

Introducción al Método de los Elementos Finitos

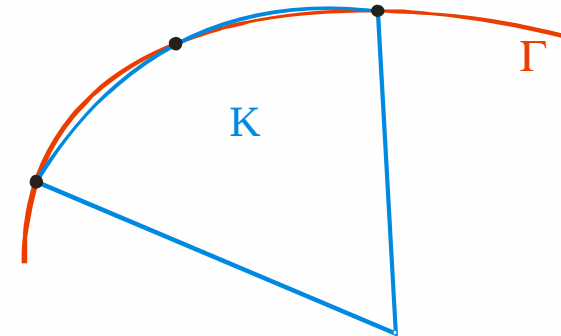
Parte 7

Elementos curvos e integración numérica.
Elementos infinitos.

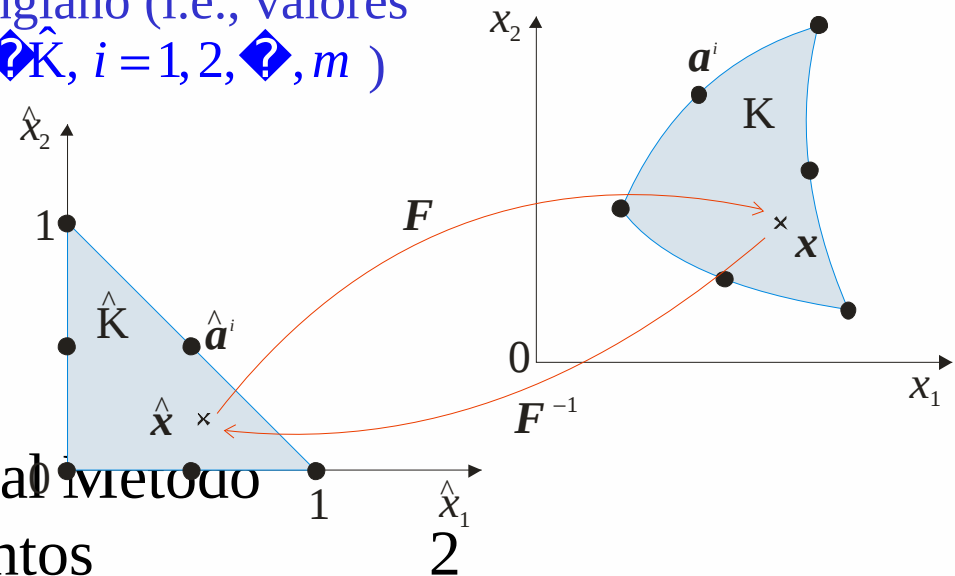
Alberto Cardona, Víctor Fachinotti
Cimec-Intec (UNL/Conicet), Santa Fe, Argentina

Elementos curvos

- Hasta aquí se han usado aproximaciones lineales por trozos de la frontera Γ .
- En 2D, se aproximó Γ con una línea poligonal, con un error de orden $O(h^2)$.
- Aproximemos Γ con curvas descritas por polinomios de grado $k \geq 2$, con error $O(h^{k+1})$.
- En una malla de Ω , los elementos adyacentes a Γ tendrán un lado curvo.



- Un elemento “curvo” se obtiene de la siguiente manera:
1. Supongamos el elemento $(\hat{K}, P_{\hat{K}}, \hat{\Sigma})$.
 - $\hat{\Sigma}$ es un conj. de gdl de tipo Lagrangiano (i.e., valores de la función en ciertos puntos $\hat{a}^i \in \hat{K}, i = 1, 2, \dots, m$)
 1. Sea $F : \hat{K} \rightarrow K$ un mapeo 1-a-1, con inversa $F^{-1} : K \rightarrow \hat{K}$.



Introducción al método
de los Elementos

Finitos

Elementos curvos (cont.)

- Definimos

$$P_K = \left\{ p : p(\mathbf{x}) = \hat{p}(F^{-1}(\mathbf{x})), \mathbf{x} \in K, \hat{p} \in P_{\hat{K}} \right\}$$

$$\Sigma_K = \left\{ \text{valores de la función en } \mathbf{a}^i = F(\hat{\mathbf{a}}^i), i = 1, 2, \dots, m \right\}$$

- Ahora, (K, P_K, Σ) constituye un elemento finito "curvo".
- Si en el mapeo $F = (F_1, F_2)$ las funciones son del mismo tipo que en P_K , el elemento se dice isoparamétrico.

- Ejemplo:** sea \hat{K} el elemento de ref.,
 $\hat{\mathbf{a}}^4, \hat{\mathbf{a}}^5, \hat{\mathbf{a}}^6$ (en el centro de los lados).

-
-
-

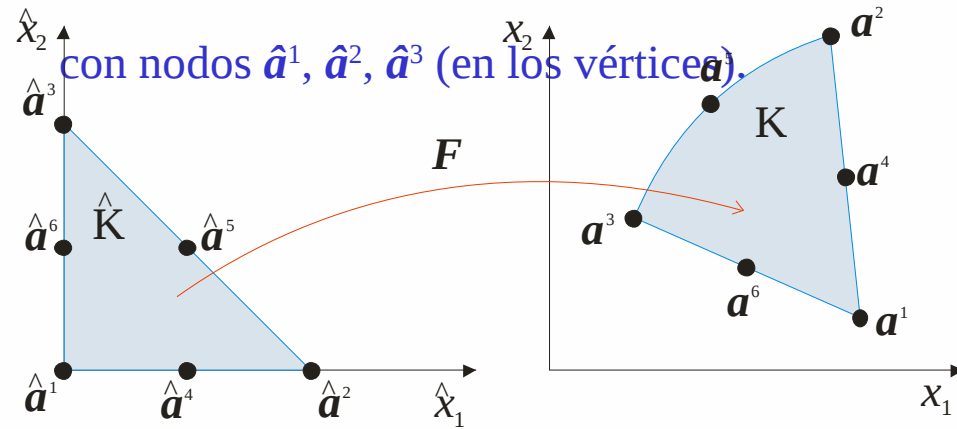
$$\Sigma_{\hat{K}} = \left\{ \text{valores en los nodos} \right\}$$

func. de base en

$$P_{\hat{K}} = P_2(\hat{K}).$$

$$\hat{\phi}_i, i = 1, 2, \dots, 6,$$

$$P_2(\hat{K}).$$

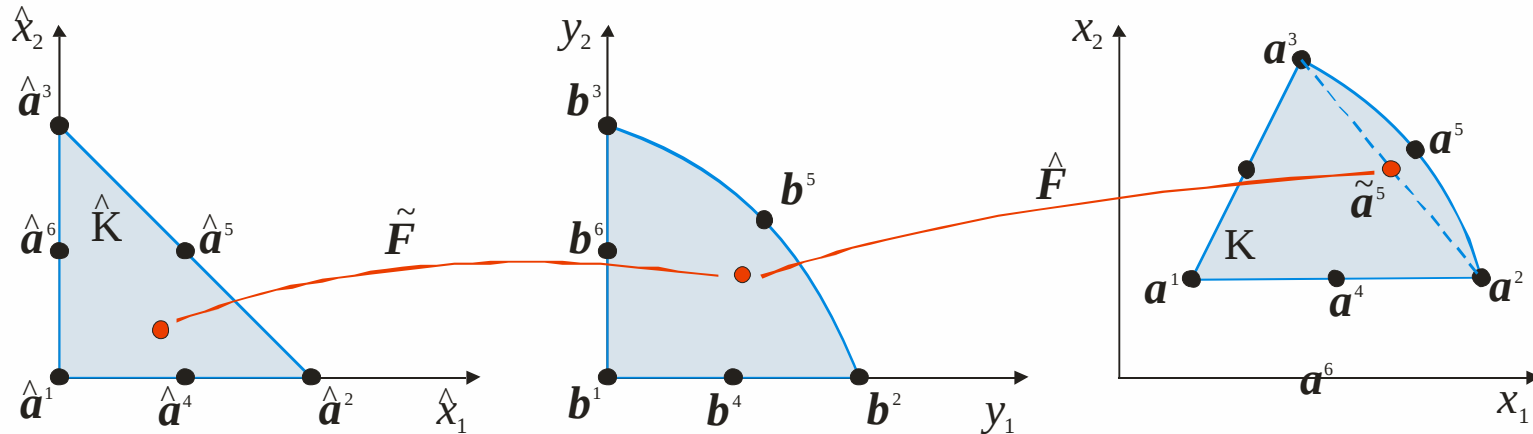


Elementos curvos (cont.)

- Definimos el mapeo $F(\hat{x}) = \sum_{j=1}^6 a^j \hat{\phi}_j(\hat{x}), \quad \hat{x} \in \hat{K}$
- Luego, escribimos $K = F(\hat{K}) = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{x} = F(\hat{x}), \hat{x} \in \hat{K} \}$
- Se define el Jacobiano de F como $J = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$
- F es localmente 1-a-1 en una pequeña vecindad de c/punto $\hat{x} \in \hat{K}$ si $\det J(\hat{x}) \neq 0$.
- En gral, esto no garantiza que F sea globalmente 1-a-1, i.e., que $\forall \mathbf{x} \in K, \exists ! \hat{x} \in \hat{K} / F(\hat{x}) = \mathbf{x}$
- F será globalmente 1-a-1 si $\det J(\hat{x}) \neq 0, \forall \hat{x} \in \hat{K}$.

Elementos curvos (cont.)

- Descompongamos F como $F(\hat{x}) = \hat{F}(\hat{F} \circ \hat{x})$



- \hat{F} , que mapea $b^j \square \hat{a}^j$ en a^j , $j=1,2,3$, tiene la forma:

$$\hat{F}(y) = \begin{bmatrix} ?_1^2 - a_1^1 & a_1^3 - a_1^1 \\ ?_2^2 - a_2^1 & a_2^3 - a_2^1 \end{bmatrix} y + b.$$

$\det B \square 0 \square \hat{F}$ es 1-a-1.

- Analicemos ahora el mapeo $F \circ = (F_1 \circ, F_2 \circ)$, que está definido por $F_i \circ = \hat{x}_i + d_i \hat{x}_1 \hat{x}_2$, $d_i = 4b_i^5 - 2$, $i=1,2$.

