Titulo: ***ECUACIONES RACIONALES***

Año escolar: 5to. año de bachillerato
Autor: José Luis Albornoz Salazar
Ocupación: Ing Civil. Docente Universitario
País de residencia: Venezuela
Correo electrónico: martilloatomico@gmail.com

El autor de este trabajo solicita su valiosa colaboración en el sentido de enviar cualquier sugerencia y/o recomendación a la siguiente dirección :

martilloatomico@gmail.com

Igualmente puede enviar cualquier ejercicio o problema que considere pueda ser incluido en el mismo.

Si en sus horas de estudio o práctica se encuentra con un problema que no pueda resolver, envíelo a la anterior dirección y se le enviará resuelto a la suya.

ECUACIONES RACIONALES

Para la solución de este tipo de ecuaciones es necesario que el estudiante maneje adecuadamente los siguientes aspectos :

- *Solución de ecuaciones de primer y 2do. grado*
- *Cálculo del Mínimo Común Múltiplo de polinomios*
- *Multiplicación y división de polinomios*
- *Factorización de polinomios*
- *Productos notables*
- *Valorar expresiones algebraicas (comprobación).*

Resulta esencial y ventajoso comprobar los resultados obtenidos de manera que se pueda descartar cualquier "solución ficticia" que podamos haber creado al realizar las operaciones.

Las posibles soluciones que debemos descartar generalmente están representadas por los valores que anulan algún denominador (la división por cero no existe).

Ejemplo 1 : **Resolver** $\frac{X^2+6X+5}{X+1}=0$

Se recomienda factorizar aquellos polinomios de segundo grado (y mayores) ya que nos permite visualizar más fácilmente las posibles soluciones.

Al factorizar el numerador tendremos :

$$\frac{(X+5).(X+1)}{X+1}=0$$

El paso anterior nos permite visualizar fácilmente la simplificación de la ecuación :

$$\frac{(X+5).\cancel{(X+1)}}{\cancel{X+1}}=0 \qquad ; \qquad X+5=0$$

X = - 5

Para comprobar el resultado sustituyo este valor en la ecuación inicial y deberá cumplirse la igualdad :

$$\frac{(-5)^2+6(-5)+5}{(-5)+1}=0 \qquad ; \qquad \frac{25-30+5}{-4}=0$$

$$\frac{30-30}{-4}=0 \qquad ; \qquad \frac{0}{-4}=0 \qquad \textbf{CIERTO}$$

Luego podemos afirmar que $\mathbf{X=-5}$ ***SI ES SOLUCIÓN***

Ejemplo 2 : **Resolver** $\frac{1}{X^2-X}-\frac{1}{X+3}=0$

Algunos autores y profesores recomiendan calcular el mínimo común múltiplo de los denominadores de los términos que se encuentran en el miembro izquierdo de la ecuación.

Al considerar que este procedimiento genera dificultad a muchos estudiantes nos permitimos recomendar lo siguiente :

En aquellos casos donde la ecuación presente dos términos es "más cómodo" colocar uno en cada miembro.

$$\frac{1}{X^2-X}=\frac{1}{X+3}$$

Esto facilita los cálculos ya que podemos "pasar a multiplicar" cada denominador al otro miembro :

$$\frac{1}{X^2-X} = \frac{1}{X+3}$$

$$(1).(X+3) = (1).(X^2-X)$$

Luego podemos reducir términos semejantes resultando:

$$X+3-X^2+X=0 \qquad ; \qquad -X^2+2X+3=0$$

Al aplicar la fórmula general de segundo grado o resolvente podemos determinar que los valores que anulan la ecuación anterior (raíces) son :

$$X = \frac{-(2) \pm \sqrt{(2)^2-4(-1)(3)}}{2(-1)}$$

X_1 = – 1 *y* **X_2 = 3**

Comprobando con ***X_1 = – 1*** *, para lo cual sustituyo este valor en la ecuación racional inicial :*

$$\frac{1}{(-1)^2-(-1)} - \frac{1}{(-1)+3} = 0$$

$$\frac{1}{1+1} - \frac{1}{-1+3} = 0 \qquad ; \qquad \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \qquad \textbf{CIERTO}$$

