DIFERENCIABILIDAD DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Ejercicios ilustrativos

Carlos Enrique Núñez Rincón[1]

Algunos trucos del cálculo son bastante fáciles, otros son muy difíciles. Los tontos que escriben los libros de matemáticas avanzadas pocas veces se toman la molestia de mostrar cuán fácil son los cálculos fáciles.

Silvanus P. Thompson - Calculus Made Easy, Macmillan 1910.

Resumen:

En el presente artículo se hace una exposición de un conjunto de ejercicios vinculados con la diferenciabilidad de funciones de varias variables, tema que se desarrolla en la asignatura Matemática III del pensum de estudio de las diferentes carreras de ingeniería que configuran la Oferta Académica de la UNET. El propósito es establecer la conceptualización a través de ejemplos y contraejemplos la diferenciabildad de las funciones de varias variables. Para ello, se utilizan funciones de dos variables, ya que es posible mostrar el trazado de su gráfica en el espacio $\mathbb{R}^3$. No obstante, estas ideas son extensibles a funciones de más de dos variables. Los ejercicios se desarrollan de manera usual, complementados con el sistema computacional para la matemática avanzada MAPLE 12 para el trazado de la gráfica de las diversas funciones inmersas en la exposición. Esta dirigido al alumno-UNET, así como a todo aquel que esté interesado en el tema.

Palabras claves: función, variable, límite, continuidad, derivada parcial, diferenciabilidad, conjunto cerrado, conjunto compacto, conjunto no acotado, condición del residuo, función ampliada por continuidad, conjunto denso, derivada direccional, teorema, función clase C^1, Teorema de Schwarz, función clase C^2.

---

[1] El autor del artículo es Licenciado en Matemática, egresado de la Universidad de los Andes – ULA-Venezuela. Asimismo, es Magister y Doctor en Ciencias. Actualmente es Profesor en la Categoría de Titular, adscrito al Departamento de Matemática y Física de la Universidad Nacional Experimental del Táchira-UNET, Táchira-Venezuela. cnunezr@gmail.com

Diferenciabilidad de funciones de varias variables
Ejercicios ilustrativos

Abstract:

In the present paper is made an exposition of a set of exercises linked to the differentiability of functions of several variables, topic that takes place in the curse of Mathematics III of the various engineering degree programs that comprise the Academic Offer of the UNET. The purpose is to establish the conceptualization of the functions of several variables through examples and counterexamples. This is done using functions of two variables given that it is possible to display its graphical layout in the $\mathbb{R}^3$ space. However, these ideas are extended to functions of more than two variables. The exercises are conducted in the usual way, supplemented by the computer system for advanced mathematics MAPLE 12 for plotting the graph of the various functions embedded in the exposition. The paper is aimed to the UNET students, and anyone who is interested in the topic.

Key word: function, variable, limit, continuity, partial derivatives, differentiability, closed set, compact set, unbounded set, condition of the residue, expanded function for continuity, dense set, directional derivative, theorem, function class C^1, Schwarz Theorem, function class C^2.

Ejercicio 1. Dada la función $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x-y}{2x+3y}, & \text{si } 2x+3y \neq 0 \\ 0, & \text{si } 2x+3y = 0 \end{cases}$$

i) Estudiar su continuidad.

ii) Consideremos el conjunto D conformado por los puntos de discontinuidad. Determinar: si D es cerrado y si D es compacto.

iii) Determinar si las derivadas parciales de primer orden están definidas en el punto $(0,0)$.

iv) En concordancia con la respuesta del apartado *iii*, establecer si f es diferenciable en $(0,0)$.

Solución.

i) Es claro que la función es discontinua en todos los puntos de la recta $2x+3y=0$,

(*ver figura* 1):

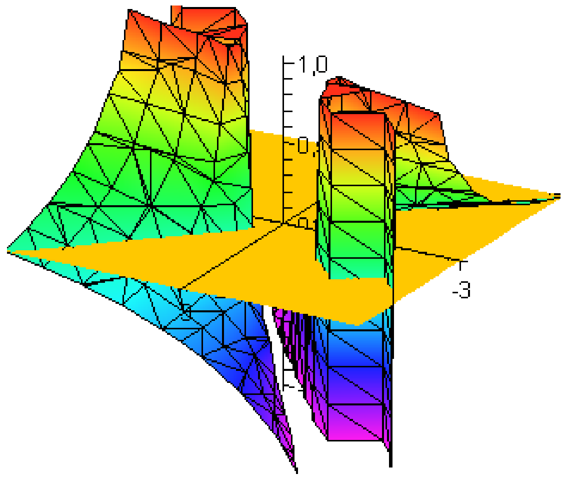

Figura 1

En primer lugar consideremos el punto $(0,0)$, para ello tomemos los caminos a través de las rectas $y=0$, y $x=0$, donde los puntos son de la forma $(x,0)$ y $(0,y)$ respectivamente, luego

$$\underset{x\to 0}{lím}\frac{x}{2x}=\frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \underset{y\to 0}{lím}\frac{-y}{3y}=-\frac{1}{3}$$

por lo tanto, el $\underset{(x,y)\to(0,0)}{lím}\dfrac{x-y}{2x+3y}$ no existe, entonces f no es continua en $(0,0)$.

