sustituyendo (4) y (5) tenemos: $senA-senB=2sen\,\dfrac{(A-B)}{2}\cos\dfrac{(A+B)}{2}$

De donde la diferencia de los senos de dos ángulos es igual al doble producto de la semi diferencia del seno de dichos ángulos, por la semi suma del coseno de los mismos.

3. Suma y diferencia del coseno de dos ángulos.

$$\cos(a+b)=\cos a\cos b-sen\,a\,sen\,b\ \ldots(1)$$

$$\cos(a-b)=\cos a\cos b+sen\,a\,sen\,b\ \ldots(2)$$

a) Sumando (1) y (2):

$$\begin{array}{l} \cos(a+b)=\cos a\cos b-sen\,a\,sen\,b \\ \underline{\cos(a-b)=\cos a\cos b+sen\,a\,sen\,b} \\ \cos(a+b)+\cos(a-b)=2\cos a\cos b \end{array}\ \ldots(3)$$

sustituyendo (4) y (5)

$$\cos A+\cos B=2\cos\frac{(A+B)}{2}\cos\frac{(A-B)}{2}$$

De donde la suma de los cosenos de dos ángulos es igual al doble producto del coseno de la semisuma de dichos ángulos, por el coseno de la semi diferencia de los mismos.

4. **Restando (2) de (1):** $\begin{array}{l} \cos(a+b)=\cos a\cos b-sen\,a\,sen\,b \\ -\cos(a-b)=-\cos a\cos b-sen\,a\,sen\,b \\ \hline \cos(a+b)-\cos(a-b)=-2\,sen\,a\,sen\,b \end{array}$ **...(6) sustituyendo (4) y (5)**

$$\cos A-\cos B=-2sen\frac{(A+B)}{2}sen\frac{(A-B)}{2}$$ **, multiplicando por "– 1"**

$$\cos B-\cos A=2sen\frac{(A+B)}{2}sen\frac{(A-B)}{2}$$

De donde la diferencia de los cosenos de dos ángulos es igual al doble producto del seno de la semisuma de dichos ángulos, por el seno de la semi diferencia de los mismos.

5. **Suma de tangentes.**

a) **A partir de:** $\tan A+\tan B=\frac{senA}{\cos A}+\frac{senB}{\cos B}=\frac{senA\cos B+senB\cos A}{CosA\cos B}$ **..(1)**

Como. $senA\cos B+senB\cos A=sen(A+B)$**; reemplazando en (1)**

$$\tan A+\tan B=\frac{sen(A+B)}{\cos A\cos B}$$

6. **Diferencia de tangentes.**

a) **A partir de:** $\tan A-\tan B=\frac{senA}{\cos A}-\frac{senB}{\cos B}=\frac{senA\cos B-senB\cos A}{\cos A\cos B}$**...(2)**

b) **Como:** $sen(A-B)=senA\cos B-senB\cos A$**; reemplazando en (2)**

c) $\tan A-\tan B=\frac{sen(A-B)}{\cos A\cos B}$

7. **Método. Para emplear estas fórmulas, usar valores exactos de ser posible. (Ver página 13)**

a) **Se usan para demostraciones, y simplificación de funciones en cálculo .**

b) **Se sustituyen los valores en las fórmula y se simplifica.**

c) **Se comprueba el resultado calculando directamente el valor del ángulo, para cada función.**

Ejemplo de aplicación en demostración: Comprobar que $tgt\,30°+tgt\,60°=\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

a) **Se buscan los valores exactos:** $\angle 30°: sen=\frac{1}{2},\cos=\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $tgt\,30°+tgt60°=\frac{sen\,(30°+60°)}{\cos(30°+60°)}=\frac{sen90°}{\cos 30°\cos 60°}=\frac{1}{\sqrt{3}/2\times 1/2}=\frac{1}{\sqrt{3}/4}=\frac{4}{\sqrt{3}}=\frac{4\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

Ejemplo en cálculo de valor: Calcular el valor de la expresión $\frac{sen55°+sen35°}{csn35°-csn55°}$

a) $\frac{sen55°+sen\,35°}{\cos 35°-\cos 55°}=\frac{2\,sen\frac{(55°+35°)}{2}\cos\frac{(55°-35°)}{2}}{2\,sen\frac{(55°+35°)}{2}sen\frac{(55°-35°)}{2}}=\frac{2\,sen\frac{90°}{2}\cos\frac{20°}{2}}{2\,sen\frac{90°}{2}sen\frac{20°}{2}}=\frac{\cos 10°}{sen\,10°}=ctg\,10°=5.6713$

TABLA DE FUNCIONES.

PITAGÓRICAS	ÁNGULOS DOBLES	ÁNGULOS MEDIOS (SEMIÁNGULOS)
$a^2+b^2=c^2\ \therefore\ Sen^2A+Cos^2A=1$ $Sen^2A=1-Cos^2A$ $Cos^2A=1-Sen^2A$	$sen\,2a=2\,sen\,a\cos a$	$sen\,a=2\,sen\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}$

$Sec^2 A - Tan^2 A = 1$ $Sec^2 A = Tan^2 A + 1$ $Tan^2 A = Sec^2 A - 1$	$\cos 2a = \cos^2 a - sen^2 a$	$\cos a = \cos^2 \frac{a}{2} - sen^2 \frac{a}{2}$
$Csc^2 A - Cot^2 A = 1$ $Csc^2 A = 1 + Cot^2 A$ $Cot^2 A = Csc^2 A - 1$	$\tan 2a = \frac{2\tan a}{1-\tan^2}$	$\tan a = \frac{2\tan\frac{a}{2}}{1-\tan^2\frac{a}{2}}$
SUMA DE DOS ÁNGULOS	$\cot 2a = \frac{\cot^2 a + 1}{2\cot a}$	$\cot a = \frac{\cot^2\frac{a}{2}+1}{2\cot\frac{a}{2}}$
$Sen(A+B) = Sen\,A\,Cos\,B + Sen\,B\,Cos\,A$		
$\cos(a+b) = \cos a \cos b - sen\,a\,sen\,b$	**TRANSFORMACIÓN DE SUMAS EN PRODUCTO**	**SEMIÁNGULOS EN FUNCIÓN DEL "COSENO" DEL ÁNGULO**
$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1-\tan a \tan b}$	$Sen\,A + Sen\,B = 2\,Sen\frac{(A+B)}{2}Cos\frac{(A-B)}{2}$	$sen\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos a}{2}}$
$ctg(a+b) = \frac{\cot a \cot b - 1}{\cot b + \cot a}$	$Sen\,A - Sen\,B = 2\,Sen\frac{(A-B)}{2}\,Cos\frac{(A+B)}{2}$	$\cos\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}$
DIFERENCIA DE DOS ÁNGULOS	$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{(A+B)}{2}\cos\frac{(A-B)}{2}$	$tgt\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}}$
$sen(a-b) = sen\,a\cos b - sen\,b\cos a$	$\cos B - \cos A = 2\,sen\frac{(A+B)}{2}sen\frac{(A-B)}{2}$	$ctg\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos a}{1-\cos a}}$
$\cos(a-b) = \cos a \cos b + sen\,a\,sen\,b$	$\tan A + \tan B = \frac{sen(A+B)}{\cos A \cos B}$	
$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1+\tan a \tan b}$	$\tan A - \tan B = \frac{sen(A-B)}{\cos A \cos B}$	
$ctg(a-b) = \frac{\cot a \cot b + 1}{\cot b - \cot a}$		

ECUACIONES TRIGONOM{ETRICAS.

DEFINICIÓN.- ***Ecuación trigonométrica es la igualdad entre razones trigonométricas del mismo ángulo. Que como tal solo se satisface para cierto valor del ángulo.***

.

Las ecuaciones pueden ser de cualquier grado, simples o simultáneas.

Para resolverlas:

1. Se deben reducir a una sola razón equivalente.
2. Empleando los métodos o procedimientos algebraicos, se determinan su raíz o raíces. Sin que exista un método fijo o determinado.

Ejemplos.

Funciones cuyas variables son funciones de ángulos de 30, 45 o 60 grados. Referidos a sus valores exactos (Ver la tabla correspondiente 13)

Método de reducción a una función de 2º grado, aplicando las fórmulas: General, particular en sus formas completas o incompletas.

1 $3\tan a + 3\cot a = 4\sqrt{3}$.

a) Se busca la función equivalente entre tangente y cotangente.- $\cot a = \frac{1}{\tan a}$ De donde la ecuación se transforma en: $3\tan a + 3\frac{1}{\tan a} = 4\sqrt{3}$

b) Eliminando el denominador, multiplicando toda la ecuación por "$\tan a$" tenemos: $3\tan^2 a + 3 = 4\sqrt{3}\tan a$

c) Transponiendo todos los términos al primer miembro.- $3\tan^2 - 4\sqrt{3}\tan a + 3 = 0$ Por lo que se convierte en una ecuación de 2º grado de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ Siendo $"x" = \tan a; a = 3; b = -4\sqrt{3}; c = +3$

d) Aplicando la fórmula general:

$$\tan a = \frac{4\sqrt{3} \pm \sqrt{(-4\sqrt{3})^2 - (4\times 3\times 3)}}{2\times 3} = \frac{4\sqrt{3} \pm \sqrt{(16\times 3) - (36)}}{6} = \frac{4\sqrt{3} \pm \sqrt{48-36}}{6} =$$

$$= \frac{4\sqrt{3} \pm \sqrt{12}}{6} = \frac{4\sqrt{3} \pm \sqrt{4\times 3}}{6} = \frac{4\sqrt{3} \pm 2\sqrt{3}}{6}$$

Porlo

$$\tan a_1 = \frac{4\sqrt{3} + 2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}(4+2)}{6} = \frac{6\sqrt{3}}{6} = \sqrt{3} \therefore a_1 = 60^o$$

$$\tan a_2 = \frac{4\sqrt{3} - 2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}(4-2)}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} \therefore a_2 = 30^o$$

***Verificación*:**

$$3\tan 60^o + 3\cot 60^o = 3\sqrt{3} + 3\frac{\sqrt{3}}{3} = 3\sqrt{3} + \sqrt{3} = 4\sqrt{3}\ l.q.q.d.$$

$$3\tan 30^o + 3\cot 30^o = 3\frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} = \sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 4\sqrt{3}\ l.q.q.d.$$

2 $2\,sen\,a + \cos^2 a = \frac{7}{4}$

a) Siendo $\cos^2 a = 1 - sen^2$ se sustituye en la ecuación.- $2\,sen\,a + 1 - sen^2 a = \frac{7}{4}$

b) Se transponen los términos al primer miembro**.-** $2\,sen\,a + 1 - sen^2 a - \frac{7}{4} = 0$

c) Se elimina el denominador del término independiente, multiplicando por "4" la ecuación**.-** $8\,sen\,a + 4 - 4sen^2 a - 7 = 0$

d) Se ordena la ecuación, se reducen términos y se identifican las equivalencias**.-** $4\,sen^2 a - 8\,sen\,a + 3 = 0$ De donde **"a = 4; b = -8 y c = 3"**

e) Se aplica la fórmula general, y se resuelve.-

$$sen\ a = \frac{8 \pm \sqrt{(8)^2 - (4\times 4\times 3)}}{2\times 4} = \frac{8 \pm \sqrt{64-48}}{2\times -4} = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{8} = \frac{8\pm 4}{8}$$

$$sen\ a_1 = \frac{8+4}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} \therefore \textit{Siendo el límite de seno} \pm 1,\ \textit{este valor se descarta}$$

$$sen\ a_2 = \frac{8-4}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \therefore \angle a = 30^o$$

f) Verificando.- $2\,sen\,30^o + \cos^2 30^o = 2\times\frac{1}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}\ l.q.q.d.$