Esto nos indica que ***X = – 1*** ***SI ES SOLUCIÓN***

Comprobando con ***X_2 = 3*** *, para lo cual sustituyo este valor en la ecuación racional inicial :*

$$\frac{1}{(3)^2-(3)} - \frac{1}{(3)+3} = 0$$

$$\frac{1}{9-3} - \frac{1}{6} = 0 \qquad ; \qquad \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = 0 \qquad \textbf{CIERTO}$$

Esto nos indica que ***X = 3*** ***SI ES SOLUCIÓN***

Se debe indicar que ambos valores (– 1 y 3) resuelven dicha ecuación racional.

Ejemplo 3 : **Resolver** $\mathbf{\frac{1}{X^2-X} - \frac{1}{X-1} = 0}$

En aquellos casos donde la ecuación presente dos términos es "más cómodo" colocar uno en cada miembro.

$$\frac{1}{X^2-X} = \frac{1}{X-1}$$

Esto facilita los cálculos ya que podemos "pasar a multiplicar" cada denominador al otro miembro :

$$(1).(X-1) = (1).(X^2-X)$$

Luego podemos resolver la ecuación de segundo grado resultante:

$$X-1-X^2+X=0 \qquad ; \qquad -X^2+2X-1=0$$

Al aplicar la fórmula general de segundo grado o resolvente podemos determinar que los valores que anulan la ecuación anterior (raíces) son :

$$X = \frac{-(2) \pm \sqrt{(2)^2 - 4(-1)(-1)}}{2(-1)}$$

$$\mathbf{X_1 = X_2 = 1}$$

Comprobando con ***X = 1*** *, para lo cual sustituyo este valor en la ecuación racional inicial :*

$$\frac{1}{(1)^2 - (1)} - \frac{1}{(1) - 1} = 0$$

$$\frac{1}{1-1} - \frac{1}{1-1} = 0 \qquad ; \qquad \frac{1}{0} - \frac{1}{0} = 0 \qquad \textbf{FALSO}$$

Como la división por cero no existe se dice que la ecuación racional estudiada ***NO TIENE SOLUCIÓN****.*

Ejemplo 4 : **Resolver** $\frac{\boldsymbol{X^3+3X^2+2X}}{\boldsymbol{X^2+3X+2}} = \frac{\boldsymbol{X^2+6X+9}}{\boldsymbol{(X+3)^2}}$

Se recomienda factorizar aquellos polinomios de segundo grado y mayores ya que nos permite visualizar más fácilmente las posibles soluciones.

Factorizando el numerador del miembro de la izquierda :

$$X^3 + 3X^2 + 2X \quad = \quad X.(X^2 + 3X + 2) \quad = \quad \mathbf{X.(X+2).(X+1)}$$

Factorizando el denominador del miembro de la izquierda :

$$(X^2 + 3X + 2) \quad = \quad \mathbf{(X+2).(X+1)}$$

Factorizando el numerador del miembro de la derecha :

$$(X^2 + 6X + 9) \quad = \quad (X+3).(X+3) \quad = \quad \mathbf{(X+3)^2}$$

Luego la ecuación puede ser expresada de la siguiente manera :

$$\frac{X.(X+2).(X+1)}{(X+2).(X+1)} = \frac{(X+3)^2}{(X+3)^2}$$

El paso anterior nos permite visualizar fácilmente la simplificación de la ecuación :

$$\frac{X.\cancel{(X+2)}.\cancel{(X+1)}}{\cancel{(X+2)}.\cancel{(X+1)}} = \frac{\cancel{(X+3)}^2}{\cancel{(X+3)}^2}$$

$$\mathbf{X = 1}$$

Para comprobar el resultado sustituyo este valor en la ecuación inicial y deberá cumplirse la igualdad :

$$\frac{1^3 + 3(1)^2 + 2(1)}{1^2 + 3(1) + 2} = \frac{1^2 + 6(1) + 9}{(1+3)^2}$$

$$\frac{1 + 3 + 2}{1 + 3 + 2} = \frac{1 + 6 + 9}{4^2}$$

$$\frac{6}{6} = \frac{16}{16} \qquad ; \qquad 1 = 1 \qquad \textbf{CIERTO}$$

Luego podemos afirmar que $\mathbf{X = 1}$ ***SI ES SOLUCIÓN***

Ejemplo 5 : **Resolver** $\dfrac{3}{X-4} = \dfrac{2}{X-3} + \dfrac{8}{X^2-7X+12}$

Cuando la ecuación racional presente más de dos términos es necesario calcular el mínimo común múltiplo para poder "eliminar" los denominadores.