En segundo lugar, consideremos los puntos de la recta $2x+3y=0$ diferentes de $(0,0)$, esto es $P=\left(x_0,-\frac{2}{3}x_0\right)$ y estudiemos $\underset{(x,y)\to\left(x_0,-\frac{2}{3}x_0\right)}{lím}\dfrac{x-y}{2x+3y}$, para ello tomemos el camino $x=x_0$ donde los puntos son de la forma (x_0,y), (*ver figura* 2), luego

$$\underset{y\to -\frac{2}{3}x_0}{lím}\frac{x_0 - y}{2x_0+3y}=\begin{cases}+\infty, \text{si } y>-\dfrac{2}{3}x_0\\ -\infty, \text{si } y<-\dfrac{2}{3}x_0\end{cases}$$

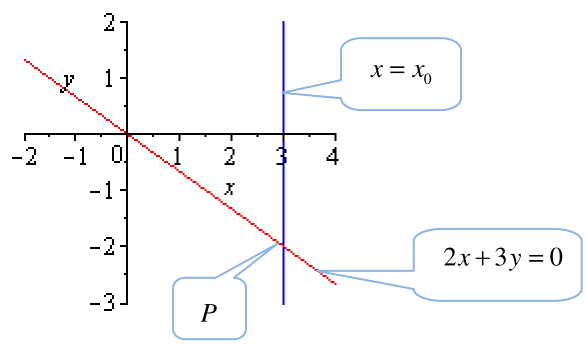

Figura 2

por lo tanto, este límite no existe, entonces f no es continua a los largo de la recta $2x+3y=0$. Nótese que f presenta una discontinuidad esencial.

ii) De *i*, se tiene que

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / 2x+3y=0\right\}$$

consideremos un punto cualquiera $(a,b)\notin D$, $d\big((a,b),D\big)=r$ donde $r\in\mathbb{R}^+$, entonces el disco abierto $B\big((a,b),r\big)\subset D^C$, por lo tanto D^C es abierto, luego D es cerrado. Por otra parte, D no es compacto ya que no está acotado.

iii) Determinamos las derivadas parciales de primer orden en el punto $(0,0)$:

$$f_x(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\underset{h\to 0}{lím}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$$

$$=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\underset{h\to 0}{lím}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\underset{h\to 0}{lím}\frac{\frac{h}{2h}-0}{h}=\underset{h\to 0}{lím}\frac{\frac{1}{2}}{h}=\begin{cases}-\infty, \text{si } h<0\\ +\infty, \text{si } h>o\end{cases}$$

$$f_y(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=\underset{h\to 0}{lím}\frac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h}$$

$$=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\underset{h\to 0}{lím}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}=\underset{h\to 0}{lím}\frac{-\frac{h}{3h}-0}{h}=\underset{h\to 0}{lím}\frac{-\frac{1}{3}}{h}=\begin{cases}-\infty, \text{ si } h>0\\ +\infty, \text{ si } h<o\end{cases}$$

es claro que estos límites no existen, por lo tanto las derivadas parciales de primer orden en el punto $(0,0)$ no están definidas.

iv) No, puesto que la existencia de las derivadas parciales de primer orden, es decir que f sea derivable, es una *condición necesaria* para precisar si una función de dos o más variables es diferenciable en un punto. Sin embargo, que sea derivable no es *condición suficiente* para garantizar que sea diferenciable. Veamos el ejercicio 2.

Ejercicio 2. Sea la función $f:U\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},$ definida por

$$f(x,y)=\begin{cases}x^2+2y, \text{ si } (x,y)\neq(1,2)\\ 0, \qquad\quad \text{ si } (x,y)=(1,2)\end{cases}$$

Determinar que f es derivable en el punto $(1,2)$, pero no diferenciable.
Solución.

f es derivable $\qquad \frac{\partial f}{\partial x}(1,2)=2$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)=2$

sin embargo, no es diferenciable, puesto que no es continua, (*ver figura* 3), ya que

$$\underset{(x,y)\to(1,2)}{lím}\left(x^2+2y\right)=5\neq 0=f(1,2).$$

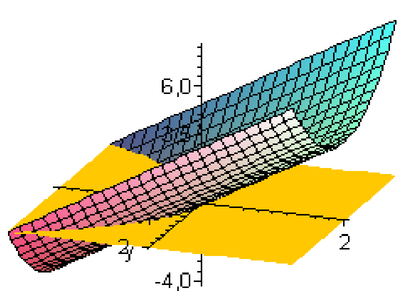

Figura 3

Diferenciabilidad de funciones de varias variables
Ejercicios ilustrativos

Recordemos que toda función diferenciable es continua. Pero, no toda función continua es diferenciable. Veamos el ejercicio 3.

Ejercicio 3. Dada la función $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

i) Determinar que es continua en el punto $(0,0)$.

ii) Establecer que es derivable en el punto $(0,0)$.

iii) Evidenciar que no es diferenciable en el punto $(0,0)$.

