

**UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA APLICADA**

**NUEVOS MODELOS DE ESTRELLAS ANISÓTROPAS Y DE ENERGÍA
OSCURA EN EL MARCO DE LA RELATIVIDAD GENERAL**

MSc. Manuel Malaver de la Fuente

Tesis Doctoral presentada ante la ilustre Universidad Central de Venezuela para optar al título de Doctor en Ciencias, mención Mecánica Teórica y Aplicada

Tutor: Dra. María Esculpi

Caracas, Junio de 2010

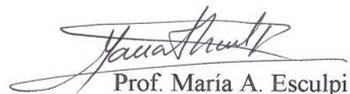
Caracas, 08 de julio de 2009

Señores
Comisión de Estudios de Postgrado
Facultad de Ingeniería
Presente.-

Me dirijo a ustedes por medio de la presente, e la oportunidad de certificar que he leído y revisado el Trabajo titulado " NUEVOS MODELOS DE ESTRELLAS ANISÓTROPAS Y DE ENERGÍA OSCURA EN EL MARCO DE LA RELATIVIDAD GENERAL " , desarrollada por el MSc.MANUEL MALAVER, titular de la Cédula de Identidad No. 6308109 y en consecuencia definitivamente avalo su presentación como Tesis Doctoral para optar al Doctorado en Mecánica Teórica y Aplicada.

Al agradecerles su amable atención a la presente, me suscribo de ustedes.

Atentamente,


Prof. María A. Esculpi
C.I.No. 4.265.749



UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
 Facultad de Ingeniería
 COORDINACIÓN DE LOS POSTGRADOS
 EN FÍSICA DE LOS ENSAYOS NO DESTRUCTIVOS
 Y MECÁNICA TEÓRICA Y APLICADA
 Caracas, Venezuela



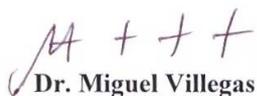
VEREDICTO

Quienes suscriben, Miembros del Jurado designado por el Consejo de Facultad de Ingeniería y por el Consejo de Estudios de Postgrado de la Universidad Central de Venezuela, para examinar la Tesis Doctoral presentada por el MSc. **MANUEL MALAVER DE LA FUENTE**, portador de la Cédula de Identidad número 6.308.109, bajo el título: “**NUEVOS MODELOS DE ESTRELLAS ANISÓTROPAS Y DE ENERGÍA OSCURA EN EL MARCO DE LA RELATIVIDAD GENERAL**”, a fines de cumplir con el requisito legal para optar al título de **DOCTOR EN CIENCIAS, MENCIÓN MECÁNICA TEÓRICA Y APLICADA**, dejan constancia de lo siguiente:

1.- Leído como fué dicho trabajo por cada uno de los Miembros del Jurado, este fijó el día 04 de junio de 2010 a las 02:00 P.M., para que el autor lo defendiera en forma pública, lo que éste hizo en el Salón de Postgrado del Edificio de Física Aplicada de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Central de Venezuela – Caracas, mediante un resumen oral de su contenido, luego de lo cual respondió satisfactoriamente a las preguntas que le fueron formuladas por el Jurado, todo ello conforme a lo dispuesto en los Artículos 45, 49, 50, 51 y 52 del Reglamento de Estudios de Postgrado.

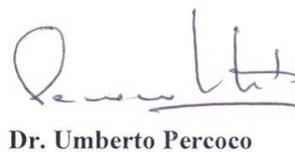
2.- Finalizada la defensa pública de la Tesis, el Jurado deliberó en privado y por unanimidad decidió aprobarlo por considerar, sin hacerse solidario de las ideas expuestas por el autor, que se ajusta a lo dispuesto y exigido en el Reglamento mencionado.

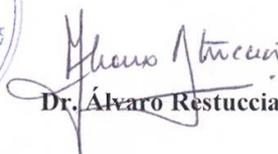
En fe de lo cual se levanta la presente acta en original y cinco copias, en Caracas a los cuatro días del mes de junio del año dos mil diez, dejando constancia que conforme a la normativa jurídica vigente, actuó como Coordinadora del Jurado la Profesora **MARÍA ESCULPI**, Tutora Académica de la Tesis.

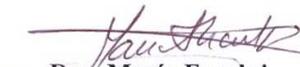

Dr. Miguel Villegas


Dr. Luis Herrera




Dr. Umberto Percoco


Dr. Alvaro Restuccia


Dra. María Esculpi
 Coordinadora

RESUMEN

Una familia de soluciones estáticas de las ecuaciones de campo de Einstein con simetría esférica para un fluido anisótropo con densidad de energía homogénea es obtenida. Estas soluciones dependen de dos parámetros ajustables relacionados al grado de anisotropía del fluido. Algunas soluciones conocidas pueden deducirse para algunos valores específicos de estos parámetros. A diferencia de otras soluciones conocidas es posible cambiar el grado de anisotropía del modelo, manteniendo la misma dependencia funcional de las coordenadas. Por medio de una contracción adiabática lenta, se estudio la estabilidad de las nuevas soluciones. Se demuestra que es posible mejorar la estabilidad de los modelos ajustando los parámetros y obtener configuraciones más compactas que las obtenidas con otras soluciones anisótropas similares. Estas soluciones compactas satisfacen las condiciones de energía fuerte y dominante en el interior de la estrella.

Se analiza el efecto que tienen las fluctuaciones de la anisotropía local en la aparición de fracturas para una familia de soluciones de fluidos anisótropos dependiente de un parámetro α , las cuales para el valor $\alpha = 2$, presentan la misma dependencia funcional en la coordenada radial de la solución de Schwarzschild para la presión radial. El análisis muestra que la aparición de fracturas, asociada a fluctuaciones de la anisotropía local, depende de la forma funcional de la presión con la coordenada radial.

Se presenta un modelo relativista de estrella de energía oscura que consiste de un fluido anisótropo gobernado por la ecuación de estado de energía oscura $\omega = p/\rho < 0$. Se propone una función de masa que depende de un parámetro que puede modificarse y que permite resolver las ecuaciones de campo de Einstein. Las características y las propiedades físicas de esta nueva familia de soluciones es estudiada.

ÍNDICE GENERAL

| | Pág |
|--|-----|
| Agradecimiento | |
| Resumen | |
| INTRODUCCIÓN..... | 10 |
| CAPÍTULOS | |
| I MODELOS DE ESTRELLAS ANISÓTROPAS..... | 16 |
| I.1. ECUACIONES DE CAMPO DE EINSTEIN..... | 16 |
| I.2. LOS NUEVOS MODELOS..... | 17 |
| I.2.1. MODELOS DE DENSIDAD DE ENERGÍA UNIFORME..... | 17 |
| I.2.2. CONTRACCIÓN ADIABÁTICA Y LENTA DE ESTRELLAS ANISÓTROPAS | 34 |
| I.2.3. MODELOS DE DENSIDAD VARIABLE..... | 40 |
| II FRACTURAS Y FUERZAS DE MAREA..... | 50 |
| II.1. ANÁLISIS DE FRACTURAS Y FUERZAS DE MAREA..... | 50 |
| II.2.1. ANÁLISIS DE FRACTURAS EN ESTRELLAS ANISÓTROPAS.... | 51 |
| | |
| II.2.2 . FRACTURA EN EL MODELO PROPUESTO CON DENSIDAD UNIFORME..... | 52 |
| III.1. MODELOS DE ESTRELLAS DE ENERGÍA OSCURA..... | 58 |
| III.2. ECUACIONES DE ESTRELLAS DE ENERGÍA OSCURA..... | 60 |
| III.3. ESTABILIDAD DE ESTRELLAS DE ENERGÍA OSCURA..... | 61 |
| III.4. MODELO PROPUESTO DE ESTRELLA DE ENERGÍA OSCURA.. | 64 |
| IV. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES..... | 77 |
| IV.1. CONCLUSIONES..... | 77 |
| IV.2. RECOMENDACIONES..... | 83 |
| REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS..... | 84 |