3 $\cos(a+b) = \frac{1}{2}; \cos(a-b) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

a) Siendo $\frac{1}{2} = \cos 60^o$, y $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30^o$ Se reemplazan estos valores en las ecuaciones de manera que $(a+b) = 60^o$, $(a-b) = 30^o$

b) Sumando ambas igualdades: $\begin{array}{rcrcl} a & + & b & = & 60^o \\ a & - & b & = & 30^o \\ \hline 2a & + & 0 & = & 90^o \end{array}$ **de donde** $a = \frac{90}{2} = 45^o$

c) Restando ambas igualdades: $\begin{array}{rcrcl} +a & + & b & = & +60^o \\ -a & + & b & = & -30^o \\ \hline +0 & + & 2b & = & +30^o \end{array}$ **de donde** $b = \frac{30}{2} = 15^o$

d) Por lo que $\angle a = 45^o$ **y** $\angle b = 15^o$

e) Comprobando: $\cos(45+15) = \cos 60^o = \frac{1}{2}$ $l.q.q.d.$; $\cos(45-15) = \cos 30^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $l.q.q.d.$

4 $sen^2 a = 3\cos^2 a$

a) Siendo $sen^2 = 1 - sen^2 a$ **y reemplazando en la ecuación tenemos:**

$sen^2 a = 3(1 - sen^2 a) \therefore sen^2 a = 3 - 3sen^2 a$

b) Transponiendo al primer miembro: $sen^2 a + 3sen^2 a - 3 = 0 \therefore 4sen^2 a - 3 = 0$

c) Despejando: $sen\, a = \pm\sqrt{\frac{3}{4}} \therefore sen\, a = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) De donde: $\angle a_1 = +\frac{\sqrt{3}}{2} = 60^o$ **, y** $\angle a_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} = 240^o$

e) Comprobando: $sen^2 a = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$ **y** $\cos^2 a = 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$**, de donde** $\frac{3}{4} \equiv \frac{3}{4}$ ***l. q. q. d.***

5 $\sec a = \sqrt{2}\tan a$

a) Siendo: $\sec a = \sqrt{\tan^2 a + 1}$ **Reemplazamos en la ecuación,** $\sqrt{\tan^2 a + 1} = \sqrt{2}\tan a$

b) Elevando al cuadrado la ecuación: $\tan^2 a + 1 = 2\tan^2 a$

c) Transponiendo al primer miembro tenemos: $-\tan^2 a - 1 + 2\tan^2 a = 0 \therefore \tan^2 a - 1 = 0$

d) Despejando: $\tan a = \pm\sqrt{1} = \pm 1$**, de donde** $\angle a = \pm 45^o$

e) Comprobando: $\sec a = \sqrt{2}\tan a \therefore \sec 45^o = \sqrt{2}\tan 45^o$ **De donde** $\sqrt{2} = \sqrt{2} \times 1 \therefore \sqrt{2} \equiv \sqrt{2}$ ***l. q. q. d.***

6 Sistemas.- Resolver: $\begin{array}{lcl} \tan\ (A + B) & = & \sqrt{3} \\ \tan\ (A - B) & = & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{array}$

a) Siendo $\tan\sqrt{3} = 60^o$ **y** $\tan\frac{\sqrt{3}}{3} = 30^o$ **Sumando las igualdades:** $\begin{array}{lcrcl} \tan & (A & + & B) & = & 60^o \\ \tan & (A & - & B) & = & 30^o \\ \hline \tan & 2A & + & 0 & = & 90^o \end{array}$

b) Despejando: $A = 90 \div 2 = 45^o$

c) Restando las igualdades: $\begin{array}{lcrcl} \tan & (A & + & B) & = & +60^o \\ \tan & (-A & + & B) & = & -30^o \\ \hline \tan & +0 & + & 2B & = & +30^o \end{array}$

d) Despejando: $B = 30 \div 2 = 15^o$

e) Comprobando: $\begin{array}{lcl} \tan\ (45^o + 15^o) & = & \sqrt{3} \\ \tan\ (45^o - 15)^o & = & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{array}$ **De donde** $\begin{array}{lcl} \tan\ 60^o & = & \sqrt{3} \\ \tan\ 30^o & = & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{array}$ ***l. q. q. d.***

7 Siendo $\cos C = \frac{\sqrt{3}}{2} = 30^o \therefore \angle C = 30^o$ **; Resolver** $\begin{array}{lcl} \tan\ (C + B) & = & \sqrt{3} \\ sen\ (A - (C + B) & = & 0 \end{array}$

a) Como $\tan(C + B) = \sqrt{3} = 60^o$**, y** $\angle C = 30^o$ **Reemplazando en las igualdades tenemos:**

$\begin{array}{lcl} \tan\ (30 + B) & = & 60 \quad \therefore B = 30^o \\ sen\ (A - (30 + 30) & = & 0 \therefore A = 60^o \end{array}$

b) Comprobando: $\begin{array}{l} \tan\ (30\ +\ 30)\ =\ \tan 60^{o}\ =\sqrt{3} \\ sen\ (60\ -\ (30\ +\ 30)\ =0 \end{array}$ *l. q. q. d.*

8 Resolver: $\tan 2x = 3\tan x$

a) Como $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$ **Reemplazando en la igualdad tenemos** $\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x} = 3\tan x$

b) Dividiendo la igualdad entre $\tan x$**, tenemos:** $\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x} \div \tan x = 3\tan x \div \tan x \therefore \dfrac{2\tan x}{\tan x\,(1-\tan^2 x)} = \dfrac{3\tan x}{\tan x}$

c) Simplificando: $\dfrac{2}{1-\tan^2 x} = 3$

d) Quitando denominador: $2 = 3 - 3\tan^2 x \therefore 3\tan^2 x = 1$

e) Resolviendo: $\tan x = \pm\sqrt{\dfrac{1}{3}} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}} \therefore x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = 30^{o}\,;\, x_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} = 150^{o}$ **Equivalencia en radianes** $\angle 30^{o} = \dfrac{1}{6}\pi$ **y** $\angle 150^{o} = \dfrac{5}{6}\pi$

f) Considerando las raíces encontradas, además del correspondiente a 0º; estos valores se repiten dentro del intervalo $0^{o} \le x \le 360^{o}$**, en los siguientes ángulos:**

$\angle x^{o}$	0º	30º	150º	180º	210º	330º	360º
$\angle x$ *radianes*	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	0

g) Comprobando: $\tan 2x = 3\tan x$ **.-**

$$\tan\,(2\times 30^{o}) = 3\tan 30^{o} \therefore \tan 60 = 3\times\tan 30 \therefore \sqrt{3} = 3\times\frac{1}{\sqrt{3}}$$

reduciendo el 2º miembro : $\sqrt{3} = \sqrt{\dfrac{9}{3}} \therefore \sqrt{3} \equiv \sqrt{3}$ *l.q.q.d.*

Comentario [PRVC29]: Buscando equivalencias de las funciones de ángulos dobles, aplicamos la correspondiente a la tangente (Activando el ícono se escucha la igualdad)

Comentario [PRVC30]: Buscando equivalencias de las funciones de ángulos dobles, aplicamos la correspondiente a la tangente (Activando el ícono se escucha la igualdad)

TABLA DE FÓRMULAS

FÓRMULA	USO – APLICACIÓN	PÁG.
$c = 2\times\pi\times r$	Longitud de la circunferencia	4
$arco = \dfrac{grados}{180}\times\pi$	Conversión de grados a arco de circunferencia (longitud)	4
$grados = \dfrac{arco}{\pi}\times 180$	Conversión de arco (longitud) a grados	5
$radián = \dfrac{grados}{57.3}$	Conversión de grados a radianes	5
$grados = radián\times 57.3$	Conversión de radián a grados	5
$arco = \dfrac{radián}{\pi}$	Conversión de radián a arco de circunferencia	5
$radián = arco\times\pi$	Conversión de arco de circunferencia, a radián	5
$\angle A + \angle B + \angle C = 180^{o}$	Suma de los ángulos interiores de todo triángulo	8
$sen\angle\Theta = \dfrac{y}{r};\ si"r" = 1 \therefore sen\angle\Theta = y$	Función seno, círculo trigonométrico.	12
$\cos\angle\Theta = \dfrac{x}{r};\ si"r" = 1 \therefore \cos\angle\Theta = x$	Función coseno, círculo trigonométrico	12
$tg\angle\Theta = \dfrac{y}{x}$	Función tangente, círculo trigonométrico	13

TRIGONOMETRÍA

$\cot\angle\Theta = \frac{x}{y}$	Función cotangente, círculo trigonométrico	13
$\sec\angle\Theta = \frac{r}{x}; si"r"=1 \therefore \sec\angle\Theta = \frac{1}{x} \therefore$ $\sec\angle\Theta = \frac{1}{sen\angle\Theta} = \cos\angle\Theta$	Función secante, círculo trigonométrico	13
$\csc\angle\Theta = \frac{r}{y};\ si"r"=1 \therefore \sec\angle\Theta = \frac{1}{y} \therefore$ $\sec\angle\Theta = \frac{1}{\cos\angle\Theta} = sen\angle\Theta$	Función cosecante, círculo trigonométrico	13
$\csc\theta = \frac{1}{sen\,\theta}$	Funciones recíprocas	15
$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$	Funciones recíprocas	15
$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$	Funciones recíprocas	15
$\tan\theta = \frac{sen\,\theta}{\cos\theta}$	Funciones cocientes	15
$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{sen\,\theta}$	Funciones cocientes	15
$a^2+b^2=c^2 \therefore sen^2A+\cos^2A=1$	Identidad fundamental, funciones Pitagóricas	15
$\tan^2A+1=\sec^2A$ $\tan^2A=\sec^2A-1$	Funciones Pitagóricas, tangente	15
$1+\cot^2A=\csc^2A$ $\cot^2A=\csc^2A-1$	Funciones Pitagóricas, cotangente	15

FÓRMULA	USO – APLICACIÓN	PÁG.
$\angle B = \frac{b}{a}sen^{-1}; \angle B = \frac{c}{a}\cos^{-1}$	Triángulos rectángulos valor del ángulo “B”, conociendo la hipotenusa y un cateto	16
$\angle C = \frac{c}{a}sen^{-1}; \angle C = \frac{b}{a}\cos^{-1}$	Triángulos rectángulos valor del ángulo “C” ;conociendo la hipotenusa y un cateto	17
$\angle B = \frac{b}{c}tg^{-1}; \angle B = \frac{c}{b}tg^{-1}, \frac{1}{x}$	Triángulos rectángulos valor del ángulo “B” ;conociendo los catetos	16
$\angle C = \frac{c}{b}tg^{-1}; \angle C = \frac{b}{c}tg^{-1}, \frac{1}{x}$	Triángulos rectángulos valor del ángulo “C” ;conociendo los catetos	17
$\frac{a}{sen\angle A} = \frac{b}{sen\angle B} = \frac{c}{sen\angle C}$	Triángulos “No” rectángulos, ley de senos	18
$\angle A = \left(a \times \frac{sen\angle B}{b}\right)sen^{-1}; \angle A = \left(a \times \frac{sen\angle C}{c}\right)sen^{-1}$	Triángulos “No” rectángulos, ley de senos: Cálculo del ángulo “A”	18
$\angle B = \left(b \times \frac{sen\angle A}{a}\right)sen^{-1}; \angle B = \left(b \times \frac{sen\angle C}{c}\right)sen^{-1}$	Triángulos “No” rectángulos, ley de senos: Cálculo del ángulo “B”	21
$\angle C = \left(c \times \frac{sen\angle A}{a}\right)sen^{-1}; \angle C = \left(c \times \frac{sen\angle B}{b}\right)sen^{-1}$	Triángulos “No” rectángulos, ley de senos: Cálculo del ángulo “C”	16
$a = \left(sen\angle A \times \frac{b}{sen\angle B}\right); a = \left(sen\angle A \times \frac{c}{sen\angle C}\right)$	Triángulos “No” rectángulos, ley de senos: Cálculo del lado “a”	19