Solución.

i) f es continua en $(0,0)$, puesto que, tanto los límites iterados como los direccionales existen y son iguales; además f está definida en $(0,0)$, (*ver figura* 4), esto es

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x}=\lim_{x\to 0}0=0=f(0,0)$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=\lim_{y\to 0}\frac{0}{y}=\lim_{y\to 0}0=0=f(0,0)$$

consideremos la familia o haz de rectas $y=mx$ $(m\in\mathbb{R})$, de vértice $(0,0)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\overset{y=mx}{\longrightarrow}=\lim_{x\to 0}\frac{mx^2}{\sqrt{1+m^2}\,x}=\lim_{x\to 0}\frac{m}{\sqrt{1+m^2}}\,x=0=f(0,0)$$

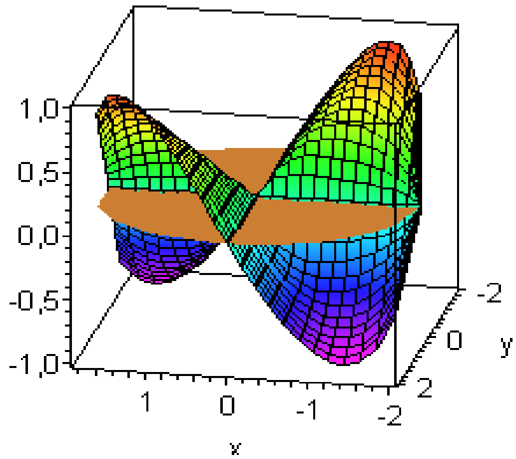

Figura 4

$ii)$ f es derivable en $(0,0)$, puesto que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h(0)}{h}-0}{h}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{(0)h}{h}-0}{h}=0$$

$iii)$ Para evidenciar que no es diferenciable, utilizamos la condición del residuo

$$f(x_0+h_1,y_0+h_2)=f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)h_1+f_y(x_0,y_0)h_2+r(h_1,h_2)$$

$$f(0+h_1,0+h_2)=f(0,0)+f_x(0,0)h_1+f_y(0,0)h_2+r(h_1,h_2)$$

$$r(h_1,h_2)=f(h_1,h_2)=\frac{h_1h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

donde

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{r(h_1,h_2)}{\left\|(h_1,h_2)\right\|}=\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{\frac{h_1h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{h_1h_2}{h_1^2+h_2^2}=\overset{h_1=h_2}{\longrightarrow}=\lim_{h_1\to 0}\frac{h_1^2}{2h_1^2}=\frac{1}{2}\neq 0$$

por tanto f no es diferenciable.

Observamos que la condición del residuo (*es uno de los procedimientos*), establece si una función de dos o más variables es, o no, diferenciable en un punto. Veamos el ejercicio 4.

Ejercicio 4.

Dada la función $f: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x,y) = (x+1)(y-2)^2 \operatorname{sen}\frac{1}{(x+1)^2}\cos\frac{1}{y-2}$$

- *i)* Determinar si la discontinuidad que presenta f es evitable o esencial. Si es evitable, ampliar a f por continuidad a todo $\mathbb{R}^2$.
- *ii)* En concordancia con la respuesta del apartado *i*, establecer si la función ampliada por continuidad presenta derivadas direccionales en todas las direcciones.
- *iii)* Asimismo, estudiar su diferenciabilidad en el punto $(-1,2)$.

Solución.

i) *f* es continua en todo $\mathbb{R}^2$, por ser el producto de funciones continuas, excepto a lo largo de las rectas $x=-1$ y $y=2$ (*ver figuras* 5 y 6), ya que

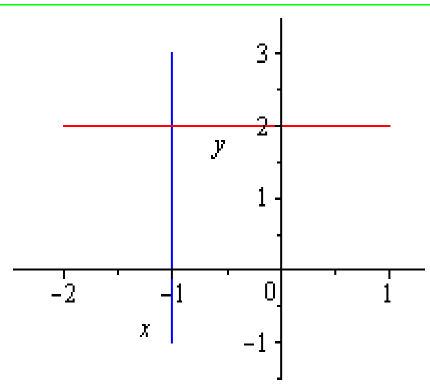

Figura 5

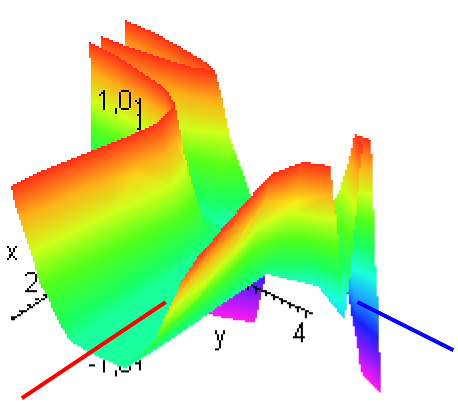

Figura 6

f no está definida en los puntos de la forma $(-1, y_0)$ y $(x_0, 2)$, no obstante que

$$\underset{(x,y)\to(-1,y_0)}{lím}(x+1)(y-2)^2 \operatorname{sen}\frac{1}{(x+1)^2}\cos\frac{1}{y-2}=0$$

$$\underset{(x,y)\to(x_0,2)}{lím}(x+1)(y-2)^2 \operatorname{sen}\frac{1}{(x+1)^2}\cos\frac{1}{y-2}=0$$

en particular

$$\underset{(x,y)\to(-1,2)}{lím}(x+1)(y-2)^2 \operatorname{sen}\frac{1}{(x+1)^2}\cos\frac{1}{y-2}=0$$

puesto que, estos límites existen y el dominio de f es denso en $\mathbb{R}^2$, f presenta una discontinuidad evitable, por lo tanto admite una única ampliación continua en $\mathbb{R}^2$ (*ver figura* 7), esto es

$$g(x,y)=\begin{cases}(x+1)(y-2)^2 \operatorname{sen}\dfrac{1}{(x+1)^2}\cos\dfrac{1}{y-2}, & \text{si } x\neq -1 \ \ y \ \ y\neq 2\\ 0, & \text{si } x=-1 \ \ y \ \ y=2\end{cases}$$

