Desigualdades del Área y Volumen en una Variedad Diferenciable con Borde o Frontera no Vacío

Reynaldo Zambrano Berrio

Trabajo de grado
Para optar al título de matemático

Asesor
PhD. Rubén Darío Ortiz Ortiz

Universidad de Cartagena
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Programa de Matemáticas

Cartagena de Indias D. T. y C.

Abril de 2010

Dedico este trabajo con todo cariño a
mis padres Lucas Zambrano Cantillo y Yoberlis Berrio Fuentes.

Doy gracias a Dios por haberme permitido alcanzar este logro,
a mi madre por su apoyo incondicional,
a la Universidad de Cartagena,
y a todos los amigos que me apoyaron de un modo u otro.

Índice general

Introducción

A principios del siglo XVIII, los matemáticos estaban interesados en el problema de hallar trayectorias de longitud más corta sobre una superficie, mediante métodos de cálculo y geometría diferencial. En ese tiempo, las superficies eran consideradas fronteras de sólidos definidos.

Christian Huygens fue la primera persona desde Arquímedes en dar resultados acerca de las áreas de superficies particulares más allá de la esfera, y obtuvo las áreas de partes de superficies de revolución.
El matemático Leonhard Euler presentó el primer trabajo fundamental sobre la teoría de las superficies en 1760 y fue quizás en este trabajo, que por primera vez se definió una superficie como una gráfica $z = f(x, y)$. Euler estaba interesado en estudiar la curvatura de superficies, y en 1771 introdujo el concepto de superficie paramétrica. Al principio del siglo XVIII, se desarrollaron fórmulas para las longitudes de curvas y de áreas de superficies. Los conceptos subyacentes de longitud de una curva y de área de una superficie se entendían intuitivamente antes de este tiempo, y el uso de fórmulas del cálculo para obtener áreas fue considerado un gran avance.

Augustin Louis Cauchy fue el primero en dar el paso para definir las cantidades de longitud y de área de superficie mediante integrales. La cuestión de definir el área de superficie independiente de las integrales se planteó un poco más adelante, pero dio lugar a muchos problemas difíciles que no fueron resueltos de manera adecuada hasta este siglo.

Rafael López en su trabajo “Superficies con curvatura media constante cuyo borde es un circulo”[4], Muestra como la geometría del borde determina, en cierta medida, la forma de la superficie, centrándose en el caso en que el borde sea circular.
Manuel María Ritoré Cortés en “Superficies con curvatura media constante”[5] estudia las superficies de menor área limitada por un contorno dado, tales superficies son llamadas superficies minimales.
Intuitivamente se puede pensar en una superficie (variedad diferenciable) como un conjunto de puntos en el espacio, los cuales se asemejan a una porción de un plano en la vecindad de cada uno de sus puntos. La curvatura es una medida invariante de una superficie que indica que tanto se curva, se dicen que es un invariante ya que permanece

constante ante traslaciones y rotaciones.

Algunos de los principales conceptos en geometría Riemanniana y geometría diferencial son los de curvatura Gaussiana y curvatura media, que desempeñan un papel esencial en la teoría de superficies.

En este trabajo se reescribirá el propuesto por José A. Gálvez y Antonio Martínez "Estimates in Surfaces with Positive Constant Gauss Curvature"[1], donde se estudia el comportamiento de las curvatura media y curvatura Gaussiana en una superficie con frontera, en el cual realizaremos algunos detalles técnicos que no aparecen en él, de tal modo que sea entendible por estudiantes con un conocimiento previo de geometría diferencial.

En el capitulo uno se dan los conceptos preliminares tales como la teoría de de curvas, teoría de superficies, donde tales curvas y superficies son orientadas por lo tanto se ve la necesidad de teoría de formas diferenciales y la geometría Riemanniana que trata sobre variedades que es el caso mas general de una superficie.

En el segundo capitulo se muestran los resultados de este trabajo donde consideramos a S como una superficie suave compacta inmersa en $\mathbb{R}^3$ con una frontera conectada, ∂S, y $x :\rightarrow \mathbb{R}^3$ una K-superficie, las superficies en las que estamos interesados tienen frontera no vacía. Sea Γ es una curva en un plano P. Si Γ es una curva de Jordan, que es libre de puntos de inflexión, P se encuentra transversalmente con $x(S)$ donde $x(S)$ es la inmersión.
El caso mas simple es, si la inmersión es una esfera donde el plano la divide en dos casquetes esféricos cuyo borde común es una semiesfera y que serán dos semiesferas si el plano pasa por el centro de la esfera.

Nuestro objetivo es estudiar las propiedades de la inmersión y los problemas relacionados con el comportamiento de su área y volumen. Los principales resultados son obtenidos por medio de las desigualdades de la altura, la curvatura, área y volumen que la inmersión debe satisfacer.

Capítulo 1

Conceptos Preliminares

En este capítulo se establecen algunas definiciones y notaciones básicas, necesarias para la comprensión de este trabajo.

1.1. Teoría de Curvas

Definición 1. *Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo. una curva (parametrizada) en $\mathbb{R}^n$ es una función $c : I \to \mathbb{R}^n$ diferenciable. Diremos que c es una curva regular si $\dot{c}(t) \neq 0$ para todo $t \in I$.*

Definición 2. *Sea $c : I \to \mathbb{R}^n$ una curva. La longitud de c se define por*

$$L(c) = \int_I |\dot{c}(t)| dt$$

.

Definición 3. *Un campo vectorial a lo largo de $c : I \to \mathbb{R}^n$ es una aplicación $X : I \to \mathbb{TR}^n$ diferenciable, con $X(t) \in \mathbb{TR}^n$, donde $\mathbb{TR}^n$ es el campo vectorial tangente sobre c.*

Definición 4. *Un n-marco móvil sobre una curva $c : I \to \mathbb{R}^n$ es una colección de n campos vectoriales a lo largo de c, $e_i : I \to \mathbb{R}^n$ tal que $\langle e_i(t), e_j(t)\rangle = \delta_{ij}$ para todo $t \in I$.*

Definición 5. *Diremos que un marco móvil $(e_1, \ldots, e_n)$ sobre una curva c es un n-marco de Frenet si la k-ésima derivada de c, $c^k(t)$ esta en el subespacio generado por los k vectores $e_1(t), \ldots, e_k(t)$ para $1 \leq k \leq n-1$.*

Teorema 1. *Sea $c : I \to \mathbb{R}^n$ una curva tal que $\dot{c}_1(t), \ldots, c^k(t)$ son linealmente independientes. Entonces existe un único n-marco móvil de frenet $(e_1, \ldots, e_n)$ tal que*

i. $e_1(t), \ldots, e_k(t)$ *y* $\dot{c}(t), \ldots, c^k(t)$ *tienen la misma orientación para* $1 \leq k \leq n-1$.

ii. $(e_1(t), \ldots, e_n(t))$ *tienen la misma orientación que la base canónica de* $\mathbb{R}^n$.

Definición 6. *Sea $c : I \to \mathbb{R}^n$ una curva tal que $\dot{c}, \ldots, c^{n-1}$ son linealmente dependientes. La función*

$$\mathbf{k}_i(t) = \frac{w_{i,i+1}(t)}{|\dot{c}(t)|}$$

se denomina la i-ésima curvatura de c en $t \in I$, $1 \leq i \leq n-1$. donde los $w_{i,i+1}$ son los coeficientes de frenet. Esto es $w_{i,i+1} = \langle \dot{e}_i(t), e_{i+1}(t) \rangle$

Teorema 2. *Curvas con las mismas curvaturas y misma rapidez ($|\dot{c}(t)|$) son congruentes, esto es, las curvas determinan completamente la curva salvo por su posición en el espacio.*

Teorema 3. *las ecuaciones de frenet forman un sistema de n ecuaciones diferenciables de primer orden en $e_1, \ldots, e_n$ tal que dadas $n-1$ funciones arbitrarias $k_1, \ldots, k_{n-1}$ existen soluciones $e_1, \ldots, e_n$ de las ecuaciones de frenet.*

Definición 7. *Denominaremos curva plana a una curva $c : I \to \mathbb{R}^2$ tal que $\dot{c}\ (t) \neq 0$ para todo $t \in I$.*
Una curva plana admite 2-marco canónico de frenet

$$e_1(t) = \frac{\dot{c}(t)}{|\dot{c}(t)|}$$

y

$$e_2(t) = \frac{\ddot{c}\ (t)}{|\ \ddot{c}\ (t)|} = \ddot{c}\ (t) = R(e_1(t))$$

donde R es una rotación de $+\frac{\pi}{2}$.