$b=\left(sen\angle B\times\frac{a}{sen\angle A}\right);b=\left(sen\angle B\times\frac{c}{sen\angle C}\right)$	Triángulos "No" rectángulos, ley de senos: Cálculo del lado "b"	21
$c=\left(sen\angle C\times\frac{a}{sen\angle A}\right);c=\left(sen\angle C\times\frac{b}{sen\angle B}\right)$	Triángulos "No" rectángulos, ley de senos: Cálculo del lado "c"	18
$a=\sqrt{(b^2+c^2)-(2\times b\times c\times\cos\angle A)}$	Triángulos "No" rectángulos, ley de cósenos: Cálculo del lado "a"	20
$b=\sqrt{(a^2+c^2)-(2\times a\times c\times\cos\angle B)}$	Triángulos "No" rectángulos, ley de cósenos: Cálculo del lado "b"	20
$c=\sqrt{(a^2+b^2)-(2\times a\times b\times\cos\angle C)}$	Triángulos "No" rectángulos, ley de cósenos: Cálculo del lado "c"	21
$\angle A=\left[\frac{(b^2+c^2)-a^2}{2\times b\times c}\right]\cos^{-1}$	Triángulos "No" rectángulos, ley de cósenos: Cálculo del ángulo "A"	21
$\angle B=\left[\frac{(a^2+c^2)-b^2}{2\times a\times c}\right]\cos^{-1}$	Triángulos "No" rectángulos, ley de cósenos: Cálculo del ángulo "B"	21
$\angle C=\left[\frac{(a^2+b^2)-c^2}{2\times a\times b}\right]\cos^{-1}$	Triángulos "No" rectángulos, ley de cosenos: Cálculo del ángulo "C"	21
$A=\sqrt{s(s-a)\times(s-b)\times(s-c)}:s=\frac{a+b+c}{2}$	Cálculo del área de un triángulo, conociendo sus lados	21
$h=c\times senB;h=b\times senC$	Altura triángulos no rectángulo. Base lado a.	21
$h=a\times senC;h=c\times senA$	Altura triángulos no rectángulo. Base lado b.	21
$h=b\times senA;h=a\times sen\mathrm{B}$	Altura triángulos no rectángulo. Base lado c	21
$S=\frac{1}{2}a\times b\times SenC$	Cálculo de áreas conociendo dos lados, y $\angle$ comprendido	21
$S=\frac{1}{2}b\times c\times SenA$	Cálculo de áreas conociendo dos lados, y $\angle$ comprendido	21
FÓRMULA	**USO – APLICACIÓN**	**PÁG.**
$S=\frac{1}{2}a\times c\times SenB$	Cálculo de áreas conociendo dos lados, y $\angle$ comprendido	21
$sen(a+b)=sen\,a\cos b+sen\,b\cos a$	Función seno de la suma de dos ángulos	22
$\cos(a+b)=\cos a\cos b-sen\,a\,sen\,b$	Función coseno de la suma de dos ángulos	22
$\tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}$	Función tangente de la suma de dos ángulos	23
$ctg(a+b)=\frac{\cot a\cot b-1}{\cot b+\cot a}$	Función cotangente de la suma de dos ángulos	23
$sen(a-b)=sen\,a\cos b-sen\,b\cos a$	Función seno de la diferencia de dos ángulos	24
$\cos(a-b)=\cos a\cos b+sen\,a\,sen\,b$	Función coseno de la diferencia de dos ángulos	24
$\tan(a-b)=\frac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\tan b}$	Función tangente de la diferencia de dos ángulos	24
$ctg(a-b)=\frac{\cot a\cot b+1}{\cot b-\cot a}$	Función cotangente de la diferencia de dos ángulos	24
$sen\,2a=2\,sen\,a\cos a$	Función seno de ángulo doble	25
$\cos 2a=\cos^2 a-sen^2 a$	Función coseno de ángulo doble	25
$\tan 2a=\frac{2\tan a}{1-\tan^2}$	Función tangente de ángulo doble	25
$\cot 2a=\frac{\cot^2 a+1}{2\cot a}$	Función cotangente de ángulo doble	25

TRIGONOMETRÍA

$sen\, a = 2\, sen \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2}$	Función seno, a partir del semi ángulo	26
$\cos a = \cos^2 \frac{a}{2} - sen^2 \frac{a}{2}$	Función coseno, a partir del semi ángulo	26
$\tan a = \dfrac{2 \tan \frac{a}{2}}{1 - \tan^2 \frac{a}{2}}$	Función tangente, a partir del semi ángulo	26
$\cot a = \dfrac{\cot^2 \frac{a}{2} + 1}{2 \cot \frac{a}{2}}$	Función tangente, a partir del semi ángulo	27
$sen \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}}$	Función seno del semi ángulo, usando ángulo doble	28
$\cos \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}}$	Función coseno del semi ángulo, usando ángulo doble	28
$tgt \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos a}{1 + \cos a}}$	Función tangente del semi ángulo, usando ángulo doble	28
$ctg \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos a}{1 - \cos a}}$	Función cotangente del semi ángulo, usando ángulo doble	28
$senA + senB = 2\, sen \frac{(A+B)}{2} \cos \frac{(A-B)}{2}$	Transformación de suma de senos, en producto	29
$senA - senB = 2\, sen \frac{(A-B)}{2} \cos \frac{(A+B)}{2}$	Transformación de diferencia de senos, en producto	29
$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{(A+B)}{2} \cos \frac{(A-B)}{2}$	Transformación de suma de cosenos, en producto	29
FÓRMULA	**USO – APLICACIÓN**	**PÁG.**
$\cos B - \cos A = 2\, sen \frac{(A+B)}{2}\, sen \frac{(A-B)}{2}$	Transformación de diferencia de cosenos, en producto	30
$\tan A + \tan B = \dfrac{sen(A+B)}{\cos A \cos B}$	Transformación de suma de tangentes, en producto	30
$\tan A - \tan B = \dfrac{sen(A-B)}{\cos A \cos B}$	Transformación de diferencia de tangentes, en producto	30

Hipervínculo: Con hoja de cálculo para aplicación de fórmulas.

46

TABLAS DE LOGARITMOS

SENO NATURAL — INTERPOLACIÓN (SUMAR)

°	0'	10'	20'	30'	40'	50'	1'	2'	3'	4'	5'	6'	7'	8'	9'
0	0	0.0029	0.0058	0.0087	0.0116	0.0145	0.0003	0.0006	0.0009	0.0012	0.0015	0.0017	0.002	0.0023	0.0026
1	0.0175	0.0204	0.0233	0.0262	0.0291	0.032	0.0003	0.0006	0.0009	0.0012	0.0015	0.0017	0.002	0.0023	0.0026
2	0.0349	0.0378	0.0407	0.0436	0.0465	0.0494	0.0003	0.0006	0.0009	0.0012	0.0015	0.0017	0.002	0.0023	0.0026
3	0.0523	0.0552	0.0581	0.061	0.0639	0.0668	0.0003	0.0006	0.0009	0.0012	0.0015	0.0017	0.002	0.0023	0.0026
4	0.0698	0.0726	0.0755	0.0784	0.0813	0.0843	0.0003	0.0006	0.0009	0.0012	0.0014	0.0017	0.002	0.0023	0.0026
5	0.0872	0.09	0.0929	0.0958	0.0987	0.1016	0.0003	0.0006	0.0009	0.0012	0.0014	0.0017	0.002	0.0023	0.0026
6	0.1045	0.1074	0.1103	0.1132	0.1161	0.119	0.0003	0.0006	0.0009	0.0012	0.0014	0.0017	0.002	0.0023	0.0026
7	0.1219	0.1248	0.1277	0.1306	0.1335	0.1363	0.0003	0.0006	0.0009	0.0012	0.0014	0.0017	0.002	0.0023	0.0026
8	0.1392	0.1421	0.145	0.1479	0.1508	0.1536	0.0003	0.0006	0.0009	0.0012	0.0014	0.0017	0.002	0.0023	0.0026
9	0.1564	0.1593	0.1622	0.165	0.1679	0.1708	0.0003	0.0006	0.0009	0.0012	0.0014	0.0017	0.002	0.0023	0.0026
10	0.1736	0.1765	0.1794	0.1822	0.1851	0.188	0.0003	0.0006	0.0009	0.0011	0.0014	0.0017	0.002	0.0023	0.0026
11	0.1908	0.1937	0.1965	0.1994	0.2022	0.2051	0.0003	0.0006	0.0009	0.0011	0.0014	0.0017	0.002	0.0023	0.0026
12	0.2079	0.2108	0.2136	0.2164	0.2193	0.2221	0.0003	0.0006	0.0009	0.0011	0.0014	0.0017	0.002	0.0023	0.0026
13	0.225	0.2278	0.2306	0.2334	0.2363	0.2391	0.0003	0.0006	0.0008	0.0011	0.0014	0.0017	0.002	0.0023	0.0025
14	0.2419	0.2447	0.2475	0.2504	0.2532	0.256	0.0003	0.0006	0.0008	0.0011	0.0014	0.0017	0.002	0.0023	0.0025
15	0.2588	0.2616	0.2644	0.2672	0.27	0.2728	0.0003	0.0006	0.0008	0.0011	0.0014	0.0017	0.002	0.0022	0.0025
16	0.2756	0.2784	0.2812	0.284	0.2868	0.2896	0.0003	0.0006	0.0008	0.0011	0.0014	0.0017	0.002	0.0022	0.0025
17	0.2924	0.2952	0.2979	0.3007	0.3035	0.3062	0.0003	0.0006	0.0008	0.0011	0.0014	0.0017	0.0019	0.0022	0.0025
18	0.309	0.3118	0.3145	0.3173	0.3201	0.3228	0.0003	0.0006	0.0008	0.0011	0.0014	0.0017	0.0019	0.0022	0.0025
19	0.3256	0.3283	0.3311	0.3338	0.3365	0.3393	0.0003	0.0005	0.0008	0.0011	0.0014	0.0016	0.0019	0.0022	0.0025
20	0.342	0.3448	0.3475	0.3502	0.3529	0.3557	0.0003	0.0005	0.0008	0.0011	0.0014	0.0016	0.0019	0.0022	0.0025
21	0.3584	0.3611	0.3638	0.3665	0.3692	0.3719	0.0003	0.0005	0.0008	0.0011	0.0014	0.0016	0.0019	0.0022	0.0024
22	0.3746	0.3773	0.38	0.3827	0.3854	0.3881	0.0003	0.0005	0.0008	0.0011	0.0013	0.0016	0.0019	0.0021	0.0024
23	0.3907	0.3934	0.3961	0.3987	0.4014	0.4041	0.0003	0.0005	0.0008	0.0011	0.0013	0.0016	0.0019	0.0021	0.0024
24	0.4067	0.4094	0.412	0.4147	0.4173	0.42	0.0003	0.0005	0.0008	0.0011	0.0013	0.0016	0.0019	0.0021	0.0024
25	0.4226	0.4253	0.4279	0.4305	0.4331	0.4358	0.0003	0.0005	0.0008	0.0011	0.0013	0.0016	0.0018	0.0021	0.0024
26	0.4384	0.441	0.4436	0.4462	0.4488	0.4514	0.0003	0.0005	0.0008	0.001	0.0013	0.0016	0.0018	0.0021	0.0023
27	0.454	0.4566	0.4592	0.4617	0.4643	0.4669	0.0003	0.0005	0.0008	0.001	0.0013	0.0015	0.0018	0.0021	0.0023
28	0.4695	0.472	0.4746	0.4772	0.4797	0.4823	0.0003	0.0005	0.0008	0.001	0.0013	0.0015	0.0018	0.002	0.0023
29	0.4848	0.4874	0.4899	0.4924	0.495	0.4975	0.0003	0.0005	0.0008	0.001	0.0013	0.0015	0.0018	0.002	0.0023
30	0.5	0.5025	0.505	0.5075	0.51	0.5125	0.0003	0.0005	0.0008	0.001	0.0013	0.0015	0.0018	0.002	0.0023
31	0.515	0.5175	0.52	0.5225	0.525	0.5275	0.0002	0.0005	0.0007	0.001	0.0012	0.0015	0.0017	0.002	0.0022
32	0.5299	0.5324	0.5348	0.5373	0.5398	0.5422	0.0002	0.0005	0.0007	0.001	0.0012	0.0015	0.0017	0.002	0.0022
33	0.5446	0.5471	0.5495	0.5519	0.5544	0.5568	0.0002	0.0005	0.0007	0.001	0.0012	0.0015	0.0017	0.0019	0.0022
34	0.5592	0.5616	0.564	0.5664	0.5688	0.5712	0.0002	0.0005	0.0007	0.001	0.0012	0.0014	0.0017	0.0019	0.0022
35	0.5736	0.576	0.5783	0.5807	0.5831	0.5854	0.0002	0.0005	0.0007	0.0009	0.0012	0.0014	0.0017	0.0019	0.0021
36	0.5878	0.5901	0.5925	0.5948	0.5972	0.5995	0.0002	0.0005	0.0007	0.0009	0.0012	0.0014	0.0016	0.0019	0.0021
37	0.6018	0.6041	0.6065	0.6088	0.6111	0.6134	0.0002	0.0005	0.0007	0.0009	0.0012	0.0014	0.0016	0.0018	0.0021
38	0.6157	0.618	0.6202	0.6225	0.6248	0.6271	0.0002	0.0005	0.0007	0.0009	0.0011	0.0014	0.0016	0.0018	0.002
39	0.6293	0.6316	0.6338	0.6361	0.6383	0.6406	0.0002	0.0004	0.0007	0.0009	0.0011	0.0013	0.0016	0.0018	0.002
40	0.6428	0.645	0.6472	0.6494	0.6516	0.6539	0.0002	0.0004	0.0007	0.0009	0.0011	0.0013	0.0015	0.0018	0.002
41	0.6561	0.6583	0.6604	0.6626	0.6648	0.667	0.0002	0.0004	0.0007	0.0009	0.0011	0.0013	0.0015	0.0017	0.002
42	0.6691	0.6713	0.6734	0.6756	0.6777	0.6799	0.0002	0.0004	0.0006	0.0009	0.0011	0.0013	0.0015	0.0017	0.0019
43	0.682	0.6841	0.6862	0.6884	0.6905	0.6926	0.0002	0.0004	0.0006	0.0008	0.0011	0.0013	0.0015	0.0017	0.0019
44	0.6947	0.6967	0.6988	0.7009	0.703	0.705	0.0002	0.0004	0.0006	0.0008	0.001	0.0012	0.0015	0.0017	0.0019