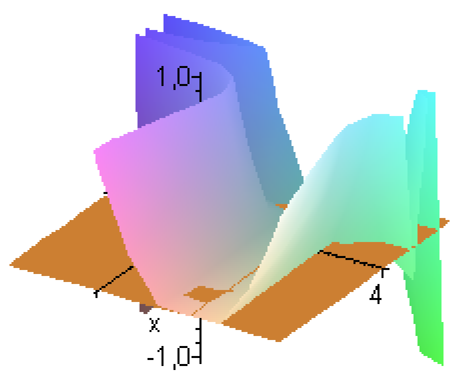

Figura 7

ii) g tiene derivadas en todas las direcciones:

derivadas parciales de primer orden

Diferenciabilidad de funciones de varias variables
Ejercicios ilustrativos

$$\frac{\partial g}{\partial x}(-1,y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{g(-1+h,y_0)-g(-1,y_0)}{h}=0,\quad \forall y_0$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,2)=\lim_{h\to 0}\frac{g(x_0,2+h)-g(x_0,2)}{h}=0,\quad \forall x_0$$

para determinar las derivadas direccionales consideremos el vector unitario $\boldsymbol{u}$ = $\langle \cos\theta, \operatorname{sen}\theta \rangle$

$$D_u g(x_0,y_0)=\lim_{t\to 0}\frac{g(x_0+t\cos\theta, y_0+t\operatorname{sen}\theta)-g(x_0,y_0)}{t}$$

$$D_u g(-1,2)=\lim_{t\to 0}\frac{g(-1+t\cos\theta, 2+t\operatorname{sen}\theta)-g(-1,2)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{(t\cos\theta)\left(t^2\operatorname{sen}^2\theta\right)\operatorname{sen}\dfrac{1}{t^2\cos^2\theta}\cos\dfrac{1}{t\operatorname{sen}\theta}-0}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}(\cos\theta)\left(t^2\operatorname{sen}^2\theta\right)\operatorname{sen}\frac{1}{t^2\cos^2\theta}\cos\frac{1}{t\operatorname{sen}\theta}=0,\quad \text{puesto que } \left|\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta\right|\le 1$$

g es diferenciable en el punto $(-1,2)$

$$g(x_0+h_1,y_0+h_2)=g(x_0,y_0)+g_x(x_0,y_0)h_1+g_y(x_0,y_0)h_2+r(h_1,h_2)$$

$$r(h_1,h_2)=g(-1+h_1,2+h_2)=h_1h_2^2 sen\frac{1}{h_1^2}cos\frac{1}{h_2}$$

donde

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{r(h_1,h_2)}{\left\|(h_1,h_2)\right\|}=\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{\left|h_1h_2^2\operatorname{sen}\dfrac{1}{h_1^2}\cos\dfrac{1}{h_2}\right|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\le\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{\left|h_1h_2^2\right|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

$$\overset{h_1=h_2}{=\longrightarrow} = \lim_{h_1\to 0} \frac{|h_1| h_1^2}{\sqrt{2}|h_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{h_1\to 0} h_1^2 = 0$$

De acuerdo al resultado anterior, cabe preguntarse: ¿para que una función sea diferenciable es necesario tener derivadas direccionales en todas las direcciones? La respuesta es no. Es decir, la existencia de las derivadas direccionales, en todas las direcciones dadas por un vector unitario $\boldsymbol{u} = \langle a,b \rangle$, no garantiza que una función sea diferenciable. Veamos el ejercicio 5.

Ejercicio 5. Sea la función $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, \quad\quad \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

i) Determinar las derivadas direccionales en el punto $(0,0)$ en la dirección del vector unitario $\boldsymbol{u} = \langle a,b \rangle$.

ii) Determinar si f es diferenciable en el punto $(0,0)$.

Solución.

i)
$$D_u f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0+at, 0+bt) - f(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\dfrac{(at)(b^2t^2)}{a^2t^2+b^4t^4} - 0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^3ab^2}{t^3(a^2+b^4t^2)} = \lim_{t\to 0} \frac{ab^2}{a^2+b^4t^2} = \begin{cases} 0, \text{ si } a=0 \text{ ó } b=0 \\ b^2/a, \text{ si } a \neq 0 \end{cases}$$

por lo tanto, f tiene derivadas direccionales en todas las direcciones.

ii) Sin embargo f no es diferenciable, ya que no es continua (*ver figura* 8), puesto que

$$\underset{(x,y)\to(0,0)}{lím} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \begin{cases} 0, & \text{si } y=0 \\ 1/2, & \text{si } x=y^2 \end{cases} \quad \text{no existe.}$$