Si $\mathbf{k} > 0$ la curva se dobla en la dirección de e_2 y si $\mathbf{k} < 0$ se dobla en dirección opuesta a e_2.

Proposición 1. *Sea c una curva plana. Entonces c es un arco de circulo de radio r si y solo si $|\mathbf{k}(t)| = \frac{1}{r} =$ constante > 0 para todo t.*

Una curva en el espacio es una curva $c : I \to \mathbb{R}^3$ tal que $\dot{c}(t), \ddot{c}\ (t)$ son linealmente independientes. por el **teorema 1**, existe el 3-marco canónico de frenet (e_1, e_2, e_3) que es formado por el vector tangente, el vector normal y el vector binormal, estos son

$$\mathbf{t} = e_1(t) = \frac{\dot{c}(t)}{|\dot{c}(t)|}$$

$$\mathbf{N} = e_2(t) = \frac{\ddot{c}\ (t)}{|\ \ddot{c}\ (t)|}$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \wedge \mathbf{N} = e_3(t) = e_1(t) \wedge e_2(t) = \frac{\dot{c}(t) \wedge \ddot{c}\ (t)}{|\ \ddot{c}\ (t)|}$$

respectivamente.
Existen dos curvaturas $\mathbf{k_1} = \mathbf{k}(t) > 0$ que llamaremos curvatura de c y $\mathbf{k_2} = \tau(t)$ que llamaremos torsión de c, definidas por

$$\mathbf{k}(t) = \frac{\langle \dot{e}_1(t), e_2(t) \rangle}{|\dot{c}(t)|}$$

y

$$\tau(t) = -\frac{\langle \dot{e}_2(t), e_3(t) \rangle}{|\dot{c}(t)|} = \frac{\langle \dot{e}_3(t), e_2(t) \rangle}{|\dot{c}(t)|}$$

Definición 8. *Denominaremos plano osculador, plano normal y plano rectificante de c en $t = t_0$ a los subespacios generados por los vectores*

$$(e_1(t_0), e_2(t_0))$$
$$(e_2(t_0), e_3(t_0))$$
$$(e_1(t_0), e_3(t_0))$$

respectivamente (fig.1.1).

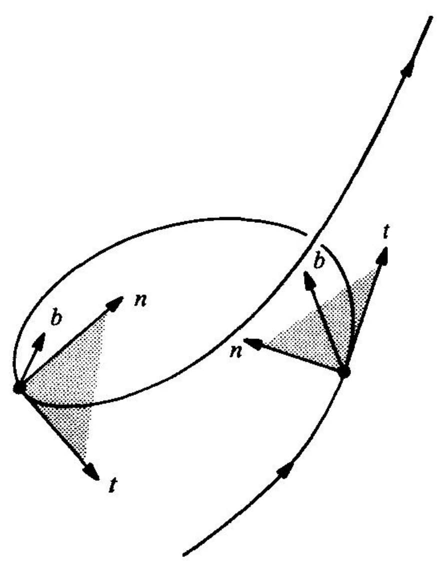

Figura 1.1: plano osculador

1.2. Teoría de Superficies

Definición 9. *Un subconjunto S de $\mathbb{R}^3$ es una superficie regular, si para cada punto $p \in S$, existe una vecindad V de p en $\mathbb{R}^3$, y una aplicación $\mathbf{x} : U \to V \cap S$ de un conjunto abierto U de $\mathbb{R}^2$ a $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$ tal que (fig.1.2)*

i. $\mathbf{x}$ *es un homeomorfismo diferenciable.*

ii. La diferencial $(d\mathbf{x})_q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *es inyectiva para todo* $q \in U$.

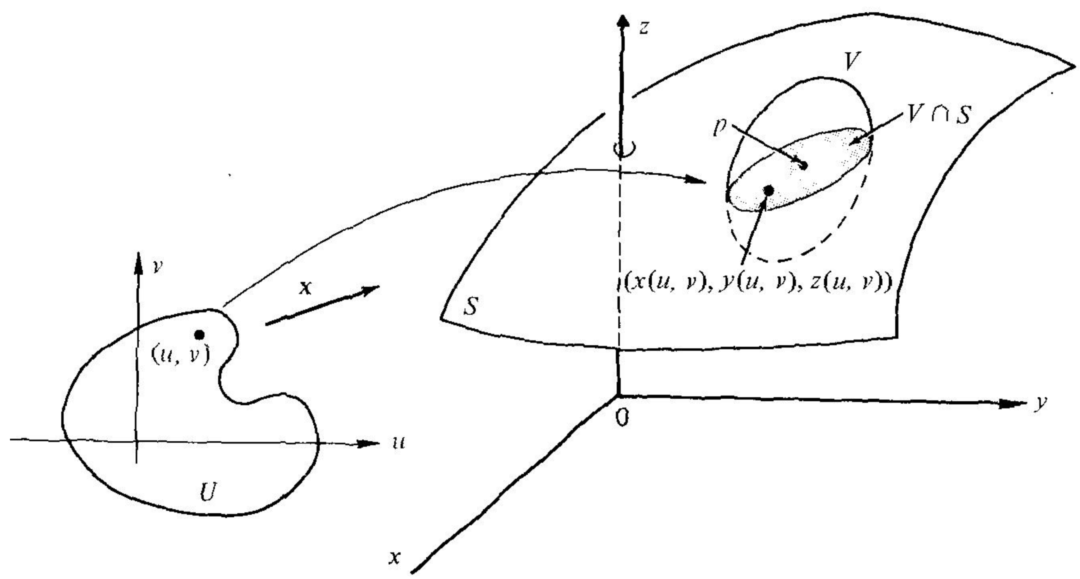

Figura 1.2: superficie regular

Definición 10. *Una superficie parametrizada es una función $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \to S \subset \mathbb{R}^3$, donde U es algún dominio en $\mathbb{R}^2$. La superficie S correspondiente a la función $\mathbf{x}$ es su imagen: $S = \mathbf{x}(S)$. Podemos escribir*

$$(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)).$$

Si $\mathbf{x}$ es diferenciable o es de clase C^1, llamamos a S superficie diferenciable o C^1.

Definición 11. *Una curva sobre una superficie S es una aplicación $c : I \subset \mathbb{R} \to S \subset \mathbb{R}^3$ diferenciable. Esto significa que si $c(t) = (x(t), y(t), z(t))$ entonces las funciones x, y, z tienen derivadas continuas de todos los órdenes.*

Definición 12. *Sea S una superficie $p \in S$, $\mathbf{x} : U \to S$ una parametrización de una vecindad de $p = \mathbf{x}(u)$, $u \in U$. Denominamos plano tangente a S en p, denotado TS_p al subespacio vectorial $TS_p = d\mathbf{x}_p(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3$. Los elementos de TS_p se denominan vectores tangentes a S en p.*

Sea $\mathbf{x} : U \to S$ una parametrización de una vecindad de p y el plano tangente a S que es generado por $\mathbf{x}_u$ y $\mathbf{x}_v$. y su vector tangente $d\mathbf{x} : \mathbf{x}_u du + \mathbf{x}_v dv$, entonces tenemos.

Definición 13. *Sea S una superficie $p \in S$, la aplicación*

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_p = \langle d\mathbf{x}, d\mathbf{x} \rangle &= \langle \mathbf{x}_u du + \mathbf{x}_v dv, \mathbf{x}_u du + \mathbf{x}_v dv \rangle \\ &= (\mathbf{x}_u.\mathbf{x}_u)du^2 + 2(\mathbf{x}_v.\mathbf{x}_u)dudv + (\mathbf{x}_v.\mathbf{x}_v)dv^2 \\ &= Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \end{aligned}$$

Donde $E = (\mathbf{x}_u.\mathbf{x}_u)$, $F = (\mathbf{x}_v.\mathbf{x}_u)$, $G = (\mathbf{x}_v.\mathbf{x}_v)$
La función $\mathbf{I}_p = \langle d\mathbf{x}, d\mathbf{x} \rangle$ es llamada la primera forma fundamental de S o métrica riemanniana de S en p.
Donde E,F y G son los coeficientes fundamentales. $\mathbf{I}_p$ es una forma bilineal simétrica definida positiva.

Definición 14. *Sea $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u(t), v(t))$, $a < t < b$ un arco regular sobre $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ y definimos su longitud por la integral*

$$\begin{aligned} \mathbf{s} &= \int_a^b \left| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right| dt = \int_a^b \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right)^{1/2} dt \\ &= \int_a^b \left[\left(\mathbf{x}_u \frac{du}{dt} + \mathbf{x}_v \frac{dv}{dt} \right) \cdot \left(\mathbf{x}_u \frac{du}{dt} + \mathbf{x}_v \frac{dv}{dt} \right) \right]^{1/2} dt \\ &= \int_a^b \left[E \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2F \left(\frac{du}{dt} \cdot \frac{dv}{dt} \right) + G \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 \right]^{1/2} dt \end{aligned}$$

Asi la longitud de arco de la superficie es la integral de la raiz cuadrada de la primera forma fundamental.