ÍNDICE DE FIGURAS

| | Pág |
|---|-----|
| Figura 1. Exponente $\Gamma/2$ como función del parámetro α para diferentes valores del factor de anisotropía C . Las líneas a, b, c, d y e corresponden a los valores de $C = 0.15, 0.25, 0.35, 0.55$ y 0.75 respectivamente. | 22 |
| Figura 2. a) función métrica e^v en función de la coordenada radial r/a para $\alpha=2$, un potencial gravitacional $M/a = 0.4$ y diferentes valores del factor de anisotropía C . Las líneas a, b, c y d corresponden a $C= 0.2, 0.4, 0.6$ y 0.8 , respectivamente. | 23 |
| Figura 2. b) cociente Pr/ρ versus el radio para $\alpha=2$ y $M/a=0.4$. Las líneas a, b, c y d corresponden a $C=0.2, 0.4, 0.6$ y 0.8 respectivamente. | 24 |
| c) Variación de Pt/ρ versus el radio para $\alpha=2$ y $M/a=0.4$. Las líneas a, b, c y d corresponden a $C=0.2, 0.4, 0.6$ y 0.8 respectivamente. | 25 |
| Figura 3.a) Q en función de r/a para diferentes valores del potencial gravitacional M/a . Se ha considerado que $\alpha = 2$ y el factor de anisotropía $C=0.4$. La línea con guiones, la línea sólida, la línea sólida gruesa y la línea gruesa con guiones corresponden a valores de $M/a=0.25, 0.3, 0.35$ y 0.375 respectivamente. | 26 |
| Figura 3. b) Q en función de r/a y diferentes valores del potencial gravitacional M/a . Se ha considerado que $\alpha = 2$ y el factor de anisotropía $C=0.7$. La línea con trazos, la línea sólida, la línea sólida gruesa y la línea gruesa con trazos corresponden a valores de $M/a=0.25, 0.3, 0.35$ y 0.375 respectivamente. | 27 |
| Figura 4. Q en función de r/a para la solución con $\alpha=2, M/a=0.375$ y diferentes valores del factor de anisotropía C . La línea con trazos, la línea sólida, la línea sólida gruesa y la línea gruesa con trazos corresponden a $C=0.7, 0.65, 0.6$ y 0.5 respectivamente. | 28 |
| Figura 5. Cocientes $Pr/\rho, Pt/\rho$ y Q para un valor fijo del potencial gravitacional $M/a =0.375$ donde los valores de C también se mantienen fijos y varían los valores de α . $C=0.35$ para los gráficos del lado izquierdo y $C=0.7$ para los gráficos del lado derecho. $\alpha = -1, 0, 2.5$ y 3.2 para la línea gruesa con trazos, línea sólida gruesa, línea con trazos y línea sólida respectivamente. | 29 |
| Figura 6. Variación del cociente entre la presión radial y tangencial y la densidad de energía. Los gráficos de lado derecho corresponden a la solución | 31 |

de Bowers y Liang y del lado izquierdo a la nueva solución. El potencial gravitacional se mantuvo fijo e igual a $M/a=0.4$ y los valores del exponente $\Gamma/2 = 0.2, 0.3, 0.4$ y 0.51 corresponden a la línea sólida gruesa, línea con trazos, línea sólida y línea sólida gruesa, respectivamente.

Figura 7. Cocientes Pr/ρ , Pt/ρ y Q en función de $r/$. Se han escogido los valores de (C,α) para un valor fijo de $\Gamma/2 = q = 0.4$ en el nuevo modelo. La línea gruesa a trazos, la línea a trazos y la línea sólida se refieren a los pares $(0.8182, 2.4)$, $(0.5014, 2.5)$ y $(0.3854, 2.6)$. La línea sólida en los tres casos corresponde a las soluciones de Bowers y Liang para el valor de q antes mencionado. 32

Figura 8. Cocientes Pr/ρ , Pt/ρ y Q en función de r/a para $\Delta=0$ donde $M/a=0.375$, diferentes valores de α y sus correspondientes valores de C . Los valores de $(C,\alpha) = (0.24072, 7.0)$, $(0.235529, 8.5)$, $(0.221856, 10.0)$ y $(0.196948, 12.5)$, corresponden a la línea sólida, línea con trazos, línea sólida con trazos y línea gruesa sólida. 33

Figura 9. r/a en función de $2M/a$ durante una contracción adiabática para el modelo con $\alpha = 2$ para los gráficos del lado izquierdo. Variación de γ en función de $2M/a$ para los gráficos del lado derecho. 38

Figura 10. Coeficiente γ como función de $2M/a$ para los valores de $\Gamma/2 = q = 0.2, 0.4$ y 0.51 . Para los gráficos del lado izquierdo se eligió $r/a = 0.1$ y para los gráficos del lado derecho se escogió $r/a=0.9$. Las líneas sólidas en todos los gráficos corresponden a la solución de Bowers y Liang y las líneas a trazos al nuevo modelo 39

Figura 11. Presión Radial Pr en función del radio r/a para diferentes valores del parámetro de anisotropía C , manteniendo un potencial de $M/a = 0.4$ y $\alpha = 2$. 43

Figura 12. Presión radial Pr en función del radio r/a para diferentes valores de α y donde el potencial tiene un valor $M/a = 0.4$ y $C=0.5$. 44

Figura 13. $\frac{Pr}{\rho}$ vs r/a para un valor fijo de $\alpha = 2$ y $M/a = 0.4$ y diferentes valores de C . 45

Figura 14. Presión Radial Pr en función de r/a para diferentes valores del Potencial gravitacional M/a y para un valor fijo de $C=0.5$ y $\alpha = 2$ 46

Figura 15. e^ν en función de r/a para un valor fijo $M/a = 0.4$, $c=0.5$ y $\alpha = 2$. 47

- Figura 16.** e^v en función de r/a para diferentes valores del potencial gravitacional $\frac{M}{a}$, en todos los casos $C=0.5$ y $\alpha = 2$. 48
- Figura 17.** e^v en función de r/a para diferentes valores de $\alpha = 0, 2$ y 3 y para un valor de $C=0.5$ y $\frac{M}{a} = 0.4$ 49
- Figura 18.** \hat{R} en función de X para $\mu=0.2$, $C =0.73$ y diferentes valores del parámetro α . La línea con guiones y con dos puntos alternados corresponde a $\alpha = 0.25$, la línea con guiones corresponde a $\alpha=0.5$, con guiones cortos es $\alpha=1.0$ y la línea sólida es para $\alpha=1.5$ 55
- Figura 19.** \hat{R} en función de X para $\mu=0.2$, $C =0.45$ y diferentes valores del parámetro α . La línea con guiones y con dos puntos alternados corresponde a $\alpha = 0.25$, la línea con guiones corresponde a $\alpha=0.5$, con guiones cortos es $\alpha=1.0$ y la línea sólida es para $\alpha=1.5$ 56
- Figura 20.** \hat{R} en función de X para $\mu=0.2$ para el modelo de Bowers y Liang. La línea continua y la línea con guiones corresponde a $C=0.45$; $h=0.1$ y $C= 0.73$; $h = -0.46$, respectivamente. 57
- Figura 21.** La condición de energía fuerte en función de r/a con $M/a = 0.38$ y $l = 0.1$ para diferentes valores de ω . Las líneas señaladas con a,b,c y d corresponden a $\omega = -0.1, -0.15, -0.25$ y -0.4 , respectivamente. 67
- Figura 22.** cociente P_t/ρ en función de r/a dentro de la esfera para valores de $M/a = 0.26$ y 0.34 y $l=0.02$ y 0.06 . **a.** Potencial gravitacional de $M/a = 0.26$ y $l=0.02$. **b.** Potencial gravitacional de $M/a=0.34$ y $l = 0.06$. Las Líneas etiquetadas a,b,c y d corresponden a $\omega = -0.5, -0.9, -1.3$ y -1.4 . 68
- Figura 23.** cociente P_t/ρ en función de r/a dentro de la esfera para valores de $M/a=0.38$ y 0.40 y un valor de $l = 0.1$. **a** Potencial gravitacional de $M/a=0.38$. línea punteada, línea con guiones, línea con punto y guión, línea sólida gruesa, línea con guión largo y un punto y línea con guión largo y dos puntos corresponden a $\omega = -0.5, -0.7, -0.9, -1.1, -1.2$ y 1.3 **b** Potencial gravitacional de $M/a =0.40$. La línea con guiones, línea con guión y dos puntos, línea sólida con guiones, línea sólida gruesa y línea con guión corto corresponden a $\omega = -0.5, -0.9, -1.3, -1.5, -1.6$ y -1.7 . 69
- Figura 24.** Presión radial P_r en función de r/a para diferentes valores de ω y $M/a = 0.38$ y $l =0.1$. Las líneas etiquetadas con a,b, c y d corresponden a $\omega = -0.1, -0.15, -0.3$ y -0.5 70

- Figura 25.** densidad de energía en función de r/a con $M/a = 0.38$. Las líneas etiquetadas como **a**, **b** y **c** corresponden a $l = 0.02, 0.06$ y 0.1 , respectivamente 71
- Figura 26.** función métrica $e^{2\phi}$ en función de r/a para diferentes valores de l con $M/a = 0.38$ y $\omega = -0.5$. Las líneas etiquetadas como **a**, **b** y **c** corresponden a $l = 0.02, 0.06$ y 0.1 , respectivamente. Las líneas etiquetadas como **a**, **b** y **c** corresponden a $l = 0.02, 0.06$ y 0.1 , respectivamente. 71
- Figura 27.** Gráficas de las regiones de estabilidad para una estrella de energía oscura con la nueva función de masa donde $l = 0.02$. Se ha considerado que $\omega = -0.5$ y $\omega = -0.9$, en **a** y **b**, respectivamente. 74
- Figura 28.** Gráficas de las regiones de estabilidad para una estrella de energía oscura con la nueva función de masa en la que $l = 0.06$. Se ha considerado que $\omega = -0.5$ y $\omega = -0.9$, en **a** y **b**, respectivamente. 75
- Figura 29.** Gráficas de las regiones de estabilidad para una estrella de energía oscura donde $l = 0.1$. Se ha considerado que $\omega = -0.5$ y $\omega = -0.9$ en **a** y **b**, respectivamente. 76

INTRODUCCIÓN

El estudio de objetos estelares compactos, en los que los efectos de gravitación son importantes, sólo puede ser realizado en el marco de la teoría de la relatividad general. La búsqueda de soluciones analíticas de las ecuaciones de campo de Einstein considerando distribuciones de materia con simetría esférica, con diverso grado de complejidad, para modelar objetos estelares realistas y el estudio del colapso de estos cuerpos han sido temas de importantes debates en la comunidad científica desde la formulación de la teoría de la relatividad general. En la elaboración de los primeros modelos teóricos para estrellas relativistas destacan los trabajos de Schwarzschild [1], Tolman [2] y Oppenheimer y Volkoff [3]. Schwarzschild [1] encontró soluciones analíticas que permitieron describir una estrella con densidad de energía uniforme, Tolman [2] desarrollo un método para encontrar soluciones para esferas de fluido estáticas. Oppenheimer y Volkoff [3] usaron las soluciones de Tolman para estudiar el equilibrio gravitacional de estrellas de neutrones estableciendo los fundamentos de la relatividad general para estructuras estelares. Es importante mencionar las contribuciones de Chandrasekhar [4] en la elaboración de modelos de enanas blancas donde se toman en cuenta los efectos relativistas y los trabajos de Baade y Zwicky [5] quienes proponen el concepto de estrella de neutrones e identifican unos objetos astronómicos conocidos como supernovas, los cuales representan la transición de una estrella ordinaria a una estrella de neutrones.