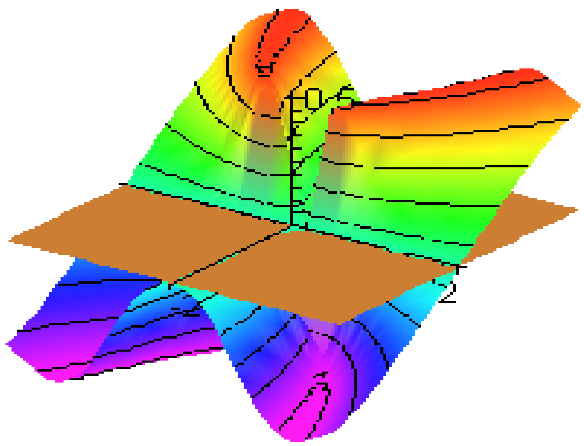

Figura 8

Ejercicio 6. Dada la función $f: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} x-y, & \text{si } x=0 \text{ ó } y=0 \\ 1, & \text{si } x\neq 0 \text{ y } y\neq 0 \end{cases}$$

i) Determinar que f sólo tiene derivadas direccionales en las direcciones canónicas.

ii) Determinar que f no es diferenciable.

Solución. En la *figura* 9, es posible observar el trazado de la grafica de la función

$i)$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \underset{h\to 0}{lím}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \underset{h\to 0}{lím}\frac{h-0}{h} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \underset{h\to 0}{lím}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \underset{h\to 0}{lím}\frac{-h-0}{h} = -1$$

luego, f es derivable en $(0,0)$.

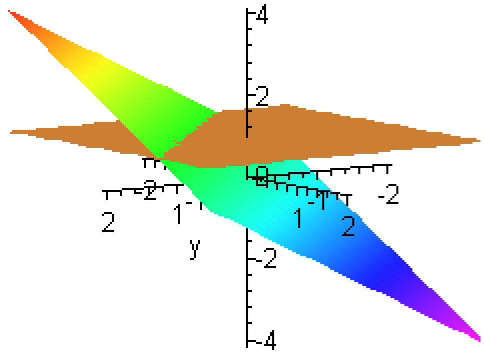

Figura 9

Sin embargo, en la dirección del vector unitario $\boldsymbol{u} = \langle a,b \rangle$, por supuesto $a \neq 0$ y $b \neq 0$, tenemos

$$D_u f(0,0) = \underset{t \to 0}{lím} \frac{f(0+at, 0+bt) - f(0,0)}{t} = \underset{t \to 0}{lím} \frac{f(at,bt)}{t} = \underset{h \to 0}{lím} \frac{1}{t} = \begin{cases} +\infty, \text{ si } t > 0 \\ -\infty, \text{ si } t < 0 \end{cases}$$

es claro que este límite no existe.

ii) f no es diferenciable, ya que presenta una discontinuidad esencial, puesto que

$$\underset{(x,y)\to(0,0)}{lím} f(x,y) = \overset{y=0}{\rightarrow} = \underset{x \to 0}{lím}\, x = 0 \neq \underset{(x,y)\to(0,0)}{lím} f(x,y) = \overset{y=x}{\rightarrow} = \underset{x \to 0}{lím} 1 = 1$$

es claro que este límite no existe.

Ejercicio 7. Consideremos la función $f: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, \qquad\quad \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

i) Determinar las derivadas direccionales en el punto $(0,0)$ en la dirección del vector unitario $\boldsymbol{u} = \langle \cos\theta, \operatorname{sen}\theta \rangle$.

ii) Determinar si f es diferenciable en el punto $(0,0)$.

Solución.

i) $$D_u f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0+t\cos\theta, 0+t\operatorname{sen}\theta) - f(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\dfrac{(t\cos\theta)(t\operatorname{sen}\theta)}{t^2\cos^2\theta + t^2\operatorname{sen}^2\theta} - 0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{t} = \begin{cases} 0, \text{ si } \operatorname{sen}\theta\cos\theta = 0 \\ \textit{no existe}, \text{ si } \operatorname{sen}\theta\cos\theta \neq 0 \end{cases}$$

es claro que este límite únicamente existe para los valores de $\theta = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ y 2π. Por lo tato, las derivadas direccionales sólo están definidas en las direcciones canónicas, esto es

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

ii) f no es diferenciable, puesto que no es continua (*ver figura* 10), ya que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \begin{cases} 0, & \text{si } x = 0 \\ 1/2, & \text{si } y = x \end{cases} \quad \text{no existe.}$$

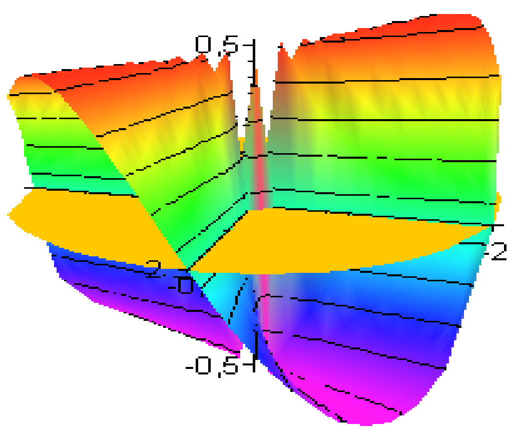

Figura 10

En el ejercicio 8, se presenta otro método para establecer si una función de dos variables es diferenciable.