Definición 15. *Sea $\mathbf{x} : U \to S$ una parametrización alrededor de p, $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ esta sobre la superficie de clase $C^{\geq 2}$ entonces para cada punto de $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ existe un vector normal unitario $\mathbf{N} : U \to \mathbb{R}^3$ dado por*

$$\mathbf{N}(p) = \mathbf{N}(u, v) = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|}$$

donde $\mathbf{N}(p)$ es ortogonal a S en p. Es una función de u y v de clase C^1 con diferencial $d\mathbf{N} = \mathbf{N}_u du + \mathbf{N}_v dv$.

Definición 16. *Sea S una superficie $p \in S$, la aplicación*

$$\begin{aligned}\mathbf{II}_p = \langle -d\mathbf{x}, d\mathbf{N}\rangle &= \langle -(\mathbf{x}_u du + \mathbf{x}_v dv), \mathbf{N}_u du + \mathbf{N}_v dv\rangle \\ &= (-\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{N}_u)du^2 - (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{N}_v + \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{N}_u)dudv - (\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{N}_v)dv^2 \\ &= Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2\end{aligned}$$

donde $L = (-\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{N}_u)$, $M = -\dfrac{1}{2}(\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{N}_v + \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{N}_u)$, $N = (-\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{N}_v)$
La función $\mathbf{II}_p = \langle -d\mathbf{x}, d\mathbf{N}\rangle$ es llamada la segunda forma fundamental de $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$. Donde L,M y N son los coeficientes fundamentales. $\mathbf{II}_p$ es una forma bilineal simétrica.

En la teoría de curvas en el espacio, las ecuaciones de frenet expresan la variación de los campos e_1, e_2, e_3, el triedro de frenet, en términos de ellos mismos. Existen ecuaciones análogas para una superficie, sabemos que la tripla $(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{N})$ forman una base de $\mathbb{R}^3$ (no necesariamente ortonormal) tal tripla se denomina Triedro de Gauss.

Definición 17. *Sea $c : I \to S$ una curva sobre una superficie S, p un punto sobre la superficie de clase $C^{\geq 2}$, $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ contiene a p, y $\mathbf{x} = (u(t), v(t))$ una curva regular c de clase C^2 en p, el vector curvatura normal a c en p denotado por $\mathbf{k}_n$ es la proyección del vector curvatura k de c en p sobre la normal $\mathbf{N}$ a p, esto es*

$$\mathbf{k}_n = (k \cdot \mathbf{N})\mathbf{N}$$

la componente de $\mathbf{k}_n$ en la dirección de $\mathbf{N}$ es llamada la curvatura normal de c en p y es denotada $\mathbf{k}_n$ (fig.1.3) esto es

$$\mathbf{k}_n = \mathbf{k} \cdot \mathbf{N}$$

El vector tangente unitario a c en p es $\mathbf{t} = \dfrac{d\mathbf{x}}{ds} = \dfrac{d\mathbf{x}}{dt}\Big/\Big|\dfrac{d\mathbf{x}}{dt}\Big|$ y el vector curvatura es

$\mathbf{k} = \dfrac{d\mathbf{t}}{ds} = \dfrac{d\mathbf{t}}{dt}\Big/\Big|\dfrac{d\mathbf{x}}{dt}\Big|$ ahora por el hecho de que como $\mathbf{t}$ es perpendicular a $\mathbf{N}$ entonces

tenemos $0 = \dfrac{d}{dt}(\mathbf{t} \cdot \mathbf{N}) = \dfrac{d\mathbf{t}}{dt} \cdot \mathbf{N} + \mathbf{t}\dfrac{d\mathbf{N}}{dt}$
así

$$\begin{aligned}\mathbf{k}_n &= \mathbf{k} \cdot \mathbf{N} = \frac{d\mathbf{t}}{dt} \cdot \mathbf{N}\Big/\Big|\frac{d\mathbf{x}}{dt}\Big| = -\mathbf{t} \cdot \frac{d\mathbf{N}}{dt}\Big/\Big|\frac{d\mathbf{x}}{dt}\Big| = -\frac{d\mathbf{x}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{N}}{dt}\Big/\Big|\frac{d\mathbf{x}}{dt}\Big|^2 \\ &= -\left(\mathbf{x}_u\frac{du}{dt} + \mathbf{x}_v\frac{dv}{dt}\right) \cdot \left(\mathbf{N}_u\frac{du}{dt} + \mathbf{N}_v\frac{dv}{dt}\right) \Bigg/ \left(\mathbf{x}_u\frac{du}{dt} + \mathbf{x}_v\frac{dv}{dt}\right) \cdot \left(\mathbf{x}_u\frac{du}{dt} + \mathbf{x}_v\frac{dv}{dt}\right)\end{aligned}$$

luego

$$\mathbf{k}_n = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}$$

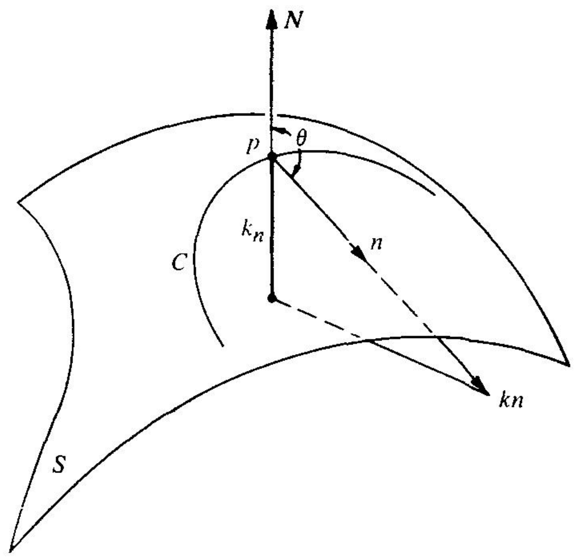

Figura 1.3: curvatura normal

Vemos que la curvatura normal es el cociente entre la segunda y primera forma fundamental.

Supongamos que $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ es una parametrización arbitraria de la superficie que contiene a p entonces tenemos

Teorema 4. *Un numero* $\mathbf{k}$ *es una curvatura principal en* p *en la dirección* $du : dv$ *si y solo si* $\mathbf{k}$*,* du *y* dv *satisfacen*

$$(L - \mathbf{k}E)du + (M - \mathbf{k}F)dv = 0$$

$$(M - \mathbf{k}F)du + (N - \mathbf{k}G)dv = 0$$

donde $du^2 + dv^2 \neq 0$.

Un sistema de ecuaciones y tiene solución no trivial du, dv si y solo si

$$det \begin{pmatrix} L - \mathbf{k}E & M - \mathbf{k}F \\ M - \mathbf{k}F & N - \mathbf{k}G \end{pmatrix} = 0$$

o podemos escribir

$$(EG - F^2)\mathbf{k}^2 - (EN + GL - 2FM)\mathbf{k} + (LN - M^2) = 0$$

donde el discriminante de la ecuación es mayor o igual a cero. Así pues, la ecuación tiene dos raíces reales distintas $\mathbf{k}_1$ y $\mathbf{k}_2$, las curvaturas principales en un punto no umbilical, o una sola raíz $\mathbf{k}$ real con multiplicidad dos, la curvatura en un punto umbilical. Así pues, tenemos

Teorema 5. *Un numero* $\mathbf{k}$ *es una curvatura principal si y solo si* $\mathbf{k}$ *es solución de la ecuación*

$$(EG - F^2)\mathbf{k}^2 - (EN + GL - 2FM)\mathbf{k} + (LN + M^2) = 0$$

Teorema 6. *Un punto en* S *es un punto umbilical si y solo si los coeficientes fundamentales son proporcionales, en el caso de la curvatura normal*

$$\mathbf{k} = \frac{L}{E} = \frac{M}{F} = \frac{N}{G}$$

Ahora si dividimos la ecuación

$$(EG - F^2)\mathbf{k}^2 - (EN + GL - 2FM)\mathbf{k} + (LN + M^2) = 0$$

por $EG - F^2$ la podemos escribir de la forma

$$\mathbf{k}^2 - 2H\mathbf{k} + K = 0$$

donde

$$H = \frac{1}{2}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) = \frac{EN + GL - 2FM}{2(EG - F^2)}$$

es la curvatura media que se define como el promedio de las curvaturas principales y

$$K = \mathbf{k}_1\mathbf{k}_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

es la curvatura Gaussiana que se define como el producto de las curvaturas principales.