Elementos curvos (cont.)

- Analicemos ahora el mapeo $\hat{F} = (F_1, F_2)$, que está definido por

$$F_i = \hat{x}_i + d_i \hat{x}_1 \hat{x}_2, \quad d_i = 4b_i^5 - 2, \quad i = 1, 2$$

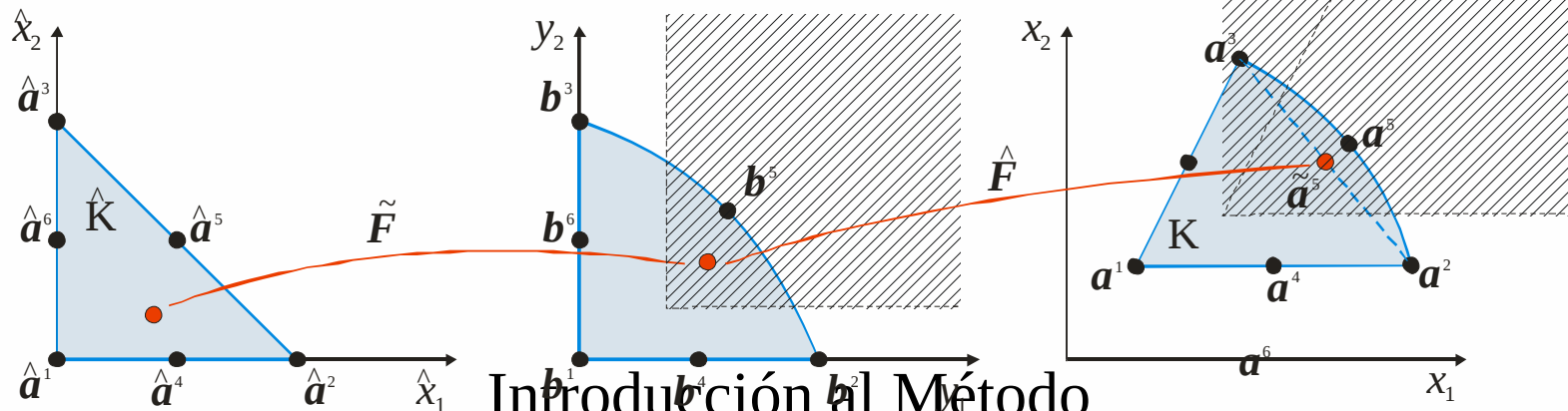
con Jacobiano
$$\hat{J}(\hat{x}) = \begin{bmatrix} 1 + d_1 \hat{x}_2 & d_1 \hat{x}_1 \\ d_2 \hat{x}_2 & 1 + d_2 \hat{x}_1 \end{bmatrix} \quad \det \hat{J}(\hat{x}) = 1 + d_1 \hat{x}_2 + d_2 \hat{x}_1$$

$\det \hat{J}(\hat{x})$ lineal en \hat{x} $\diamond \det \hat{J}(\hat{x}) > 0$ en \hat{K} $\diamond \det \hat{J}(\hat{x}) > 0$ en los vértices $\hat{a}^j, j = 1, 2, 3$.

$\det \hat{J}(0, 0) = 1$

$\det \hat{J}(1, 0) = 1 + d_2$ $\diamond \det \hat{J} > 0$ en \hat{K} si $d_i > -1$ $\diamond b_i > \frac{1}{4}, i = 1, 2$.

$\det \hat{J}(0, 1) = 1 + d_1$



Introducción al Método

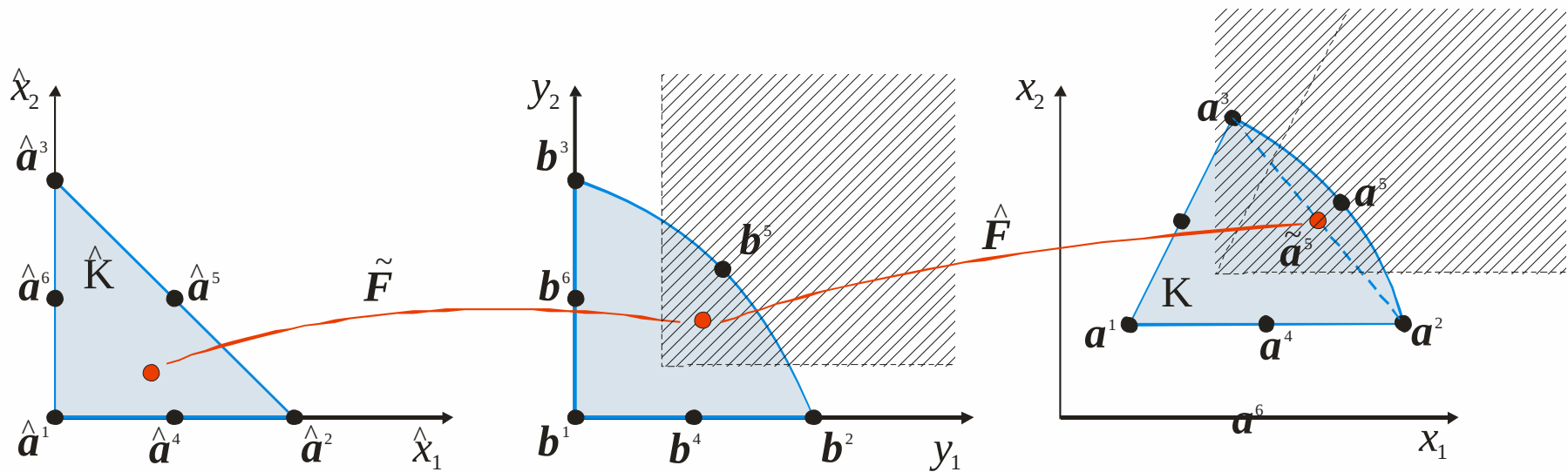
de los Elementos

Finitos



Elementos curvos (cont.)

- Luego, \hat{F} es 1-a-1 si b^5 y a^5 caen en las áreas sombreadas, para lo que \tilde{a}^5 debe estar suficientemente próximo a a^5 .
- El mapeo original F es 1-a-1 bajo las mismas condiciones.
- En un elemento K con un lado curvo, la dist. $|a^5 - \tilde{a}^5|$ es de $O(h_K^2)$.
- Luego, \tilde{a}^5 estará suficientemente cerca de a^5 si h_K es suficientemente pequeño.
- En conclusión, el mapeo F será 1-a-1 para mallas suficientemente finas.



Introducción al Método
de los Elementos
Finitos

Elementos curvos (cont.)

- **Error de interpolación:** Dada una función v sobre K , definimos el interpolante $\pi v \in P_K$ requiriendo que $\pi v(\mathbf{a}^i) = v(\mathbf{a}^i)$, $i=1, \dots, 6$. Si K es un triángulo común (como el visto anteriormente), entonces

$$\|v - \pi v\|_{H^s(K)} \leq C h_K^{r-s} \|v\|_{H^r(K)}, \quad 0 \leq s \leq r \leq 3$$

- Esto también vale para triángulo curvo K , siempre que no sea demasiado curvo. Y esto se verifica en aplicaciones típicas, donde los elementos aproximan una frontera suave.

- **Espacio V_h :** Sea $T_h = \{K\}$ una malla de Ω , con elementos (K, P_K, Σ_K) , que pueden tener uno o más lados curvos. Sea Ω_h la unión de los elementos de T_h , que es una aproximación a Ω con frontera cuadrática a trozos. Se define

$$V_h = \{v \in H^1(\Omega_h) : v|_K \in P_K, \forall K \in T_h\}$$

- Usando este espacio para el problema de Poisson, tenemos

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega_h)} \leq C h^2 \|u\|_{H^3(\Omega)}, \quad \|u - u_h\|_{L_2(\Omega_h)} \leq C h^3 \|u\|_{H^3(\Omega)}$$

Introducción al Método

de los Elementos

Finitos

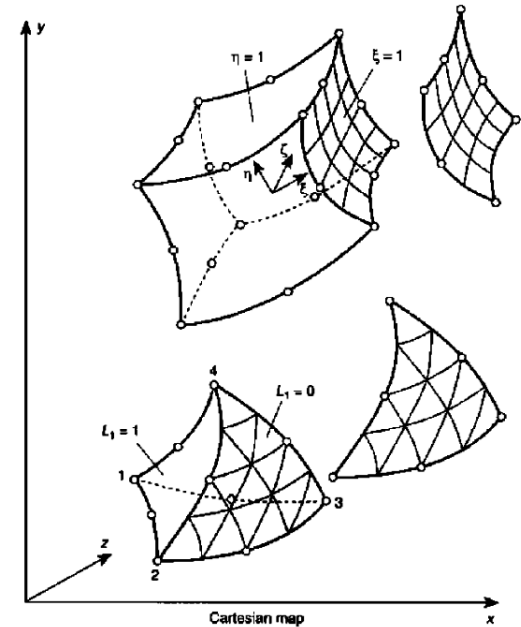
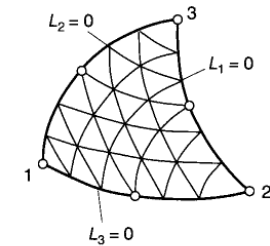
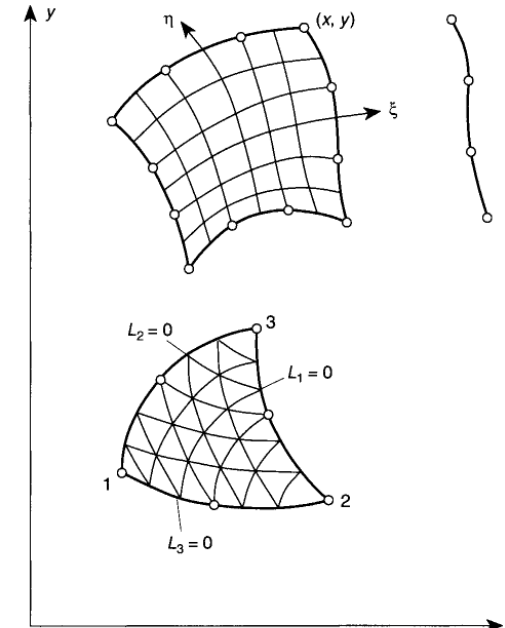
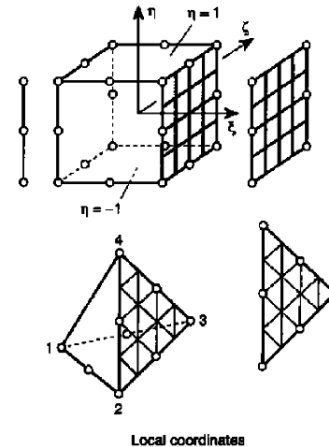
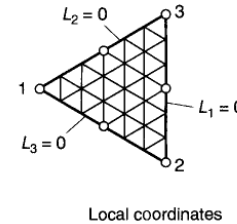
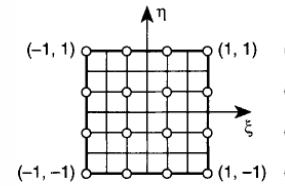