Entre los principales problemas que se encuentran en el estudio de las estrellas relativistas están los que se refieren a la explicación del comportamiento físico de los objetos estelares muy compactos y la búsqueda de modelos matemáticos apropiados que permitan explicar la naturaleza de las estrellas de neutrones y de los cuásares [6].

Diversos investigadores han usado una gran variedad de técnicas matemáticas para intentar obtener soluciones exactas de estrellas relativistas, como lo han demostrado Bowers y Liang [6], Ruderman [7], Canuto [8], Komathiraj y Maharaj [9], Cosenza et al. [10], Esculpi et. al [11] y Malaver [12].

Estudios teóricos realizados por Ruderman [7] y Canuto [8] sobre modelos estelares más realistas, sugieren que la materia nuclear en rangos de densidad muy altos, $\rho > 10^{15}$ g/cm³, donde las interacciones nucleares deben ser tratadas relativísticamente, puede presentar anisotropía. En estos objetos masivos la presión radial puede diferir de la tangencial. Anterior a estos estudios, en 1933, G. Lemaitre [13] estableció que el tensor de energía impulso más general asociado con una distribución esférica de materia es localmente anisótropo. Esta generalización, más allá de la aproximación del fluido isotrópico, ha sido extensamente utilizada en el estudio del equilibrio y colapso de esferas compactas [14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24]. La anisotropía en las presiones puede ser inducida por un núcleo sólido o por la presencia de un superfluido [25], transiciones de fases [26] o por la presencia de un condensado de piones [27].

Uno de los trabajos pioneros considerando un modelo de fluido anisótropo es el de Bowers y Liang [6], ellos demuestran que la presencia de anisotropía influye en el equilibrio del modelo y puede modificar los valores del corrimiento al rojo gravitacional. Cosenza et.al [10] desarrollaron un conjunto de soluciones anisótropas, las cuales explicaban corrimientos al rojo gravitacionales mayores que 2, el valor límite en el caso

isótropo. Posteriormente, en 1999, Bondi [21] demostró la existencia de un límite en los valores de corrimiento al rojo gravitacional en presencia de anisotropía, si todas las presiones son positivas, impuesto por la condición de energía dominante. Ivanov [22] encontró valores límites en el corrimiento al rojo gravitacional en la superficie de estrellas anisótropas, impuestos por la condición de energía fuerte y dominante. Esculpi et al. [11] han obtenido una nueva familia de soluciones anisótropas con densidad de energía uniforme, donde las soluciones dependen de dos parámetros que pueden ser ajustados para mejorar el corrimiento al rojo gravitacional. Del mismo modo y más recientemente, la suposición de anisotropía local se ha utilizado para estudiar problemas relacionados a diversos objetos compactos relativistas [28,29,30,31,32,33,34,35,36,37,38].

Con el objeto de describir el comportamiento de una distribución de fluido anisótropo cuando sale del equilibrio dinámico, Herrera [39] y Di Prisco et. al.[40,41] proponen el concepto de fractura, lo cual implica la aparición de distintas fuerzas radiales dentro del sistema. Del mismo modo, Herrera [39] establece que la aparición de las fracturas es causada por la anisotropía local de la distribución de fluido. Esculpi y Malaver [42] encuentran que la aparición de fracturas, asociada a fluctuaciones de la anisotropía local, depende de la forma funcional de la presión con la coordenada radial.

Se espera que la mayoría de los objetos estelares conocidos tengan densidad de energía variable. En efecto, Cosenza et.al.[10], Herrera y Ponce de León [18], Gokhroo y Mehra [43] y más recientemente, Chaisi y Maharaj [44] han propuesto soluciones anisótropas con una distribución de densidad variable, la cual se hace máxima en el centro de la estrella y decrece a lo largo del radio de la estrella.

Otro problema de gran interés para la comprensión de la evolución del universo y en el estudio de los sistemas estelares es la existencia de materia oscura y energía oscura. En efecto, la naturaleza del universo es un tema fundamental en cosmología y algunas observaciones astronómicas recientes parecen indicar que el universo a gran escala está constituido en su mayor parte por una forma de materia desconocida llamada materia oscura [42].

El contenido de la materia oscura fue originalmente detectado en el estudio de fenómenos como la dinámica rotacional de las galaxias espirales, las cuales presentan un comportamiento que es muy diferente de las predicciones que ofrece la mecánica newtoniana [43,44]. Del mismo modo, evidencias experimentales como las mediciones en supernovas del tipo Ia y el estudio de la radiación del fondo cósmico de microondas [45] han confirmado una expansión acelerada del universo, y la presencia de energía oscura es un buen candidato para explicar esta expansión [46], por lo que resulta interesante estudiar el comportamiento de estrellas conformadas de energía oscura en el marco de la relatividad general.

Recientemente, Lobo [46] analizó algunas configuraciones estelares relativistas de energía oscura escogiendo distintas funciones de masa, y propone un modelo en el que la densidad de energía es constante y donde decrece en el interior de la estrella y analiza la estabilidad dinámica de estas nuevas configuraciones de estrellas de energía oscura obtenidas encontrando grandes regiones de estabilidad para estos sistemas. En el nuevo estado final del colapso gravitacional propuesto por Mazur y Mottola [47], en la estrella de vacío gravitacional conocida como “gravastar”, es imprescindible considerar la presencia de presiones tangenciales para asegurar el equilibrio de tales objetos.

Con el propósito de contribuir al estudio y aun mejor conocimiento de la estructura estelar en relatividad general se ha propuesto en esta investigación, encontrar nuevas soluciones exactas para estrellas anisótropas. Se resuelven las ecuaciones de campo con simetría esférica para una distribución de materia que consiste en un fluido localmente anisótropo en las presiones. A partir de un *ansatz*, que establece la relación entre las presiones radial y tangencial, que permite integrar analíticamente la ecuación de equilibrio hidrostático, se obtiene una familia de soluciones que depende de un parámetro y de un coeficiente que mide la anisotropía del sistema. Este procedimiento se utiliza para generar soluciones de estrellas anisotrópicas con densidad de energía uniforme y variable. Las soluciones con densidad de energía uniforme se comparan con otros modelos conocidos, se estudia el comportamiento de las variables físicas, los valores límites del corrimiento al rojo gravitacional y la estabilidad de las soluciones ante una contracción adiabática lenta. Asimismo se hace un análisis de fracturas para estas nuevas soluciones. Finalmente, se proponen nuevas soluciones anisotrópicas que permitan modelar el comportamiento y la estabilidad de estrellas de energía oscura con distintas funciones de masa.

Este trabajo se divide en cuatro capítulos. En el capítulo I se proponen algunos nuevos modelos de estrellas anisotrópicas considerando, en un caso, densidad de energía del fluido uniforme y en el otro, densidad variable y estableciendo una relación funcional entre las presiones radial y tangencial de tal manera que se puedan integrar analíticamente las ecuaciones de campo. Asimismo, se estudian las propiedades físicas y la estabilidad de estas nuevas soluciones a través de una contracción adiabática lenta y se comparan con otras soluciones anisotrópicas conocidas. En el capítulo II, se estudia el comportamiento de estos nuevos modelos de estrellas anisótropas con densidad de

energía uniforme ante fluctuaciones de anisotropía. Se describe el comportamiento de estas distribuciones de fluido cuando se rompe el equilibrio dinámico al aparecer fuerzas radiales de diferente signo en la distribución generándose fracturas. En el capítulo III, se propone un modelo de estrella de energía oscura utilizando una función de masa conocida y se hace el correspondiente análisis de estabilidad del nuevo modelo obtenido. En el capítulo IV se discuten los resultados obtenidos y se muestran algunas aplicaciones astrofísicas a objetos estelares conocidos.

CAPÍTULO I

MODELOS DE ESTRELLAS ANISÓTROPAS

I.1. ECUACIONES DE CAMPO DE EINSTEIN.

