Revista Colombiana de Astronomía, Vol. 01, No. 01 de 2010

Escenarios Multidimensionales

Multidimentional Scenares

Alexander Moreno

Observatorio Astronómico Nacional

Recibido xx de xxx. xxx; Aceptado xxx de xxx. xxx; Publicado en línea xx de xxx. xxxx

Resumen

En este trabajo mostramos diferentes escenarios multidimensionales, bastante comunes en cosmología y en la física de partículas de hoy día, en partícular el modelo Kaluza-Klein, el llamado modelo ADD y el modelo de Randall-Sundrum, se ilustran algunos aspectos importantes de ellos, en especial se obtiene la masa de Planck como también la acción sobre un universo membrana. Iniciando con la acción para el modelo RSI y mediante el proceso de variación de la misma se obtiene la correspondiente ecuación de campo.

***PACS*:** 98.80.-k, 98.80.Es, 11.25.-w
***Palabras Claves*:** modelo KK, multidimensional, mundo membrana

Abstract

In this work we show different physical multidimensional scenarios, quite common in cosmological and particle physics today, in particular Kaluza-Klein model, the so-called ADD model and the Randall-Sundrum model, illustrates some aspects imports of them in special we obtain the Planck mass as well as the effective action on a braneworld. Starting from the action for the RSI model and through the process of variation from it is obtained the corresponding field equation.

***PACS*:** 98.90.-k, 98.80.Es, 11.25.-w
***Keywords*:** KK model, multidimentional, braneworld

1 Introducción

La historia de las dimesiones adicionales en física es larga e intrincada. G. Noström trato de unificar la gravrdad y el electromanétismo aumentando las dimensiones espaciales. A diferencia de la teoría de Kaluza-Klein quienes asumieron una teoría con electromagnétismo puro en cinco dimensiones. De esta forma, la quinta componente del potencial vector puede ser identificado con el potencial gravitacional. Posteriormente, con el gran éxito de la teoría electromagnética de Maxwell unificando electrostática, magnétismo y óptica, de este modo se esperaba que la gravedad fuera otra forma de ‘electromagnétismo’. En 1921, el matemático T. Kaluza propone su modelo en el contexto de la gravedad de Einstein, sin que se diera mucho significado a la quinta dimensión, después O. Klein sugeriría que la dimensión adicional debe ser compacta y pequeña[1, 2].

La generalización a teorías gauge no-Abelianas[3, 4] tuvo que esperar hasta las teorías de Yangs Mills donde se desarrollo y gano interés el fuerte avance de la unificación electrodébil. La Supergravedad y la descripción de compactificación espontánea estímulo las teorías de KK en los años 70’s y 80‘s . Intrigantes coincidencias entre resultados independientes de supergravedad y de teoría de grupos refuerzan las teorías de KK durante algun tiempo más. De otra parte, se muestra que las teorías supersimétricas con campos de espín 2 sólo son posibles en almenos 11 dimensiones. Igualmente, Witten encontró que la dimensión mínima de un espacio compacto con un grupo isométrico igual al grupo gauge del Modelo Estándar $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ debe ser de siete[5]. Esto apunta a un teoría de la supergravedad 11D con un contenido de campos muy restringidos. Una vez más Witten argumenta que los fermiones quirales 4D pueden ser obtenidos compactificando estas teorías sobre una variedad suave. Todo esto conduce a colocar la idea de KK en una posición muy fuerte y con posibilidades de registrar fenomenología obserbable.

Las dimensiones adicionales han sido consideradas hasta ahora por varias razones. De hecho, las teorías de supercuerdas han sido formuladas en más de cuatro dimensiones con el fin de mantener la consistencia matemática. Los recientes desarrollos en teorías de cuerdas han llamado la atención en objetos no perturbativos conocidos como branones, que son análogos a los solitones en teoría de campos[6]. La inclusión de efectos no perturbativos ha revelado una red de dualidades entre ellos. Las cinco teorías de cuerdas conocidas junto con la supergravedad en 11 dimensiones compactificada sobre S^1/Z_2 se considera que constituyen el caso límite de una teoría más fundamental llamada teoría M.

La última parte de la historia es la que ha tenido que ver con los modelos de branes y dimensiones adicionales grandes los cuales han permitido abordar problemas de larga data como el problema de jerarquías. Por ejemplo tenemos los modelos de branes de ADD y de Randall-Sundrum, los cuales tienen en comun que pueden conducir a nueva física aun a escalas de algunos pocos TeV. En consideración de lo anterior las teorías de KK con escalas de compactificación del orden de los TeV ha despertado el interés ya que podrían someterse a prueba en experimentos actuales.