SENO NATURAL **INTERPOLACIÓN (SUMAR)**

°	0'	10'	20'	30'	40'	50'	1'	2'	3'	4'	5'	6'	7'	8'	9'
45	0.7071	0.7092	0.7112	0.7133	0.7153	0.7173	0.0002	0.0004	0.0006	0.0008	0.001	0.0012	0.0014	0.0016	0.0018
46	0.7193	0.7214	0.7234	0.7254	0.7274	0.7294	0.0002	0.0004	0.0006	0.0008	0.001	0.0012	0.0014	0.0016	0.0018
47	0.7314	0.7333	0.7353	0.7373	0.7393	0.7412	0.0002	0.0004	0.0006	0.0008	0.001	0.0012	0.0014	0.0016	0.0018
48	0.7431	0.7451	0.747	0.749	0.7509	0.7528	0.0002	0.0004	0.0006	0.0008	0.001	0.0012	0.0013	0.0015	0.0017
49	0.7547	0.7566	0.7585	0.7604	0.7623	0.7642	0.0002	0.0004	0.0006	0.0008	0.0009	0.0011	0.0013	0.0015	0.0017
50	0.766	0.7679	0.7698	0.7716	0.7735	0.7753	0.0002	0.0004	0.0006	0.0007	0.0009	0.0011	0.0013	0.0015	0.0017
51	0.7771	0.779	0.7808	0.7826	0.7844	0.7862	0.0002	0.0004	0.0005	0.0007	0.0009	0.0011	0.0013	0.0014	0.0016
52	0.788	0.7898	0.7916	0.7934	0.7951	0.7969	0.0002	0.0004	0.0005	0.0007	0.0009	0.0011	0.0012	0.0014	0.0016
53	0.7986	0.8004	0.8021	0.8039	0.8056	0.8073	0.0002	0.0003	0.0005	0.0007	0.0009	0.001	0.0012	0.0014	0.0016
54	0.809	0.8107	0.8124	0.8141	0.8158	0.8175	0.0002	0.0003	0.0005	0.0007	0.0008	0.001	0.0012	0.0014	0.0015
55	0.8192	0.8208	0.8225	0.8241	0.8258	0.8274	0.0002	0.0003	0.0005	0.0007	0.0008	0.001	0.0012	0.0013	0.0015
56	0.829	0.8307	0.8323	0.8339	0.8355	0.8371	0.0002	0.0003	0.0005	0.0006	0.0008	0.001	0.0011	0.0013	0.0014
57	0.8387	0.8403	0.8418	0.8434	0.845	0.8465	0.0002	0.0003	0.0005	0.0006	0.0008	0.0009	0.0011	0.0013	0.0014
58	0.848	0.8496	0.8511	0.8526	0.8542	0.8557	0.0001	0.0003	0.0005	0.0006	0.0008	0.0009	0.0011	0.0012	0.0014
59	0.8572	0.8587	0.8601	0.8616	0.8631	0.8646	0.0001	0.0003	0.0004	0.0006	0.0007	0.0009	0.001	0.0012	0.0013
60	0.866	0.8675	0.8689	0.8704	0.8718	0.8732	0.0001	0.0003	0.0004	0.0006	0.0007	0.0009	0.001	0.0011	0.0013
61	0.8746	0.876	0.8774	0.8788	0.8802	0.8816	0.0001	0.0003	0.0004	0.0006	0.0007	0.0008	0.001	0.0011	0.0012
62	0.8829	0.8843	0.8857	0.887	0.8884	0.8897	0.0001	0.0003	0.0004	0.0005	0.0007	0.0008	0.0009	0.0011	0.0012
63	0.891	0.8923	0.8936	0.8949	0.8962	0.8975	0.0001	0.0003	0.0004	0.0005	0.0006	0.0008	0.0009	0.001	0.0012
64	0.8988	0.9001	0.9013	0.9026	0.9038	0.9051	0.0001	0.0003	0.0004	0.0005	0.0006	0.0008	0.0009	0.001	0.0011
65	0.9063	0.9076	0.9088	0.91	0.9112	0.9124	0.0001	0.0002	0.0004	0.0005	0.0006	0.0007	0.0008	0.001	0.0011
66	0.9135	0.9147	0.9159	0.9171	0.9182	0.9194	0.0001	0.0002	0.0003	0.0005	0.0006	0.0007	0.0008	0.0009	0.001
67	0.9205	0.9216	0.9228	0.9239	0.925	0.9261	0.0001	0.0002	0.0003	0.0004	0.0006	0.0007	0.0008	0.0009	0.001
68	0.9272	0.9283	0.9293	0.9304	0.9315	0.9325	0.0001	0.0002	0.0003	0.0004	0.0005	0.0006	0.0007	0.0009	0.001
69	0.9336	0.9346	0.9356	0.9367	0.9377	0.9387	0.0001	0.0002	0.0003	0.0004	0.0005	0.0006	0.0007	0.0008	0.0009
70	0.9397	0.9407	0.9417	0.9426	0.9436	0.9446	0.0001	0.0002	0.0003	0.0004	0.0005	0.0006	0.0007	0.0008	0.0009
71	0.9455	0.9465	0.9474	0.9483	0.9492	0.9502	0.0001	0.0002	0.0003	0.0004	0.0005	0.0006	0.0006	0.0007	0.0008
72	0.9511	0.952	0.9528	0.9537	0.9546	0.9555	0.0001	0.0002	0.0003	0.0003	0.0004	0.0005	0.0006	0.0007	0.0008
73	0.9563	0.9572	0.958	0.9588	0.9596	0.9605	0.0001	0.0002	0.0002	0.0003	0.0004	0.0005	0.0006	0.0007	0.0007
74	0.9613	0.9621	0.9628	0.9636	0.9644	0.9652	0.0001	0.0002	0.0002	0.0003	0.0004	0.0005	0.0005	0.0006	0.0007
75	0.9659	0.9667	0.9674	0.9681	0.9689	0.9696	0.0001	0.0001	0.0002	0.0003	0.0004	0.0004	0.0005	0.0006	0.0007
76	0.9703	0.971	0.9717	0.9724	0.973	0.9737	0.0001	0.0001	0.0002	0.0003	0.0003	0.0004	0.0005	0.0005	0.0006
77	0.9744	0.975	0.9757	0.9763	0.9769	0.9775	0.0001	0.0001	0.0002	0.0003	0.0003	0.0004	0.0004	0.0005	0.0006
78	0.9781	0.9787	0.9793	0.9799	0.9805	0.9811	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003	0.0004	0.0005	0.0005
79	0.9816	0.9822	0.9827	0.9833	0.9838	0.9843	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003	0.0004	0.0004	0.0005
80	0.9848	0.9853	0.9858	0.9863	0.9868	0.9872	0	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003	0.0004	0.0004
81	0.9877	0.9881	0.9886	0.989	0.9894	0.9899	0	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003	0.0003	0.0004
82	0.9903	0.9907	0.9911	0.9914	0.9918	0.9922	0	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003	0.0003
83	0.9925	0.9929	0.9932	0.9936	0.9939	0.9942	0	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003
84	0.9945	0.9948	0.9951	0.9954	0.9957	0.9959	0	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0003
85	0.9962	0.9964	0.9967	0.9969	0.9971	0.9974	0	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0002
86	0.9976	0.9978	0.998	0.9981	0.9983	0.9985	0	0	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
87	0.9986	0.9988	0.9989	0.999	0.9992	0.9993	0	0	0	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
88	0.9994	0.9995	0.9996	0.9997	0.9997	0.9998	0	0	0	0	0	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
89	0.9998	0.9999	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
90	1.00001														