Considerando un espacio cuatridimensional esféricamente simétrico, cuyo elemento de línea esta descrito por las coordenadas de Schwarzschild dadas por

$$ds^2 = e^{\nu} dt^2 - e^{\lambda} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (1)$$

con una distribución estática de materia que consiste de un fluido hidrodinámico no pascaliano con un tensor de energía - impulso dado por la expresión

$$T^{\mu\nu} = (\rho + P_t)U^{\mu}U^{\nu} - P_t g^{\mu\nu} + (P_r - P_t)\chi^{\mu}\chi^{\nu} \quad (2)$$

Las ecuaciones de campo de Einstein son :

$$8\pi T^0_0 = 1/r^2 - e^{-\lambda}(1/r^2 - \lambda'/r) \quad (3)$$

$$8\pi T^1_1 = 1/r^2 - e^{-\lambda}(1/r^2 + \nu'/r) \quad (4)$$

$$8\pi T^2_2 = 8\pi T^3_3 = \frac{-1}{4}e^{-\lambda}(2\nu'' + \nu'^2 - \lambda'\nu' + 2(\nu' - \lambda')/r) \quad (5)$$

de (3) se obtiene que:

$$e^{-\lambda} = 1 - 2m/r \quad \text{con} \quad m(r) = \int 4\pi\rho r^2 dr \quad (6)$$

Usando las ecuaciones (4) y (5) o lo que es equivalente, $T_{1;\mu}^{\mu} = 0$, se obtiene la ecuación generalizada de Tolman-Oppenheimer-Volkov para el equilibrio hidrostático en presencia de presión tangencial

$$\frac{dP_r}{dr} = -(\rho + P_r) \frac{4\pi P_r r^3 + m(r)}{r^2(1 - 2m(r)/r)} + 2 \frac{(P_t - P_r)}{r} \quad (7)$$

I.2. LOS MODELOS.

I.2.1 MODELO DE DENSIDAD DE ENERGIA UNIFORME

Dada una ecuación de estado para las variables hidrodinámicas y unas condiciones de junta adecuadas, es posible obtener una solución para las ecuaciones de campo de Einstein. Se considera una distribución de materia con densidad de energía uniforme, contenida en una esfera de radio a y se propone una relación entre las presiones radial y tangencial que generaliza la solución propuesta por Dev y Gleiser [25] como sigue,

$$\rho = \rho_0 \quad r \leq a \quad (8)$$

$$P_t - P_r = \frac{2\pi C r^2 (P_r^2 + \alpha P_r \rho + \rho^2)}{3(1 - \frac{2m(r)}{r})} \quad (9)$$

donde C es el factor o parámetro de anisotropía y α es un nuevo parámetro que varía la relación entre la presión radial y tangencial para un valor dado del parámetro de anisotropía. Se puede introducir esta relación en la ecuación para el equilibrio

hidrostático y resolverla, considerando los posibles valores para el discriminante Δ y obtener

$$\Delta = \rho_0^2 \left[(4 - \alpha C)^2 - 4(3 - C)(1 - C) \right] \quad (10)$$

Las siguientes soluciones satisfacen las condiciones de juntura de Darmois-Licknerowitz entre la métrica interior y la solución exterior de Schwarzschild.

Para valores $\Delta > 0$ se obtiene la presión radial dentro de la estrella que esta dada por,

$$P_r = \rho(1 - C) \left[\frac{\left(1 - \frac{8\pi\rho r^2}{3}\right)^{\Gamma/2} - \left(1 - \frac{8\pi\rho a^2}{3}\right)^{\Gamma/2}}{\left(\beta + \Gamma\right)\left(1 - \frac{8\pi\rho a^2}{3}\right)^{\Gamma/2} - \left(\beta - \Gamma\right)\left(1 - \frac{8\pi\rho r^2}{3}\right)^{\Gamma/2}} \right] \quad (11)$$

donde $\beta = 2(1 - \alpha C/4)$ y $\Gamma = [\beta^2 - (3 - C)(1 - C)]^{1/2}$

Se observa que para el valor de $C = 0$ se recupera la solución interior de Schwarzschild [1] y en el valor límite $C = 1$ se obtiene la solución de Lemaitre [13].

Para la función métrica se obtiene que :

$$e^\nu = \left[\frac{\left(\beta + \Gamma\right)\left(1 - \frac{2M}{a}\right)^{\Gamma/2} - \left(\beta - \Gamma\right)\left(1 - \frac{2M}{a} \frac{r^2}{a^2}\right)^{\Gamma/2}}{2\Gamma\left(1 - \frac{2M}{a}\right)^{\Gamma/2}} \right] x \left[\frac{1 - \frac{2M}{a} \frac{r^2}{a^2}}{1 - \frac{2M}{a}} \right]^{\frac{3(1-C) - (\beta + \Gamma)}{2(\beta + \Gamma)}} \left(1 - \frac{2M}{a}\right)$$

(12)

Estableciendo que $(M/a)_{crit}$ es el valor de M/a ($M=m(r=a)$) para el cual la presión central se convierte en infinita y Z_{crit} es valor del corrimiento al rojo superficial, correspondiente al valor de $(M/a)_{crit}$,

$$Z_{crit} = \left[\frac{\beta + \Gamma}{\beta - \Gamma} \right]^{\frac{1}{\Gamma}} - 1 \quad (13)$$

Para el caso $\Delta < 0$,

$$P = \frac{\rho\Omega}{2(3-C)} \tan \left\{ \ln \left[\frac{\left(1 - \frac{2M}{a} \left(\frac{r}{a}\right)^2\right)^{\frac{\Omega}{8}}}{1 - \frac{2M}{a}} \right] + \arctan\left(\frac{4 - \alpha C}{\Omega}\right) \right\} - \frac{(4 - \alpha C)\rho}{2(3-C)} \quad (14)$$

donde $\Omega = \{4(3-C)(1-C) - (4 - \alpha C)^2\}^{1/2}$

para este caso la función métrica estará dada por:

$$e^{\nu} = \left(1 - \frac{2M}{a}\right)^{1 + \frac{\varepsilon}{4(3-C)}} \left\{ \frac{\left[\cos \left[\frac{\Omega}{8} \ln \left[\frac{1 - \frac{2M}{a} \left(\frac{r}{a}\right)^2}{1 - \frac{2M}{a}} \right] + \arctan \frac{(4 - \alpha C)}{\Omega} \right] \right]^{\frac{6}{3-C}}}{\left[1 - \frac{2M}{a} \left(\frac{r}{a}\right)^2 \right]^{\frac{6}{4(3-C)}} \left[\cos \left[\arctan \frac{4 - \alpha C}{\Omega} \right] \right]^{\frac{6}{3-C}}} } \right\} \quad (15)$$

donde $\varepsilon = 2(3-C) - 3(4 - \alpha C)$

Z_{crit} para este caso estará dado por:

$$Z_{crít} = e^{-\frac{4}{\Omega} \left[\arctan\left(\frac{4-\alpha C}{\Omega}\right) - \frac{\pi}{2} \right]} - 1 \quad (16)$$

Finalmente cuando $\Delta = 0$ se obtiene que

$$(4 - \alpha C)^2 = 4(3 - C)(1 - C)$$

Resolviendo las ecuaciones de Einstein se puede obtener para la presión radial y el corrimiento al rojo superficial los siguientes resultados

$$P_r = \rho(1 - C) \frac{\ln \left[\frac{1 - \frac{2M}{a} \left(\frac{r}{a}\right)^2}{\left(1 - \frac{2M}{a}\right)} \right]}{\left\{ 4 - [(3 - C)(1 - C)]^{1/2} \ln \left[\frac{\left(1 - \frac{2M}{a} \left(\frac{r}{a}\right)^2\right)}{\left(1 - \frac{2M}{a}\right)} \right] \right\}} \quad (17)$$

$$Z_{crít} = e^{-\frac{2}{(3-C)(1-C)}} - 1 \quad (18)$$

La presión tangencial es obtenida introduciendo el valor para la presión radial en cada uno de los casos mencionados anteriormente

$$P_t = P_r + \frac{2\pi C r^2 (P_r^2 + \alpha P_r \rho + \rho^2)}{3 \left(1 - \frac{2M}{a} \left(\frac{r}{a}\right)^2 \right)} \quad (19)$$

Se observa que los valores de α y C están limitados por los valores que pueda adquirir el discriminante. También, como se puede ver fácilmente, solo las soluciones obtenidas

para valores del discriminante mayores que cero admiten el valor $C=0$ correspondientes a la solución de Schwarzschild. Se observa como las soluciones obtenidas anteriormente se comportan cuando diferentes valores del parámetro α y del parámetro C son considerados, para cada valor del discriminante Δ . Para esto se eligen valores de los parámetros α y C físicamente aceptables, esto es, que permitan valores positivos de la presión radial y soluciones que obedezcan la condición de energía dominante, es decir densidad de energía mayor que la presión radial y la presión tangencial. También se pueden considerar valores positivos para el parámetro de anisotropía C con el fin de garantizar una presión tangencial positiva en la superficie de la esfera. Las soluciones obtenidas para $\Delta < 0$, pueden tener presiones radiales negativas o presiones tangenciales negativas dependiendo de los valores de C y α escogidos. Por esta razón, solo los casos en los que el discriminante es mayor o igual a cero serán considerados en este trabajo.

Se estudiarán primero las soluciones para las que $\Delta > 0$. En la figura 1, se muestran los valores del exponente $\Gamma/2$ como función de α para los diferentes valores de C . Se observa que α se incrementa cuando Γ decrece y toma valores menores que uno para valores de α mayores que 2, y mayores que uno para $\alpha < 2$. Especial atención merece el caso para $\alpha = 2$, en el que el exponente Γ adquiere el valor constante $\Gamma=1$, independientemente del valor de C . Para este caso, una solución anisótropa es obtenida con la misma dependencia funcional de la solución de Schwarzschild, siendo diferente de las otras soluciones anisótropas conocidas. Se puede comparar la solución para $\alpha = 2$ con la solución de Schwarzschild. En la figura 2, se muestra, para un valor fijo del potencial gravitacional $M/a = 0.4$, el cambio de la función métrica e^v y la razón P_r/ρ y P_t/ρ para diferentes valores del factor de anisotropía C . Se han elegido valores de C

entre 0.2 y 0.8. Se observa como se satisface la condición de energía dominante para las soluciones anisótropas. Este mismo comportamiento es reportado por Barraco et al.[51] para $P_t > P_r$ y cuando se satisfacen las condiciones de energía. Se puede comparar el comportamiento de la nueva familia de soluciones anisótropas con soluciones previamente conocidas siempre que se mantengan las condiciones de energía, tal como lo sugiere Bondi [21] .