Ejemplo 1. *Sean* (u, v) *coordenadas de la inmersión y* $\mathbf{N}$ *es su función normal unitaria* $\mathbf{N}_u$ *y* $\mathbf{N}_v$ *son ortogonales donde*
$\mathbf{N}_u = ax_u + bx_v$ *y* $\mathbf{N}_v = cx_u + dx_v$*,* a, b, c, d *están bien definidos, así*

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_u \wedge \mathbf{N}_v = & \quad ax_u + bx_v \wedge cx_u + dx_v \\ = & \quad (ad - bc)(x_u \wedge x_v) \end{aligned}$$

De esto $(ad - bc) = det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = K$
luego

$$\mathbf{N}_u \wedge \mathbf{N}_v = K(x_u \wedge x_v)$$

Teorema 7. *Un punto sobre una superficie* S *es elíptico si y solo si* $K > 0$*; hiperbólico si y solo si* $K < 0$*; parabólico o plano si y solo si* $K = 0$*.*

Teorema 8. *Una dirección* $du : dv$ *es una dirección principal a* p *si y solo si* du *y* dv *satisfacen la ecuación*

$$(EM - LF)du^2 + (EN + GL)dudv + (FN + MG)dv^2 = 0$$

Definición 18. *Una curva c sobre una superficie S, cuya tangente en cada punto es a lo largo de una dirección principal se llama linea de curvatura.*

Definición 19. *Sea c una curva sobre una superficie S tal que $\dot{c}$, $\ddot{c}$ son linealmente independientes. Sea (e_1, e_2, e_3) el triedro canónico de frenet, $\mathbf{k}(t)$ la curvatura y $\mathbf{N}(t) = \mathbf{N}(c(t))$ la normal de S a lo largo de c. denotamos $\varphi(t)$ el ángulo entre e_3 y $\mathbf{N}(t)$. La función*

$$\mathbf{k}_g = \mathbf{k}(t) \langle \mathbf{N}(t), e_3(t) \rangle = \mathbf{k}(t) cos\varphi(t)$$

Se denomina curvatura geodésica de c en t, es decir, $\mathbf{k}_g$ es la proyección del vector e_3 sobre $\mathbf{N}$.

Definición 20. *Sea w un vector diferenciable en un conjunto abierto $U \subset S$ y $p \in U$. Sea $y \in T_p(S)$. consideramos una curva parametrizada*

$$\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to U,$$

con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = y$, y sea $w(t)$, $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ la restricción del vector w a la curva α. El vector obtenido por la proyección ortogonal de $(dw/dt)(0)$ sobre el plano $T_p(S)$ es llamada la derivada covariante en p del vector w al vector y. esta derivada covariante es denotada por Dw/dt,(fig.1.4).

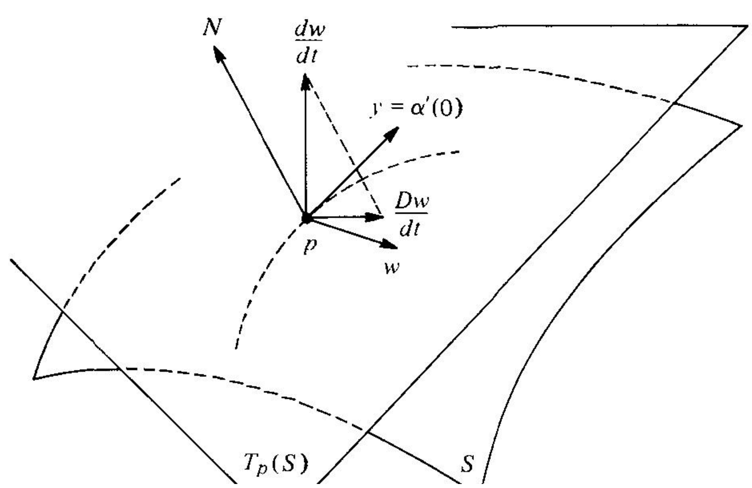

Figura 1.4: La Derivada Covariante

Si w es un campo vectorial a lo largo de una curva α sobre S el vector dw/dt no necesariamente cae en $TS_{\alpha(t)}$ y se interpreta desde un punto de vista externo a la superficie, como la variación del campo a lo largo de α. La derivada covariante de w es la variación de w vista desde la superficie misma, y se mide por su componente tangencial.

Proposición 2. *La derivada covariante de* $\mathbf{t}$ *a lo largo de una curva se puede expresar de la siguiente manera*

$$\mathbf{t}' = \mathbf{k}_g(\mathbf{N} \wedge \mathbf{t}) + \mathbf{k}_n\mathbf{N}$$

donde $\mathbf{k}_g$ *y* $\mathbf{k}_n$ *son la curvatura geodésica y curvatura normal de la curva respectivamente.*

Definición 21. *Una curva plana* $c : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ *es cerrada si* $c(a) = c(b)$ *y* $c^{(k)}(a) = c^{(k)}(b)$ *para todo* $k > 0$*. Diremos que* c *es simple si* $c|_{[a,b)}$ *es inyectiva.* c *es una curva de Jordan si es una curva cerrada.*

Definición 22. *Sea* $c : [0, L] \to \mathbb{R}^2$ *una curva cerrada de rapidez unitaria, donde* $[0, L] = [a, b]$ *y* L *es la longitud de* c*. Denominamos índice de rotación de* c *al entero*

$$i(c) = \frac{\theta(L) - \theta(0)}{2\pi}$$

donde θ *es una función angular continua y diferenciable a trozos* $\theta : [a, b] \to \mathbb{R}$ *tal que* $e_1(t) = (cos(t), sen(t))$

Si $c(t)$ es una curva plana de rapidez unitaria y $\mathbf{k}(t)$ es su curvatura, entonces $\theta'(t) = \mathbf{k}(t)$ por lo que

$$\theta(L) - \theta(0) = \int_0^L \mathbf{k}(t)dt$$

La integral $\int_0^L \mathbf{k}(t)dt$ se denomina curvatura total de c. Si $c(t)$ es cerrada entonces la curvatura total es 2π veces el índice de rotación, esto es,

$$\int_0^L \mathbf{k}(t)dt = 2\pi i(c)$$

Teorema 9 (Hopf)**.** *Si* $c : [0, L] \to \mathbb{R}^2$ *es una curva cerrada simple, entonces* $i_c = \pm 1$ *el signo depende de la orientación de* c*.*

Se dice que una superficie es orientable si esta admite un campo diferenciable de vectores normales unitarios sobre toda la superficie; la elección de tal campo $\mathbf{N}$ es llamada una orientación de S.

Definición 23. *Sea* $S \subset \mathbb{R}^3$ *una superficie con una orientación* $\mathbf{N}$*, la aplicación* $\mathbf{N} : S \to \mathbb{R}^3$ *toma sus valores en la esfera unidad*

$$S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1\} \subset \mathbb{R}^3$$

la aplicación $\mathbf{N} : S \to S^2$ *así definida, es llamada la aplicación de Gauss de* S *(fig.1.4).*

De esta manera, las superficies orientables son aquellas para las cuales la aplicación normal de Gauss está globalmente definida.

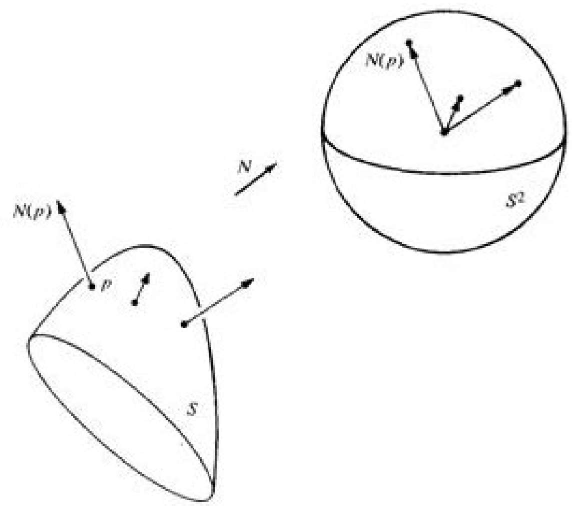

Figura 1.5: La aplicación de Gauss

Definición 24. *Sea S una superficie compacta (cerrada y acotada) orientada. Una descomposición poligonal de S es una familia finita de regiones simples P_i, $1 \leq i \leq n$ que llamaremos polígonos, tal que*

i. $\bigcup_{i=1}^{n} P_i = S$

ii. *Si $P_i \cap P_j \neq \phi$, entonces $P_i \cap P_j$ es una arista común de P_i y P_j ó un vértice común de P_i y P_j.*

Denotamos por V el número de vértices, A el número de aristas y C el número de caras de una descomposición poligonal dada.