En este trabajo se mostraran algunos elementos de escenarios multidimensionales, en partícular se obtendrá la ecuación de campo para el modelo RSI, es decir un modelo con dos branes[7, 8].

En la notación utilizada los índices griegos barren cuatro dimesiones y los índices latinos barren las cinco dimensiones.

2 Teorías Kaluza-Klein

Presentamos la teoría efectiva genérica que se puede construir en cuatro dimensiones. Para empezar considere el caso más simple de una dimensión adicional compacta parametrizada por la coordenada $0 \leq y \leq 2\pi R$, de tal modo que el espaciotiempo puede considerarse como el producto directo de las dos variedades una de ellas compacta, es decir que se puede asignar en cada punto de la variedad no compacta, por ejemplo el espaciotiempo $M_4 \times S^1$.

Ahora bién, si se considera un campo escalar sobre este espaciotiempo denotado por $\Phi(x^\mu, y)$ y cuya acción esta dada por

$$S = \frac{1}{2} \int d^5x \Phi(x^\mu, y) \Box_5 \Phi(x^\mu, y) \,, \tag{1}$$

adicionalmente, puede decirse que el campo escalar es períodico, es decir $\Phi(x^\mu, y + 2\pi R) = \Phi(x^\mu, y)$, lo cual hace pensar en una descomposición de Fourier

$$\Phi(x^\mu, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi^n(x^\mu) e^{\frac{iny}{R}} \,, \tag{2}$$

llevando esto a la acción anterior se encuentra

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi^n(x^\mu)[\Box_4 - m_n^2]\Phi^n(x^\mu) \,, \tag{3}$$

donde $m_n = \frac{n}{R}$, por lo tanto la acción anterior está describiendo un conjunto infinito de campos cuadridimensionales $\Phi^n(x^\mu)$ con masa creciente.

Si el campo cinco-dimensional es un campo sin masa el modo cero $\Phi^0(x^\mu)$ puede representarlo. La masa de los restantes modos estará dada por la escala de compactificación $\sim \frac{1}{R}$, donde si el tamaño de R es suficientemente pequeño la energía propia de estos modos seria muy grande lo que supone una dificultad muy grande en la exitación de estos modos. En este orden de ideas se espera que a energías por debajo de $\frac{1}{R}$, la teoría de altas dimensiones pueda reducirse a una teoría efectiva que quede bien descrita por unicamente el modo cero de la expansión.

La propuesta original de KK es que la gravedad 5D, sobre el espacitiempo $M_4 \times S^1$, contiene la gravedad 4D y el electromagnétismo. Para entender esto partimos de la acción de Einstein para la gravedad pura en 5D

$$S = M^3 \int d^5x \sqrt{g} R \,, \tag{4}$$

puede considerarse que el espacioteimpo $M_4 \times S^1$ constituye una solución de la ecuación de campo 5D.

Ahora bién, las componentes de la métrica $g_{\mu\nu}(x^\mu, y)$ deben de descomponerse en Fourier o modos KK, ya que actuan como un campo escalar. Para la teoría efectiva a baja energía, los modos masivos no son relievantes, por lo tanto es suficiente introducir sólo la dependencia con x^μ. Pero el hecho importante es identificar que la acción anterior es invariante bajo una transformación general de coordenadas 5D la cual se puede parametrizar por funciones $\xi^\alpha(x, y)$, pero como estamos considerando una teoria efectiva sólo es relievante la dependencia con x y se espera que la transformación general de coordenadas 4D quede parametrizada por $\xi^\alpha(x)$, lo cual hace que la función $\xi^5(x)$ juegue el rol de los parámetros de la transformación gauge, con esto se puede identificarse con con una traslación local en la dimensión adicional. Por consiguiente, atendiendo a lo anterior, se propone para la teoría efectiva la siguiente métrica

$$ds^2 = e^{-\frac{2}{3}\varphi}\hat{g}_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + e^{\frac{4}{3}\varphi}(dy + A_\mu dx^\mu)^2 \ , \quad (5)$$

entonces si se lleva a la acción anterior se obtiene, la acción efectiva dada por

$$S_{ef} = m_p^2 \int dx^4 \sqrt{\hat{g}}[\hat{R} - \frac{1}{4}e^{2\varphi}\hat{F}^2 - \frac{2}{3}(\hat{\partial}\varphi)^2] \ , \quad (6)$$

donde podemos identificar $m_p^2 = 2\pi RM^3$, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Junto con el término electromágnetico, tenemos un modo cero φ relacionado con g_{55} el cual está parametrizando el radio físico del círculo S^1.