COSENO NATURAL **INTERPOLACIÓN (RESTAR)**

°	0'	10'	20'	30'	40'	50'	1'	2'	3'	4'	5'	6'	7'	8'	9'
0	1.00001	1	1	1	0.9999	0.9999	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0.9998	0.9998	0.9997	0.9997	0.9996	0.9995	0	0	0	0	0	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
2	0.9994	0.9993	0.9992	0.999	0.9989	0.9988	0	0	0	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
3	0.9986	0.9985	0.9983	0.9981	0.998	0.9978	0	0	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
4	0.9976	0.9974	0.9971	0.9969	0.9967	0.9964	0	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0002
5	0.9962	0.9959	0.9957	0.9954	0.9951	0.9948	0	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0003
6	0.9945	0.9942	0.9939	0.9936	0.9932	0.9929	0	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003
7	0.9925	0.9922	0.9918	0.9914	0.9911	0.9907	0	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003	0.0003
8	0.9903	0.9899	0.9894	0.989	0.9886	0.9881	0	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003	0.0003	0.0004
9	0.9877	0.9872	0.9868	0.9863	0.9858	0.9853	0	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003	0.0004	0.0004
10	0.9848	0.9843	0.9838	0.9833	0.9827	0.9822	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003	0.0004	0.0004	0.0005
11	0.9816	0.9811	0.9805	0.9799	0.9793	0.9787	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003	0.0004	0.0005	0.0005
12	0.9781	0.9775	0.9769	0.9763	0.9757	0.975	0.0001	0.0001	0.0002	0.0003	0.0003	0.0004	0.0004	0.0005	0.0006
13	0.9744	0.9737	0.973	0.9724	0.9717	0.971	0.0001	0.0001	0.0002	0.0003	0.0003	0.0004	0.0005	0.0005	0.0006
14	0.9703	0.9696	0.9689	0.9681	0.9674	0.9667	0.0001	0.0001	0.0002	0.0003	0.0004	0.0004	0.0005	0.0006	0.0007
15	0.9659	0.9652	0.9644	0.9636	0.9628	0.9621	0.0001	0.0002	0.0002	0.0003	0.0004	0.0005	0.0005	0.0006	0.0007
16	0.9613	0.9605	0.9596	0.9588	0.958	0.9572	0.0001	0.0002	0.0002	0.0003	0.0004	0.0005	0.0006	0.0007	0.0007
17	0.9563	0.9555	0.9546	0.9537	0.9528	0.952	0.0001	0.0002	0.0003	0.0003	0.0004	0.0005	0.0006	0.0007	0.0008
18	0.9511	0.9502	0.9492	0.9483	0.9474	0.9465	0.0001	0.0002	0.0003	0.0004	0.0005	0.0006	0.0006	0.0007	0.0008
19	0.9455	0.9446	0.9436	0.9426	0.9417	0.9407	0.0001	0.0002	0.0003	0.0004	0.0005	0.0006	0.0007	0.0008	0.0009
20	0.9397	0.9387	0.9377	0.9367	0.9356	0.9346	0.0001	0.0002	0.0003	0.0004	0.0005	0.0006	0.0007	0.0008	0.0009
21	0.9336	0.9325	0.9315	0.9304	0.9293	0.9283	0.0001	0.0002	0.0003	0.0004	0.0005	0.0006	0.0007	0.0009	0.001
22	0.9272	0.9261	0.925	0.9239	0.9228	0.9216	0.0001	0.0002	0.0003	0.0004	0.0006	0.0007	0.0008	0.0009	0.001
23	0.9205	0.9194	0.9182	0.9171	0.9159	0.9147	0.0001	0.0002	0.0003	0.0005	0.0006	0.0007	0.0008	0.0009	0.001
24	0.9135	0.9124	0.9112	0.91	0.9088	0.9076	0.0001	0.0002	0.0004	0.0005	0.0006	0.0007	0.0008	0.001	0.0011
25	0.9063	0.9051	0.9038	0.9026	0.9013	0.9001	0.0001	0.0003	0.0004	0.0005	0.0006	0.0008	0.0009	0.001	0.0011
26	0.8988	0.8975	0.8962	0.8949	0.8936	0.8923	0.0001	0.0003	0.0004	0.0005	0.0006	0.0008	0.0009	0.001	0.0012
27	0.891	0.8897	0.8884	0.887	0.8857	0.8843	0.0001	0.0003	0.0004	0.0005	0.0007	0.0008	0.0009	0.0011	0.0012
28	0.8829	0.8816	0.8802	0.8788	0.8774	0.876	0.0001	0.0003	0.0004	0.0006	0.0007	0.0008	0.001	0.0011	0.0012
29	0.8746	0.8732	0.8718	0.8704	0.8689	0.8675	0.0001	0.0003	0.0004	0.0006	0.0007	0.0009	0.001	0.0011	0.0013
30	0.866	0.8646	0.8631	0.8616	0.8601	0.8587	0.0001	0.0003	0.0004	0.0006	0.0007	0.0009	0.001	0.0012	0.0013
31	0.8572	0.8557	0.8542	0.8526	0.8511	0.8496	0.0001	0.0003	0.0005	0.0006	0.0008	0.0009	0.0011	0.0012	0.0014
32	0.848	0.8465	0.845	0.8434	0.8418	0.8403	0.0002	0.0003	0.0005	0.0006	0.0008	0.0009	0.0011	0.0013	0.0014
33	0.8387	0.8371	0.8355	0.8339	0.8323	0.8307	0.0002	0.0003	0.0005	0.0006	0.0008	0.001	0.0011	0.0013	0.0014
34	0.829	0.8274	0.8258	0.8241	0.8225	0.8208	0.0002	0.0003	0.0005	0.0007	0.0008	0.001	0.0012	0.0013	0.0015
35	0.8192	0.8175	0.8158	0.8141	0.8124	0.8107	0.0002	0.0003	0.0005	0.0007	0.0008	0.001	0.0012	0.0014	0.0015
36	0.809	0.8073	0.8056	0.8039	0.8021	0.8004	0.0002	0.0003	0.0005	0.0007	0.0009	0.001	0.0012	0.0014	0.0016
37	0.7986	0.7969	0.7951	0.7934	0.7916	0.7898	0.0002	0.0004	0.0005	0.0007	0.0009	0.0011	0.0012	0.0014	0.0016
38	0.788	0.7862	0.7844	0.7826	0.7808	0.779	0.0002	0.0004	0.0005	0.0007	0.0009	0.0011	0.0013	0.0014	0.0016
39	0.7771	0.7753	0.7735	0.7716	0.7698	0.7679	0.0002	0.0004	0.0006	0.0007	0.0009	0.0011	0.0013	0.0015	0.0017
40	0.766	0.7642	0.7623	0.7604	0.7585	0.7566	0.0002	0.0004	0.0006	0.0008	0.0009	0.0011	0.0013	0.0015	0.0017
41	0.7547	0.7528	0.7509	0.749	0.747	0.7451	0.0002	0.0004	0.0006	0.0008	0.001	0.0012	0.0013	0.0015	0.0017
42	0.7431	0.7412	0.7393	0.7373	0.7353	0.7333	0.0002	0.0004	0.0006	0.0008	0.001	0.0012	0.0014	0.0016	0.0018
43	0.7314	0.7294	0.7274	0.7254	0.7234	0.7214	0.0002	0.0004	0.0006	0.0008	0.001	0.0012	0.0014	0.0016	0.0018
44	0.7193	0.7173	0.7153	0.7133	0.7112	0.7092	0.0002	0.0004	0.0006	0.0008	0.001	0.0012	0.0014	0.0016	0.0018

COSENO NATURAL INTERPOLACIÓN (RESTAR)