Elementos curvos

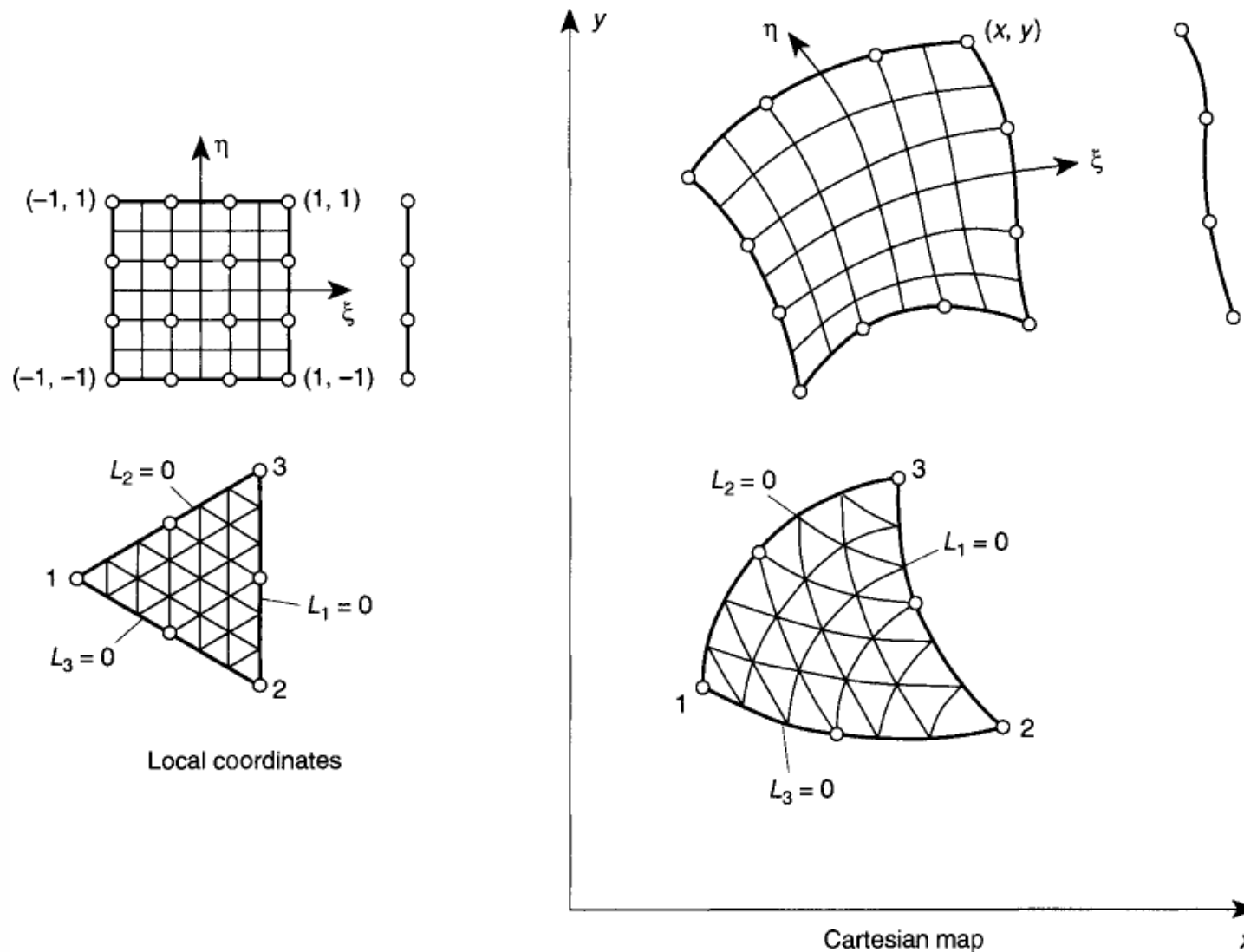
- Elementos de las formas básicas en 1D, 2D y 3D pueden mapearse a formas distorsionadas. De esta manera, las coord. locales $\xi\eta\zeta$ o $L_1 L_2 L_3 L_4$ se transforman en curvilíneas cuando se plotean en el sistema Cartesiano global xyz .
- Ello es posible si existe una correspondencia 1-a-1 entre las coord. Cartesianas y las curvilíneas, i.e. si se pueden establecer los mapeos:

$$\begin{matrix}
 \text{?} & \text{?} & \text{?} & f_x(\xi, \eta, \zeta) & \text{?} \\
 \text{?} & \text{?} & \text{?} & f_x(L_1, L_2, L_3, L_4) & \text{?} \\
 \text{?} & \text{?} & \text{?} & f_y(\xi, \eta, \zeta) & \text{?} \\
 \text{?} & \text{?} & \text{?} & f_y(L_1, L_2, L_3, L_4) & \text{?} \\
 \text{?} & \text{?} & \text{?} & f_z(\xi, \eta, \zeta) & \text{?} \\
 \text{?} & \text{?} & \text{?} & f_z(L_1, L_2, L_3, L_4) & \text{?}
 \end{matrix}$$

Introducción a de los Elementos

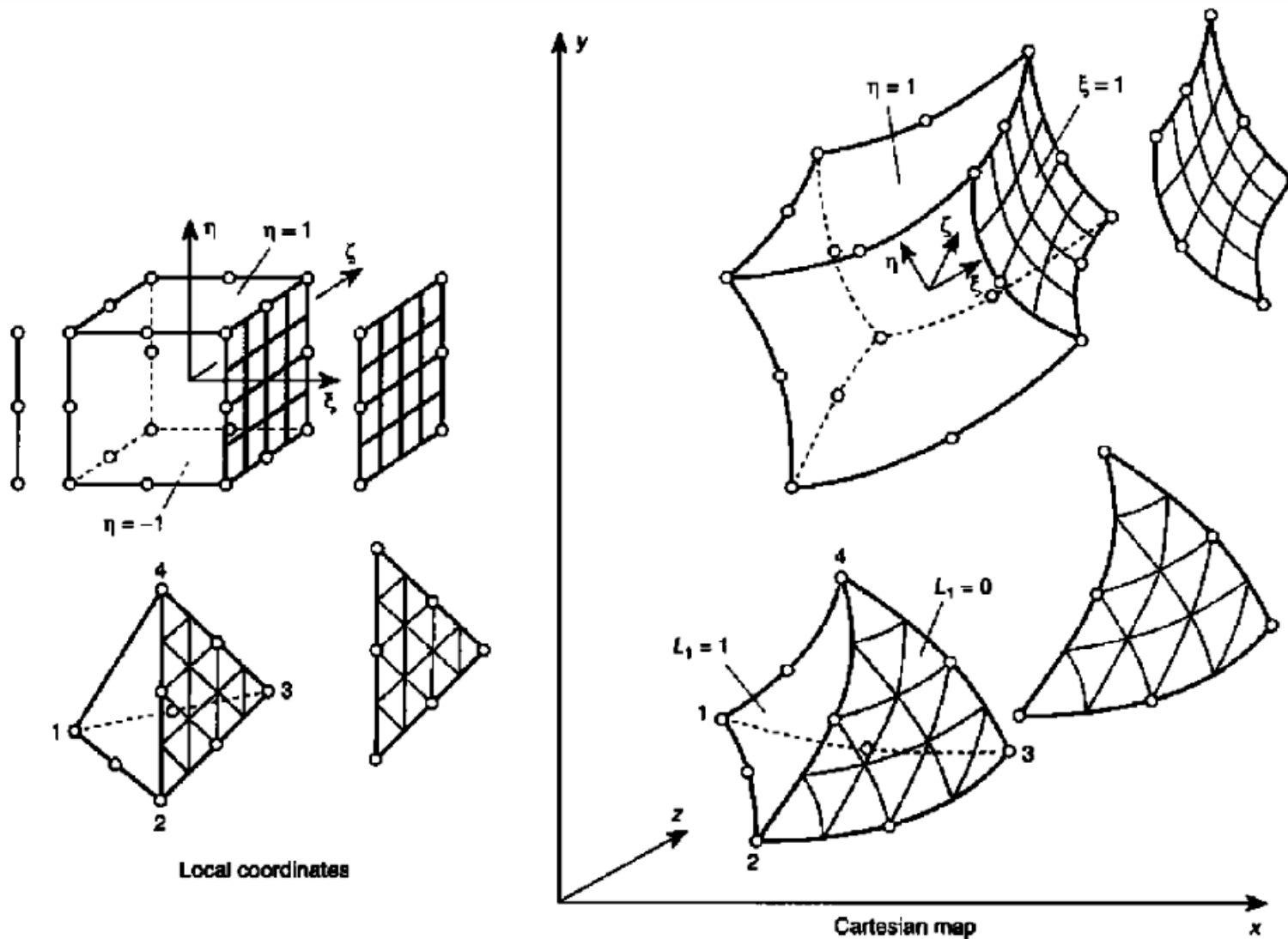


Elementos curvos: mapeo de elementos 2D



* Figuras extraídas de [ZT2000]