Si se considera una compactificación más general de la forma $M_4 \times \Sigma$, este parámetro describe la geometría interna de la variedad compacta Σ y el cual esta entrando en la teoría efectiva 4D como un escalar, genericamente llamado *moduli*. En teorías KK los modulos que parametrizan el tamaño del espacio extra son conocidos como *dilatón*.

3 Modelo ADD

Los primeros elementos fenomenológicos del escenario Brane World fueron presentados por Arkani-Hamed, Dimopoulos, y Dvali, en su modelo conocido como ADD creando un modelo de brane con dimensiones adicionales grandes. Para ilustrar algunas consecuencias de esto no se considera ningun modelo específico. En lugar de esto, se asume que el espacio es de la forma $M_4 \times \Sigma$, donde Σ es una variedad suave, compacta de n-dimensiones y de radio R, con una brane cuadridimensional (3-brane) localizada en el bulk. De este modo, si consideramos la ley de Gauss en 4+n dimensiones y si tomamos radios r o distancias menores que el radio de compactificación R, es decir $r << R$, el potencial Newtoniano entre dos partículas de masa m_1 y m_2 es

$$V_N(r) = -G^{4+n}\frac{m_1 m_2}{r^{1+n}} \ , \quad (7)$$

donde G^{4+n} es la constante de Newton en 4D, por lo tanto $V_N(r)$ decrece más rápido que la interacción 4D localizada sobre la brane.

Igualmente, para distancias mayores $r >> R$, el comportamiento del potencial es

$$V_N(r) = -\frac{G^{4+n}}{V_n}\frac{m_1 m_2}{r} = -G_N\frac{m_1 m_2}{r} \ , \quad (8)$$

donde $V_N \propto R^n$ lo cual vendría a ser el volumen de Σ y donde además se ha identificado la constante de Newton efectiva como $G_N \sim \frac{G^{4+n}}{V_n}$.

En términos de la masa de Planck en $4+n$ dimensiones M y de la masa de Planck en 4D $m_p^2 = \frac{1}{16\pi G_N}$, se obtiene la siguiente relación

$$m_p^2 \sim V_n M^{2+n} \sim (MR)^n M^2 \ , \quad (9)$$

esto muestra que el tamaño del bulk tiene que ser mayor en comparación con la longitud fundamental $\frac{1}{M}$, de tal modo que el mecanismo ADD media entre la jerarquía entre la gravedad y las interacciones gauge y la jeraquía impuesta por el tamño del bulk. De otra parte la anterior ecuación sugiere una solución al problema de la inestabilidad cuántica de masas ecalares. Como aun los valores apropiados para R no son conocidos, existe la esperanza de que el límite fundamental este por debajo de unos pocos TeV, de esta forma si se escoge $M \sim TeV$ se puede encontrar que el valor de R necesario para obtener la masa de Planck de $m_p \sim 10^{16}TeV$, debe estar dado por

$$R \sim 10^{\frac{32}{n}-16}\ mm \ , \quad (10)$$

de tal modo que para $n = 1$, se obtiene $R \sim 10^{16}mm$ por lo tanto esto sería de orden astronómico, en el caso $n \geq 2$ se obtienene radios de compactificación sub-milimétricos, en consecuencia haría que la investigación de la desviación de la ley de gravitación de Newton parezca muy complicada.

4 Modelo Randall-Sundrum

El escenario BraneWorld de Randall-Sundrum consiste de un espacio de cinco dimensiones con dos branes inmersas en él. Especificamente, se considera la acción de Einstein-Hilbert en cinco dimensiones más el término de tensión de la brane

$$\begin{aligned} S \ = \ & \int d^4x \int dy\sqrt{-g}\left[2M^3 R - \Lambda\right] + \\ & \int d^4x\sqrt{-g_{(b1)}}\left[V_{b1} + \mathcal{L}_{b1}\right] \\ & + \int d^4x\sqrt{-g_{(b2)}}\left[V_{b2} + \mathcal{L}_{b2}\right] \ , \quad (11) \end{aligned}$$

donde $g_{(b1)}$, $g_{(b2)}$ son las métricas inducidas en cada brane por la métrica del bulk $g_{\mu\nu}(x, y)$. La tensión de cada una de las branes es V_{b1}, V_{b2} y $\mathcal{L}_{b1}$, $\mathcal{L}_{b2}$ son los lagrangianos de la materia localizada sobre ellas.