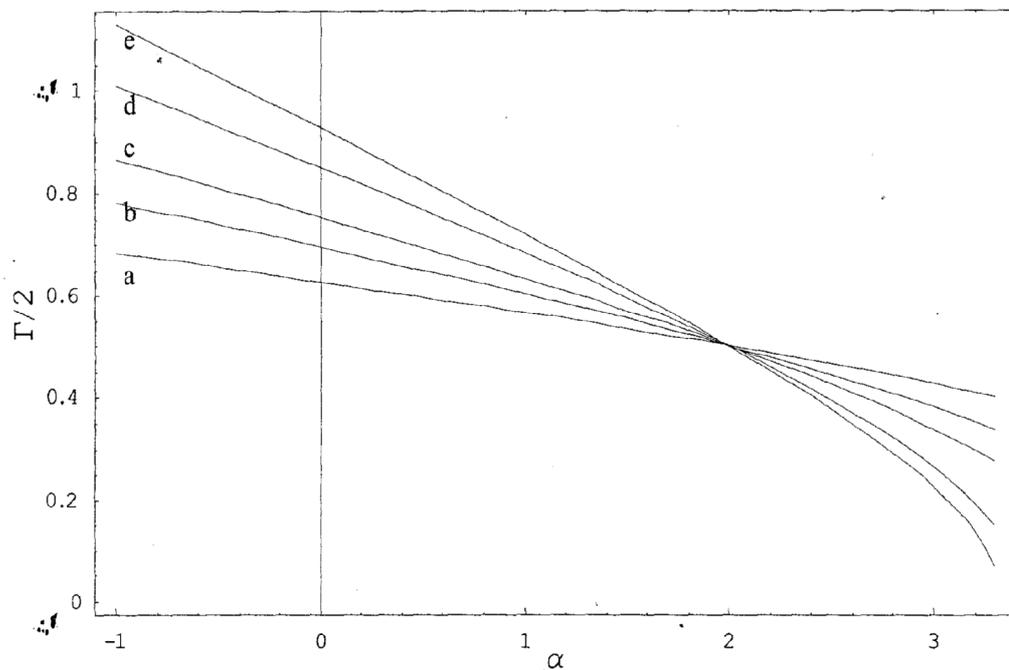


Figura 1. Exponente $\Gamma/2$ en función del parámetro α para diferentes valores del factor de anisotropía C . La líneas a, b, c, d y e corresponden a los valores de $C = 0.15, 0.25, 0.35, 0.55$ y 0.75 respectivamente.

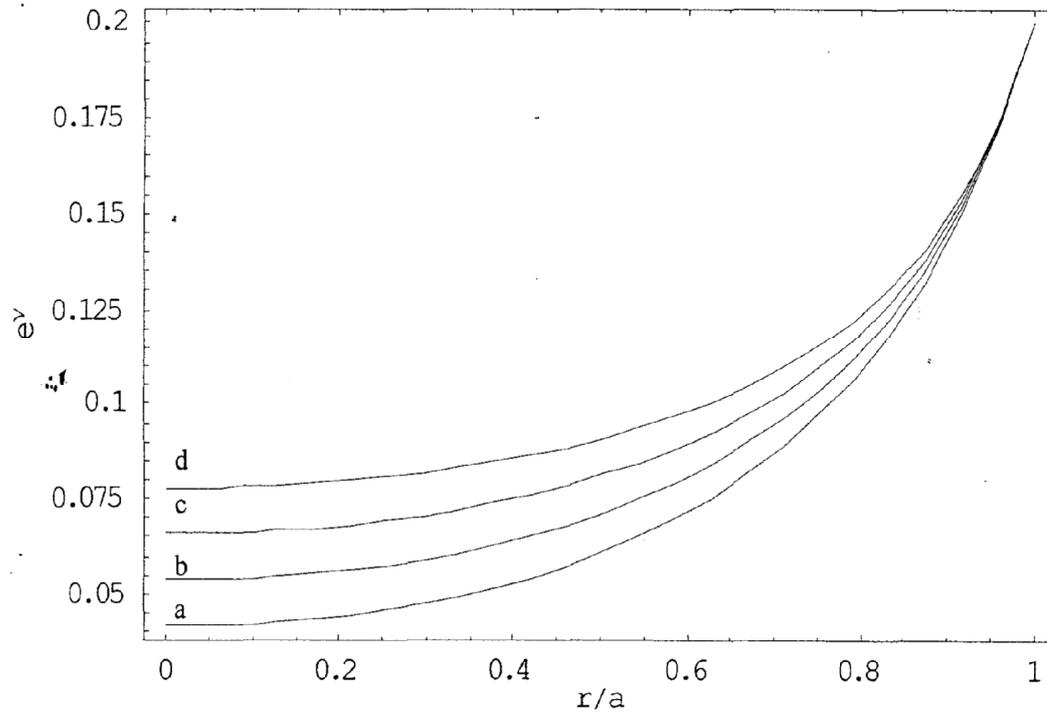


Figura 2a. Variación de la función métrica e^v en función de la coordenada radial r/a para $\alpha=2$, un potencial gravitacional $M/a = 0.4$ y diferentes valores del factor de anisotropía C . Las líneas a, b, c y d corresponden a $C= 0.2, 0.4, 0.6$ y 0.8 , respectivamente.

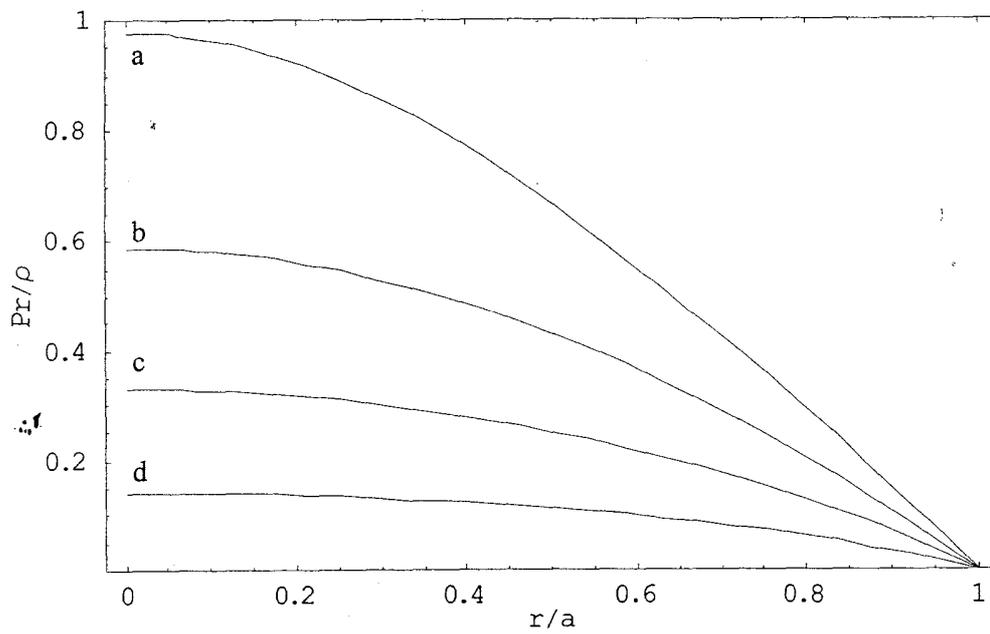


Figura 2b. Pr/ρ en función de r/a para $\alpha=2$ y $M/a=0.4$. Las líneas a, b, c y d corresponden a $C=0.2, 0.4, 0.6$ y 0.8 respectivamente.

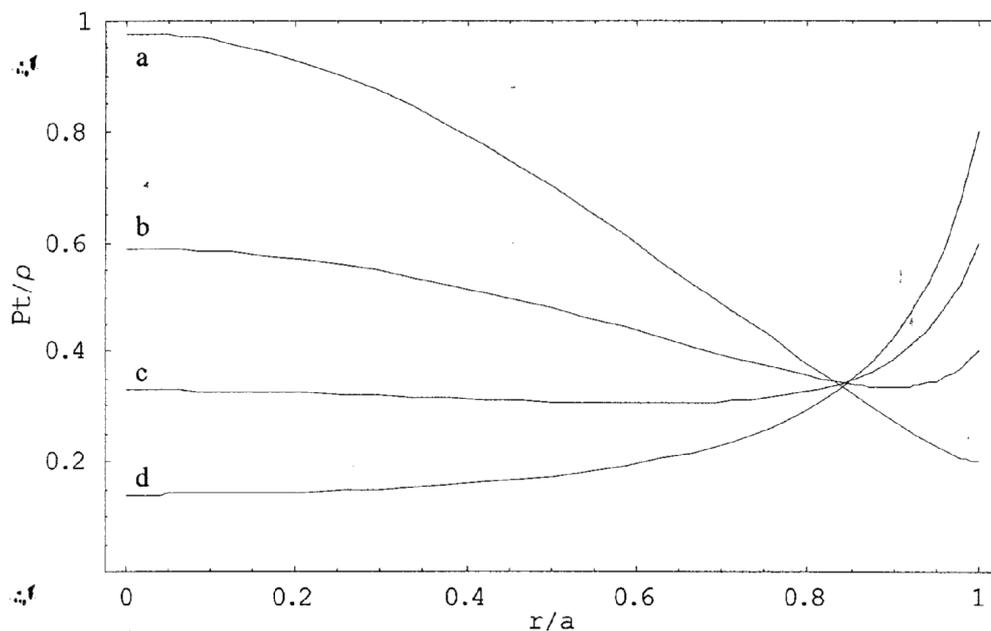


Figura 2c. P_t/ρ en función de r/a para $\alpha=2$ y $M/a=0.4$. Las líneas a, b, c y d corresponden a $C=0.2, 0.4, 0.6$ y 0.8 respectivamente.

