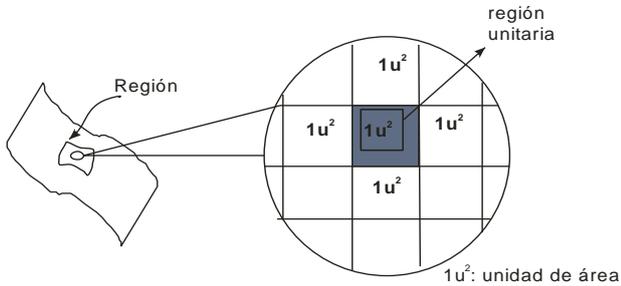


ÁREAS

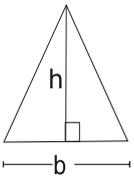
DEFINICIÓN

Área es el número que expresa la medida de una región.

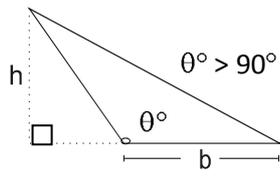


Área de una región triangular

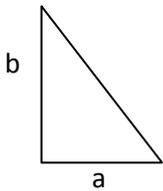
1. Fórmula básica



$$A_{\Delta} = \frac{a \cdot b}{2}$$

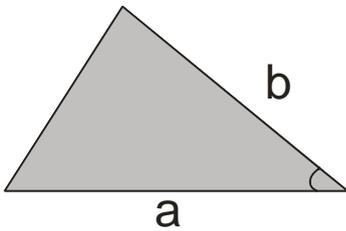


$$A_{\Delta} = \frac{b \cdot h}{2}$$



$$A_{\Delta} = \frac{a \cdot b}{2}$$

2. Fórmula trigonométrica



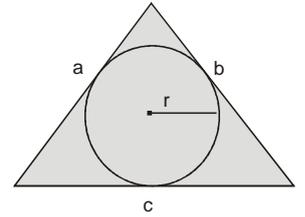
$$A_{\Delta} = \frac{a \cdot b}{2} \cdot \text{sen } \alpha$$

3. Área de una región triangular en función de:

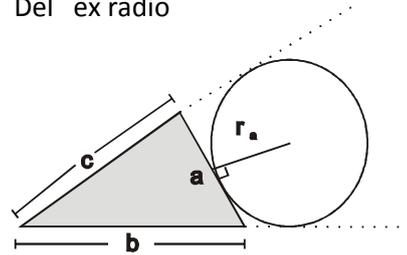
1. Del inradio

como: $p = \frac{a+b+c}{2}$

$$\Rightarrow A_{\Delta} = p \cdot r$$



2. Del ex radio

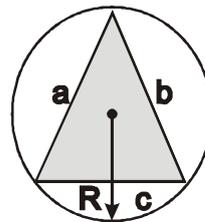


$$A_{\Delta} = (p - a) r_a$$

$$A_{\Delta} = (p - b) r_b$$

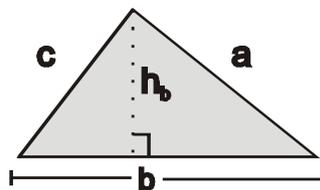
$$A_{\Delta} = (p - c) r_c$$

3. Del circunradio



$$A_{\Delta} = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$$

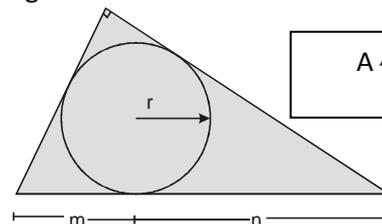
4. Teorema de Herón



Como: $p = \frac{a+b+c}{2}$

$$A_{\Delta} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

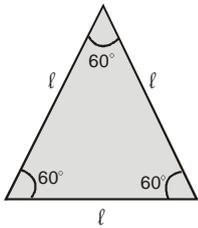
5. Segmentos determinados en la hipotenusa:



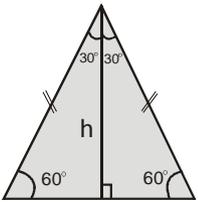
$$A_{\Delta} = m \cdot n$$

4. Área de un \triangle equilátero

En función del lado:



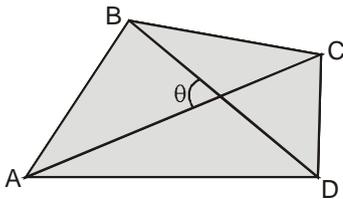
$$A_{\Delta} = \frac{l^2 \sqrt{3}}{4}$$



$$A_{\Delta} = \frac{h^2 \sqrt{3}}{3}$$

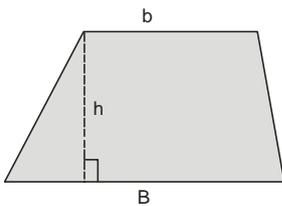
Área de regiones cuadrangulares

1. Fórmula básica

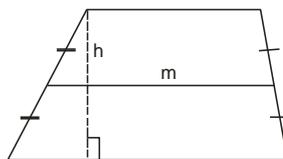


$$A_{\Delta} = \frac{AC \cdot BD}{2} \cdot \text{sen } \theta$$

2. Trapecio

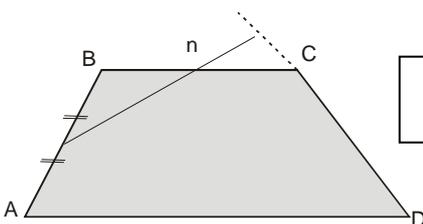


$$A_T = \left(\frac{B+b}{2} \right) \cdot h$$



$$A_T = m \cdot h$$

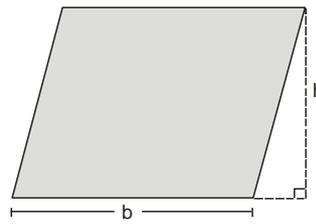
Caso particular



$$A_T = n \cdot d$$

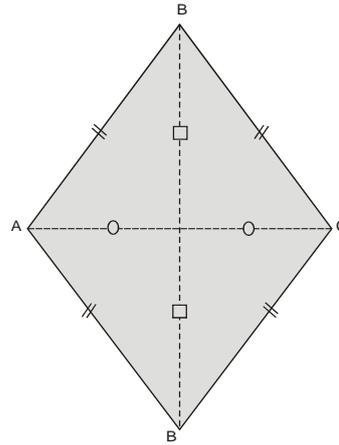
BC // AD

3. Paralelogramo



$$A_p = b \cdot h$$

4. Rombo



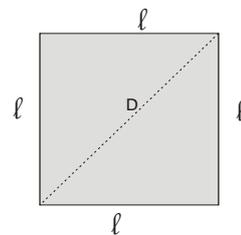
$$A_R = \frac{BD \cdot AC}{2}$$

5. Rectángulo



$$A = a \cdot b$$

6. Cuadrado



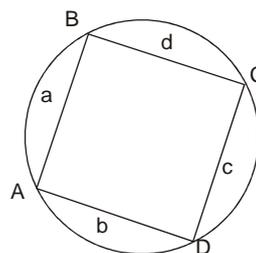
En función del lado

$$A = l^2$$

En función de la diagonal

$$A = \frac{D^2}{2}$$

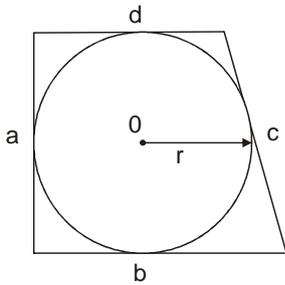
7. Cuadrilátero inscrito



Como : $p = \frac{a+b+c+d}{2}$

$$A = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

8. Cuadrilátero circunscrito:

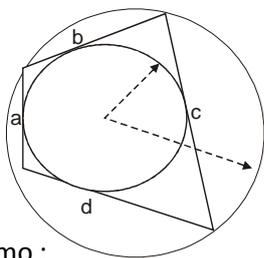


Como : $p = \frac{a+b+c+d}{2}$

$$A = p \cdot r$$

9. Cuadrilátero bicéntrico