La métrica propuesta para el modelo RS es

$$ds^2 = a^2(y)\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + dy^2 \ , \quad (12)$$

con $a^2(y) = e^{-k|y|}$ que constituye un factor conformal conocido como factor de curvatura, se sabe que métricas de esta forma no describen el producto directo de espacios, como se puede deducir de la métrica de una esfera unitaria $ds^2 = d\theta^2 + sen^2\theta d\phi^2$. Puede, demostrarse que la métrica anterior es una soluen ción de la euación de Einstein, donde la constante cosmológica se puede expresar como

$$\Lambda = -12M^3k^2 \ . \tag{13}$$

Ahora bién, se integra la ecuación de Einstein en una vecindad de la brane, se obtienen las condiciones de frontera de de Israel[6], esto es

$$\left[K^{\nu}_{\mu}\right] - \delta^{\mu}_{\nu}\left[K^{\rho}_{\rho}\right] = -(\frac{1}{2M^3})S^{\nu}_{\mu} \ , \tag{14}$$

donde K^{ν}_{μ} es la curvatura extrínseca, $\left[K^{\nu}_{\mu}\right] \equiv K^{\nu}_{\mu}(y_0+\varepsilon) - K^{\nu}_{\mu}(y_0-\varepsilon)$, con $\varepsilon \to 0$, esto surge de la discontinuidad cuando se atraviesa la brane, y S^{ν}_{μ} es el tensor momemtum-energía generado por la brane. Por, lo tanto para que se satisfagan las condiciones de frontera se debe cumplir

$$V_{b1} = -V_{b2} = 12M^3k \ , \tag{15}$$

de este modo, se obtiene una solución si $\Lambda < 0$ y ajustamos los parámetros Λ, V_{b1}, V_{b2} en la acción de acuerdo a

$$V_{b1,2} = -12M^3\Lambda \ . \tag{16}$$

Debido a la presencia de las branes gravitantes, la dimensión adicional puede considerarse compacta asumiendo que tienen una topológia de orbifold S^1/Z_2, similar a la teoría de Ořava-Witten. Puede demostrarse, que la distancia interbrane d es una constante de integración de la solución. Esto corresponde a una región plana del potencial, que puede asimilarse a un escalar sin masa en una teoría efectiva 4D, en términos técnicos llamado *radión*.

Bajo algunas consideraciones puede demostrarse que la masa de planck está dada por

$$m_p^2 = \frac{M^3}{k}(1 - e^{-2kd}) \ , \tag{17}$$

A diferencia de la teoría KK y del modelo ADD, el valor real de la masa de Planck efectiva en 4D m_p depende marginalmente de d , lo cual significa que el mecánismo RS no está basado sobre el efecto del volumen del *bulk*.

5 Ecuación de campo para RSI

En esta sección se obtendrá explícitamente la ecuación de campo de Randall-Sundrum, siguiendo la técnica clásica del pricipio de mínima acción y realizando una variación de la acción considerada anteriormente en el modelo RSI. Debido a que la coordenada y es períodica $y = \phi + 2\pi$, lo cual conduce a $dy = d\phi$, con $0 \leq \phi \leq \pi$, con esto se puede escribir la acción como

$$\begin{aligned} S &= \int d^4x \int_{-\pi}^{\pi} d\phi\sqrt{-g}\left[2M^3R - \Lambda\right] + \\ &\quad \int d^4x\sqrt{-g_{(b1)}}\left[V_{b1} + \mathcal{L}_{b1}\right] \\ &\quad + \int d^4x\sqrt{-g_{(b2)}}\left[V_{b2} + \mathcal{L}_{b2}\right] \ , \end{aligned} \tag{18}$$

aplicando una variación a la primera integral S_B (se refiere a la acción en 5D), se obtiene

$$\delta S_B = \delta\int d^4x\int_{-\pi}^{\pi} d\phi\sqrt{-g}\left[2M^3R - \Lambda\right] \ , \tag{19}$$