Definición 25. *El entero*

$$\chi(S) = V - A + C$$

se denomina característica de Euler de la descomposición poligonal.

Teorema 10 (Gauss-Bonnet, versión Global)**.** *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie compacta orientable, entonces.*

$$\int_S K dA + \int_\Gamma \mathbf{k}_g ds = 2\pi\chi(S).$$

Donde $\chi(S) \in \mathbb{Z}$ denota la característica de de Euler de S, que que es invariante bajo homeomorfismo y en particular es independiente del encaje de la superficie.

Ejemplo 2. *En un disco de radio r, en $\mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$, $K = 0$ y $\mathbf{k}_g = 1/r$. Aplicando el teorema de Gauss-Bonnet versión local, tenemos*

$$\int K dA + \int \mathbf{k}_g ds = 2\pi$$

de esto

$$\int \frac{1}{r} ds = 2\pi$$

esto es

$$\frac{1}{r}\int ds = 2\pi$$

así

$$s = 2\pi r$$

que es la longitud del diámetro del disco.

1.3. Formas Diferenciales

Las formas diferenciales son, en cierto sentido, generalizaciones de las funciones con valores reales en un conjunto abierto U. Interpretemos las k-formas diferenciales (para $k > 1$), no como funciones definidas en puntos de U, sino como funciones definidas en objetos geométricos tales como curvas y superficies, las cuales tienen una buena orientación.

Definición 26. *Sea U un conjunto abierto en $\mathbb{R}^3$. Una, 0-forma en U es una función con valores reales $f : U \to \mathbb{R}$. Cuando diferenciamos f una vez, se supone que es de clase C^1, y de clase C^2 cuando la diferenciamos dos veces.*

Definición 27. *Las 1-formas básicas son las expresiones dx, dy y dz. En este momento las consideramos sólo símbolos formales. Una, 1-forma ω en un conjunto abierto U es una combinación lineal formal*

$$\omega = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz,$$

o simplemente

$$\omega = Pdx + Qdy + Rdz,$$

donde P, Q y R son funciones con valores reales, definidas en U. Por la expresión Pdx entendemos la 1-forma $Pdx+0\cdot dy+0\cdot dz$ y de manera similar para Qdy y Rdz. Además el orden de Pdx, Qdy y Rdz no tiene importancia, de modo que

$$Pdx + Qdy + Rdz = Rdz + Pdx + Qdy, \ \ etc.$$

Dadas dos 1-formas $\omega_1 = P_1dx + Q_1dy + R_1dz$ y $\omega_2 = P_2dx + Q_2dy + R_2dz$, podemos sumarlas para obtener una nueva 1-forma $\omega_1 + \omega_2$, definida por

$$\omega_1\omega_2 = (P_1 + P_2)dx + (Q_1 + Q_2)dy + (R_1 + R_2)dz,$$

y dada una 0-forma f, podemos formar la $1 - forma$ $f\omega_1$ definida por

$$f\omega_1 = (fP_1)dx + (fQ_1)dy + (fR_1)dz.$$

Definición 28. *Las 2-formas básicas son las expresiones formales* $dx\ dy$, $dydz$ *y* $dzdx$. *Estas expresiones deben pensarse como los productos de* dx *y* dy, dy *y* dz, *y* dz *y* dx. *Una 2-forma* η *en* U *es una expresión formal*

$$\eta = Fdxdy + Gdydz + Hdzdx,$$

donde F, G *y* H *son funciones reales definidas en* U. *El orden de* $Fdxdy$, $G\ dydz$ *y* $H\ dzdx$ *no es importante. Por analogía con las 0-formas y las 1-formas, podemos sumar dos 2-formas*

$$\eta_i = F_i dxdy + G_i dydz + H_i dzdx,$$

$i = 1$ *y* 2, *para obtener una nueva 2-forma,*

$$\eta_1 + \eta_2 = (F_1 + F_2)dzdy + (G_1 + G_2)dydz + (H_1 + H_2)dzdx.$$

De manera análoga, si f *es una 0-forma y si* η *es una 2-forma, podemos tomar el producto*

$$f\eta = (fF)dxdy + (fG)dydz + (fH)dzdx.$$

Finalmente, por la expresión $Fdxdy$ *entenderemos la 2-forma* $Fdxdy + 0 \cdot dydz + 0 \cdot dzdx$.

Definición 29. *Una 3-forma básica es una expresión formal* $dxdydz$. *Una 3-forma* ν *en un conjunto abierto* $U \subset \mathbb{R}^3$ *es una expresión de la forma,* $\nu = f(x, y, z)dxdydz$, *donde* f *es una. función con valores reales definida en* U.

Podemos sumas dos 3-formas y multiplicarlas por 0-formas de la manera obvia.

Ejemplo 3. *Las expresiones*

$$\eta_1 = x^2 dxdy + y^3 xdydz + senzydzdx$$

y

$$\eta_2 = ydydz$$

son 2-formas. Su suma es

$$\eta_1 + \eta_2 = x^2 dxdy + (y^3 x + y)dydz + senzydzdx.$$

Si $f(z, y, z) = xy$, *entonces*

$$f\eta_2 = xy^2 dydz$$

Si ω es una k-forma y η es una l-forma en U, $0 \leq k + l \leq 3$, existe un producto llamado producto exterior $\omega \wedge \eta$ de ω y η que es una $k + l$-forma en U. El producto exterior satisface las leyes siguientes:

i. Para cada k existe una k-forma 0, cero, con la propiedad de que $0 + \omega = \omega$ para toda k-forma ω y $0 \wedge \eta = 0$ para toda l-forma η si $0 \leq k + l \leq 3$.

ii. (Distributividad) Si f es una 0-forma, entonces

$$(f\omega_1 + \omega_2) \wedge \eta = f(\omega_1 \wedge \eta) + (\omega_2 \wedge \eta).$$

ii. (Anticonmutatividad) $\omega \wedge \eta = (-l)^{kl}(\omega \wedge \eta)$.

vi. (Asociatividad) Si ω_1, ω_2 y ω_3 son k_1, k_2 y k_3 formas, respectivamente, con $k_1 + k_2 + k_3 \leq 3$, entonces

$$\omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3) = (\omega_1 \wedge (\omega_2) \wedge \omega_3)$$

v. (Homogeneidad respecto a funciones) Si f es una 0-forma, entonces

$$\omega \wedge (f\eta) = (f\omega) \wedge \eta = f(\omega \wedge \eta).$$

Nótese que las reglas (ii) y (iii) en realidad implican la regla (v).

vi. Se cumplen las siguientes reglas de multiplicación para 1-formas:

$$dx \wedge dy = dxdy$$

$$dy \wedge dx = -dxdy = (-1)(dx \wedge dy)$$
$$dy \wedge dz = dydz = (-1)(dx \wedge dy)$$
$$dz \wedge dx = dzdx = (-1)(dx \wedge dz)$$
$$dx \wedge dx = 0, dy \wedge dy = 0, dz \wedge dz = 0$$
$$dx \wedge (dy \wedge dz) = (dx \wedge dy) \wedge dz = dxdydz.$$

vii. Si f es una 0-forma y ω es cualquier k-forma, entonces $f \wedge \omega = f\omega$. Usando las leyes (i) a la (vii), podemos hallar ahora un producto único de cualquier l-forma η y cualquier k-forma ω, si $0 \leq k + l \leq 3$.

Ejemplo 4. *Para mostrar que $dx \wedge dydz = dxdydz$.*
Por la regla (vi), $dydz = dy \wedge dz$. Por lo tanto,

$$dx \wedge dydz = dx \wedge (dy \wedge dz) = dxdydz.$$

Un importante paso en el desarrollo de esta teoría es mostrar cómo diferenciar formas. La derivada de una k-forma es una $(k + l)$-forma si $k \leq 3$ y la derivada de una 3-forma siempre es cero. Si ω es una k-forma, denotaremos la derivada de ω por $d\omega$. La operación d tiene las propiedades siguientes:

a. Si $f : U \to \mathbb{R}$ es un 0-forma, entonces

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz.$$

b. (Linealidad) Si ω_1 y ω_2 son k-formas, entonces

$$d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 - d\omega_2$$

c. Si ω es una k-forma y η es una l-forma,

$$d(\omega \wedge \eta) = (d\omega \wedge \eta) + (-1)^k(\omega \wedge d\eta)$$

d. $d(d\omega) = 0$ y $d(dx) = d(dy) = d(dz) = 0$ o simplemente, $d^2 = 0$.