Ahora se hará el estudio en los valores del corrimiento al rojo superficial de estas soluciones y en los valores del cociente de la traza del tensor de energía-impulso y la densidad de energía, donde el cociente se expresa como $Q = \left(\frac{P_r + 2P_t}{\rho} \right)$. Tal como lo establece Bondi [21], por imposición de la condición de energía fuerte los valores del corrimiento al rojo superficial están restringidos en estos modelos. Las figuras 3a y 3b muestran los valores de Q dentro de la esfera para la solución con $\alpha = 2$ donde $M/a = 0.25, 0.3, 0.35$ y 0.375 y con $C=0.4$ y $C=0.7$, respectivamente. Obsérvese que en el primer caso Q se incrementa hacia el centro de la estrella y para el caso b Q decrece. En la figura 4, para un valor de $M/a=0.375$, se muestra la dependencia de Q con el grado de anisotropía de las presiones. Allí existe un valor crítico para el factor C que favorece la

condición de energía fuerte que se mantiene cuando se consideran elevados potenciales gravitacionales.

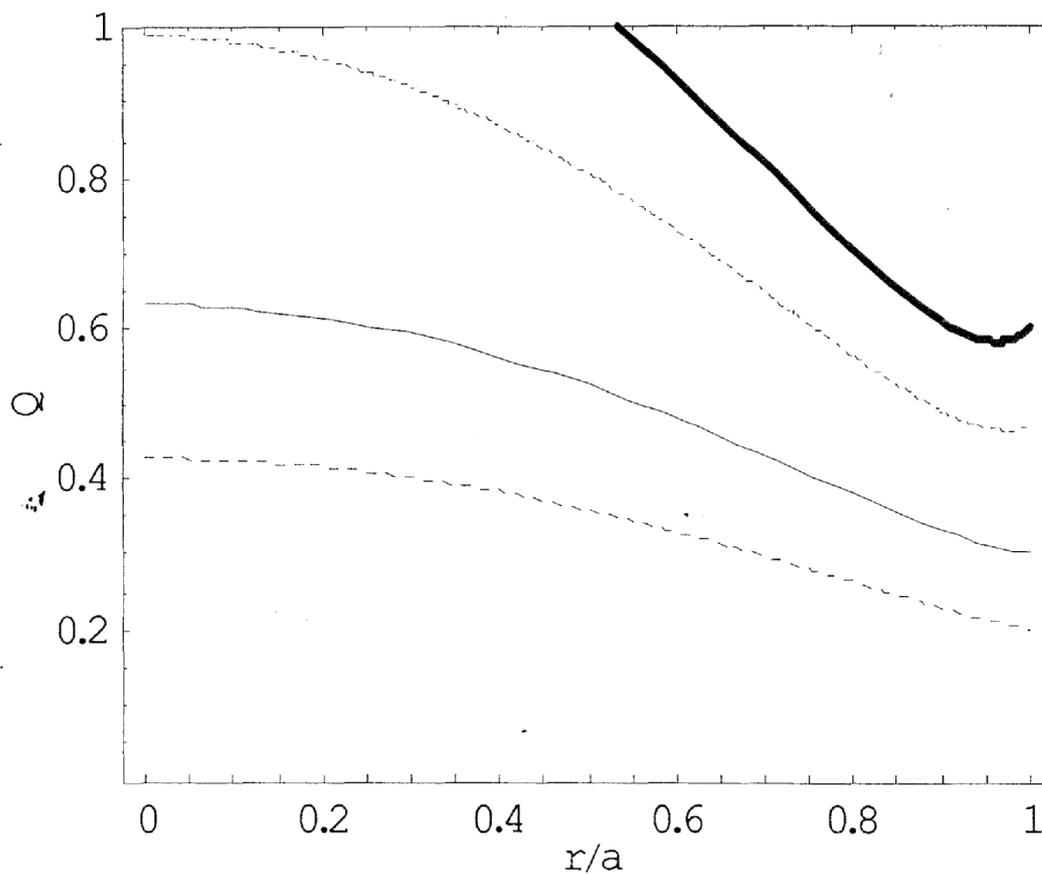


Figura 3a. Q en función de r/a para diferentes valores del potencial gravitacional M/a . Se ha considerado que $\alpha = 2$ y el factor de anisotropía $C=0.4$. La línea con guiones, la línea sólida delgada, la línea delgada con puntos y la línea sólida gruesa corresponden a valores de $M/a=0.25, 0.3, 0.35$ y 0.375 respectivamente.

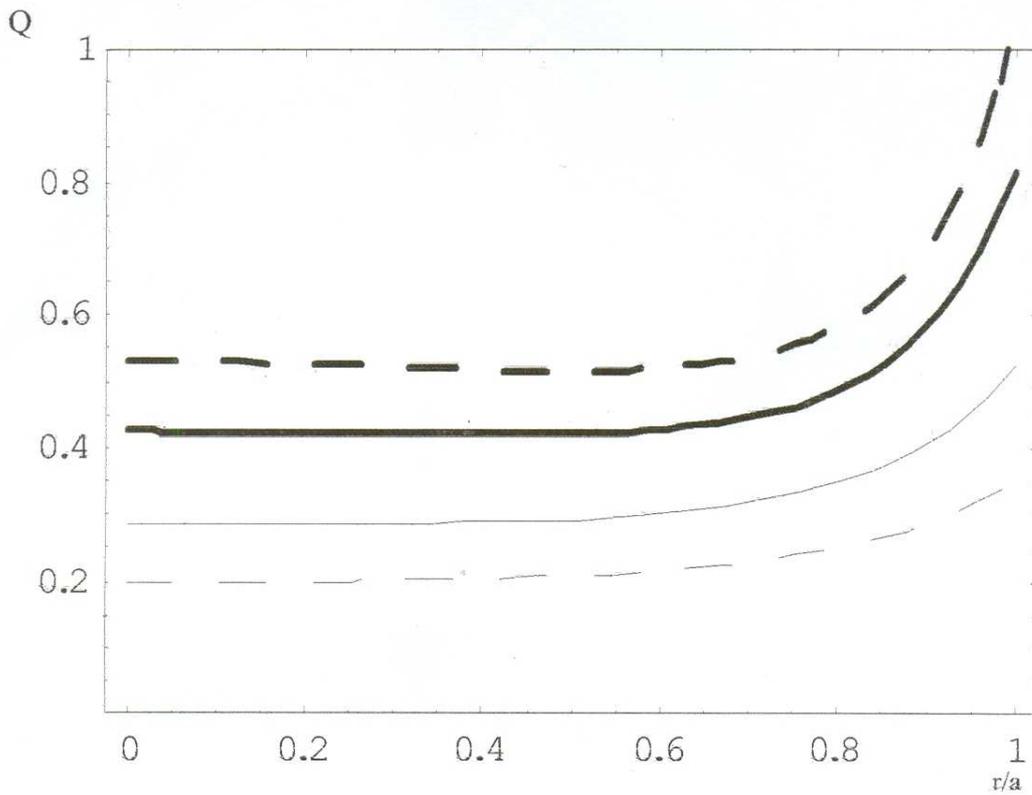


Figura 3b. Q en función de r/a para diferentes valores del potencial gravitacional M/a . Se ha considerado que $\alpha = 2$ y el factor de anisotropía $C=0.7$. La línea con trazos, la línea sólida, la línea sólida gruesa y la línea gruesa con trazos corresponden a valores de $M/a=0.25, 0.3, 0.35$ y 0.375 respectivamente.