Ejercicio 8. Dada la función $f: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x,y)=\begin{cases}\left(x^2+y^2\right)\operatorname{sen}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

i) Estudiar su continuidad en el plano $\mathbb{R}^2$.

ii) Determinar su diferenciabilidad en el punto $(0,0)$.

iii) Establecer la continuidad de las derivadas parciales de primero orden en el punto $(0,0)$.

iv) En concordancia con *ii* y *iii*, dar una conclusión acerca del siguiente Teorema: Sea $f: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función definida en el conjunto abierto $U \subseteq \mathbb{R}^2$. Si las funciones (derivadas parciales) $f_x : \widetilde{U} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $f_y : \widetilde{U} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, son continuas en el punto $(x_0, y_0) \in \widetilde{U}$, entonces f es diferenciable en (x_0, y_0).

El teorema establece que si f es una función de clase C^1, entonces es diferenciable.

Solución.

i) f es continua en todo $\mathbb{R}^2$, (*ver figura* 11), puesto que:

para $(x,y)\neq(0,0)$

$$\underset{(x,y)\to(x_0,y_0)}{lím}\left(x^2+y^2\right)\operatorname{sen}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=\left(x_0^{\,2}+y_0^{\,2}\right)\operatorname{sen}\frac{1}{\sqrt{x_0^{\,2}+y_0^{\,2}}}=f(x_0,y_0)$$

para $(x,y)=(0,0)$

$$\underset{(x,y)\to(0,0)}{lím}\left(x^2+y^2\right)\operatorname{sen}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=\underset{y=r\operatorname{sen}\theta}{\overset{x=r\cos\theta}{\longrightarrow}}=\underset{r\to0}{lím}\left(r^2\operatorname{sen}\frac{1}{r}\right)=0=f(0,0)$$

es claro que $r\to0$ *sii* $(x,y)\to(0,0)$

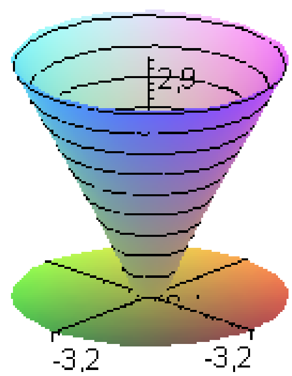

Figura 11

ii) En primer lugar determinamos las derivadas parciales de primer orden en el punto $(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2\operatorname{sen}\frac{1}{h}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\left(h\operatorname{sen}\frac{1}{h}\right)=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2\operatorname{sen}\frac{1}{h}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\left(h\operatorname{sen}\frac{1}{h}\right)=0$$

luego

$$f(0+h_1,0+h_2)=f(0,0)+\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h_1+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)h_2+r(h_1,h_2)$$

$$r(h_1,h_2)=f(h_1,h_2)=\left(h_1^2+h_2^2\right)\operatorname{sen}\frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

donde

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{\left(h_1^2+h_2^2\right)\operatorname{sen}\frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=\overset{h_1=h_2}{\longrightarrow}=\lim_{h_1\to 0}\frac{2h_1^2\operatorname{sen}\frac{1}{\sqrt{2}h_1}}{\sqrt{2}h_1}=\frac{2}{\sqrt{2}}\lim_{h_1\to 0}\left(h_1\operatorname{sen}\frac{1}{\sqrt{2}h_1}\right)_1=0$$

por lo tanto, f es diferenciable en el punto $(0,0)$.

iii) Obtenemos las derivadas parciales de primer orden mediante las fórmulas de derivación

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases} 2x\operatorname{sen}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases} 2y\operatorname{sen}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Es evidente que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \quad \text{y} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

no existen, por lo tanto las derivadas parciales de primer orden (*ver figuras* 12 y 13), presentan una discontinuidad esencial.

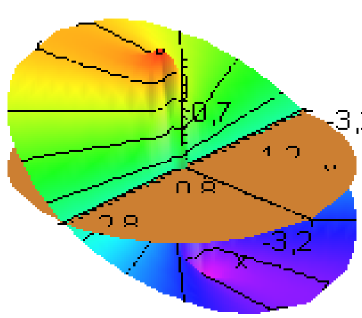

Figura 12

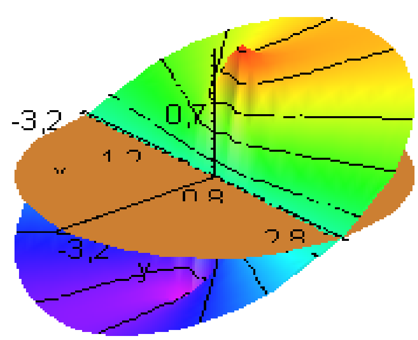

Figura 13

iv) Que el reciproco del teorema no es verídico, es decir: el hecho de que la función $f: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sea diferenciable en el punto $(x_0, y_0) \in U$, no implica que las derivadas parciales de primer orden de f sean continuas en (x_0, y_0).

