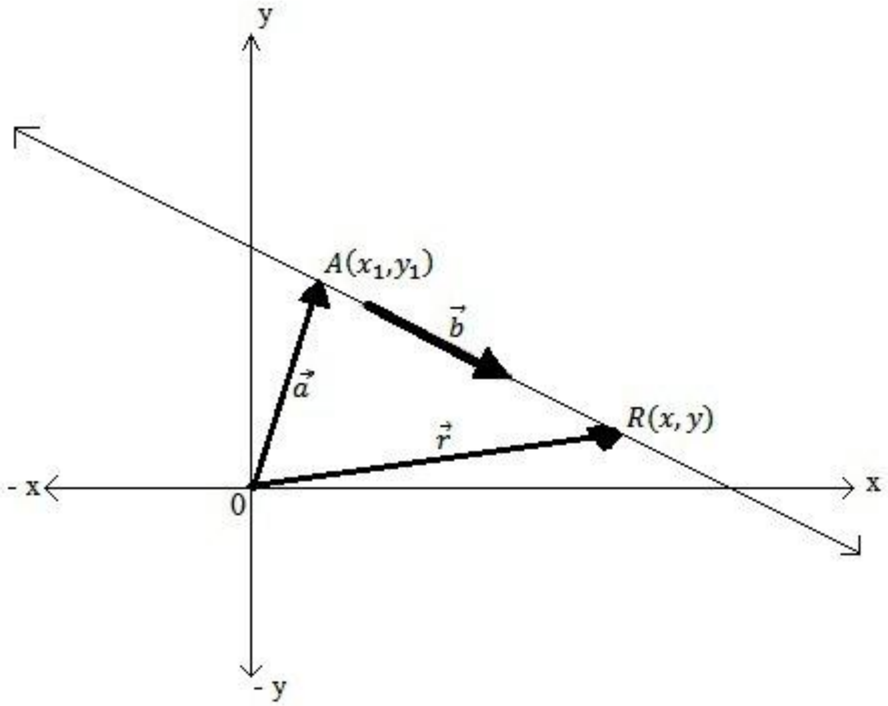
ECUACIÓN VECTORIAL DE LA RECTA

Autor: Mario Orlando Suárez Ibujes



Para determinar la ecuación vectorial de una recta es necesario que conozcamos un punto de la recta y un vector de posición o dos puntos de la recta. Vamos a hallar la ecuación a partir de un punto y un vector de posición, si tuviésemos dos puntos A, R entonces el vector $\overrightarrow{AR}$ es un vector de posición.

Dados un punto A de la recta y un vector de dirección $\vec{b}$, un punto genérico R de la recta tendrá como vector de posición $\overrightarrow{OR}$.

Por suma de vectores se tiene que $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{0A} + \overrightarrow{AR}$, como el vector $\overrightarrow{AR}$ y $\vec{b}$ están en la misma dirección existe un número t tal que $\overrightarrow{AR} = t \cdot \vec{b}$, por tanto $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{0A} + t \cdot \vec{b}$. Reemplazando $\overrightarrow{OR} = \vec{r}$ y $\overrightarrow{0A} = \vec{a}$ se tiene:

$$\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{a}} + \mathbf{t} \cdot \vec{\mathbf{b}}$$

Que se conoce como ecuación vectorial de la recta.

Nota: También se expresa de la forma$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \vec{\mathbf{a}} + \mathbf{t} \cdot \vec{\mathbf{b}}$

Ejemplos ilustrativos

1) Halle la ecuación vectorial de la recta que pasa por el punto (2,3) y tiene como vector de dirección $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Solución:

$\vec{r} = \vec{a} + t \cdot \vec{b}$

$\boldsymbol{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \end{pmatrix} + \mathbf{t} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

2) Halle la ecuación vectorial de la recta que pasa por el punto (2,3) y tiene como vector de dirección $\vec{b} = (2,1)$

Solución:

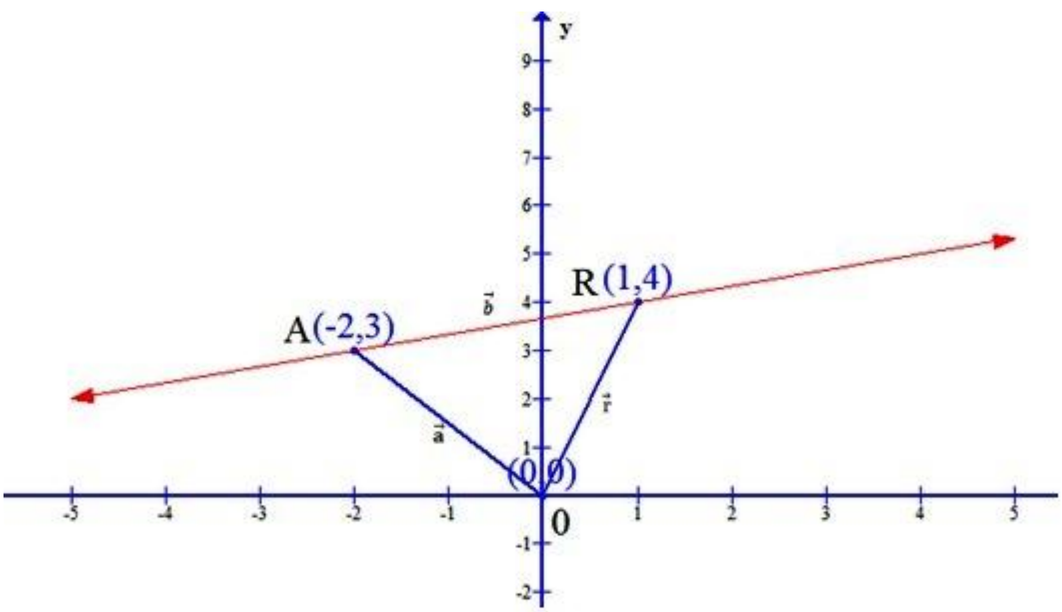
$\vec{r} = \vec{a} + t \cdot \vec{b}$

$\vec{r} = (2,3) + t(-2,1)$

3) Hallar la ecuación vectorial de la recta que pasa por los puntos A(-2,3) y R(1,4)

Solución

Graficando se obtiene:



Para determinar la ecuación vectorial necesitamos un punto y un vector de dirección, el vector de dirección se puede determinar a partir de dos puntos de la recta

$\overrightarrow{AR} = \vec{R} - \vec{A} = (1,4) - (-2 + 3) = (3,1)$

Luego la ecuación vectorial es:

$\vec{\mathrm{r}} = \vec{\mathrm{a}} + \mathrm{t} \cdot \vec{\mathrm{b}}$
$\vec{\mathrm{r}} = (-3{,}2) + \mathrm{t}(3{,}1)$

4) Determine la ecuación de la recta que pasa por el punto (2,-1) y tiene por pendiente 3/4 empleando la ecuación vectorial de la recta.

Solución:
El punto (2,-1) = $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ y la pendiente $\frac{3}{4} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

Reemplazando valores en la ecuación vectorial se tiene:
$\vec{\mathrm{r}} = \vec{\mathrm{a}} + \mathrm{t} \cdot \vec{\mathrm{b}}$
$\vec{\mathrm{r}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mathrm{t} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

Como $\vec{\mathrm{r}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ se tiene:
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mathrm{t} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

Realizando las operaciones se obtiene:
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4t \\ 3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 4t \\ -1 + 3t \end{pmatrix}$

Igualando obtenemos:
$x = 2 + 4t \;;\; y = -1 + 3t$

Despejando t se obtiene:

$$t = \frac{x-2}{4};\; t = \frac{y+1}{3}$$

Igualando t y realizando las operaciones respectivas se obtiene:

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{3} \Rightarrow 3(x-2) = 4(y+1) \Longrightarrow 3x - 6 = 4y + 4 \Longrightarrow 3x - 4y - 10 = 0$$

Que es la ecuación solicitada

5) Hallar el punto de intersección entre $r_1 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + t_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ y $r_2 = \begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix} + t_2\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$

Solución:

Realizando las operaciones en las ecuaciones vectoriales se tiene:

$$r_1 = \begin{pmatrix}1+t_1\\2+t_1\end{pmatrix} \;\; y \;\; r_2 = \begin{pmatrix}3+t_2\\-2+4t_2\end{pmatrix}$$

Se forman el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases}1+t_1 = 3+t_2\\2+t_1 = -2+4t_2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}t_1 - t_2 = 2\\t_1 - 4t_2 = -4\end{cases}$$

Resolviendo el sistema se obtiene:

$t_1 = 4$ y $t_2 = 2$

Sustituyendo los valores encontrados en r_1 se tiene:

$$r_1 = \begin{pmatrix}1+t_1\\2+t_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+4\\2+4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}$$

O sustituyendo los valores encontrados en r_2 se tiene:

$$r_2 = \begin{pmatrix}3+t_2\\-2+4t_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3+2\\-2+4\cdot 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}$$

Por lo tanto el punto de intersección es (5,6)

6) Dado la ecuación vectorial $\vec{r} = \begin{pmatrix}-5\\3\\4\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$, halle la ecuación continua o cartesiana de la recta

Solución:

Como $\vec{r} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ se obtiene:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\3\\4\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}x+5\\y-3\\z-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}t\\2t\\-t\end{pmatrix}$$

Igualando

$x+5 = t$; $y-3 = 2t$; $z-4 = -t$

Despejando t

$$t = \frac{x+5}{1}; \;\; t = \frac{y-3}{2}\;; t = \frac{z-4}{-1}$$

Igualando

$$\frac{x+5}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-4}{-1}$$

Es es ecuación solicitada

Nota: Si una recta pasa por el punto (a,b,c) y tiene la dirección del vector $\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}$, la ecuación continua de la recta está dada por la siguiente expresión:

$$\frac{x-a}{l} = \frac{y-b}{m} = \frac{z-c}{n}$$