lo cual conduce a la siguiente expresión

$$\delta S_B = \int d^4x\int_{-\pi}^{\pi} d\phi\left[2M^3\delta(\sqrt{-g}R) - \Lambda\delta(\sqrt{-g})\right] \ , \tag{20}$$

donde el escalar de curvatura se puede expresar como $R = g^{uv}R_{uv}$, con lo cual se obtiene

$$\begin{aligned} \delta S_B &= \int d^4x\int_{-\pi}^{\pi} d\phi\left[2M^3\delta(\sqrt{-g}g^{uv}R_{uv})\right] \\ &\quad - \int d^4x\int_{-\pi}^{\pi} d\phi\Lambda\delta(\sqrt{-g}) \ , \end{aligned} \tag{21}$$

tomando la variación en el primer integrando, se encuentra

$$\begin{aligned} \delta(\sqrt{-g}g^{uv}R_{uv}) &= \delta(\sqrt{-g})g^{uv}R_{uv} + \\ &\quad \sqrt{-g}\delta(g^{uv})R_{uv} + \sqrt{-g}g^{uv}\delta(R_{uv}) \ , \end{aligned} \tag{22}$$

ahora bién, si se desarrolla cada una de las variaciones, encontramos

$$\begin{aligned} \sqrt{-g}g^{uv}\delta(R_{uv}) &= \partial_l\sqrt{-g}g^{uv}\delta\Gamma^l_{uv} \\ &\quad -\partial_v\sqrt{-g}g^{uv}\delta\Gamma^l_{ul} \ , \end{aligned} \tag{23}$$

$$\delta(g^{uv}) = -g^{up}g^{vs}\delta g_{ps} \ , \tag{24}$$

$$\delta(\sqrt{-g}) = \frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{uv}\delta g^{uv} \ , \tag{25}$$

llevando estas expresiones a la expresión para $\delta(\sqrt{-g}R)$, se obtiene

$$\begin{aligned}\delta(\sqrt{-g}R) &= \frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{uv}\delta g^{uv}R + \\ &\sqrt{-g}(-g^{up}g^{vs}\delta g_{ps})R_{uv} + \\ &\partial_l\sqrt{-g}g^{uv}\delta\Gamma^l_{uv} \\ &-\partial_v\sqrt{-g}g^{uv}\delta\Gamma^l_{ul}\ ,\end{aligned} \tag{26}$$

simplificando esta expresión y aplicando la idea de índices mudos llegamos a

$$\begin{aligned}\delta(\sqrt{-g}R) &= \frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{uv}R\delta g^{uv} - \sqrt{-g}R^{uv}\delta g_{uv} \\ &+\partial_l\sqrt{-g}g^{uv}\delta\Gamma^l_{uv} - \partial_v\sqrt{-g}g^{uv}\delta\Gamma^l_{ul}\ ,\end{aligned} \tag{27}$$

entonces la variación completa para la acción en cinco dimensiones se puede expresar de forma amplia como

$$\begin{aligned}\delta S_B &= \int d^4x\int_{-\pi}^{\pi}[d\phi 2M^3(\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{uv}R\delta g^{uv} \\ &-\sqrt{-g}R^{uv}\delta g_{uv} + \partial_l\sqrt{-g}g^{uv}\delta\Gamma^l_{uv} \\ &-\partial_v\sqrt{-g}g^{uv}\delta\Gamma^l_{ul}\ )] \\ &-\int d^4x\int_{-\pi}^{\pi}d\phi\frac{1}{2}\Lambda\sqrt{-g}g_{uv}\delta g^{uv}\ ,\end{aligned} \tag{28}$$

aplicando el teorema de Gauss y como las variaciones del campo son nulas en los límites de integración se obtiene

$$\begin{aligned}\delta S_B &= \int d^4x\int_{-\pi}^{\pi}d\phi 2M^3(\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{uv}R\delta g^{uv} \\ &-\sqrt{-g}R^{uv}\delta g_{uv}) \\ &-\int d^4x\int_{-\pi}^{\pi}d\phi\frac{1}{2}\Lambda\sqrt{-g}g_{uv}\delta g^{uv}\ ,\end{aligned} \tag{29}$$

simplificando la expresión anterior resulta

$$\begin{aligned}\delta S_B &= \int d^4x\int_{-\pi}^{\pi}d\phi 2M^3\sqrt{-g}(-\frac{1}{2}g_{uv}R \\ &+R_{uv} - \frac{1}{4M^3}\Lambda g_{uv})\delta g_{uv}\ ,\end{aligned} \tag{30}$$