°	0'	10'	20'	30'	40'	50'	1'	2'	3'	4'	5'	6'	7'	8'	9'
45	0.7071	0.705	0.703	0.7009	0.6988	0.6967	0.0002	0.0004	0.0006	0.0008	0.001	0.0012	0.0015	0.0017	0.0019
46	0.6947	0.6926	0.6905	0.6884	0.6862	0.6841	0.0002	0.0004	0.0006	0.0008	0.0011	0.0013	0.0015	0.0017	0.0019
47	0.682	0.6799	0.6777	0.6756	0.6734	0.6713	0.0002	0.0004	0.0006	0.0009	0.0011	0.0013	0.0015	0.0017	0.0019
48	0.6691	0.667	0.6648	0.6626	0.6604	0.6583	0.0002	0.0004	0.0007	0.0009	0.0011	0.0013	0.0015	0.0017	0.002
49	0.6561	0.6539	0.6516	0.6494	0.6472	0.645	0.0002	0.0004	0.0007	0.0009	0.0011	0.0013	0.0015	0.0018	0.002
50	0.6428	0.6406	0.6383	0.6361	0.6338	0.6316	0.0002	0.0004	0.0007	0.0009	0.0011	0.0013	0.0016	0.0018	0.002
51	0.6293	0.6271	0.6248	0.6225	0.6202	0.618	0.0002	0.0005	0.0007	0.0009	0.0011	0.0014	0.0016	0.0018	0.002
52	0.6157	0.6134	0.6111	0.6088	0.6065	0.6041	0.0002	0.0005	0.0007	0.0009	0.0012	0.0014	0.0016	0.0018	0.0021
53	0.6018	0.5995	0.5972	0.5948	0.5925	0.5901	0.0002	0.0005	0.0007	0.0009	0.0012	0.0014	0.0016	0.0019	0.0021
54	0.5878	0.5854	0.5831	0.5807	0.5783	0.576	0.0002	0.0005	0.0007	0.0009	0.0012	0.0014	0.0017	0.0019	0.0021
55	0.5736	0.5712	0.5688	0.5664	0.564	0.5616	0.0002	0.0005	0.0007	0.001	0.0012	0.0014	0.0017	0.0019	0.0022
56	0.5592	0.5568	0.5544	0.5519	0.5495	0.5471	0.0002	0.0005	0.0007	0.001	0.0012	0.0015	0.0017	0.0019	0.0022
57	0.5446	0.5422	0.5398	0.5373	0.5348	0.5324	0.0002	0.0005	0.0007	0.001	0.0012	0.0015	0.0017	0.002	0.0022
58	0.5299	0.5275	0.525	0.5225	0.52	0.5175	0.0002	0.0005	0.0007	0.001	0.0012	0.0015	0.0017	0.002	0.0022
59	0.515	0.5125	0.51	0.5075	0.505	0.5025	0.0003	0.0005	0.0008	0.001	0.0013	0.0015	0.0018	0.002	0.0023
60	0.5	0.4975	0.495	0.4924	0.4899	0.4874	0.0003	0.0005	0.0008	0.001	0.0013	0.0015	0.0018	0.002	0.0023
61	0.4848	0.4823	0.4797	0.4772	0.4746	0.472	0.0003	0.0005	0.0008	0.001	0.0013	0.0015	0.0018	0.002	0.0023
62	0.4695	0.4669	0.4643	0.4617	0.4592	0.4566	0.0003	0.0005	0.0008	0.001	0.0013	0.0015	0.0018	0.0021	0.0023
63	0.454	0.4514	0.4488	0.4462	0.4436	0.441	0.0003	0.0005	0.0008	0.001	0.0013	0.0016	0.0018	0.0021	0.0023
64	0.4384	0.4358	0.4331	0.4305	0.4279	0.4253	0.0003	0.0005	0.0008	0.0011	0.0013	0.0016	0.0018	0.0021	0.0024
65	0.4226	0.42	0.4173	0.4147	0.412	0.4094	0.0003	0.0005	0.0008	0.0011	0.0013	0.0016	0.0019	0.0021	0.0024
66	0.4067	0.4041	0.4014	0.3987	0.3961	0.3934	0.0003	0.0005	0.0008	0.0011	0.0013	0.0016	0.0019	0.0021	0.0024
67	0.3907	0.3881	0.3854	0.3827	0.38	0.3773	0.0003	0.0005	0.0008	0.0011	0.0013	0.0016	0.0019	0.0021	0.0024
68	0.3746	0.3719	0.3692	0.3665	0.3638	0.3611	0.0003	0.0005	0.0008	0.0011	0.0014	0.0016	0.0019	0.0022	0.0024
69	0.3584	0.3557	0.3529	0.3502	0.3475	0.3448	0.0003	0.0005	0.0008	0.0011	0.0014	0.0016	0.0019	0.0022	0.0025
70	0.342	0.3393	0.3365	0.3338	0.3311	0.3283	0.0003	0.0005	0.0008	0.0011	0.0014	0.0016	0.0019	0.0022	0.0025
71	0.3256	0.3228	0.3201	0.3173	0.3145	0.3118	0.0003	0.0006	0.0008	0.0011	0.0014	0.0017	0.0019	0.0022	0.0025
72	0.309	0.3062	0.3035	0.3007	0.2979	0.2952	0.0003	0.0006	0.0008	0.0011	0.0014	0.0017	0.0019	0.0022	0.0025
73	0.2924	0.2896	0.2868	0.284	0.2812	0.2784	0.0003	0.0006	0.0008	0.0011	0.0014	0.0017	0.002	0.0022	0.0025
74	0.2756	0.2728	0.27	0.2672	0.2644	0.2616	0.0003	0.0006	0.0008	0.0011	0.0014	0.0017	0.002	0.0022	0.0025
75	0.2588	0.256	0.2532	0.2504	0.2475	0.2447	0.0003	0.0006	0.0008	0.0011	0.0014	0.0017	0.002	0.0023	0.0025
76	0.2419	0.2391	0.2363	0.2334	0.2306	0.2278	0.0003	0.0006	0.0008	0.0011	0.0014	0.0017	0.002	0.0023	0.0025
77	0.225	0.2221	0.2193	0.2164	0.2136	0.2108	0.0003	0.0006	0.0009	0.0011	0.0014	0.0017	0.002	0.0023	0.0026
78	0.2079	0.2051	0.2022	0.1994	0.1965	0.1937	0.0003	0.0006	0.0009	0.0011	0.0014	0.0017	0.002	0.0023	0.0026
79	0.1908	0.188	0.1851	0.1822	0.1794	0.1765	0.0003	0.0006	0.0009	0.0011	0.0014	0.0017	0.002	0.0023	0.0026
80	0.1736	0.1708	0.1679	0.165	0.1622	0.1593	0.0003	0.0006	0.0009	0.0012	0.0014	0.0017	0.002	0.0023	0.0026
81	0.1564	0.1536	0.1508	0.1479	0.145	0.1421	0.0003	0.0006	0.0009	0.0012	0.0014	0.0017	0.002	0.0023	0.0026
82	0.1392	0.1363	0.1335	0.1306	0.1277	0.1248	0.0003	0.0006	0.0009	0.0012	0.0014	0.0017	0.002	0.0023	0.0026
83	0.1219	0.119	0.1161	0.1132	0.1103	0.1074	0.0003	0.0006	0.0009	0.0012	0.0014	0.0017	0.002	0.0023	0.0026
84	0.1045	0.1016	0.0987	0.0958	0.0929	0.09	0.0003	0.0006	0.0009	0.0012	0.0014	0.0017	0.002	0.0023	0.0026
85	0.0872	0.0843	0.0813	0.0784	0.0755	0.0726	0.0003	0.0006	0.0009	0.0012	0.0014	0.0017	0.002	0.0023	0.0026
86	0.0698	0.0668	0.0639	0.061	0.0581	0.0552	0.0003	0.0006	0.0009	0.0012	0.0015	0.0017	0.002	0.0023	0.0026
87	0.0523	0.0494	0.0465	0.0436	0.0407	0.0378	0.0003	0.0006	0.0009	0.0012	0.0015	0.0017	0.002	0.0023	0.0026
88	0.0349	0.032	0.0291	0.0262	0.0233	0.0204	0.0003	0.0006	0.0009	0.0012	0.0015	0.0017	0.002	0.0023	0.0026
89	0.0175	0.0145	0.0116	0.0087	0.0058	0.0029	0.0003	0.0006	0.0009	0.0012	0.0015	0.0017	0.002	0.0023	0.0026
90	0														

TANGENTE NATURAL **INTERPOLACIÓN (SUMAR)**

°	0'	10'	20'	30'	40'	50'	1'	2'	3'	4'	5'	6'	7'	8'	9'
0	0	0.0029	0.0058	0.0087	0.0116	0.0145	0.0003	0.0006	0.0009	0.0012	0.0015	0.0017	0.002	0.0023	0.0026
1	0.0175	0.0204	0.0233	0.0262	0.0291	0.032	0.0003	0.0006	0.0009	0.0012	0.0015	0.0017	0.002	0.0023	0.0026
2	0.0349	0.0378	0.0407	0.0437	0.0466	0.0495	0.0003	0.0006	0.0009	0.0012	0.0015	0.0017	0.002	0.0023	0.0026
3	0.0524	0.0553	0.0582	0.0612	0.0641	0.067	0.0003	0.0006	0.0009	0.0012	0.0015	0.0018	0.002	0.0023	0.0026
4	0.0699	0.0729	0.0758	0.0787	0.0816	0.0846	0.0003	0.0006	0.0009	0.0012	0.0015	0.0018	0.002	0.0023	0.0026
5	0.0875	0.0904	0.0934	0.0963	0.0992	0.1022	0.0003	0.0006	0.0009	0.0012	0.0015	0.0018	0.0021	0.0023	0.0026
6	0.1051	0.108	0.111	0.1139	0.1169	0.1198	0.0003	0.0006	0.0009	0.0012	0.0015	0.0018	0.0021	0.0024	0.0027
7	0.1228	0.1257	0.1287	0.1317	0.1346	0.1376	0.0003	0.0006	0.0009	0.0012	0.0015	0.0018	0.0021	0.0024	0.0027
8	0.1405	0.1435	0.1465	0.1495	0.1524	0.1554	0.0003	0.0006	0.0009	0.0012	0.0015	0.0018	0.0021	0.0024	0.0027
9	0.1584	0.1614	0.1644	0.1673	0.1703	0.1733	0.0003	0.0006	0.0009	0.0012	0.0015	0.0018	0.0021	0.0024	0.0027
10	0.1763	0.1793	0.1823	0.1853	0.1883	0.1914	0.0003	0.0006	0.0009	0.0012	0.0015	0.0018	0.0021	0.0024	0.0027
11	0.1944	0.1974	0.2004	0.2035	0.2065	0.2095	0.0003	0.0006	0.0009	0.0012	0.0015	0.0018	0.0021	0.0024	0.0027
12	0.2126	0.2156	0.2186	0.2217	0.2247	0.2278	0.0003	0.0006	0.0009	0.0012	0.0015	0.0018	0.0021	0.0024	0.0027
13	0.2309	0.2339	0.237	0.2401	0.243	0.2462	0.0003	0.0006	0.0009	0.0012	0.0015	0.0018	0.0022	0.0025	0.0028
14	0.2493	0.2524	0.2555	0.2586	0.2616	0.2648	0.0003	0.0006	0.0009	0.0012	0.0016	0.0019	0.0022	0.0025	0.0028
15	0.2679	0.2711	0.2742	0.2773	0.2805	0.2836	0.0003	0.0006	0.0009	0.0013	0.0016	0.0019	0.0022	0.0025	0.0028
16	0.2867	0.2899	0.2931	0.2962	0.2994	0.3026	0.0003	0.0006	0.0009	0.0013	0.0016	0.0019	0.0022	0.0025	0.0028
17	0.3057	0.3089	0.3121	0.3153	0.3185	0.3217	0.0003	0.0006	0.0009	0.0013	0.0016	0.0019	0.0022	0.0026	0.0029
18	0.3249	0.3281	0.3314	0.3346	0.3378	0.341	0.0003	0.0006	0.001	0.0013	0.0016	0.0019	0.0023	0.0026	0.0029
19	0.3443	0.3476	0.3508	0.3541	0.3574	0.3607	0.0003	0.0007	0.001	0.0013	0.0016	0.002	0.0023	0.0026	0.0029
20	0.364	0.3673	0.3706	0.3739	0.3772	0.3805	0.0003	0.0007	0.001	0.0013	0.0017	0.002	0.0023	0.0027	0.003
21	0.3839	0.3872	0.3906	0.3939	0.3973	0.4006	0.0003	0.0007	0.001	0.0013	0.0017	0.002	0.0024	0.0027	0.003
22	0.404	0.4074	0.4108	0.4142	0.4176	0.421	0.0003	0.0007	0.001	0.0014	0.0017	0.002	0.0024	0.0027	0.0031
23	0.4245	0.4279	0.4313	0.4348	0.4383	0.4417	0.0003	0.0007	0.001	0.0014	0.0017	0.0021	0.0024	0.0028	0.0031
24	0.4452	0.4487	0.4522	0.4557	0.4592	0.4628	0.0004	0.0007	0.0011	0.0014	0.0018	0.0021	0.0025	0.0028	0.0032
25	0.4663	0.4699	0.4734	0.477	0.4806	0.4841	0.0004	0.0007	0.0011	0.0014	0.0018	0.0021	0.0025	0.0029	0.0032
26	0.4877	0.4913	0.495	0.4986	0.5022	0.5059	0.0004	0.0007	0.0011	0.0015	0.0018	0.0022	0.0025	0.0029	0.0033
27	0.5095	0.5132	0.5169	0.5206	0.5243	0.528	0.0004	0.0007	0.0011	0.0015	0.0018	0.0022	0.0026	0.003	0.0033
28	0.5317	0.5354	0.5392	0.543	0.5467	0.5505	0.0004	0.0008	0.0011	0.0015	0.0019	0.0023	0.0026	0.003	0.0034
29	0.5543	0.5581	0.5619	0.5658	0.5696	0.5735	0.0004	0.0008	0.0012	0.0015	0.0019	0.0023	0.0027	0.0031	0.0035
30	0.5774	0.5812	0.5851	0.589	0.593	0.5969	0.0004	0.0008	0.0012	0.0016	0.002	0.0024	0.0027	0.0031	0.0035
31	0.6009	0.6048	0.6088	0.6128	0.6168	0.6208	0.0004	0.0008	0.0012	0.0016	0.002	0.0024	0.0028	0.0032	0.0036
32	0.6249	0.6289	0.633	0.6371	0.6412	0.6453	0.0004	0.0008	0.0012	0.0016	0.002	0.0025	0.0029	0.0033	0.0037
33	0.6494	0.6536	0.6577	0.6619	0.6661	0.6703	0.0004	0.0008	0.0013	0.0017	0.0021	0.0025	0.0029	0.0033	0.0038
34	0.6745	0.6787	0.683	0.6873	0.6916	0.6959	0.0004	0.0009	0.0013	0.0017	0.0021	0.0026	0.003	0.0034	0.0039
35	0.7002	0.7046	0.7089	0.7133	0.7177	0.7221	0.0004	0.0009	0.0013	0.0018	0.0022	0.0026	0.0031	0.0035	0.004
36	0.7265	0.731	0.7355	0.74	0.7445	0.749	0.0005	0.0009	0.0014	0.0018	0.0023	0.0027	0.0032	0.0036	0.0041
37	0.7536	0.7581	0.7627	0.7673	0.772	0.7766	0.0005	0.0009	0.0014	0.0018	0.0023	0.0028	0.0032	0.0037	0.0042
38	0.7813	0.786	0.7907	0.7954	0.8002	0.805	0.0005	0.0009	0.0014	0.0019	0.0024	0.0028	0.0033	0.0038	0.0043
39	0.8098	0.8146	0.8195	0.8243	0.8292	0.8342	0.0005	0.001	0.0015	0.002	0.0024	0.0029	0.0034	0.0039	0.0044
40	0.8391	0.8441	0.8491	0.8541	0.8591	0.8642	0.0005	0.001	0.0015	0.002	0.0025	0.003	0.0035	0.004	0.0045
41	0.8693	0.8744	0.8814	0.8847	0.8899	0.8952	0.0005	0.001	0.0016	0.0021	0.0026	0.0031	0.0036	0.0041	0.0047
42	0.9002	0.9057	0.911	0.9163	0.9217	0.9271	0.0005	0.0011	0.0016	0.0021	0.0027	0.0032	0.0037	0.0043	0.0048
43	0.9325	0.938	0.9435	0.949	0.9545	0.9601	0.0006	0.0011	0.0017	0.0022	0.0028	0.0033	0.0039	0.0044	0.005
44	0.9657	0.9713	0.977	0.9827	0.9884	0.9942	0.0006	0.0011	0.0017	0.0023	0.0029	0.0034	0.004	0.0046	0.0051