Elementos curvos: mapeo de elementos 3D



Coordenadas curvilíneas paramétricas

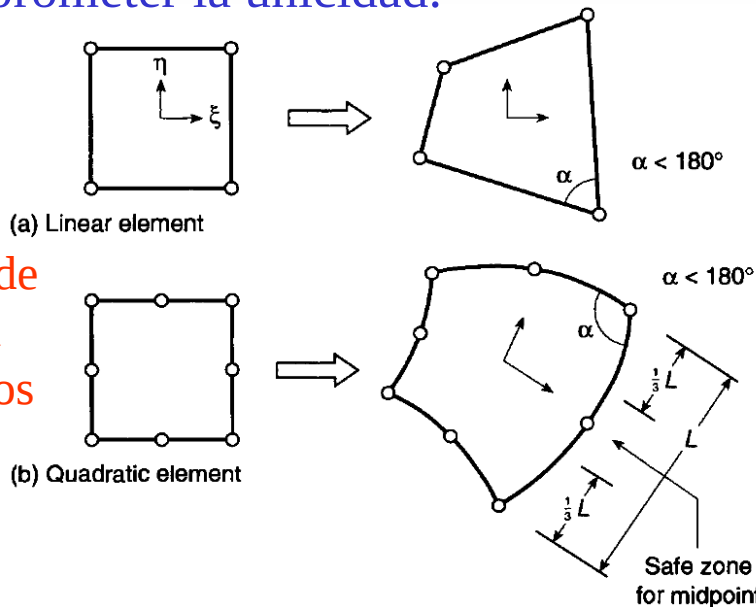
- La forma más conveniente de definir mapeos es usando funciones de forma N_i dadas en términos de las coords. locales:

$$x = N_1 x_1 + N_2 x_2 + K$$

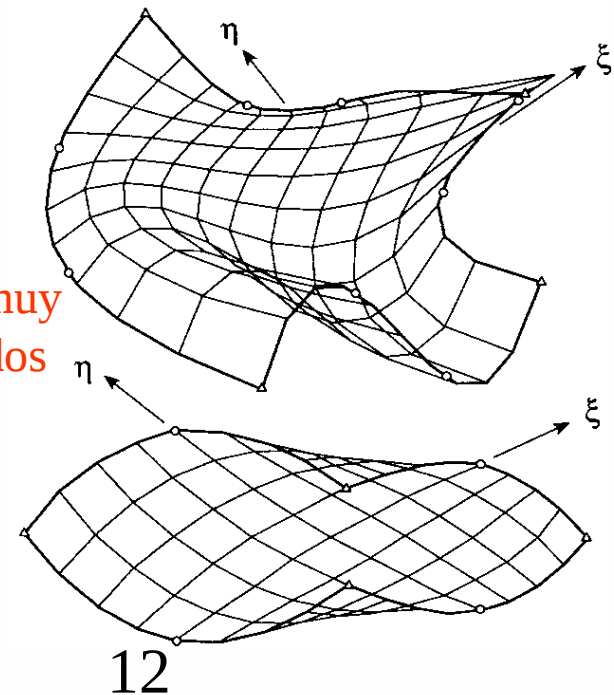
$$y = N_1 y_1 + N_2 y_2 + K$$

$$z = N_1 z_1 + N_2 z_2 + K$$

- A c/triada local (ξ, η, ζ) en coords. locales debe corresponderle una sola triada (x, y, z) en coords. globales. Sin embargo, elementos muy distorsionados pueden comprometer la unicidad.



Pérdida de unicidad en elementos muy distorsionados



Método

de los Elementos

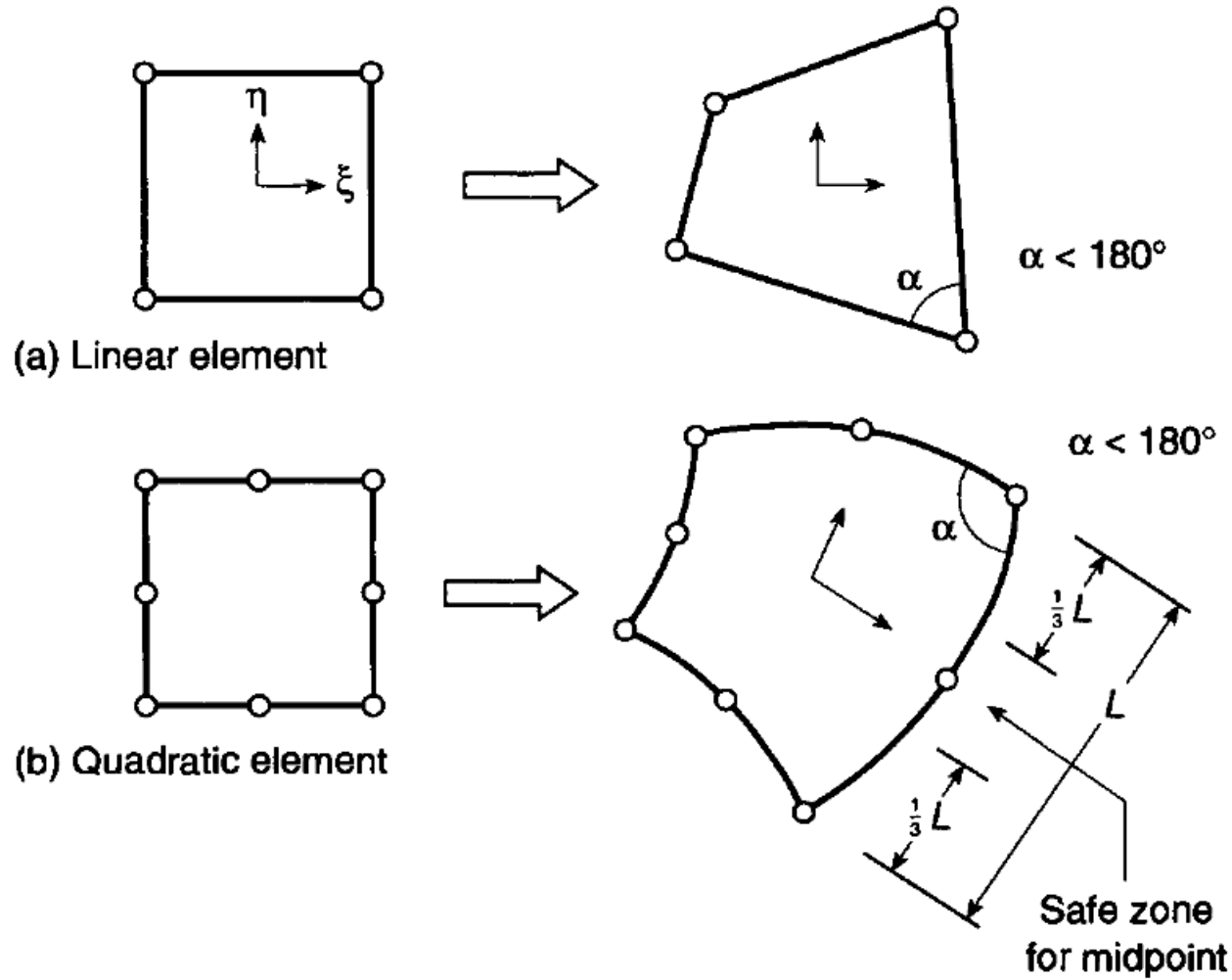
Finitos

12

Requisitos de unicidad en cuadrángulos

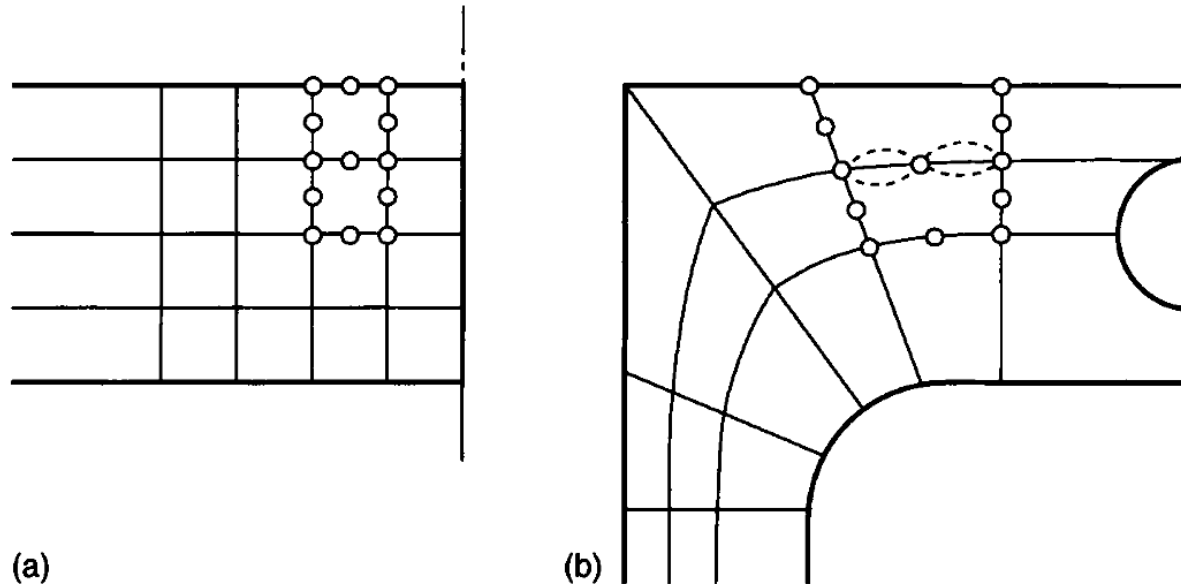


Mapeos admisibles en cuadrángulos



Conformidad geométrica y continuidad

- **Teorema 1:** Si dos elementos adyacentes son generados a partir de elementos master (o de referencia) donde las funciones de forma son C_0 -continuas, entonces los elementos serán contiguos (compatibles).