T. de Pilot : $a + c = b + d$

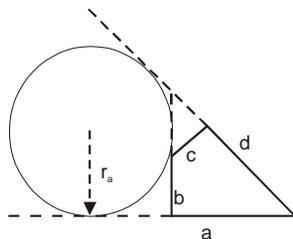


como :

$$p = \frac{a+b+c+d}{2} = a + c = b + d$$

$$A = \sqrt{a \cdot b \cdot c \cdot d}$$

10. Cuadrilátero ex inscrito



como : r_a es ex radio

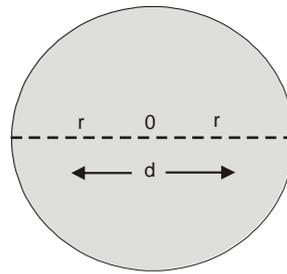
$$A = r_a (a - c)$$

Nota: Teorema de Steiner:

$$a - c = d - b$$

Área de regiones circulares

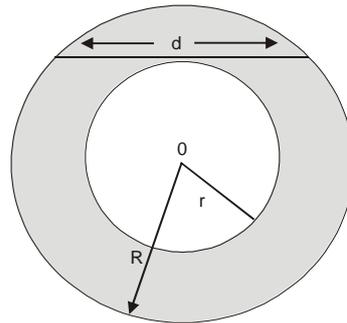
Círculo



$$A = \pi r^2$$

$$A = \frac{\pi d^2}{4}$$

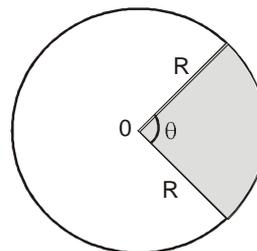
Corona circular



$$A = \pi(R^2 - r^2)$$

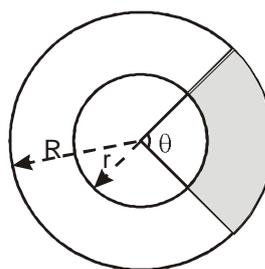
$$A = \frac{\pi d^2}{4}$$

Sector circular



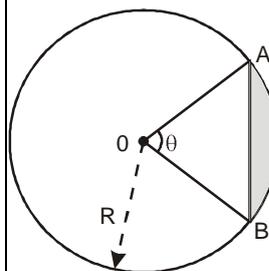
$$A = \frac{\pi R^2 \cdot \theta}{360}$$

Trapezio circular



$$A = \frac{\pi(R^2 - r^2) \theta}{360}$$

Segmento circular



$$A_{AB} = A_{AOB} - A_{AOB}$$

$$A_{AB} = \frac{\pi R^2 \theta}{360} - \frac{R^2 \text{sen } \theta}{2}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Hallar el área de un cuadrado inscrito en un círculo de radio $2\sqrt{2}$.

- a) $8m^2$ b) $14m^2$ c) $16m^2$ d) $10m^2$
e) N.A.

2. El área de un círculo es πm^2 . ¿cuál es el área del triángulo equilátero inscrito en la circunferencia?

- a) $\frac{3\sqrt{3}m^2}{4}$ b) $\frac{2\sqrt{3}m^2}{8}$ c) $\frac{\sqrt{3}m^2}{2}$ d) $\frac{2\sqrt{3}m^2}{5}$

e) N.A.