ahora, efectuando la variación para la acción que describe las branes tenemos

$$\delta S_{b1} = -\frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g_{(b1)}}g^{(b1)}_{\mu\nu}V_{b1}\delta g^{\mu\nu}_{(b1)}\ , \tag{31}$$

$$\delta S_{b2} = -\frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g_{(b2)}}g^{(b2)}_{\mu\nu}V_{b2}\delta g^{\mu\nu}_{(b2)}\ , \tag{32}$$

entonces la variación de la acción completa queda de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\delta S &= \int d^4x\int_{-\pi}^{\pi}d\phi 2M^3\sqrt{-g}(-\frac{1}{2}g_{uv}R + R_{uv} \\ &-\frac{1}{4M^3}\Lambda g_{uv})\delta g_{uv} \\ &-\frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g_{(b1)}}g^{(b1)}_{\mu\nu}V_{b1}\delta g^{\mu\nu}_{(b1)} \\ &-\frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g_{(b2)}}g^{(b2)}_{\mu\nu}V_{b2}\delta g^{\mu\nu}_{(b2)}\ ,\end{aligned} \tag{33}$$

expresando las variaciones para las branes en cinco dimensiones con ayuda de la función delta y tomando en consideración su localización en el orbifold, obtenemos

$$\begin{aligned}\delta S &= \int d^4x\int_{-\pi}^{\pi}d\phi 2M^3\sqrt{-g}(-\frac{1}{2}g_{uv}R + R_{uv} \\ &-\frac{1}{4M^3}\Lambda g_{uv})\delta g_{uv} - \frac{1}{2}\int d^4x\int_{-\pi}^{\pi}d\phi\delta(\phi-\pi) \\ &\sqrt{-g_{(b1)}}g^{(b1)}_{\mu\nu}V_{b1}\delta g^{\mu\nu}_{(b1)} - \frac{1}{2}\int d^4x\int_{-\pi}^{\pi}d\phi\delta(\phi) \\ &\sqrt{-g_{(b2)}}g^{(b2)}_{\mu\nu}V_{b2}\delta g^{\mu\nu}_{(b2)}\ ,\end{aligned} \tag{34}$$

simplificando la expresión anterior, resulta

$$\begin{aligned}\delta S &= \int d^4x\int_{-\pi}^{\pi}d\phi 2M^3\sqrt{-g}(-\frac{1}{2}g_{uv}R + R_{uv} \\ &-\frac{1}{4M^3}\Lambda g_{uv})\delta g_{uv} \\ &-\frac{1}{2}\delta(\phi-\pi)\sqrt{-g_{(b1)}}g^{(b1)}_{\mu\nu}V_{b1}\delta g^{\mu\nu}_{(b1)} \\ &-\frac{1}{2}\delta(\phi)\sqrt{-g_{(b2)}}g^{(b2)}_{\mu\nu}V_{b2}\delta g^{\mu\nu}_{(b2)}\ ,\end{aligned} \tag{35}$$

ahora, se puede expresar cada $\delta g^{\mu\nu}_{(bi)}$ de la siguiente forma $\delta g^{\mu\nu}_{(bi)} = \delta^\mu_u\delta^\nu_v\delta g^{uv}$, con lo que se obtiene

$$\begin{aligned}\delta S &= \int d^4x\int_{-\pi}^{\pi}d\phi(2M^3\sqrt{-g}(-\frac{1}{2}g_{uv}R \\ &+R_{uv} - \frac{1}{4M^3}\Lambda g_{uv}) \\ &-\frac{1}{2}\delta(\phi-\pi)\sqrt{-g_{(b1)}}g^{(b1)}_{\mu\nu}V_{b1}\delta^\mu_u\delta^\nu_v \\ &-\frac{1}{2}\delta(\phi)\sqrt{-g_{(b2)}}g^{(b2)}_{\mu\nu}V_{b2}\delta^\mu_u\delta^\nu_v)\delta g_{uv}\ ,\end{aligned} \tag{36}$$

y como la variación debe ser igual a $\delta S = 0$, entonces el integrando debe ser igual a cero