Ejercicio 9. Consideremos la función $f: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

i) Probar que $f_y(x,0) = x, \forall x$ y $f_x(0,y) = -y, \forall y$.

ii) Probar que para un punto cualquiera $(x,y) \neq (0,0)$ se verifica el Teorema de Schwarz, esto es $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$. Mientras que para $(x,y) = (0,0)$ no se verifica, es decir $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$.

iii) Mostrar que f es diferenciable $(0,0)$.

Solución. En la *figura* 14, es posible observar el trazado de la gráfica de f

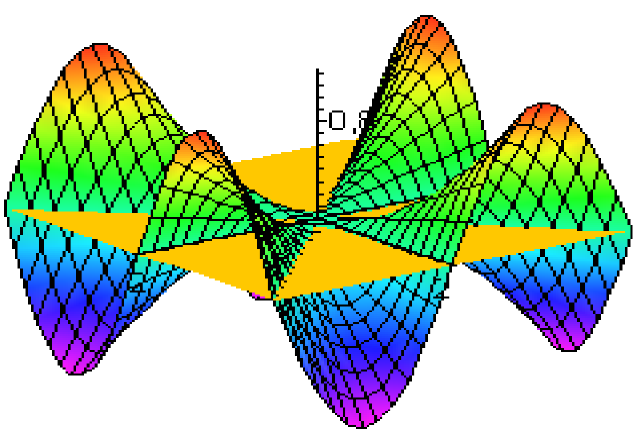

Figura 14

i) $$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x,0+h) - f(x,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{xh\dfrac{x^2 - h^2}{x^2 + h^2} - x(0)\dfrac{x^2}{x^2}}{h} = x$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,y)-f(0,y)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{hy\dfrac{h^2-y^2}{h^2+y^2}-0(y)\dfrac{-y^2}{y^2}}{h}=-y$$

ii) En primer lugar, obtenemos las derivadas parciales de primer orden (*ver figuras* 15 *y* 16), mediante las fórmulas de derivación en un punto cualquiera $(x,y)\neq(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{\left(x^2+y^2\right)^2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{x^5-4x^3y^2-xy^4}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

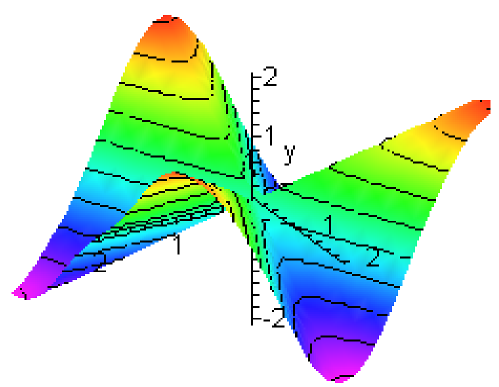

Figura 15

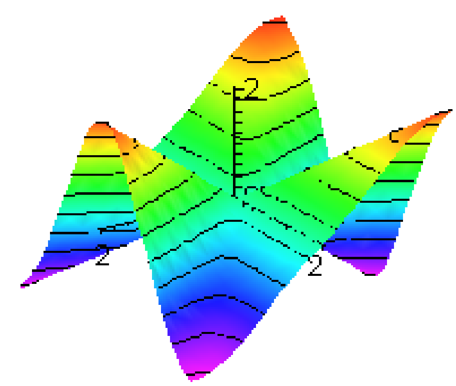

Figura 16

ahora, determinamos las derivadas mixtas o cruzadas de segundo orden utilizando las fórmulas de derivación

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{x^6+9x^4y^2-9x^2y^4-y^6}{\left(x^2+y^2\right)^3}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$$

es claro que estas funciones están definidas y son continuas en todo punto $(x,y)\neq(0,0)$. Es decir, f se comporta como una función clase C^2, para todo $(x,y)\neq(0,0)$.

Por otra parte, consideremos las funciones

$$g(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{\left(x^2+y^2\right)^2}, & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$h(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^5-4x^3y^2-xy^4}{\left(x^2+y^2\right)^2}, & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

luego

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=\frac{\partial g}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{g(0,0+h)-g(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{-h^5}{h^4}}{h}=-1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\frac{\partial h}{\partial x}(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{h(0+k,0)-h(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{\frac{k^5}{k^4}}{k}=1$$

por lo tanto

$$f_{xy}(0,0)\neq f_{yx}(0,0).$$

Otra manera de dar respuesta a la pregunta consiste en considerar las funciones

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=\left\{\begin{array}{ll}\dfrac{x^6+9x^4y^2-9x^2y^4-y^6}{\left(x^2+y^2\right)^3}, & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{array}\right\}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)$$

nótese, que estas funciones están definidas en el punto $(0,0)$, no obstante son discontinuas en $(0,0)$, puesto que el límite cuando $(x,y)\to(0,0)$ no existe, (*ver* *figura* 17), por lo tanto $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$. Es decir, para $(x, y) = (0,0)$ f no es una función clase C^2.