3. Calcular la longitud de una circunferencia inscrito en un triángulo de 30 m de perímetro y cuya área es de $30 m^2$

- a) $L_c = 2\pi$
b) $L_c = 4\pi$
c) $L_c = 8\pi$
d) $L_c = 6\pi$
e) $L_c = 10\pi$

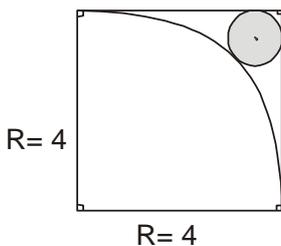
4. ¿Cuál es el área de un triángulo en m^2 , si sus lados miden 13 ; 20 y $21m$?

- a) $120m^2$ b) $124m^2$ c) $126m^2$
d) $130m^2$ e) N.A.

5. Los lados de un triángulo miden 10;12 y 14 m. ¿cuánto mide el radio del círculo inscrito?

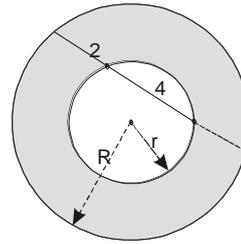
- a) $\frac{2}{3}\sqrt{6}$ b) $\frac{4}{3}\sqrt{6}$ c) $\frac{2}{5}\sqrt{3}$ d) $\frac{\sqrt{6}}{2}$
e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

6. Hallar el área del círculo.



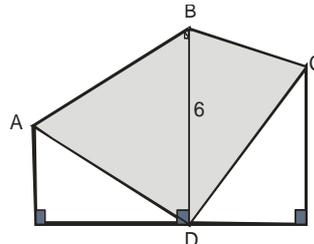
- a) $(24 - 12\sqrt{2})\pi$
b) $(24 - 16\sqrt{2})\pi$
c) $(12 - 24\sqrt{2})\pi$
d) $(3 - 4\sqrt{2})\pi$
e) $(4 - 3\sqrt{2})\pi$

7. Hallar el área de la región sombreada.



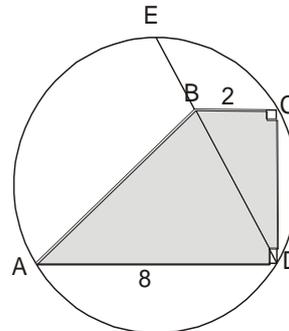
- a) 10π
b) 6π
c) 8π
d) 12π
e) N.A.

8. Calcular el área de la región sombreada ABCD.



- a) 24
b) 30
c) 48
d) 32
e) 12

9. Hallar el área del trapecio ABCD.



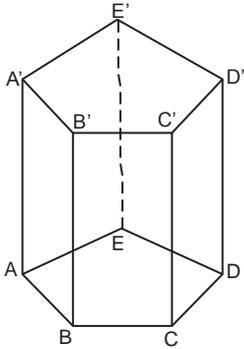
- a) $A_T = 20\sqrt{2}$
b) $A_T = 10\sqrt{2}$
c) $A_T = 5\sqrt{2}$
d) $A_T = 2\sqrt{2}$
e) $A_T = 6\sqrt{2}$

10. En un trapecio ABCD, ($\overline{AB} \parallel \overline{CD}$; $\overline{AB} > \overline{CD}$). Las áreas de los triángulos AOB y COD son de $25m^2$ y $12 m^2$. Hallar el área del trapecio (O es el punto de corte de las diagonales).

- a) $71m^2$
b) $36m^2$
c) $71,6m^2$
d) $36,6m^2$
e) $70,6m^2$

PRISMA

Es Un poliedro limitado por 2 polígonos iguales y paralelos llamados bases y por paralelogramos llamados caras.