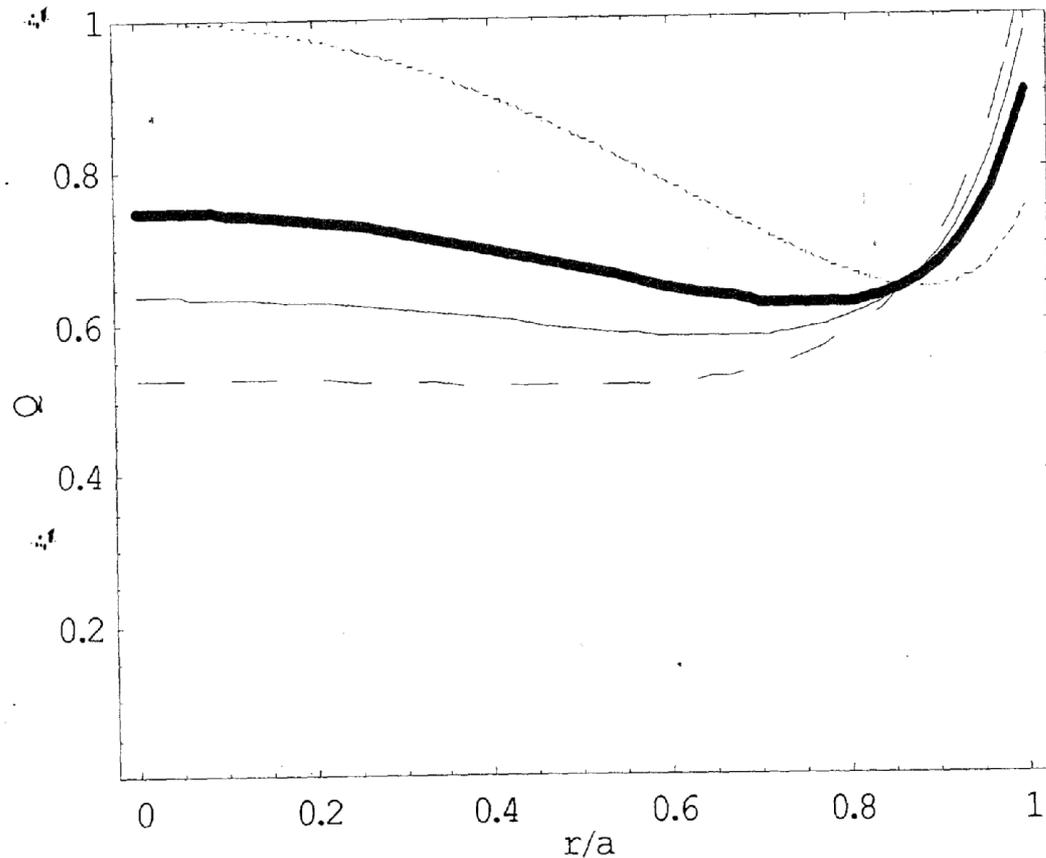


Figura 4. Q en función de r/a para la solución con $\alpha=2$, $M/a=0.375$ y diferentes valores del factor de anisotropía C. La línea con guiones, la línea sólida, la línea sólida gruesa y la línea delgada con guiones corresponden a $C=0.7$, 0.65 , 0.6 y 0.5 respectivamente.

Se observa como los valores del parámetro afectan las condiciones de energía, manteniendo fijos los valores de C y M/a , y tomando valores diferentes para α . En la figura 5, se muestra la variación de los cocientes presión radial-densidad de energía y presión tangencial -densidad de energía y del factor Q para los valores de $\alpha = -1, 0, 2.5$ y 3.2 , con un potencial gravitacional de $M/a=0.375$. Los gráficos ubicados a la derecha y a la izquierda corresponden a los valores de $C=0.35$ y $C=0.7$ respectivamente. Se muestra que para el mayor valor de C es posible obtener la condición de energía fuerte

cuando α se incrementa, esto es equivalente a disminuir el exponente Γ a la unidad cuando α es mayor que 2, o por el contrario, para un α menor que 2 equivale a incrementar los valores del exponente Γ a la unidad. En ambos casos se mantiene la condición de energía dominante.

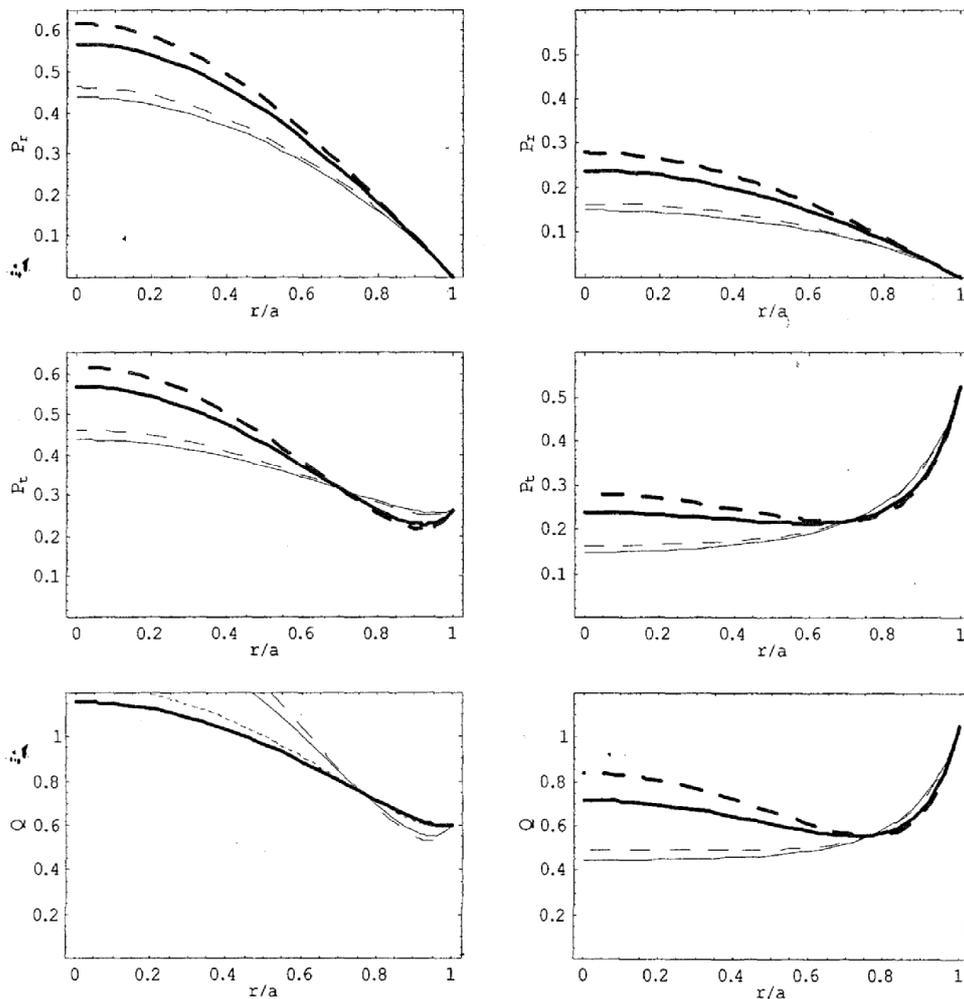


Figura 5. Cocientes Pr/ρ , Pt/ρ y Q para un valor fijo del potencial gravitacional $M/a = 0.375$ donde los valores de C también se mantienen fijos y varían los valores de α . $C=0.35$ para los gráficos del lado izquierdo y $C=0.7$ para los gráficos del lado derecho. $\alpha = -1, 0, 2.5$ y 3.2 para la línea gruesa con trazos, línea sólida gruesa, línea con trazos y línea sólida respectivamente.

Se compararan ahora las soluciones obtenidas para $\Delta > 0$ con las soluciones anisotrópicas de Bowers y Liang (B-L)

$$P_r = \rho_0 \left[\frac{(1 - 2m/r)^q - (1 - 2M/R)^q}{3(1 - 2M/R)^q - (1 - 2M/r)^q} \right]$$

Se pueden escoger los valores de C y α que proporcionan la misma dependencia funcional de la coordenada r para ambas soluciones, es decir, $\Gamma/2 = q$. La variación de los cocientes de la presión radial y tangencial con la densidad de energía dentro de la esfera para los valores $\Gamma/2 = 0.2, 0.3, 0.45$ y 0.51 con un potencial superficial gravitacional de $M/a = 0.4$ se presentan en la figura 6, para los dos modelos. Los valores de los parámetros (C, α) correspondientes a los valores de Γ en la figura 6 son $(0.5385, 3.2)$, $(0.5814, 2.85)$, $(0.6593, 2.43)$ y $(0.7887, 1.958)$ respectivamente. Se observa una gran diferencia entre los perfiles de la presión tangencial para el valor de Γ y q cercanos a 0.5 .

Para un valor del exponente cerca de 0.5 , la solución de Bowers y Liang no admite este fuerte campo gravitacional, porque en estos casos la condición de energía fuerte no se satisface. Las soluciones presentadas en este trabajo admiten fuertes campos gravitacionales en la superficie de la esfera y consecuentemente mayores corrimientos al rojo superficiales que los admitidos por el modelo de Bowers y Liang. Ajustando los valores del par (C, α) es posible obtener una familia de soluciones para un valor fijo del exponente Γ . La figura 7 muestra, para un valor de $\Gamma/2 = 0.4$, el cociente de la presión radial y tangencial a la densidad de energía y la traza Q para diferentes valores de (C, α) , de la nueva solución y de la solución B-L para un mismo valor de q . Es importante mencionar el hecho de que en el nuevo modelo hay valores de (C, α) que permiten que se

mantenga la condición de energía fuerte para este valor del exponente q , mientras que para el modelo B-L se satisface totalmente la condición de energía dominante.