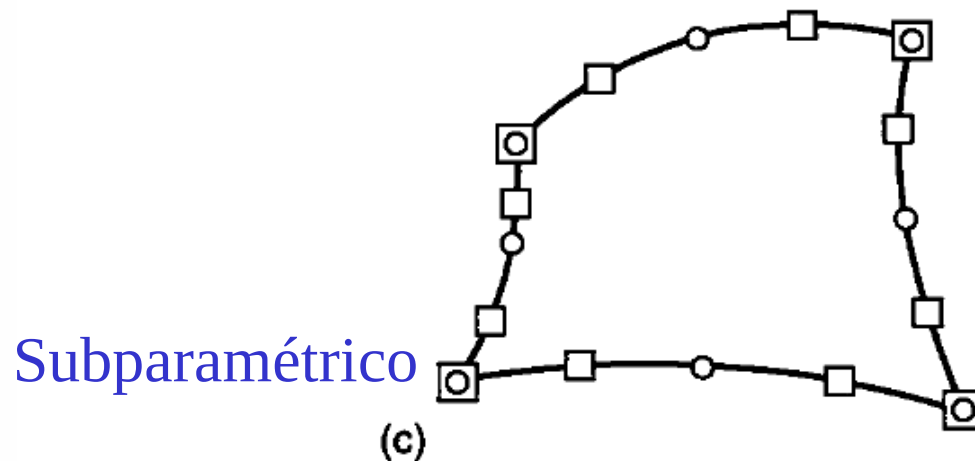
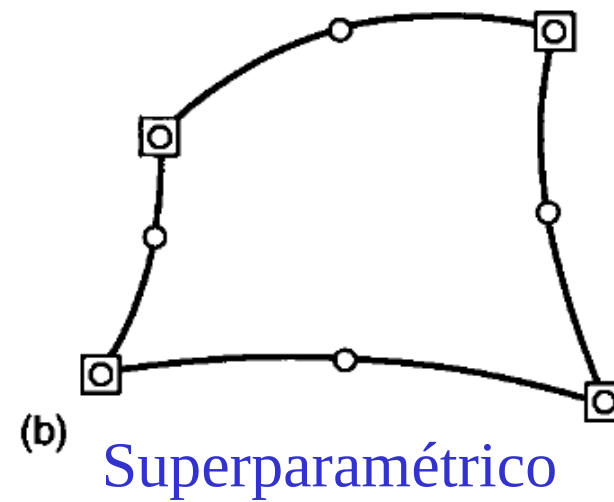
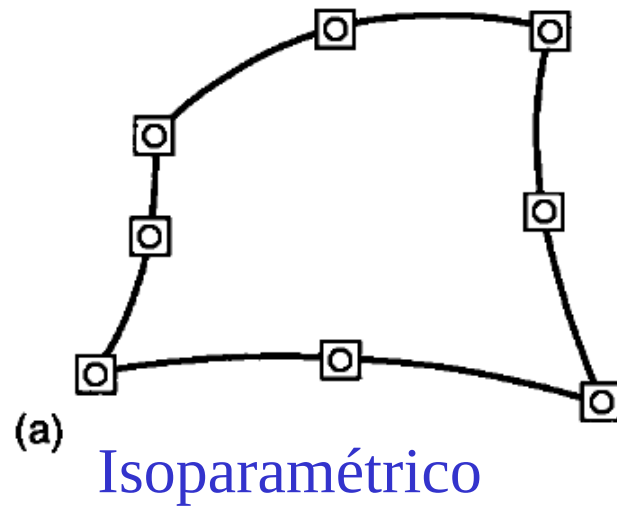


- **Teorema 2:** Si las funciones de forma garantizan la continuidad C_0 de la solución en las coordenadas del elemento master, luego también se satisfará continuidad C_0 en las coordenadas del elemento distorsionado.

Introducción al Método
de los Elementos

Finitos

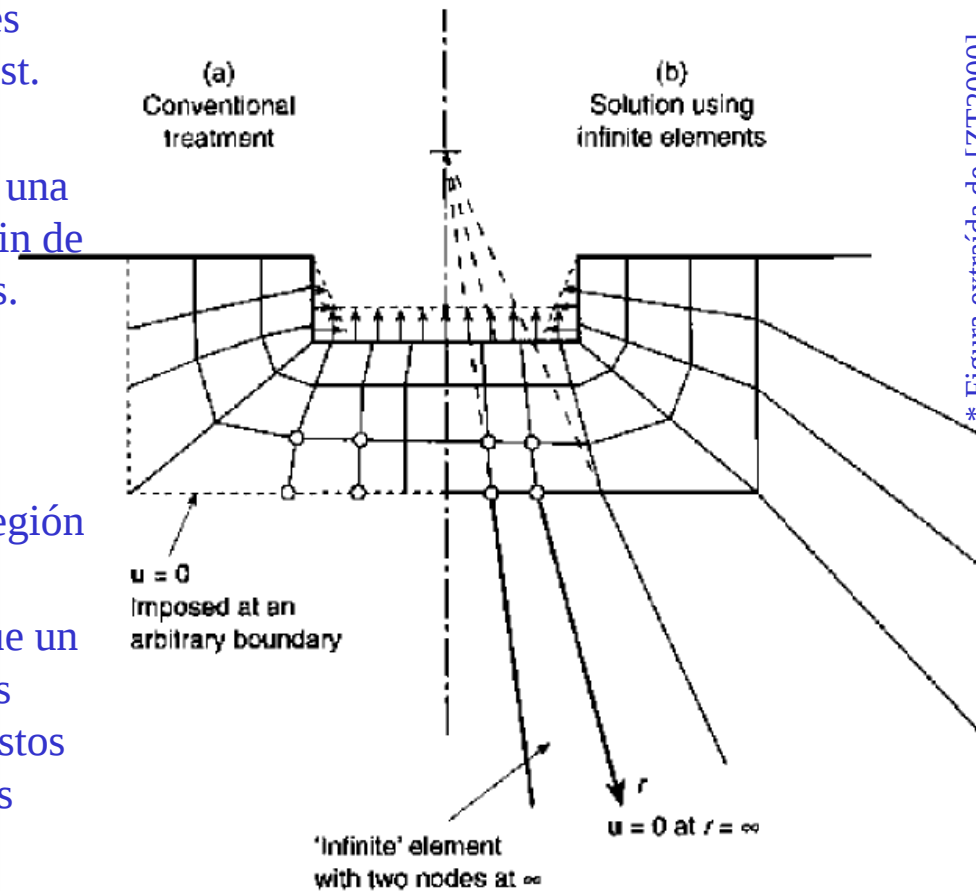
Elementos isoparamétricos, superparamétricos y subparamétricos



- Punto en el que se especifica gdl
- Punto en el que se especifica coordenada

Elementos infinitos

- En muchos problemas ingenieriles, el dominio es infinito o semi-infinito, y se especifican CB a dist. infinita.
1. **Solución usando MEF convencional:** se malla una porción suficientemente grande del dominio, a fin de imponer las CB a una dist. grande, con las sigtes. desventajas.
 - Si esa dist. no es lo suficientemente grande, se introduce un error en el modelo.
 - Se deben introducir muchos elementos en una región que suele ser de poco interés para el analista.
 2. **Solución usando elementos infinitos,** en los que un mapeo particular, permite transformar elementos semi-infinitos a los elementos master básicos. Estos elementos se ensamblan luego con los elementos finitos de la malla.



* Figura extraída de [ZT2000]

Elementos infinitos

- Consideremos el mapeo 1D a lo largo de CPQ:

$$x = -\frac{\xi}{1-\xi} x_C + \frac{\xi}{1-\xi} x_Q = \bar{N}_C x_C + \bar{N}_Q x_Q \quad (1)$$

- Se observa que:

$$x = -\frac{x_C + x_Q}{2} = x_P \quad \text{si } \xi = -1$$

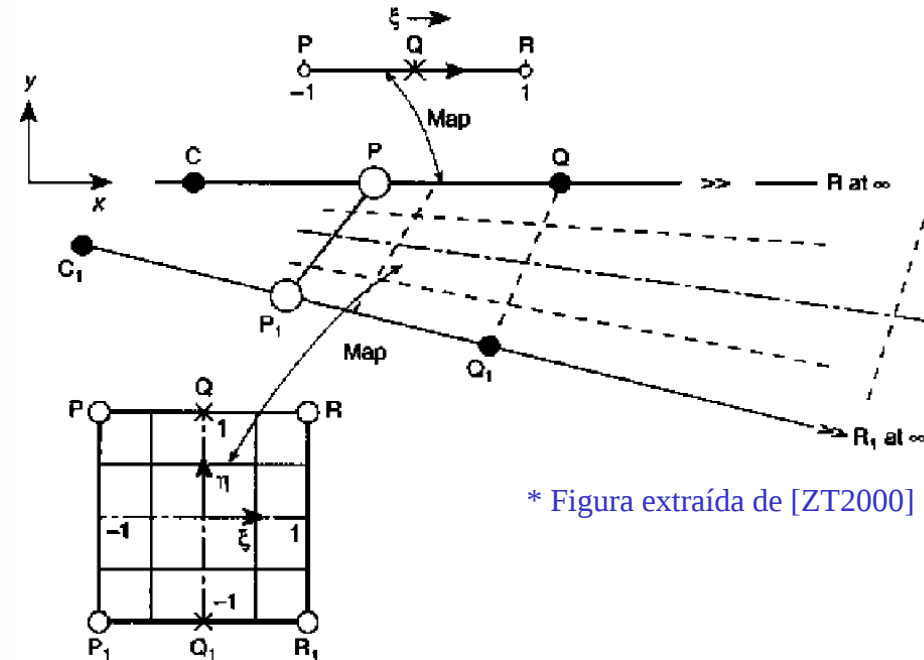
$$x = x_Q \quad \text{si } \xi = 0$$

$$x = x_R \quad \text{si } \xi = 1$$

- Luego, reemplazando x_C por x_P :

$$x = \frac{2\xi}{1-\xi} x_Q - \frac{2\xi}{1-\xi} x_P = N_Q x_Q + N_P x_P \quad (2)$$

- Muchas otras funciones podrían usarse en (1) y (2), siempre que $\bar{N}_C + \bar{N}_Q = N_P + N_Q = 1$.



* Figura extraída de [ZT2000]

Elementos infinitos (cont.)