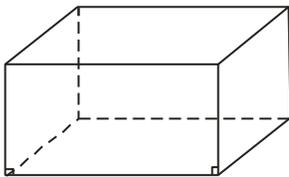
Base $\{ \begin{matrix} ABCDE \\ ABCDE \end{matrix} \}$ Polígonos

Aristas $\{ \begin{matrix} \text{Laterales: } AA', BB', CC', \dots \\ \text{básicas: } AB, BC, \dots \end{matrix} \}$

Altura: distancia entre sus bases

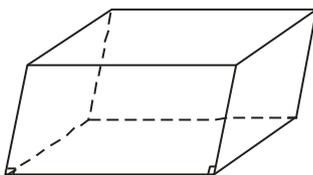
PRISMA RECTO

- Arista perpendiculares a las bases
- Caras rectangulares



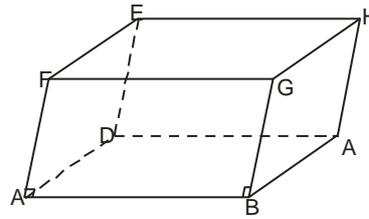
PRISMA OBLICUO

- Arista no perpendiculares a la base
- Caras romboides

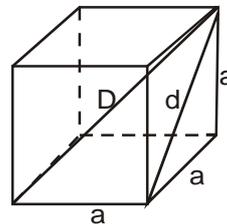


PARALELEPÍPEDOS

Es el prisma cuyas bases son paralelogramos
Diagonal: BE (debe unir dos vértices opuestos)



- **Paralelepípedo recto:** las aristas laterales son perpendiculares a las bases,
- **Paralelepípedo oblicuo:** aristas no perpendiculares a las bases
- **Paralelepípedo rectángulo:** sus caras son rectángulos.
- **Cubo o hexaedro regular:** sus caras son cuadrados.

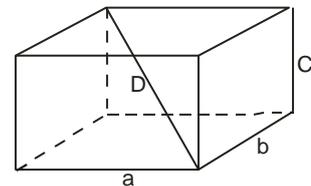


- $D = a\sqrt{3}$
- $d = a\sqrt{2}$
- $V = a^3$
- $A = 6a^2$

PARALELEPÍDO RECTÁNGULO

$$D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$V = a \cdot b \cdot c$$



- Área total: es la suma de todas las caras
- Área lateral: es la suma de las caras laterales

Superficies y volúmenes de prismas

1. Área lateral (A_L)

$$A_L = (\text{arista lateral}) \cdot$$

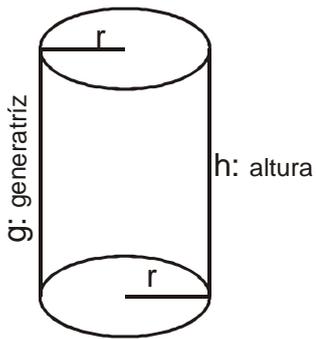
$$(\text{perímetro de la base})$$

2. Área total (A_T)

$$A_T = A_L + 2 (\text{Área de la base})$$

3. Volumen (V)

$$V = (\text{Área de la base}) \cdot h$$

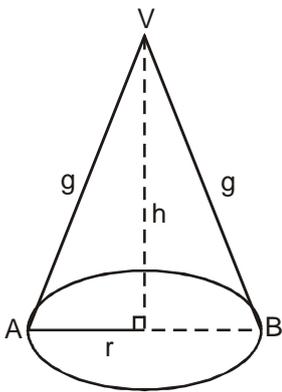


Área lateral
 $A_l = 2\pi r \cdot h$

Área total
 $A_T = 2\pi r (h+r)$

Volumen
 $V = \pi r^2 \cdot h$

CONO DE REVOLUCIÓN

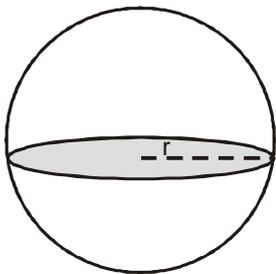


Área Lateral
 $A_l = \pi r g$

Área total
 $A_T = \pi r g + \pi r^2$

Volumen
 $V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h$

ESFERA



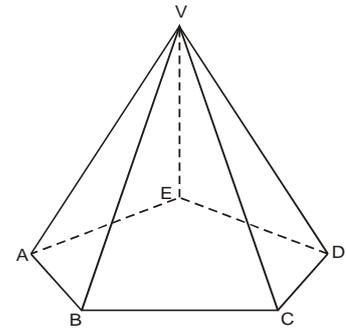
Área de la superficie esférica
 $A = 4\pi r^2$

Volumen
 $V = \frac{4}{3} \pi r^3$

PIRÁMIDE

Es la región del espacio limitada por una superficie piramidal cerrada y un plano que corta a todas sus aristas.