$$
\begin{aligned}
&2M^3\sqrt{-g}(-\frac{1}{2}g_{uv}R + R_{uv} - \frac{1}{4M^3}\Lambda g_{uv}) - \\
&\frac{1}{2}\delta(\phi-\pi)\sqrt{-g_{(b1)}}g^{(b1)}_{\mu\nu}V_{b1}\delta^{\mu}_{u}\delta^{\nu}_{v} \\
&-\frac{1}{2}\delta(\phi)\sqrt{-g_{(b2)}}g^{(b2)}_{\mu\nu}V_{b2}\delta^{\mu}_{u}\delta^{\nu}_{v} = 0\,,
\end{aligned}
\tag{37}
$$

finalmente se obtiene la ecuación de campo en el escenario Randall-Sundrum

$$
\begin{aligned}
\sqrt{-g}(R_{uv} - \frac{1}{2}g_{uv}R) &= -\frac{1}{4M^3}(\Lambda\sqrt{-g}g_{uv} \\
&+V_{b1}\sqrt{-g_{(b1)}}g^{(b1)}_{\mu\nu}\delta^{\mu}_{u}\delta^{\nu}_{v}\delta(\phi-\pi) \\
&+V_{b2}\sqrt{-g_{(b2)}}g^{(b2)}_{\mu\nu}\delta^{\mu}_{u}\delta^{\nu}_{v}\delta(\phi))\,.
\end{aligned}
\tag{38}
$$

Puede observarse el carácter singular de las dos branes, igualmente la intervención directa de las tensiones o energía de vacio de cada una de las branes. Importante resaltar que este modelo es el que permite resolver el problema de jararquías y además el que permite realizar las aproximaciones cuánticas, como la estabilización del *radión*[9].

6 Conclusiones

Finalmente podemos concluir con los siguientes elementos, entre otros muchos más que pueden ser deducidos del modelo teórico:

1. Los escenarios multidimensionales permiten explorar nuevas fenomenologías físicas ya que permite aumentar los grados de libertad de una teoría lo cuál se traduce un los nuevos términos incorporados en los modelos que mediante ajustes e interpretaciones adecuadas permiten explicaciones alternas.

2. El escenario ADD, es muy importante ya que permite de forma análitica resolver el problema de jeraquias, pero se dificulta enormemente su verificación experimental.

3. El escenario RS, hace consideraciones diferentes, soluciona el problema de jerarquías y su posible verificación experimental esta en el orden de los TeV, permite igualmente reinterpretar la masa de Planck, las interacciones gauge, o el graviton.

4. Se recobra, en los escenarios multidimensionales, la teoría clásica de KK, quizá en un escenario multidimensional general la teoría quede totalmente incorporada, y sus elementos aporten en la construcción de un esquema mucho más general y verificable.

5. Puede proponerse una generalización del modelo RS, es decir podemos considerar un mayor número de branes, incorporar en cada brane dimensiones compactas, backgraund más general que el AdS_5, todo ello con el fin de explorar nuevas consecuencias, formas alternas de verificación experimental, y talvez un mayor entendimiento de la estructura y leyes del universo.

References

[1] T. Kaluza, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin Math. Phys. **Kl. 33** (1921) 966.

[2] O. Klein, Z. Phys. **37** (1926) 895; O. Klein, Nature (London) **118** (1926) 516.

[3] B. S. De Witt in *Relativity, Groups and Topology*, eds C. and B. S. De Witt (Gordan and Breach, New York, 1964).

[4] R. Kerner, Ann. Inst. Poincare, Sec. **A9** (1968) **29**.

[5] E. Witten, Fermion Quantum Numbers In Kaluza-Klein, The Proc. of Second Shelter Island Meeting (1983) 227.

[6] J. Polchinski, “String Theory. Vol 1: An Introducction To the Bosonic String, ” *Cambridge,* UK: Pr. (1998) *402 p*. “String Theory. Vol: Superstring Theory And Beyond,” *Cambridge*, UK: Unive. Pr. (1998) *531 p*.

[7] Randall, L., and Sundrum, R., “An Alternative to Compactification”, *Phys. Rev. Lett.*, **83**, 4690-4693, (1999)

[8] Randall, L., and Sundrum, R., “ Large Mass Hierarchy from a Small Extra Dimension”, *Phys. Rev. Lett.*, **83**, 3370-3373, (1999).

[9] J. Garrga, O. Pujolas and T. Tanaka, “Radion effective potential in the braneworld,” Nucl. Phys. B **605**, 192 (2001) [arXiv:hep-th/0004109]