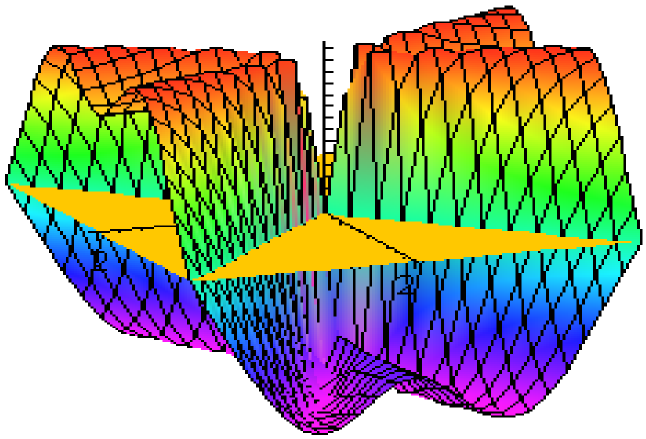

Figura 17

iii) Primero, obtenemos las derivadas parciales de primer orden en el punto $(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \underset{h \to 0}{lím} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \underset{h \to 0}{lím} \frac{h(0)\frac{h^2}{h^2} - 0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \underset{h \to 0}{lím} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \underset{h \to 0}{lím} \frac{(0)h\frac{-h^2}{h^2} - 0}{h} = 0$$

luego

$$r(h_1, h_2) = f(h_1, h_2) = h_1 h_2 \frac{h_1^2 - h_2^2}{h_1^2 + h_2^2}$$

donde

$$\underset{(h_1,h_2)\to(0,0)}{lím} \frac{h_1 h_2 \frac{h_1^2 - h_2^2}{h_1^2 + h_2^2}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \underset{h_2 = r\operatorname{sen}\theta}{\overset{h_1 = r\cos\theta}{\longrightarrow}} = \underset{r \to 0}{lím} \frac{(r\cos\theta)(r\operatorname{sen}\theta)\left(\frac{r^2\cos^2\theta - r^2\operatorname{sen}^2\theta}{r^2}\right)}{r}$$

es claro que $r \to 0$ *sii* $(x, y) \to (0,0)$

$$= \lim_{r \to 0} \frac{r^2 (\cos\theta \operatorname{sen}\theta)(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)}{r} = \lim_{r \to 0} r (\cos\theta \operatorname{sen}\theta)(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) = 0$$

puesto que $|\operatorname{sen}\theta \cos\theta| \leq 1$, así como $|\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta| \leq 1$

luego, f es diferenciable en el punto $(0,0)$.

Ejercicio 10. Consideremos la función $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} 3x^2 + y^2, \text{ si } 3x^2 + y^2 \leq 4 \\ 3, \quad\quad\quad \text{ si } 3x^2 + y^2 > 4 \end{cases}$$

Demostrar que f es continua en todos los puntos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, excepto en los puntos que configuran la elipse $3x^2 + y^2 = 4$.

Solución.

En primer lugar, consideremos el conjunto $U_1 = \{(x_{0,} y_0) \in \mathbb{R}^2 / 3x_0^2 + y_0^2 < 4\}$, entonces

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (3x^2 + y^2) = 3x_0^2 + y_0^2 = f(x_0,y_0)$$

En segundo lugar, consideremos el conjunto $U_2 = \{(x_{0,} y_0) \in \mathbb{R}^2 / 3x_0^2 + y_0^2 > 4\}$, entonces

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} 3 = 3 = f(x_0,y_0)$$

luego, f es continua en todos los puntos $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, para los cuales $3x_0^2 + y_0^2 \neq 4$, (*ver figura* 18).

En tercer lugar consideremos los conjuntos $U_2 = \{(x_{0,} y_0) \in \mathbb{R}^2 / 3x_0^2 + y_0^2 > 4\}$ y $U_4 = \{(x_{0,} y_0) \in \mathbb{R}^2 / 3x_0^2 + y_0^2 \leq 4\}$, entonces

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} 3 = 3$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \left(3x^2 + y^2\right) = 3x_0^2 + y_0^2 = 4$$

Puesto que, estos límites son diferentes, f es discontinua en todos los puntos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ de la elipse $3x^2 + y^2 = 4$, (*ver figura* 18).

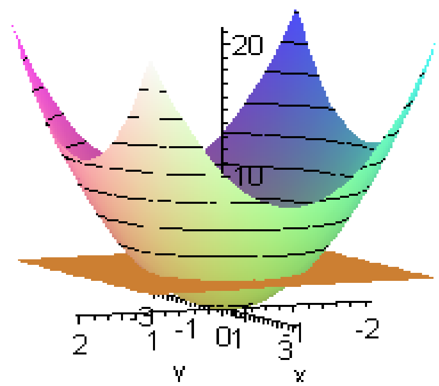

Figura 18

Bibliografía

Apóstol, T. (1991). **Análisis matemático**. Barcelona: Reverté.

MAPLE 12 De Waterloo. (2008). **The Maple Handbook**. USA: Maple 12 Software. Inc.

Masrden, J. y Tromba, A. (1991). **Calculo vectorial**. 3ra. ed. New York: Addisson-Wesley Iberoamericana.

Núñez R., C. (2001). "Diferenciabilidad en funciones de varias variables-Condición del Residuo". **Aleph Sub – Cero, Serie de Divulgación**. 2001-II(II), 81–86. Venezuela.

Pita, C. (1995). **Cálculo vectorial**. 1ra. ed. México: Prentice-Hall Hispanoamericana.

Spivak, M. (1988). **Cálculo en variedades.** Barcelona: Reverté.