Para facilitar éste cálculo sigue siendo recomendable factorizar los polinomios de segundo grado y mayores que presente la ecuación.

Factorizando el polinomio que tiene el segundo miembro de la derecha :

$$X^2 - 7X + 12 \quad = \quad \mathbf{(X-4).(X-3)}$$

Luego la ecuación puede ser indicada como :

$$\frac{3}{X-4} = \frac{2}{X-3} + \frac{8}{(X-4).(X-3)}$$

Factorizado dicho polinomio resulta más fácil calcular el mínimo común múltiplo de los tres denominadores, que en este caso será : $\mathbf{(X-4).(X-3)}$

Una vez conocido el mínimo común múltiplo se pueden "eliminar" los denominadores con la utilización del procedimiento conocido por los estudiantes de este nivel que consiste en :

- *Dividir el mínimo común múltiplo entre el denominador de cada término.*
- *El resultado anterior se debe multiplicar por el numerador del término respectivo.*

Trabajando con el primer término tendremos :

Dividir el mínimo común múltiplo entre el denominador de cada término :

$$\frac{(X-4).(X-3)}{X-4} = \quad \mathbf{X-3}$$

El resultado anterior se debe multiplicar por el numerador del término respectivo.

$$3.(X-3) = \quad \mathbf{3X-9}$$

Trabajando con el segundo término tendremos :

Dividir el mínimo común múltiplo entre el denominador de cada término :

$$\frac{(X-4).(X-3)}{X-3} = \quad \mathbf{X-4}$$

El resultado anterior se debe multiplicar por el numerador del término respectivo.

$$2.(X-4) = \quad \mathbf{2X-8}$$

Trabajando con el tercer término tendremos :

Dividir el mínimo común múltiplo entre el denominador de cada término :

$$\frac{(X-4).(X-3)}{(X-4).(X-3)} = \quad \mathbf{1}$$

El resultado anterior se debe multiplicar por el numerador del término respectivo.

$$1.(8) = \quad \mathbf{8}$$

Luego la ecuación quedará expresada de la siguiente manera

$$\frac{\mathbf{3X-9}}{(X-4).(X-3)} = \frac{\mathbf{(2X-8)+8}}{(X-4).(X-3)}$$

Recordando el AXIOMA FUNDAMENTAL DE LAS ECUACIONES que dice que:"Si con cantidades iguales se realizan operaciones iguales (en ambos miembros de la ecuación), los resultados serán iguales". Podemos decir que al multiplicar ambos miembros de la ecuación por el mínimo común múltiplo anteriormente calculado se pueden eliminar los denominadores sin alterar la ecuación.

$$\mathbf{3X-9 = (2X-8)+8}$$

$$3X-9 = 2X-8+8$$

$$3X-9 = 2X$$

$$3X-2X = 9$$

$$\mathbf{X = 9}$$

Para comprobar el resultado sustituyo este valor en la ecuación inicial y deberá cumplirse la igualdad :

$$\frac{3}{X-4} = \frac{2}{X-3} + \frac{8}{X^2-7X+12}$$

$$\frac{3}{9-4} = \frac{2}{9-3} + \frac{8}{9^2-7(9)+12}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{2}{6} + \frac{8}{81-63+12}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{2}{6} + \frac{8}{30} \qquad m.c.m = 30$$

$$\frac{18}{30} = \frac{10+8}{30}$$

$$\frac{18}{30} = \frac{18}{30} \qquad \textbf{CIERTO}$$

Luego podemos afirmar que $\mathbf{X = 9}$ ***SI ES SOLUCIÓN***

Ejemplo 6 : **Resolver** $\frac{X^2}{X-2} = \frac{4}{X-2}$

Recordando el AXIOMA FUNDAMENTAL DE LAS ECUACIONES que dice que:"Si con cantidades iguales se realizan operaciones iguales (en ambos miembros de la ecuación), los resultados serán iguales". Podemos decir que al multiplicar ambos miembros de la ecuación por (X – 2) se pueden eliminar los denominadores sin alterar la ecuación.