- Ahora, si aproximamos la solución por un polinomio:

$$u = \alpha_0 + \alpha_1 \xi + \alpha_2 \xi^2 + K$$

- Dado $x = -\frac{\xi}{1-\xi} x_C + \frac{\xi}{1-\xi} x_Q$

$$\xi = 1 - \frac{x_Q - x_C}{x - x_C} = 1 - \frac{x_Q - x_C}{r}$$

- Obtenemos entonces la solución típica de

$$u = \beta_0 + \frac{\beta_1}{r} + \frac{\beta_2}{r^2} + K$$

- El punto C representa el origen de decaimiento. Su correcta ubicación en base a la física del problema permite mejorar la precisión de la solución.
- Equivalentemente, a lo largo de $C_1 P_1 Q_1$ tenemos el mapeo

$$x = -\frac{\xi}{1-\xi} x_{C_1} + \frac{\xi}{1-\xi} x_{Q_1}, \quad y = -\frac{\xi}{1-\xi} y_{C_1} + \frac{\xi}{1-\xi} y_{Q_1}$$

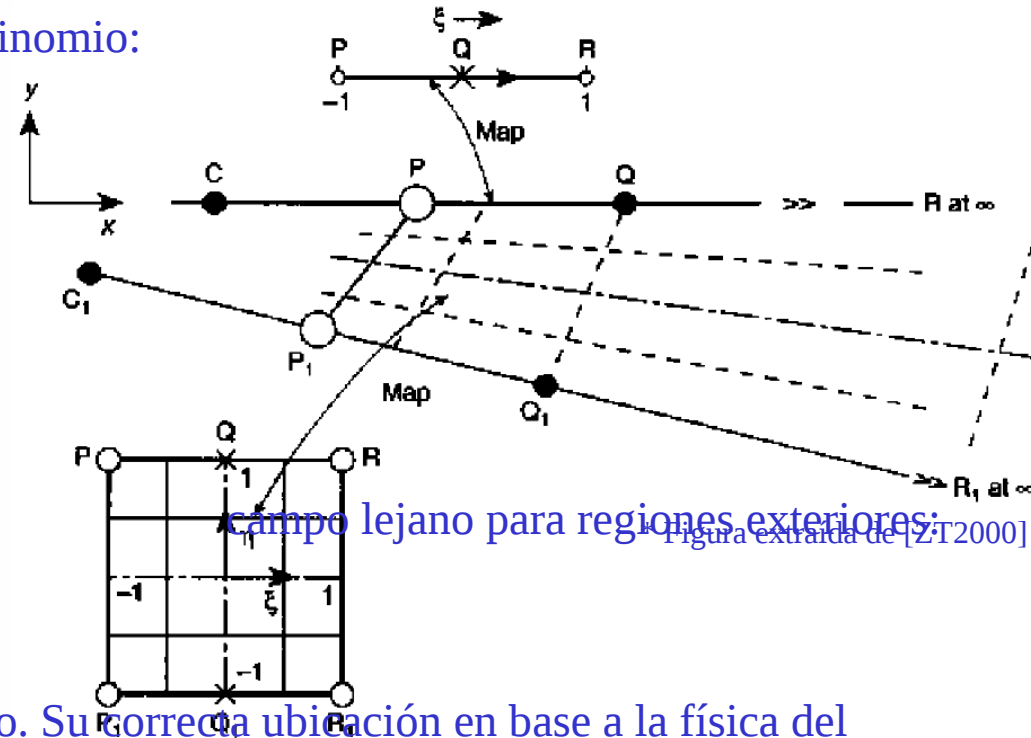


Figura extraída de [Z.T.2000]

Elementos infinitos (cont.)

- El mapeo se completa en la dirección η usando las funciones de forma lineales standard

$$N_1(\eta) = \frac{1+\eta}{2}, N_0(\eta) = \frac{1-\eta}{2}.$$

- Luego:

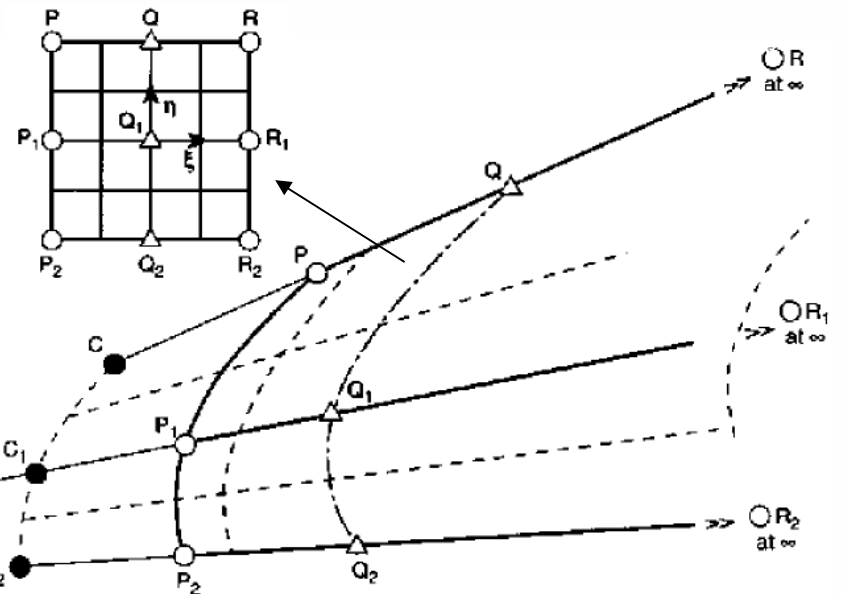
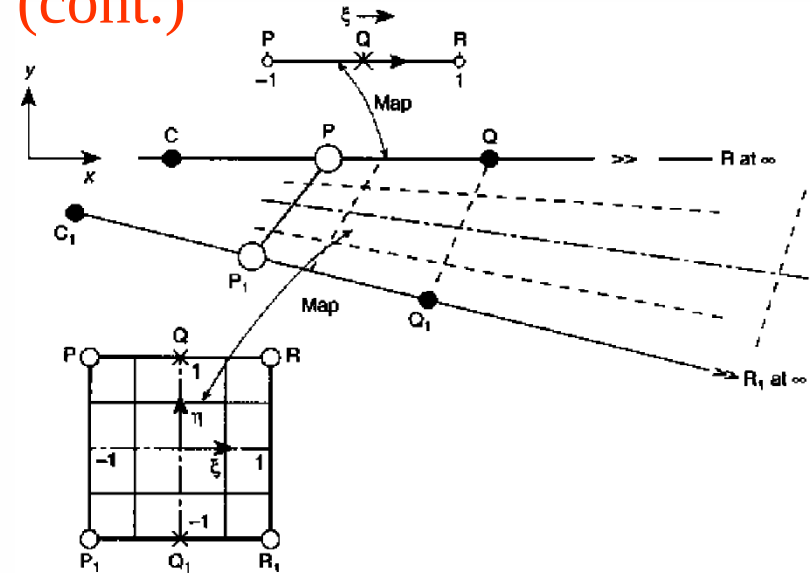
$$x = N_1(\eta) \begin{matrix} \diamond \\ \diamond \\ \diamond \end{matrix} \frac{\xi}{1-\xi} x_C + \begin{matrix} \diamond \\ \diamond \\ \diamond \end{matrix} + \frac{\xi}{1-\xi} \begin{matrix} \diamond \\ \diamond \\ \diamond \end{matrix} x_Q \begin{matrix} \diamond \\ \diamond \\ \diamond \end{matrix}$$

$$+ N_0(\eta) \begin{matrix} \diamond \\ \diamond \\ \diamond \end{matrix} \frac{\xi}{1-\xi} x_{C_1} + \begin{matrix} \diamond \\ \diamond \\ \diamond \end{matrix} + \frac{\xi}{1-\xi} \begin{matrix} \diamond \\ \diamond \\ \diamond \end{matrix} x_{Q_1} \begin{matrix} \diamond \\ \diamond \\ \diamond \end{matrix}$$

$$y = N_1(\eta) \begin{matrix} \diamond \\ \diamond \\ \diamond \end{matrix} \frac{\xi}{1-\xi} y_C + \begin{matrix} \diamond \\ \diamond \\ \diamond \end{matrix} + \frac{\xi}{1-\xi} \begin{matrix} \diamond \\ \diamond \\ \diamond \end{matrix} y_Q \begin{matrix} \diamond \\ \diamond \\ \diamond \end{matrix}$$

$$+ N_0(\eta) \begin{matrix} \diamond \\ \diamond \\ \diamond \end{matrix} \frac{\xi}{1-\xi} y_{C_1} + \begin{matrix} \diamond \\ \diamond \\ \diamond \end{matrix} + \frac{\xi}{1-\xi} \begin{matrix} \diamond \\ \diamond \\ \diamond \end{matrix} y_{Q_1} \begin{matrix} \diamond \\ \diamond \\ \diamond \end{matrix}$$

- En dirección η podrían usarse funciones de mayor orden, lo que permite ensamblar elementos infinitos con elementos finitos de mayor orden.