Altura: distancia del vértice a la base.
V: vértice
Apotema: es la altura de los triángulos de las caras: ap



Área lateral (A_L)
 $A_L = \frac{ap}{2}$ (perímetro de la base)

Área total (A_T)
 $A_T = A_L + \text{Área de la base}$

Volumen (V)
 $V = \frac{1}{3} (A_{base}) \cdot \text{altura}$

NOTA

Los diámetros de dos pirámides semejantes son entre sí como los cubos de sus elementos homólogos

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Hallar el área total de un paralelepípedo rectangular de 13 m de diagonal, siendo las dimensiones de la base 4m y 3m.

- a) 124m² b) 192m² c) 136m²
d) 150m² e) 180m²

2. Si las aristas de un cubo se aumentan respectivamente en 2, 4 y 6 m, el volumen del paralelepípedo obtenido excede en 568 m³ al volumen del cubo dado. Hallar la diagonal del cubo.

- a) $5\sqrt{3}$ b) $4\sqrt{3}$ c) $5\sqrt{2}$
d) $2,5\sqrt{2}$ e) N.A.

3. La arista de un prisma hexagonal regular mide 12m y la arista de la base mide 5m. ¿Que incremento recibirá su arista lateral de modo que sus áreas laterales se diferencien en 240 m²?

- a) 8m b) 6m c) 4m d) 6m e) 2m

4. El volumen engendrado por un triángulo equilátero de lado "X" metros que gira alrededor de su altura es igual a:

a) $V = \frac{\pi}{24} \sqrt{3} x^3$

b) $V = \frac{\pi}{12} \sqrt{2} x^2$

c) $V = 12\pi \sqrt{3} x^3$

d) $V = 24\pi \sqrt{3} x^3$

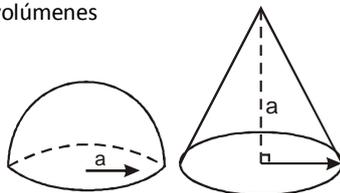
e) N.A.

5. Se tiene una pirámide regular de base cuadrada de lado "a". Hallar su volumen si la cara lateral esta determinada por un triángulo equilátero.

a) $\frac{a^2\sqrt{2}}{6}$ b) $\frac{a^2\sqrt{2}}{6}$ c) $\frac{a^2\sqrt{3}}{6}$ d) $\frac{a^2\sqrt{3}}{3}$

e) $\frac{\sqrt{3}a}{2}$

6. Si las figuras son una semiesfera y un cono recto, hallar la relación de sus volúmenes



- a) 2 a 1 b) 2 a 3 c) 3 a 2
d) 1 a 2 e) N.A.

7. El área total de un tetraedro es $36\sqrt{3}$. Hallar la altura de una de sus caras.

- a) $2\sqrt{3}$ b) $3\sqrt{3}$ c) $5\sqrt{3}$
d) $4\sqrt{3}$ e) $6\sqrt{3}$

8. Las áreas de las bases de un tronco de cono son 32 m² y 18 m² respectivamente y la altura es de 6m. ¿Cuál es su volumen en m³?

- a) 140m³ b) 150m³ c) 148m³
d) 124m³ e) 96m²

9. La longitud de una circunferencia máxima de una esfera mide 62,8 m. Calcular el área de la superficie esférica.

- a) 100π b) 200π c) 300π
d) 400π e) 500π

10. El área total de un prisma hexagonal es el triple de su área lateral. Hallar el volumen del prisma, si el lado de la base mide 2 m.

- a) 8m³ b) 7m³ c) 10m³
d) 9m³ e) 9m³