TANGENTE NATURAL **INTERPOLACIÓN (SUMAR)**

°	0'	10'	20'	30'	40'	50'	1'	2'	3'	4'	5'	6'	7'	8'	9'
45	1	1,006	1,012	1,018	1,024	1,03	0,001	0,001	0,002	0,002	0,003	0,004	0,004	0,005	0,005
46	1,036	1,042	1,048	1,054	1,06	1,066	0,001	0,001	0,002	0,002	0,003	0,004	0,004	0,005	0,006
47	1,072	1,079	1,085	1,091	1,098	1,104	0,001	0,001	0,002	0,003	0,003	0,004	0,004	0,005	0,006
48	1,111	1,117	1,124	1,13	1,137	1,144	0,001	0,001	0,002	0,003	0,003	0,004	0,005	0,005	0,006
49	1,15	1,157	1,164	1,171	1,178	1,185	0,001	0,001	0,002	0,003	0,003	0,004	0,005	0,006	0,006
50	1,192	1,199	1,206	1,213	1,22	1,228	0,001	0,001	0,002	0,003	0,004	0,004	0,005	0,006	0,006
51	1,235	1,242	1,25	1,257	1,265	1,272	0,001	0,002	0,002	0,003	0,004	0,005	0,005	0,006	0,007
52	1,28	1,288	1,295	1,303	1,311	1,319	0,001	0,002	0,002	0,003	0,004	0,005	0,005	0,006	0,007
53	1,327	1,335	1,343	1,351	1,36	1,368	0,001	0,002	0,002	0,003	0,004	0,005	0,006	0,007	0,007
54	1,376	1,385	1,393	1,402	1,411	1,419	0,001	0,002	0,003	0,003	0,004	0,005	0,006	0,007	0,008
55	1,428	1,437	1,446	1,455	1,464	1,473	0,001	0,002	0,003	0,004	0,005	0,005	0,006	0,007	0,008
56	1,483	1,492	1,501	1,511	1,52	1,53	0,001	0,002	0,003	0,004	0,005	0,006	0,007	0,008	0,009
57	1,54	1,55	1,56	1,57	1,58	1,59	0,001	0,002	0,003	0,004	0,005	0,006	0,007	0,008	0,009
58	1,6	1,611	1,621	1,632	1,643	1,653	0,001	0,002	0,003	0,004	0,005	0,006	0,007	0,009	0,01
59	1,664	1,675	1,686	1,698	1,709	1,72	0,001	0,002	0,003	0,005	0,006	0,007	0,008	0,009	0,01
60	1,732	1,744	1,756	1,767	1,78	1,792	0,001	0,002	0,004	0,005	0,006	0,007	0,008	0,01	0,011
61	1,804	1,816	1,829	1,842	1,855	1,868	0,001	0,003	0,004	0,005	0,006	0,008	0,009	0,01	0,012
62	1,881	1,894	1,907	1,921	1,935	1,949	0,001	0,003	0,004	0,005	0,007	0,008	0,01	0,011	0,012
63	1,963	1,977	1,991	2,006	2,02	2,035	0,001	0,003	0,004	0,006	0,007	0,009	0,01	0,012	0,013
64	2,05	2,066	2,081	2,097	2,112	2,128	0,002	0,003	0,005	0,006	0,008	0,009	0,011	0,013	0,014
65	2,145	2,161	2,177	2,194	2,211	2,229	0,002	0,003	0,005	0,007	0,008	0,01	0,012	0,014	0,015
66	2,246	2,264	2,282	2,3	2,318	2,337	0,002	0,004	0,005	0,007	0,009	0,011	0,013	0,015	0,016
67	2,356	2,375	2,394	2,414	2,434	2,455	0,002	0,004	0,006	0,008	0,01	0,012	0,014	0,016	0,018
68	2,475	2,496	2,517	2,539	2,56	2,583	0,002	0,004	0,007	0,009	0,011	0,013	0,015	0,017	0,02
69	2,605	2,628	2,651	2,675	2,699	2,723	0,002	0,005	0,007	0,009	0,012	0,014	0,017	0,019	0,021
70	2,747	2,773	2,798	2,824	2,85	2,877	0,003	0,005	0,008	0,01	0,013	0,016	0,018	0,021	0,024
71	2,904	2,932	2,96	2,989	3,018	3,047	0,003	0,006	0,009	0,012	0,014	0,017	0,02	0,023	0,026
72	3,078	3,108	3,14	3,172	3,204	3,237	0,003	0,006	0,01	0,013	0,016	0,019	0,023	0,026	0,029
73	3,271	3,305	3,34	3,376	3,412	3,45	0,004	0,007	0,011	0,014	0,018	0,022	0,025	0,029	0,032
74	3,487	3,526	3,566	3,606	3,647	3,689	0,005	0,008	0,012	0,016	0,02	0,024	0,029	0,033	0,037
75	3,732	3,776	3,821	3,867	3,914	3,962	0,005	0,009	0,014	0,019	0,023	0,028	0,033	0,37	0,042
76	4,011	4,061	4,113	4,165	4,219	4,275									
77	4,331	4,39	4,449	4,511	4,574	4,638									
78	4,705	4,773	4,843	4,915	4,989	5,066									
79	5,145	5,226	5,309	5,396	5,485	5,576									
80	5,671	5,769	5,871	5,976	6,084	6,197									
81	6,314	6,435	6,561	6,691	6,827	6,968									
82	7,115	7,269	7,429	7,596	7,77	7,953									
83	8,144	8,345	8,556	8,777	9,01	9,255									
84	9,514	9,788	10,08	10,39	10,71	11,06									
85	11,43	11,83	12,25	12,71	13,2	13,73									
86	14,3	14,92	15,6	16,35	17,17	18,07									
87	19,08	20,21	21,47	22,9	24,54	26,43									
88	28,64	31,24	34,37	38,19	42,96	49,1									
89	57,29	68,75	85,94	114,6	171,9	343,8									
90	∞														

COTANGENTE NATURAL **INTERPOLACIÓN (RESTAR)**

°	0'	10'	20'	30'	40'	50'	1'	2'	3'	4'	5'	6'	7'	8'	9'
0	∞	343.8	171.9	114.6	85.94	68.75									
1	57.29	49.1	42.96	38.19	34.37	31.24									
2	28.64	26.43	24.54	22.9	21.47	20.21									
3	19.08	18.07	17.17	16.35	15.6	14.92									
4	14.3	13.73	13.2	12.71	12.25	11.83									
5	11.43	11.06	10.71	10.39	10.08	9.788									
6	9.514	9.255	9.01	8.777	8.556	8.345									
7	8.144	7.953	7.77	7.596	7.429	7.269									
8	7.115	6.968	6.827	6.691	6.561	6.435									
9	6.314	6.197	6.084	5.976	5.871	5.769									
10	5.671	5.576	5.485	5.396	5.309	5.226									
11	5.145	5.066	4.989	4.915	4.843	4.773									
12	4.705	4.638	4.574	4.511	4.449	4.39									
13	4.331	4.275	4.219	4.165	4.113	4.061									
14	4.011	3.962	3.914	3.867	3.821	3.776	0.005	0.009	0.014	0.019	0.023	0.028	0.033	0.37	0.042
15	3.732	3.689	3.647	3.606	3.566	3.526	0.005	0.008	0.012	0.016	0.02	0.024	0.029	0.033	0.037
16	3.487	3.45	3.412	3.376	3.34	3.305	0.004	0.007	0.011	0.014	0.018	0.022	0.025	0.029	0.032
17	3.271	3.237	3.204	3.172	3.14	3.108	0.003	0.006	0.01	0.013	0.016	0.019	0.023	0.026	0.029
18	3.078	3.047	3.018	2.989	2.96	2.932	0.003	0.006	0.009	0.012	0.014	0.017	0.02	0.023	0.026
19	2.904	2.877	2.85	2.824	2.798	2.773	0.003	0.005	0.008	0.01	0.013	0.016	0.018	0.021	0.024
20	2.747	2.723	2.699	2.675	2.651	2.628	0.002	0.005	0.007	0.009	0.012	0.014	0.017	0.019	0.021
21	2.605	2.583	2.56	2.539	2.517	2.496	0.002	0.004	0.007	0.009	0.011	0.013	0.015	0.017	0.02
22	2.475	2.455	2.434	2.414	2.394	2.375	0.002	0.004	0.006	0.008	0.01	0.012	0.014	0.016	0.018
23	2.356	2.337	2.318	2.3	2.282	2.264	0.002	0.004	0.005	0.007	0.009	0.011	0.013	0.015	0.016
24	2.246	2.229	2.211	2.194	2.177	2.161	0.002	0.003	0.005	0.007	0.008	0.01	0.012	0.014	0.015
25	2.145	2.128	2.112	2.097	2.081	2.066	0.002	0.003	0.005	0.006	0.008	0.009	0.011	0.013	0.014
26	2.05	2.035	2.02	2.006	1.991	1.977	0.001	0.003	0.004	0.006	0.007	0.009	0.01	0.012	0.013
27	1.963	1.949	1.935	1.921	1.907	1.894	0.001	0.003	0.004	0.005	0.007	0.008	0.01	0.011	0.012
28	1.881	1.868	1.855	1.842	1.829	1.816	0.001	0.003	0.004	0.005	0.006	0.008	0.009	0.01	0.012
29	1.804	1.792	1.78	1.767	1.756	1.744	0.001	0.002	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.01	0.011
30	1.732	1.72	1.709	1.698	1.686	1.675	0.001	0.002	0.003	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009	0.01
31	1.664	1.653	1.643	1.632	1.621	1.611	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.009	0.01
32	1.6	1.59	1.58	1.57	1.56	1.55	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009
33	1.54	1.53	1.52	1.511	1.501	1.492	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009
34	1.483	1.473	1.464	1.455	1.446	1.437	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.005	0.006	0.007	0.008
35	1.428	1.419	1.411	1.402	1.393	1.385	0.001	0.002	0.003	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008
36	1.376	1.368	1.36	1.351	1.343	1.335	0.001	0.002	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.007
37	1.327	1.319	1.311	1.303	1.295	1.288	0.001	0.002	0.002	0.003	0.004	0.005	0.005	0.006	0.007
38	1.28	1.272	1.265	1.257	1.25	1.242	0.001	0.002	0.002	0.003	0.004	0.005	0.005	0.006	0.007
39	1.235	1.228	1.22	1.213	1.206	1.199	0.001	0.001	0.002	0.003	0.004	0.004	0.005	0.006	0.006
40	1.192	1.185	1.178	1.171	1.164	1.157	0.001	0.001	0.002	0.003	0.003	0.004	0.005	0.006	0.006
41	1.15	1.144	1.137	1.13	1.124	1.117	0.001	0.001	0.002	0.003	0.003	0.004	0.005	0.005	0.006
42	1.111	1.104	1.098	1.091	1.085	1.079	0.001	0.001	0.002	0.003	0.003	0.004	0.004	0.005	0.006
43	1.072	1.066	1.06	1.054	1.048	1.042	0.001	0.001	0.002	0.002	0.003	0.004	0.004	0.005	0.006
44	1.036	1.03	1.024	1.018	1.012	1.006	0.001	0.001	0.002	0.002	0.003	0.004	0.004	0.005	0.005