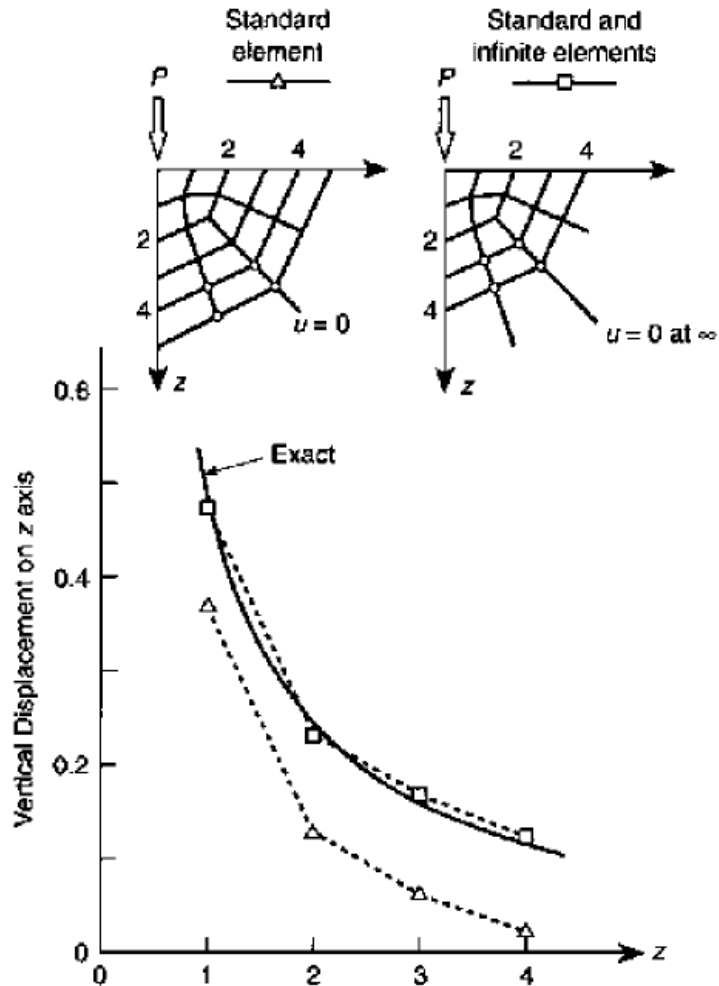


* Figuras extraídas de [ZT2000]

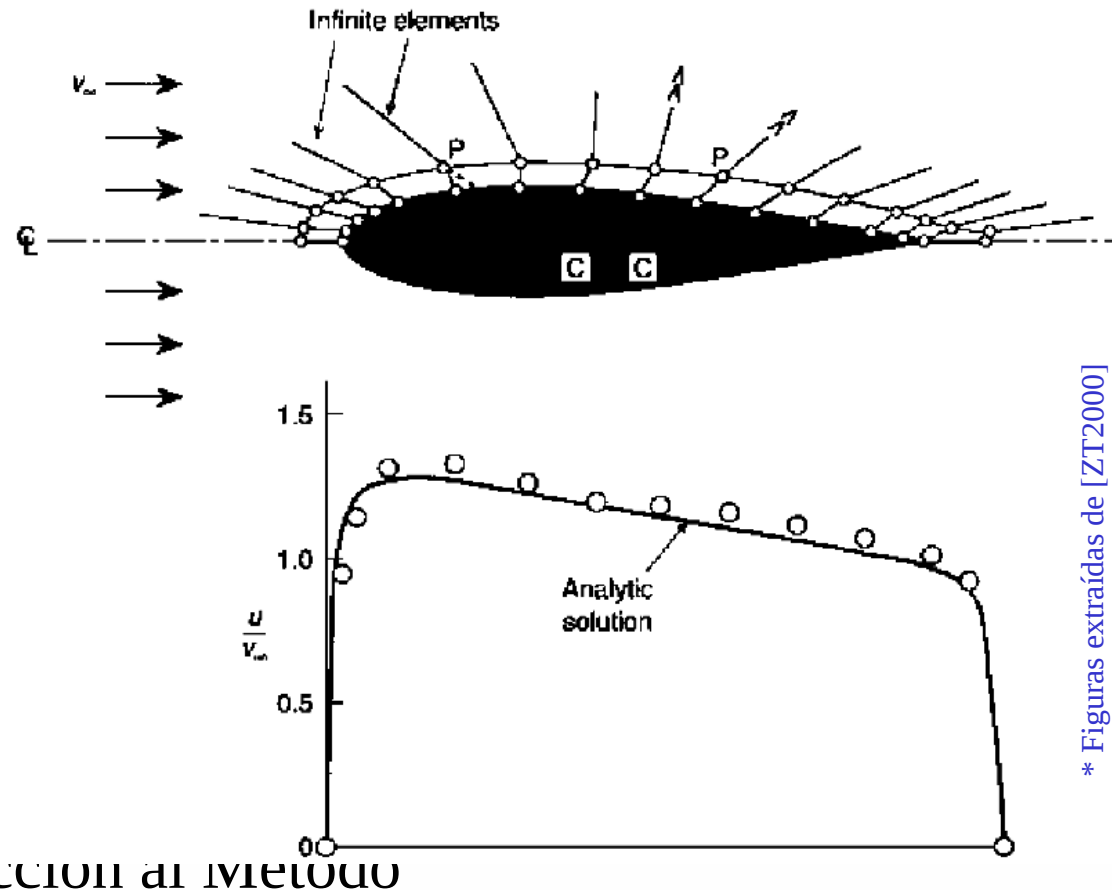
Introducción al
de los Elementos
Finitos

Ejemplos de aplicación de elementos infinitos

Problema de Boussinesq: carga puntual en un medio semi-infinito



Flujo irrotacional alrededor de un ala



* Figuras extraídas de [ZT2000]

Cálculo de la matriz de rigidez

- Las funciones de base locales en K están dadas por $\varphi_j(\mathbf{x}) = \hat{\varphi}_j(\mathbf{F}^{-1}(\hat{\mathbf{x}}))$, $j = 1, K, 6$.
- Para el problema de Poisson, deben calcularse las integrales

$$a_{ij}^K = \int_K \varphi_i \varphi_j dx, \quad j = 1, K, 6.$$

- Por la regla de la cadena $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \hat{\varphi}_j(\mathbf{F}^{-1}(\hat{\mathbf{x}}))}{\partial x_j} = \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \hat{x}_1} \frac{\partial \hat{x}_1}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \hat{x}_2} \frac{\partial \hat{x}_2}{\partial x_j}$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \hat{x}_1} \frac{\partial \hat{x}_1}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \hat{x}_2} \frac{\partial \hat{x}_2}{\partial x_j} = \mathbf{J}^{-T} \hat{\varphi}_i$$

donde $\mathbf{J}^{-T} = (\text{jacobiano de } \mathbf{F}^{-1})^T = (\mathbf{J}^{-1})^T = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{pmatrix} -\partial F_2 / \partial \hat{x}_1 & \partial F_2 / \partial \hat{x}_2 \\ \partial F_1 / \partial \hat{x}_1 & \partial F_1 / \partial \hat{x}_2 \end{pmatrix} = \frac{\mathbf{J}_0}{\det \mathbf{J}}$

$$a_{ij}^K = \int_{\hat{K}} \varphi_i \varphi_j |\det \mathbf{J}| d\hat{\mathbf{x}} = \int_{\hat{K}} \hat{\varphi}_i \hat{\varphi}_j \left(\frac{\mathbf{J}_0}{\det \mathbf{J}} \right) \frac{d\hat{\mathbf{x}}}{|\det \mathbf{J}|}$$



Integración numérica (o cuadratura)

- Para evaluar integrales en MEF, se usa frecuentemente la fórmula de cuadratura:

$$\int_K f(x) dx \approx \sum_{j=1}^q f(x^j) w_j$$

x^j : puntos de integración o de muestreo
 w_j : peso correspondiente al punto x^j

- Si esta fórmula es exacta para el polinomio de grado $r > 0$, luego el error de integración resulta

$$\left| \int_K f(x) dx - \sum_{j=1}^q f(x^j) w_j \right| \leq Ch^{r+1} \int_K |f^{(r+1)}(x)| dx$$

- Nota:** para el elemento isoparamétrico cuadrático visto, calculando la matriz de rigidez por integración numérica exacta para polinomios de grado $r = 2$, luego

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega_h)} = O(h^2)$$

Integración numérica

- El cálculo analítico de matrices que involucran integrales sobre elementos distorsionados, particularmente en elementos de alto orden o en caso de heterogeneidad del material, puede volverse prácticamente imposible.
- En 1D, podemos aproximar tales integrales de la siguiente manera:

$$I = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \approx \sum_{j=0}^n f(\xi_j) H_j$$

ξ_j : puntos de integración o de muestreo
 H_j : peso correspondiente al punto x^j

- Dados los puntos de muestreo $\xi_j, j=0,1,\dots, n$, determinamos el polinomio $F_n(\xi)$ t.q. $F_n(\xi_j)=f(\xi_j)$.

$$F_n(\xi) = \alpha_0 + \alpha_1 \xi + \dots + \alpha_n \xi^n$$

$$F_n(\xi_0) = \alpha_0 + \alpha_1 \xi_0 + \dots + \alpha_n \xi_0^n = f(\xi_0)$$

M

$$F_n(\xi_n) = \alpha_0 + \alpha_1 \xi_n + \dots + \alpha_n \xi_n^n = f(\xi_n)$$

$$I = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \approx \int_{-1}^1 F_n(\xi) d\xi = 2\alpha_0 + \frac{2}{3}\alpha_2 + \dots + \frac{1 - (-1)^{n+1}}{n+1} \alpha_n$$

Integración numérica: método de Newton-Cotes

- **Ejemplo:** para $n=1$, $\xi_0=-1$, $\xi_1=1$:

$$F_1(\xi) = \frac{f(\xi_1) + f(\xi_0)}{2} + \frac{f(\xi_1) - f(\xi_0)}{2} \xi$$

$$I = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \approx \int_{-1}^1 F_1(\xi) d\xi = f(\xi_1) + f(\xi_0)$$

- **Nota:** si n es par, se integra exactamente un polinomio de orden n ; si n es impar, se integra exactamente un polinomio de orden $n+1$.
- Si los puntos de muestreo son equiespaciados, se tiene el **método de Newton-Cotes**.

Integración numérica: método de Gauss-Legendre

- En lugar de definir a priori la posición de los $n+1$ puntos de muestreo, se la determinará de manera de obtener el mayor orden de precisión para n dado.
- Se busca calcular en forma exacta la integral del polinomio F_p , ($p \geq n$ a determinar), cuya integral es

$$I = \int_{-1}^1 F_p(\xi) d\xi = \sum_{j=0}^n W_j (\alpha_0 + \alpha_1 \xi_j + K + \alpha_p \xi_j^p) = 2\alpha_0 + \frac{2}{3}\alpha_2 + K + \frac{1 - (-1)^{p+1}}{p+1} \alpha_p$$

lo que da lugar al sistema de ecs.

$$\begin{array}{l}
 W_0 + W_1 + K + W_n = 2 \\
 W_0 \xi_0 + W_1 \xi_1 + K + W_n \xi_n = 0 \\
 \vdots \\
 W_0 \xi_0^p + W_1 \xi_1^p + K + W_n \xi_n^p = \frac{1 - (-1)^{p+1}}{p+1}
 \end{array}$$

M

?