Las propiedades a. a d. proporcionan información suficiente para permitirnos diferenciar de manera única cualquier forma.

Teorema 11 (Teorema de Stokes)**.** *Sea S una superficie orientada en $\mathbb{R}$ con una frontera formada por una curva cerrada simple ∂S orientada según la frontera de S Suponer que ω es una 1-forma en algún conjunto abierto U que contiene a S. Entonces*

$$\int_{\partial S} \omega = \int_S d\omega$$

1.4. Teoría Riemanniana

Definición 30. *una variedad diferenciable de dimensión n es un conjunto M y una familia de aplicaciones inyectivas $\mathbf{x}_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \to M$ de conjuntos abiertos U_α de $\mathbb{R}^n$ a M tal que (fig.1.6)*

i. $\bigcup_\alpha \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) = M$

ii. para cualquier par α, β con $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) \cap \mathbf{x}_\beta(U_\beta) = W \neq \phi$, el conjunto $\mathbf{x}_\alpha^{-1}(W)$ y $\mathbf{x}_\beta^{-1}(W)$ son conjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$ y las aplicaciones $\mathbf{x}_\beta^{-1} \circ \mathbf{x}_\alpha$ son diferenciables

iii. La familia $\{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)\}$ es relativo máximal a las condiciones i. y ii.

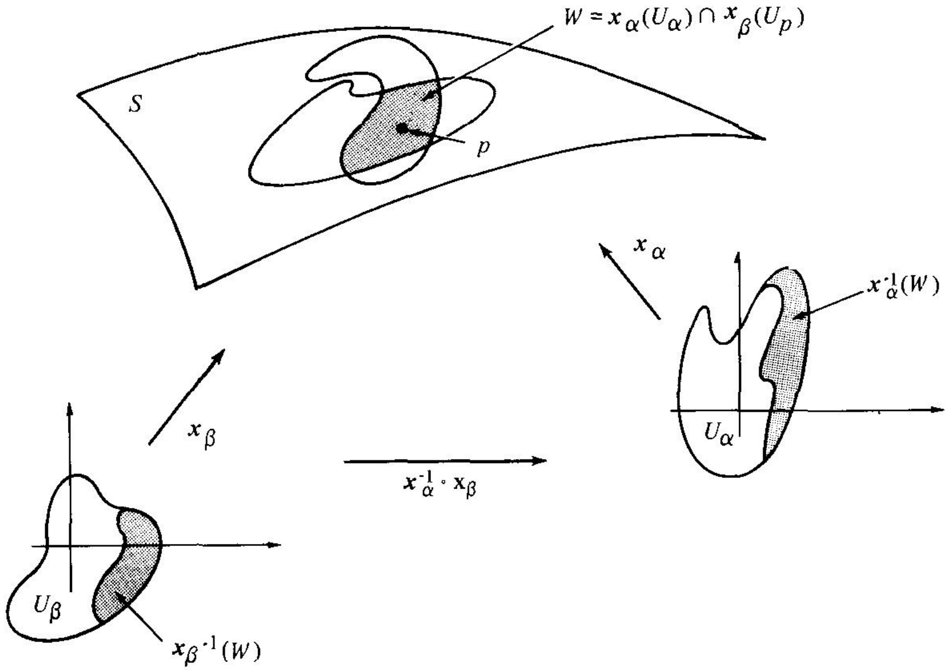

Figura 1.6: variedad diferenciable

Definición 31. *Sea M_1^n y M_2^m variedades diferenciables. Una aplicación $\varphi : M_1 \to M_2$ es diferenciable en $p \in M_1$ si dada una parametrización $\mathbf{y} : V \subset \mathbb{R}^m \to M_2$ a $\varphi(p)$ existe una parametrización $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \to M_1$ a p tal que $\varphi(\mathbf{x}(U)) \subset \mathbf{y}(V)$ y la aplicación*

$$\mathbf{y}^{-1} \circ \varphi \circ \mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

es diferenciable a $\mathbf{x}^{-1}(p)$. φ es diferenciable sobre un conjunto abierto de M_1 si es diferenciable en todos los puntos de este conjunto abierto.

Proposición 3. *. Sea M_1 y M_2 variedades diferenciables y sea $\varphi : M_1 \to M_2$ una aplicación diferenciable. Para todo $p \in M_1$ y para cada $v \in T_pM_1$, se escoge una curva diferencial $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon)$ con $\alpha'(0) = v$ tomando $\beta = \varphi \circ \alpha$. La aplicación $d\varphi_p : T_pM_1 \to T_{\varphi(p)}M_2$ dada por $d\varphi_p(v) = \beta'(0)$ es una aplicación lineal que no depende de la escogencia de α.*

Definición 32. *La aplicación lineal $d\varphi_p$ definida en la* ***proposición 3*** *es llamada la diferencial de φ a p.*

Definición 33. *Sea M_1 y M_2 variedades diferenciables. Una aplicación $\varphi : M_1 \to M_2$ es un difeomorfismo si este es diferenciable, biyectivo y la inversa φ^{-1} es diferenciable. φ se dice ser un difeomorfismo local a $p \in M$ si existe una vecindad U de p y V de $\varphi(p)$ tal que $\varphi : U \to V$ es un difeomorfismo.*

Definición 34. *Sea M_1 y M_2 variedades diferenciables. Una aplicación diferenciable $\varphi : M \to N$ se dice una inmersión si $d\varphi_p : T_pM \to T_{\varphi(p)}N$ es inyectiva para todo $p \in M$. Si además φ es un homeomorfismo en $\varphi(M) \subset N$, donde $\varphi(M)$ tiene un subespacio topológico inducido desde N, decimos que φ es un encaje. Si $M \subset N$ y la inclusión $i : M \subset N$ es un encaje, decimos que M es una subvariedad de N.*

la generalización natural de la noción de una superficie regular en $\mathbb{R}^3$ es la idea de una superficie de dimensión k en $\mathbb{R}^n$, $k \leq n$ Un subconjunto $M^k \subset \mathbb{R}^n$ es una superficie regular de dimensión k si para todo p en M existe una vecindad V de p en $\mathbb{R}^n$ y una aplicación $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^k \to M \cap V$ de un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^k$ a $M \cap V$ tal que:

i. $\mathbf{x}$ es un homeomorfismo diferenciable.

ii. $(d\mathbf{x})_q : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ es inyectiva para todo $q \in U$.

La definición es exactamente la misma como fue dada en la teoría de superficies para una superficie en $\mathbb{R}^3$.

Capítulo 2

Geometría de la Superficie

2.1. Desigualdades de Altura y Curvatura

El objetivo en esta sección es obtener las desigualdades de la altura y curvatura que puede satisfacer la inmersión (superficie inmersa en $\mathbb{R}^3$). Para esto consideramos a S como una superficie compacta con límite conectado, ∂S y $x : S \to \mathbb{R}^3$ una k-superficie (es decir, sin límite, es en sí mismo una esfera redonda). Las superficies en las que estamos interesados tienen frontera no vacía. Sea $\Gamma = x(\partial S)$ una curva en el plano

$$P = \{v \in R^3 | \langle v, a \rangle = 0\}$$

donde a es un vector unitario. Si Γ es una curva de Jordan, que es libre de puntos de inflexión, P se encuentra transversalmente con $x(S)$ y $x(S)$ es fibrado estrictamente por curvas de Jordan en planos paralelos a P. (en particular, x es un encaje y $x(S) \cup \Omega$ es la frontera de un cuerpo convexo, donde Ω es un dominio convexo estrictamente en P que contiene a Γ).
Si x es un encaje entonces $x(S)$ satisface la desigualdad

$$h\sqrt{K} \leq 2 \tag{2.1}$$

Donde h es la altura máxima de $x(S)$ sobre p, K es la curvatura Gaussiana definida positiva. S es orientable entonces podemos escoger un vector normal unitario a la inmersión, $\mathbf{N}$ tal que la métrica asociada con la segunda forma fundamental es definida positiva. Entonces tenemos lo siguiente.