La ecuación quedará expresada como :

$$X^2 = 4$$

Que posee dos raíces :

$$\mathbf{X_1 = 2} \qquad y \qquad \mathbf{X_2 = -2}$$

Comprobando con $X_1 = 2$ *, para lo cual sustituyo este valor en la ecuación racional inicial :*

$$\frac{2^2}{2-2} = \frac{4}{2-2}$$

$$\frac{4}{0} = \frac{4}{0} \qquad \textbf{FALSO}$$

Se dice que es falso porque la división por cero no existe.

Esto nos indica que ***X* = 2** ***NO ES SOLUCIÓN***

Comprobando con $X_1 = -2$ *, para lo cual sustituyo este valor en la ecuación racional inicial :*

$$\frac{(-2)2^2}{-2-2} = \frac{4}{-2-2}$$

$$\frac{4}{-4} = \frac{4}{-4} \quad ; \quad \mathbf{-1 = -1} \qquad \textbf{CIERTO}$$

Esto nos indica que ***X* = – 2** ***SI ES SOLUCIÓN***

Ejemplo 7 : ***Resolver*** $\frac{3}{x^2-1} + \frac{x+2}{x-1} = \frac{x}{x+1}$

(Tomado con fines académicos de la página Web Matemática y Listo)

$$\frac{3}{x^2-1} + \frac{x+2}{x-1} = \frac{x}{x+1}$$

$$\frac{3}{(x+1).(x-1)} + \frac{x+2}{x-1} = \frac{x}{x+1}$$

$$\frac{3 + (x+2).(x+1)}{(x+1).(x-1)} = \frac{x.(x-1)}{(x+1).(x-1)}$$

$$\frac{3 + (x+2).(x+1)}{\cancel{(x+1).(x-1)}} = \frac{x.(x-1)}{\cancel{(x+1).(x-1)}}$$

$3 + (x + 2).(x + 1) = x.(x - 1)$

$3 + x^2 + x + 2x + 2 = x^2 - x$

$\cancel{x^2} + 3x - \cancel{x^2} + x = -2 - 3$

$4x = -5$

$x = -5/4$

Ejemplo 8 : ***Resolver*** $\frac{x+2}{x+3}+\frac{3}{x^2+6x+9}=1$

(Tomado con fines académicos de la página Web Matemática y Listo)

$$\frac{x+2}{x+3}+\frac{3}{x^2+6x+9}=1$$

$$\frac{x+2}{x+3}+\frac{3}{(x+3)^2}=1$$

$$\frac{(x+2).(x+3)+\ 3}{(x+3)^2}=\frac{1.(x+3)^2}{(x+3)^2}$$

$$\frac{(x+2).(x+3)+\ 3}{\cancel{(x+3)^2}}=\frac{1.(x+3)^2}{\cancel{(x+3)^2}}$$

$$(x+2).(x+3)+3=1.(x+3)^2$$

$$x^2+3x+2x+6+3=x^2+6x+9$$

$$\cancel{x^2}+5x-\cancel{x^2}-6x=9-6-3$$

$$-x=0$$

$$x=0$$

Ejemplo 9 : ***Resolver*** $\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{5x-2}{x}=5$

(Tomado con fines académicos de la página Web Matemática y Listo)

$$\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{5x-2}{x}=5$$

$$\frac{3x-2+(5x-2).x}{x^2}=\frac{5.x^2}{x^2}$$

$$\frac{3x-2+(5x-2).x}{\cancel{x^2}}=\frac{5.x^2}{\cancel{x^2}}$$

$$3x-2+5x^2-2x=5x^2$$

$$3x+\cancel{5x^2}-2x-\cancel{5x^2}=2$$

$$x=2$$