COTANGENTE NATURAL **INTERPOLACIÓN (RESTAR)**

°	0'	10'	20'	30'	40'	50'	1'	2'	3'	4'	5'	6'	7'	8'	9'
45	1	0.9942	0.9884	0.9827	0.977	0.9713	0.0006	0.0011	0.0017	0.0023	0.0029	0.0034	0.004	0.0046	0.0051
46	0.9657	0.9601	0.9545	0.949	0.9435	0.938	0.0006	0.0011	0.0017	0.0022	0.0028	0.0033	0.0039	0.0044	0.005
47	0.9325	0.9271	0.9217	0.9163	0.911	0.9057	0.0005	0.0011	0.0016	0.0021	0.0027	0.0032	0.0037	0.0043	0.0048
48	0.9002	0.8952	0.8899	0.8847	0.8814	0.8744	0.0005	0.001	0.0016	0.0021	0.0026	0.0031	0.0036	0.0041	0.0047
49	0.8693	0.8642	0.8591	0.8541	0.8491	0.8441	0.0005	0.001	0.0015	0.002	0.0025	0.003	0.0035	0.004	0.0045
50	0.8391	0.8342	0.8292	0.8243	0.8195	0.8146	0.0005	0.001	0.0015	0.002	0.0024	0.0029	0.0034	0.0039	0.0044
51	0.8098	0.805	0.8002	0.7954	0.7907	0.786	0.0005	0.0009	0.0014	0.0019	0.0024	0.0028	0.0033	0.0038	0.0043
52	0.7813	0.7766	0.772	0.7673	0.7627	0.7581	0.0005	0.0009	0.0014	0.0018	0.0023	0.0028	0.0032	0.0037	0.0042
53	0.7536	0.749	0.7445	0.74	0.7355	0.731	0.0005	0.0009	0.0014	0.0018	0.0023	0.0027	0.0032	0.0036	0.0041
54	0.7265	0.7221	0.7177	0.7133	0.7089	0.7046	0.0004	0.0009	0.0013	0.0018	0.0022	0.0026	0.0031	0.0035	0.004
55	0.7002	0.6959	0.6916	0.6873	0.683	0.6787	0.0004	0.0009	0.0013	0.0017	0.0021	0.0026	0.003	0.0034	0.0039
56	0.6745	0.6703	0.6661	0.6619	0.6577	0.6536	0.0004	0.0008	0.0013	0.0017	0.0021	0.0025	0.0029	0.0033	0.0038
57	0.6494	0.6453	0.6412	0.6371	0.633	0.6289	0.0004	0.0008	0.0012	0.0016	0.002	0.0025	0.0029	0.0033	0.0037
58	0.6249	0.6208	0.6168	0.6128	0.6088	0.6048	0.0004	0.0008	0.0012	0.0016	0.002	0.0024	0.0028	0.0032	0.0036
59	0.6009	0.5969	0.593	0.589	0.5851	0.5812	0.0004	0.0008	0.0012	0.0016	0.002	0.0024	0.0027	0.0031	0.0035
60	0.5774	0.5735	0.5696	0.5658	0.5619	0.5581	0.0004	0.0008	0.0012	0.0015	0.0019	0.0023	0.0027	0.0031	0.0035
61	0.5543	0.5505	0.5467	0.543	0.5392	0.5354	0.0004	0.0008	0.0011	0.0015	0.0019	0.0023	0.0026	0.003	0.0034
62	0.5317	0.528	0.5243	0.5206	0.5169	0.5132	0.0004	0.0007	0.0011	0.0015	0.0018	0.0022	0.0026	0.003	0.0033
63	0.5095	0.5059	0.5022	0.4986	0.495	0.4913	0.0004	0.0007	0.0011	0.0015	0.0018	0.0022	0.0025	0.0029	0.0033
64	0.4877	0.4841	0.4806	0.477	0.4734	0.4699	0.0004	0.0007	0.0011	0.0014	0.0018	0.0021	0.0025	0.0029	0.0032
65	0.4663	0.4628	0.4592	0.4557	0.4522	0.4487	0.0004	0.0007	0.0011	0.0014	0.0018	0.0021	0.0025	0.0028	0.0032
66	0.4452	0.4417	0.4383	0.4348	0.4313	0.4279	0.0003	0.0007	0.001	0.0014	0.0017	0.0021	0.0024	0.0028	0.0031
67	0.4245	0.421	0.4176	0.4142	0.4108	0.4074	0.0003	0.0007	0.001	0.0014	0.0017	0.002	0.0024	0.0027	0.0031
68	0.404	0.4006	0.3973	0.3939	0.3906	0.3872	0.0003	0.0007	0.001	0.0013	0.0017	0.002	0.0024	0.0027	0.003
69	0.3839	0.3805	0.3772	0.3739	0.3706	0.3673	0.0003	0.0007	0.001	0.0013	0.0017	0.002	0.0023	0.0027	0.003
70	0.364	0.3607	0.3574	0.3541	0.3508	0.3476	0.0003	0.0007	0.001	0.0013	0.0016	0.002	0.0023	0.0026	0.0029
71	0.3443	0.341	0.3378	0.3346	0.3314	0.3281	0.0003	0.0006	0.001	0.0013	0.0016	0.0019	0.0023	0.0026	0.0029
72	0.3249	0.3217	0.3185	0.3153	0.3121	0.3089	0.0003	0.0006	0.0009	0.0013	0.0016	0.0019	0.0022	0.0026	0.0029
73	0.3057	0.3026	0.2994	0.2962	0.2931	0.2899	0.0003	0.0006	0.0009	0.0013	0.0016	0.0019	0.0022	0.0025	0.0028
74	0.2867	0.2836	0.2805	0.2773	0.2742	0.2711	0.0003	0.0006	0.0009	0.0013	0.0016	0.0019	0.0022	0.0025	0.0028
75	0.2679	0.2648	0.2616	0.2586	0.2555	0.2524	0.0003	0.0006	0.0009	0.0012	0.0016	0.0019	0.0022	0.0025	0.0028
76	0.2493	0.2462	0.243	0.2401	0.237	0.2339	0.0003	0.0006	0.0009	0.0012	0.0015	0.0018	0.0022	0.0025	0.0028
77	0.2309	0.2278	0.2247	0.2217	0.2186	0.2156	0.0003	0.0006	0.0009	0.0012	0.0015	0.0018	0.0021	0.0024	0.0027
78	0.2126	0.2095	0.2065	0.2035	0.2004	0.1974	0.0003	0.0006	0.0009	0.0012	0.0015	0.0018	0.0021	0.0024	0.0027
79	0.1944	0.1914	0.1883	0.1853	0.1823	0.1793	0.0003	0.0006	0.0009	0.0012	0.0015	0.0018	0.0021	0.0024	0.0027
80	0.1763	0.1733	0.1703	0.1673	0.1644	0.1614	0.0003	0.0006	0.0009	0.0012	0.0015	0.0018	0.0021	0.0024	0.0027
81	0.1584	0.1554	0.1524	0.1495	0.1465	0.1435	0.0003	0.0006	0.0009	0.0012	0.0015	0.0018	0.0021	0.0024	0.0027
82	0.1405	0.1376	0.1346	0.1317	0.1287	0.1257	0.0003	0.0006	0.0009	0.0012	0.0015	0.0018	0.0021	0.0024	0.0027
83	0.1228	0.1198	0.1169	0.1139	0.111	0.108	0.0003	0.0006	0.0009	0.0012	0.0015	0.0018	0.0021	0.0024	0.0027
84	0.1051	0.1022	0.0992	0.0963	0.0934	0.0904	0.0003	0.0006	0.0009	0.0012	0.0015	0.0018	0.0021	0.0023	0.0026
85	0.0875	0.0846	0.0816	0.0787	0.0758	0.0729	0.0003	0.0006	0.0009	0.0012	0.0015	0.0018	0.002	0.0023	0.0026
86	0.0699	0.067	0.0641	0.0612	0.0582	0.0553	0.0003	0.0006	0.0009	0.0012	0.0015	0.0018	0.002	0.0023	0.0026
87	0.0524	0.0495	0.0466	0.0437	0.0407	0.0378	0.0003	0.0006	0.0009	0.0012	0.0015	0.0017	0.002	0.0023	0.0026
88	0.0349	0.032	0.0291	0.0262	0.0233	0.0204	0.0003	0.0006	0.0009	0.0012	0.0015	0.0017	0.002	0.0023	0.0026
89	0.0175	0.0145	0.0116	0.0087	0.0058	0.0029	0.0003	0.0006	0.0009	0.0012	0.0015	0.0017	0.002	0.0023	0.0026
90	0														

ARCHIVOS VINCULADOS .-

Álgebra:	Hoja de cálculo con fórmulas:	Geometría analítica:	Hoja de cálculo:
ÁLGEBRA	FÓRMULAS	ANALÍTICA	TRIGONOMETRÍA

ÍNDICE

A

Ángulos, grados, arcos y radianes *5*

C

Círculo trigonométrico *14*

E

Ecuaciones trigonométricas *37*

F

Funciones
Círculo trigonométrico *14*
Funciones
Valores de ángulos *15*
Funciones cocientes *17*
Funciones identidades *17*
Funciones para ángulo doble *29*
Funciones para la diferencia de dos ángulos *27*
Funciones para la suma de dos ángulos *25*
Funciones Pitagóricas *17*
Funciones usando el coseno del ángulo *33*
Funciones usando el semiángulo *31*
Funciones. Transformación de sumas o diferencias, en productos *35*

S

Sistemas coordenados *7*
Polares *7*
Rectangulares *7*

T

Tabla de fórmulas *39*
TABLAS DE LOGARITMOS ***43***
Triángulos *9*
Triángulos oblicuángulos, y acutángulos *20*
Cálculo de alturas \i 24
Cálculo del área *24*
Casos
A L A *23*
L A L-1 ..... *22*
L A L-2 ..... *23*
L L L *22*
Ley de los cosenos *21*
Ley de Senos *20*
Triángulos Rectángulos *18*
Conocidos los catetos *18*
Conocidos un ángulo y el cateto adyacente *19*
Conocidos un ángulo y el cateto opuesto *19*
Conocidos un ángulo y la hipotenusa *18*
Conocidos un cateto y la hipotenusa *18*

CONTENIDO