Lema 1. *Si x es un encaje, entonces la máxima altura que $x(S)$ puede alcanzar sobre P es $2/\sqrt{K}$*

Demostración. Ver [1]. □

Esto es consecuencia de el método de reflexión de Alexandrov y el principio del máximo. Donde $x(S)$ es un grafo sobre p, a $P^+ = \{v \in \mathbb{R}^3 | \langle v, a \rangle \geq 0\}$. entonces la función altura a P satisface

$$\triangle^\sigma \left\langle \sqrt{K}x + \mathbf{N}, a \right\rangle = 2(\sqrt{K} - H) \langle \mathbf{N}, a \rangle \geq 0 \ \ sobre \ \ S$$

y

$$\left\langle \sqrt{K}x + \mathbf{N}, a \right\rangle = \langle \mathbf{N}, a \rangle \geq 0 \ \ sobre \ \ \partial S.$$

donde $\triangle^\sigma$ es el laplaciano para la métrica σ dada por la segunda forma fundamental y H la curvatura media de la inmersión. Así, $\left\langle \sqrt{K}x + \mathbf{N}, a \right\rangle \leq 0$ sobre S, esto es,

$$f = \langle x, a \rangle \leq -\frac{1}{\sqrt{K}} \langle \mathbf{N}, a \rangle \leq \frac{1}{\sqrt{K}}. \tag{2.2}$$

Lema 2. *Si $\chi(S) = 1$ y Γ es una línea de curvatura (no necesariamente plana) entonces $x(S)$ esta contenida en una esfera de radio $1/\sqrt{K}$.*

Demostración. Ver [1]. □

Esto es que x es una inmersión totalmente umbilical y por lo tanto, $x(S)$ está contenida en una esfera de radio $1/\sqrt{K}$.

Definición 35. *Sea $R \subset S$ una región acotada de una superficie regular contenida en la coordenada vecindad de la parametrización $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ el numero positivo*

$$\int \int_Q |\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v| dudv = A(R), \ \ Q = \mathbf{x}^{-1}(R),$$

es llamado el área de R.

Si suponemos que el área de $\triangle R$ es el área de un paralelogramo cuyos lados son los vectores $\triangle \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_u du$ y $\triangle \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_v dv$ asumiendo que $du > 0$ y $dv > 0$ tenemos que

$$\triangle s = |\triangle \mathbf{x}_1 \wedge \triangle \mathbf{x}_2| = |\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v| dudv = \sqrt{EG - F^2} dudv$$

Teorema 12. *Sea $\overline{A}$ el área algebraica de Γ. Entonces*

$$K \leq \frac{\pi |i(\Gamma)|}{|\overline{A}|},$$

donde $i(\Gamma)$ es el índice de rotación de Γ. Además, si la característica de Euler de S, $\chi(S)$, es 1, entonces la igualdad se cumple si y solo si $x(S)$ es una semiesfera de radio $1/\sqrt{K}$

Demostración. Sea (u, v) la coordenada local de la inmersión en una vecindad $P^+ = \{y \in \mathbb{R}^3 | \langle y, a\rangle \geq 0\}$, entonces del **ejemplo 1** tenemos

$$\mathbf{N}_u \wedge \mathbf{N}_v = K(x_u \wedge x_v)$$

como x_u, N_u son 0-formas, $dx_u, d\mathbf{N}_u$ son 1-formas de esto

$$d(dx_u \wedge x_v) = (x_u \wedge x_v) \qquad y \qquad d(d\mathbf{N} \wedge \mathbf{N}) = (\mathbf{N} \wedge \mathbf{N})$$

así,

$$K(d(dx \wedge x)) = d(d\mathbf{N} \wedge \mathbf{N}).$$

Ahora aplicando el teorema de stokes, tenemos

$$K \int_S d(dx \wedge x) = K \int_{\partial S} dx \wedge x \qquad y \qquad \int_S d(d\mathbf{N} \wedge \mathbf{N}) = \int_{\partial S} d\mathbf{N} \wedge \mathbf{N}$$

esto es

$$K \int_{\Gamma} dx \wedge x = \int_{\Gamma} d\mathbf{N} \wedge \mathbf{N}. \tag{2.3}$$

escogiendo una buena orientación del vector tangente unitario $\mathbf{t}$ a lo largo de Γ tal que $det(\mathbf{N}, \mathbf{t}, a) > 0$ sobre Γ en la vecindad P^+. Entonces de (2.3) tenemos

$$\int_{\Gamma} \langle d\mathbf{N} \wedge \mathbf{N}, a\rangle = K \int_{\Gamma} \langle dx \wedge x, a\rangle$$

como

$$\langle d\mathbf{N} \wedge \mathbf{N}, a\rangle = det(d\mathbf{N}, \mathbf{N}, a) = \mathbf{k}_n det(\mathbf{N}, \mathbf{t}, a)$$

entonces

$$\begin{aligned} 2K|\overline{A}| = \ & K \int_{\Gamma} \langle dx \wedge x, a\rangle = \int_{\Gamma} \langle d\mathbf{N} \wedge \mathbf{N}, a\rangle \\ = \ & \int_{\Gamma} \mathbf{k}_n det(\mathbf{N}, \mathbf{t}, a) \leq \int_{\Gamma} \mathbf{k}_{\Gamma} = 2\pi|i(\Gamma)| \end{aligned} \tag{2.4}$$

esto es

$$2K|\overline{A}| \leq 2\pi|i(\Gamma)|$$

así

$$K \leq \frac{\pi|i(\Gamma)|}{|\overline{A}|}$$

ya que $det(\mathbf{N}, \mathbf{t}, a) > 0$ y Γ es una curva cerrada, la curvatura total de Γ es 2π veces el indice de rotación.
luego

$$2K|\overline{A}| = K \int_{\Gamma} \langle dx \wedge x, a\rangle$$

esto es

$$\overline{A} = \frac{1}{2}\int_{\Gamma} \langle dx \wedge x, a\rangle \tag{2.5}$$

es el área algebraica de Γ y $\mathbf{k}_n$, $\mathbf{k}_\Gamma$ son la curvatura normal y curvatura de Γ, respectivamente.
Si la igualdad se cumple en la desigualdad, entonces $\mathbf{N} \wedge \mathbf{t} = a$ y $\mathbf{k}_n = \mathbf{k}_\Gamma$ a lo largo de Γ. Así

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{N}, a\rangle &= 0 \\ \langle d\mathbf{N}, \mathbf{N} \wedge \mathbf{t}\rangle &= \langle d\mathbf{N}, a\rangle = 0 \end{aligned}$$

y

$$d\mathbf{N} = -\mathbf{k}_\Gamma \mathbf{t}$$

por lo tanto, $x(\partial S)$ es una linea de curvatura. Además $\chi(S) = 1$, entonces por el **lema 2** $x(S)$ esta contenida en una esfera de radio $1/\sqrt{K}$. □

Corolario 1. *Si Γ es una curva de Jordan plana, entonces*

$$K \leq \frac{\pi}{|\overline{A}|}$$

y la igualdad se cumple si y solo si $x(S)$ es una semiesfera de radio $1/\sqrt{K}$.

Si la igualdad se cumple entonces $\chi(S) = 1$, $x(S)$es una semiesfera de radio $1/\sqrt{K}$ y Γ alcanzaría el circulo máximo así

$$\overline{A} = \pi r^2$$

.

2.2. Desigualdades de Área y Volumen

Ahora daremos las desigualdades del área y volumen e que puede satisfacer la inmersión.

Teorema 13. *Sea A el área de $x(S)$ entonces*

$$2\pi\chi(S) - 2\sqrt{\pi^2 i(\Gamma)^2 - \pi K|\overline{A}||i(\Gamma)|} \leq KA \leq 2\pi\chi(S) + 2\sqrt{\pi^2 i(\Gamma)^2 - \pi K|\overline{A}||i(\Gamma)|}.$$

Además, si $\chi(S) = 1$ entonces la igualdad se cumple en alguna de las desigualdades si y solo si $x(S)$es una capa esférica.