OBJ

□

□ $p+1$ ecuaciones

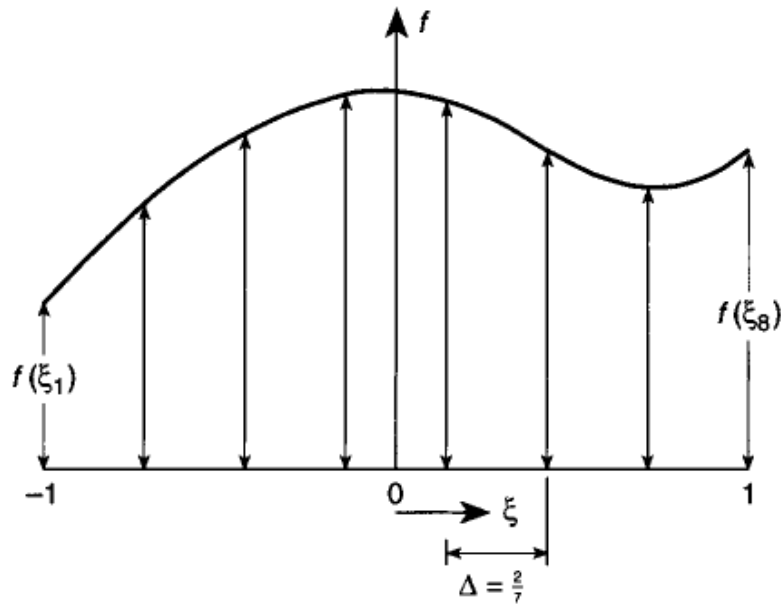
□ $2(n+1)$ incógnitas ($W_0, K, W_n, \xi_0, K, \xi_n$)

que tendrá solución si $p+1 = 2(n+1)$.

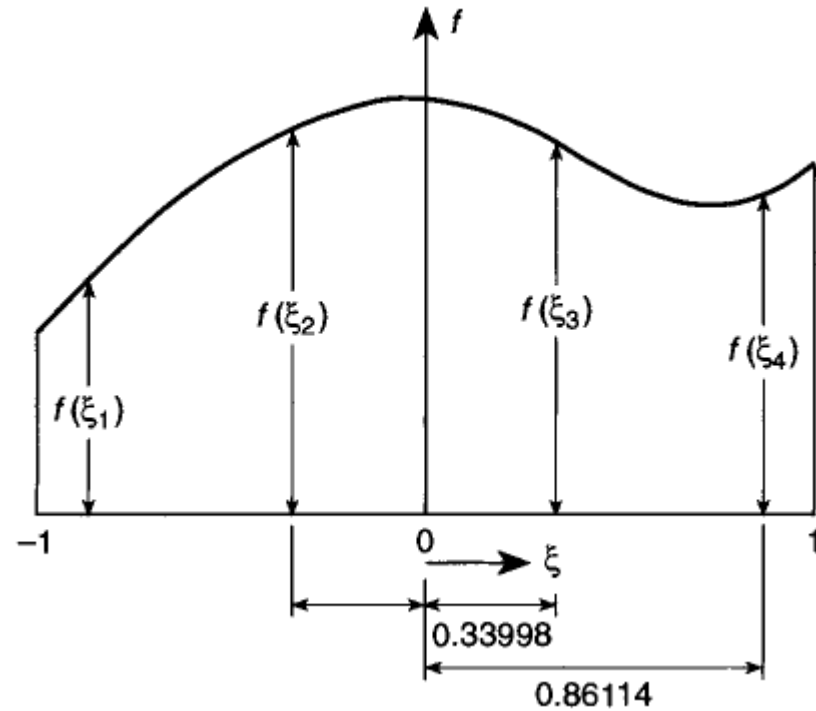


Integración numérica: Newton-Cotes vs Gauss Legendre

- Integración exacta de un polinomio de grado 7



Newton-Cotes



Gauss-Legendre

* Figuras extraídas de [ZT2000]

Integración numérica de Gauss-Legendre

Table 9.1 Abscissae and weight coefficients of the gaussian quadrature formula $\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{j=1}^n H_j f(a_j)$

$\pm a$		H
0	$n = 1$	2.000 000 000 000 000
$1/\sqrt{3}$	$n = 2$	1.000 000 000 000 000
$\sqrt{0.6}$	$n = 3$	$5/9$
0.000 000 000 000 000		$8/9$
0.861 136 311 594 953	$n = 4$	0.347 854 845 137 454
0.339 981 043 584 856		0.652 145 154 862 546
0.906 179 845 938 664	$n = 5$	0.236 926 885 056 189
0.538 469 310 105 683		0.478 628 670 499 366
0.000 000 000 000 000		0.568 888 888 888 889
0.932 469 514 203 152	$n = 6$	0.171 324 492 379 170
0.661 209 386 466 265		0.360 761 573 048 139
0.238 619 186 083 197		0.467 913 934 572 691
0.949 107 912 342 759	$n = 7$	0.129 484 966 168 870
0.741 531 185 599 394		0.279 705 391 489 277
0.405 845 151 377 397		0.381 830 050 505 119
0.000 000 000 000 000		0.417 959 183 673 469

* Tabla extraída de [ZT2000]

Integración numérica en cuadrados (2D) y cubos (3D)

- Se aplican las reglas de integración numérica 1D en cada dirección.

$$I_{2D} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta \approx \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m f(\xi_i, \eta_j) H_i H_j$$

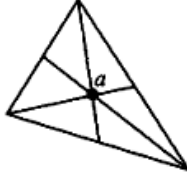
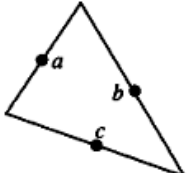
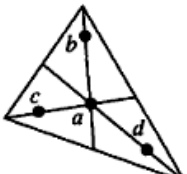
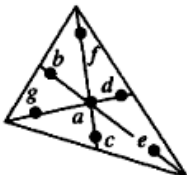
$$I_{3D} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta \approx \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^p f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) H_i H_j H_k$$

Integración numérica en triángulos

$$I = \int_0^1 \int_0^{1-L_1} f(L_1, L_2) dL_1 dL_2$$

$$\square \sum_{j=0}^n f(L_1^j, L_2^j) H_j$$

Table 9.2 Numerical integration formulae for triangles

Order	Figure	Error	Points	Triangular coordinates	Weights
Linear		$R = O(h^2)$	a	$\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$	1
Quadratic		$R = O(h^3)$	a b c	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0$ $0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$
Cubic		$R = O(h^4)$	a b c d	$\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ $0.6, 0.2, 0.2$ $0.2, 0.6, 0.2$ $0.2, 0.2, 0.6$	$-\frac{27}{48}$ $\frac{25}{48}$
Quintic		$R = O(h^6)$	a b c d e f g	$\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ $\alpha_1, \beta_1, \beta_1$ $\beta_1, \alpha_1, \beta_1$ $\beta_1, \beta_1, \alpha_1$ $\alpha_2, \beta_2, \beta_2$ $\beta_2, \alpha_2, \beta_2$ $\beta_2, \beta_2, \alpha_2$	0.225 000 000 0 0.132 394 152 7 0.125 939 180 5

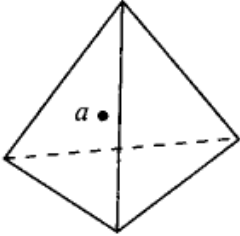
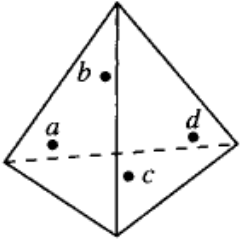
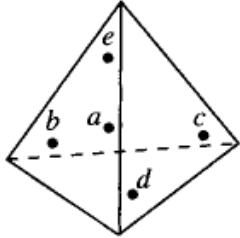
with
 $\alpha_1 = 0.059\ 715\ 871\ 7$
 $\beta_1 = 0.470\ 142\ 064\ 1$
 $\alpha_2 = 0.797\ 426\ 985\ 3$
 $\beta_2 = 0.101\ 286\ 507\ 3$

* Tabla extraída de [ZT2000]

Integración numérica en tetraedros

$$I = \int_0^1 \int_0^{1-L_1} \int_0^{1-L_1-L_2} f(L_1, L_2, L_3) dL_1 dL_2 dL_3 \quad \square \quad \sum_{j=0}^n f(L_1^j, L_2^j, L_3^j) H_j$$

Table 9.3 Numerical integration formulae for tetrahedra

No.	Order	Figure	Error	Points	Tetrahedral coordinates	Weights
1	Linear		$R = O(h^2)$	a	$\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$	1
2	Quadratic		$R = O(h^3)$	a b c d	$\left. \begin{array}{l} \alpha, \beta, \beta, \beta \\ \beta, \alpha, \beta, \beta \\ \beta, \beta, \alpha, \beta \\ \beta, \beta, \beta, \alpha \end{array} \right\}$ $\alpha = 0.58541020$ $\beta = 0.13819660$	$\frac{1}{4}$
3	Cubic		$R = O(h^4)$	a b c d e	$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2} \end{array} \right\}$	$-\frac{4}{5}$ $\frac{9}{20}$

* Tabla extraída de [ZT2000]

Orden de integración numérica necesario

- Dado el costo computacional que implica un mayor número de puntos de integración, es conveniente determinar:
 1. Menor orden de integración que no comprometa la convergencia.
 2. Orden de integración necesario para mantener la misma tasa de convergencia que si se usara integración exacta.
- **Mínimo orden de integración para convergencia:** en un problema donde habrá convergencia si puede reproducirse cualquier valor constante de la m -ésima derivada. Si $m=1$, ello requiere que el volumen del elemento sea calculado de manera exacta.
- **Orden de integración para no deteriorar la convergencia:** usando MEF standard (Galerkin), con interpolación polinomial de grado p , para problemas que involucren derivadas de orden m , el error es $O(h^{2(p-m)+1})$. Si el error de integración es a lo sumo de ese orden, no se perderá convergencia.