Demostración. Podemos escoger una buena orientación de un vector tangente unitario $\mathbf{t}$ sobre Γ, y la derivada covariante de $\mathbf{t}$ a lo largo de Γ, $\mathbf{t}'$ por la **proposición 2** tenemos

$$\mathbf{t}' = \mathbf{k}_g(\mathbf{N} \wedge \mathbf{t}) + \mathbf{k}_n\mathbf{N}$$

donde $\mathbf{k}_g$ y $\mathbf{k}_n$ son la curvatura geodésica y curvatura normal de Γ, respectivamente. Supongamos una vecindad $P^+ = \{y \in \mathbb{R}^3 |\, \langle y, a\rangle \geq 0\}$. de Γ en $x(S)$ tal que

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{t}', a\rangle = &\quad \mathbf{k}_g \langle \mathbf{N} \wedge \mathbf{t}, a\rangle + \mathbf{k}_n \langle \mathbf{N}, a\rangle \\ = &\quad -\mathbf{k}_g |\nabla f| + \mathbf{k}_n \langle \mathbf{N}, a\rangle \end{aligned}$$

donde $f = \langle x, a\rangle$ es la función altura y $|\nabla f|$ es su gradiente en la métrica inducida sobre S.
Por otro lado, si $\mathbf{n}$ es el vector normal unitario a Γ en P, tenemos

$$\mathbf{N} = \langle \mathbf{N}, \mathbf{n}\rangle \mathbf{n} + \langle \mathbf{N}, a\rangle a = |\nabla f|\mathbf{n} + \langle \mathbf{N}, a\rangle a$$

y como $\mathbf{k}_g = \mathbf{k} \langle \mathbf{N}, e_3\rangle$ de esto,

$$|\nabla f|^2 + \langle \mathbf{N}, a\rangle^2 = 1, \quad \mathbf{k}_g^2 = \mathbf{k}_\Gamma^2 (1 - |\nabla f|^2) \tag{2.6}$$

Ahora usando el teorema de Gauss-Bonnet, la desigualdad de Schwarz, (2.4) y (2.6) tenemos,

$$\begin{aligned} (2\pi\chi(S) - KA)^2 &= \left(\int_\Gamma \mathbf{k}_g \right)^2 \leq \int_\Gamma \mathbf{k}_\Gamma \int_\Gamma \mathbf{k}_\Gamma (1 - |\nabla f|^2) \\ &= \int_\Gamma \mathbf{k}_\Gamma \left(\int_\Gamma \mathbf{k}_\Gamma - \int_\Gamma \mathbf{k}_n \;\; det(\mathbf{N}, \mathbf{t}, -a) \right) \\ &= (2\pi |i(\Gamma)|) \;\; (2\pi |i(\Gamma)| - 2K\overline{A},) \end{aligned} \tag{2.7}$$

de donde $\mathbf{k}_\Gamma |\nabla f|^2 = \mathbf{k}_n det(\mathbf{N}, \mathbf{t}, -a)$ y $2K|\overline{A}| = \int_\Gamma \mathbf{k}_n det(\mathbf{N}, \mathbf{t}, -a)$ entonces de (2.7) tenemos

$$|2\pi\chi(S) - KA| = \sqrt{(2\pi|i(\Gamma)|) \;\; (2\pi|i(\Gamma)| - 2K|\overline{A}|}$$

que nos da la desigualdad

$$2\pi\chi(S) - 2\sqrt{\pi^2 i(\Gamma)^2 - \pi K|\overline{A}||i(\Gamma)|} \leq KA \leq 2\pi\chi(S) + 2\sqrt{\pi^2 i(\Gamma)^2 - \pi K|\overline{A}||i(\Gamma)|}.$$

Ahora si $\chi(S) = 1$, $x(S)$ es una semiesfera, por tanto Γ es una linea de curvatura (el ecuador), así $x(S)$ es una inmersión totalmente umbilical, por esto $\mathbf{k}_g = 0$ entonces del teorema de Gauss-Bonnet tenemos

$$\int K dA = 2\pi$$

esto es

$$KA = 2\pi$$

como $h = r = 1/\sqrt{K}$ ya que $x(S)$ es una semiesfera, tenemos

$$A = 2\pi r^2$$

□

Corolario 2. *Sea* Γ *una curva de Jordan entonces*

$$2\pi - 2\sqrt{\pi^2 - \pi K|\overline{A}|} \leq KA \leq 2\pi + 2\sqrt{\pi^2 - \pi K|\overline{A}|}.$$

Si la longitud L *de* Γ *satisface* $4\pi^2 - KL^2 \geq 0$ *tenemos*

$$2\pi - 2\sqrt{\pi^2 - \pi K|\overline{A}|} \leq KA \leq 2\pi - \sqrt{4\pi^2 - KL^2}.$$

o

$$2\pi + \sqrt{4\pi^2 - KL^2} \leq KA \leq 2\pi + 2\sqrt{\pi^2 - \pi K|\overline{A}|}.$$

Además, la igualdad se cumple si y solo si $x(S)$ *es una capa esférica.*

Teorema 14. *Si* $x(S)$ *es la gráfica de una función sobre un dominio en el plano* P*, entonces el volumen encerrado por* $x(S)$ *y* P *satisface la siguiente desigualdad:*

$$V \leq \pi\left(\frac{h}{K} - \frac{h^3}{3}\right),$$

donde h *es la máxima altura de* $x(S)$ *a* P*. Además, la igualdad se cumple si y solo si* $x(S)$*es una semiesfera de radio* $1/\sqrt{K}$*.*

Demostración. Asumamos que $x(u,v) = (u,v,f(u,v)), (u,v) \in \Omega \subseteq P$. Si Γ_s denota la curva de Jordan dada por $x(\Omega) \cap \{(u,v,s)|u,v \in \mathbb{R}\}$, entonces de (2.3) y (2.5)

$$\begin{aligned} 2K\int_0^h A &= 2KV = 2K\int_0^h |\overline{A}(\Gamma_s)| = \int_0^h \int_{\Gamma_s} \langle d\mathbf{N} \wedge \mathbf{N}, a\rangle \\ &= \int_0^h \int_{\Gamma_s} \mathbf{k}_n(\Gamma_s) \langle \mathbf{N} \wedge \mathbf{t}^s, a\rangle = \int_0^h \int_{\Gamma_s} \mathbf{k}_{\Gamma_s} |\nabla f|^2, \end{aligned} \tag{2.8}$$

donde $\mathbf{t}^s$ es un vector tangente unitario bien orientado a lo largo de Γ_s, $\mathbf{k}_n(\Gamma_s)$ y $\mathbf{k}_{\Gamma_s}$ son la curvatura normal y la curvatura total de Γ_s, respectivamente, y $f = \langle x, a\rangle$ es la función altura.

De la desigualdad (2.2), tenemos $\sqrt{K}f + \langle \mathbf{N}, a\rangle \leq 0$ sobre Ω, usando que $\langle \mathbf{N}, a\rangle = -1/\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}$, tenemos

$$f_u^2 + f_v^2 = \frac{1}{\langle \mathbf{N}, a\rangle^2} - 1 \leq \frac{1}{Kf^2} - 1$$

y

$$|\nabla f|^2 \leq 1 - Kf^2.$$

De (2.8), obtenemos

$$2KV \leq \int_0^h (1-Kf^2) \int_{\Gamma_s} k_{\Gamma_s} = 2\pi\left(h - \frac{Kh^3}{3}\right),$$

de esto tenemos

$$V \leq \pi\left(\frac{h}{K} - \frac{h^3}{3}\right).$$

Además la igualdad se cumple si y solo si Γ_s es una línea de curvatura para todo s donde por el **lema 2**, $x(S)$ es una semiesfera de radio $1/\sqrt{K}$.
Esto es

$$\begin{aligned} V &= \pi\left(h^3 - \frac{h^3}{3}\right) \\ &= \pi h^3\left(1 - \frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

de esto se tiene que

$$V = \frac{2}{3}\pi h^3$$

□

Como una consecuencia del **teorema 12** y de (2.2) tenemos

Corolario 3. *Si x es una gráfica de una función sobre un dominio $\Omega \subseteq P$, entonces*

$$V \leq \frac{2}{3}\pi\left(\frac{1}{\sqrt{K}}\right)^3,$$

y la igualdad se cumple si y solo si $x(\Omega)$ es una semiesfera.

Bibliografía

[1] José A. Gálvez and Antonio Martínez. "Estimates in Surfaces with Positive Constant Gauss Curvature". The American Mathematical Society Vol. 128, No. 12, (Dec., 2000), pp. 3655-3660.

[2] Do Carmo, M. P.*Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice Hall, inc., Englewood Cliffs. New Jersey 1976.

[3] Do Carmo, M. P.*Riemannian Geometry*. Birkhäuser, Boston.Basel.Berlin 1992.

[4] Rafael López. "Constant Mean Curvature Surfaces Bounded by a Circle". Divulgaciones Matemáticas Vol. 14 No. 2(2006), pp. 121-140.

[5] Manuel María Ritoré Cortés. "Superficies con curvatura media constante". The Electronic Journal of Mathematics and Technology. 1994.

[6] Shaum Outline Series. *Geometry Differential*. McGraw-Hill Book Company. New York, St. Louis, San Francisco, Toronto, Sydney. 1969.

[7] Wolfgang Kühnel. *Differential Geometry, Curves-Surfaces-Manifolds*. Second Edition, American Mathematical Society.

[8] Jerrold E. Marsden, Anthony J. Tromba *Cálculo Vectorial*. tercera edición, Addison-Wesley Iberoamericana.