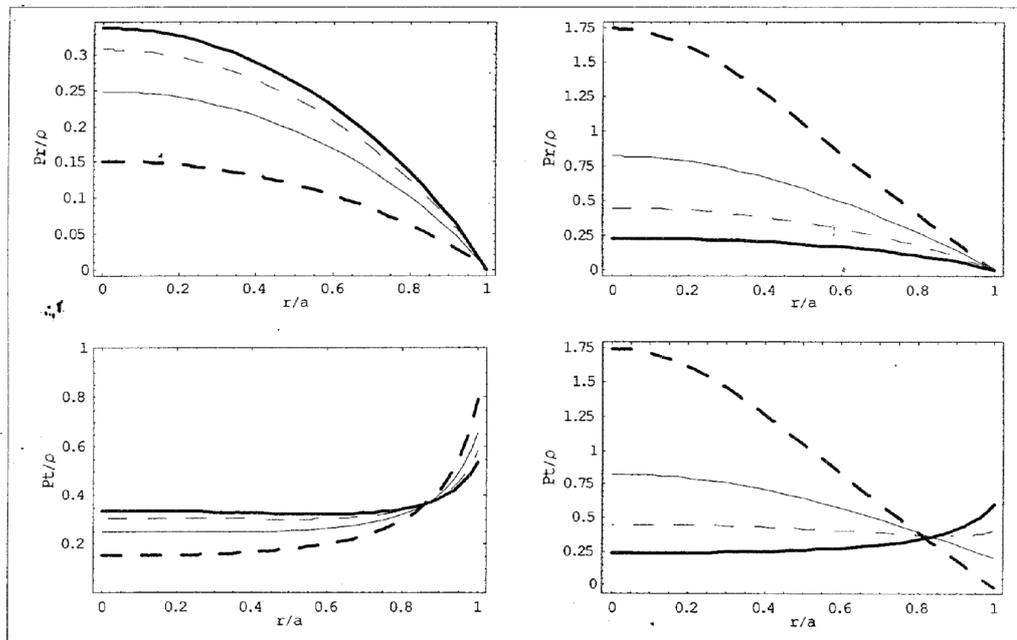


Figura 6. Cocientes Pr/ρ y Pt/ρ en función de r/a . Los gráficos de lado derecho corresponden a la solución de Bowers y Liang y del lado izquierdo a la nueva solución. El potencial gravitacional se mantuvo fijo e igual a $M/a=0.4$ y los valores del exponente $\Gamma/2 = 0.2, 0.3, 0.4$ y 0.51 corresponden a la línea sólida gruesa, línea con trazos, línea sólida y línea sólida gruesa a trazos, respectivamente.

Finalmente, se presentan a continuación las soluciones correspondientes para $\Delta=0$. La figura 8 muestra los cocientes Pr/ρ , Pt/ρ y de Q dentro de la esfera para un valor fijo del potencial gravitacional M/a y diferentes valores de α y su correspondiente valor de C . Tanto la presión radial como la tangencial decrecen hacia la superficie de la esfera. Se muestra como también un incremento de los valores de α favorecen la condición de energía fuerte. En la figura 8 se han tomado los valores de $M/a=0.375$ y los siguientes valores de (C, α) : $(0.24072, 7.0)$, $(0.235529, 8.5)$, $(0.221856, 10)$ y $(0.196948, 12.5)$.

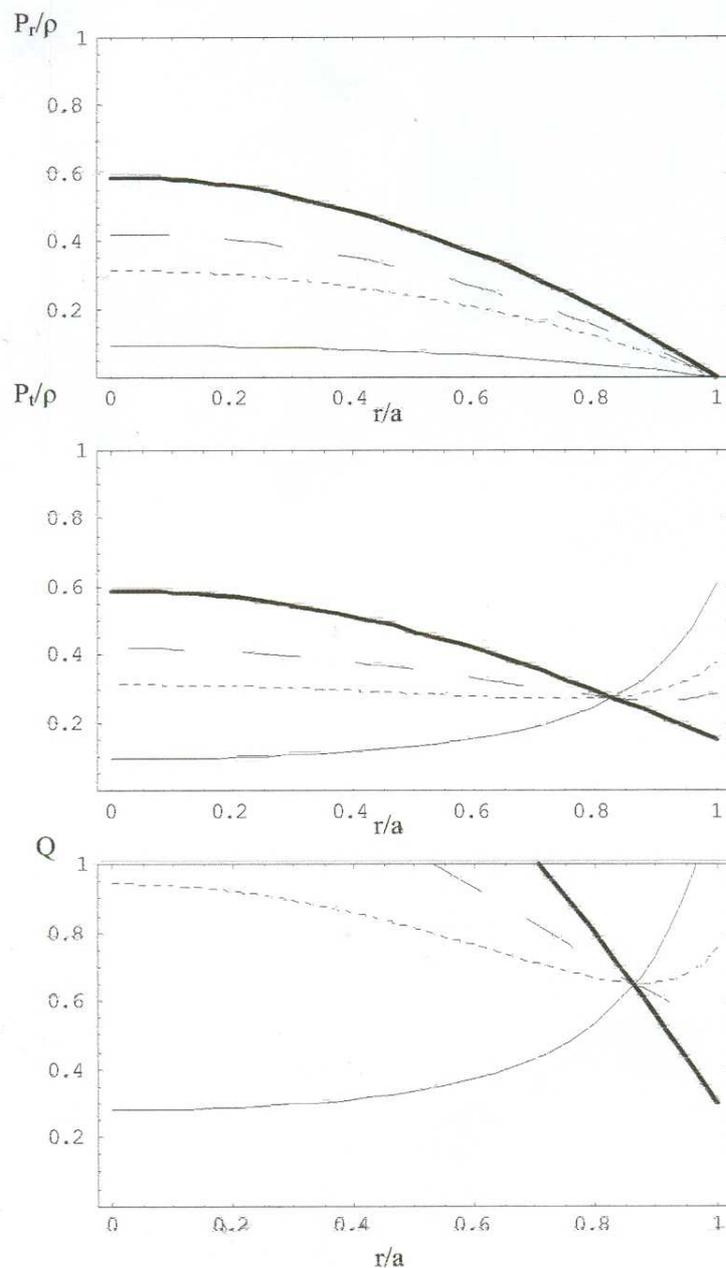


Figura 7. Cocientes P_r/ρ , P_t/ρ y Q en función de r/a . Se han escogido los valores de (C,α) para un valor fijo de $\Gamma/2 = q = 0.4$ en el nuevo modelo. La línea gruesa a trazos, la línea a trazos y la línea sólida se refieren a los pares $(0.8182, 2.4)$, $(0.5014, 2.5)$ y $(0.3854, 2.6)$. La línea sólida gruesa en los tres casos corresponde a las soluciones de Bowers y Liang para el valor de q antes mencionado.

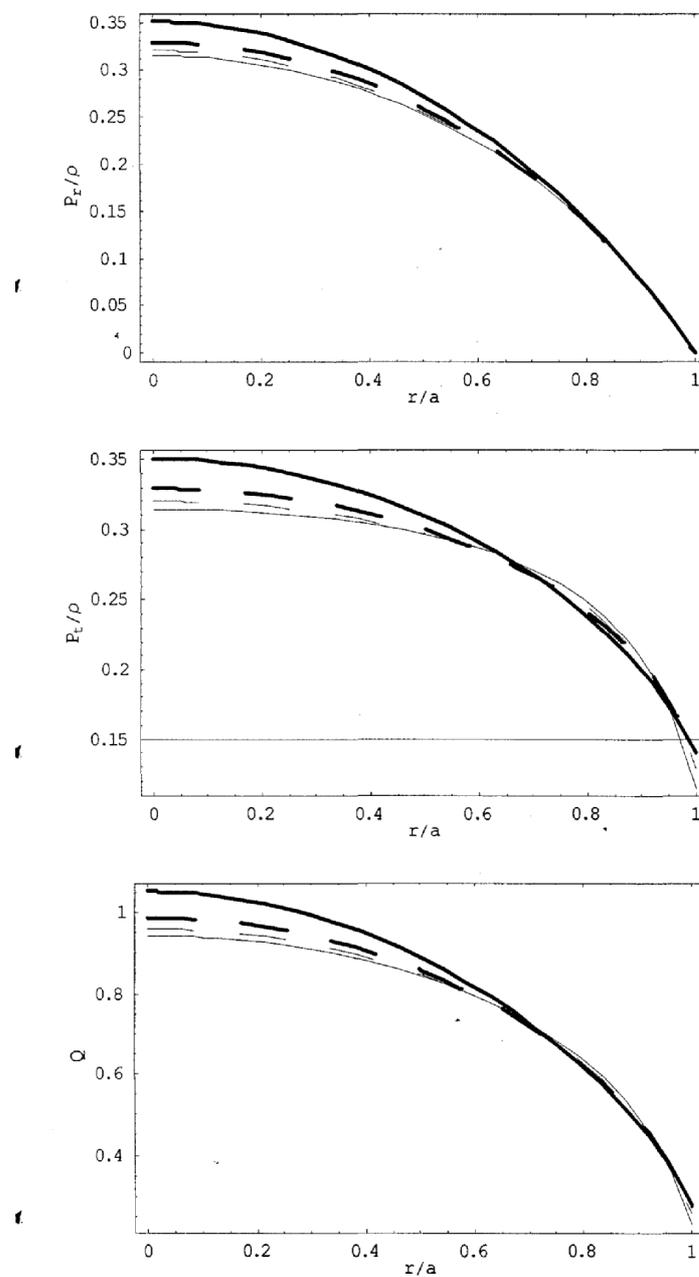


Figura 8. Cocientes Pr/ρ , Pt/ρ y Q en función de r/a para $\Delta=0$ donde $M/a=0.375$, diferentes valores de α y sus correspondientes valores de C . Los valores de $(C, \alpha) = (0.24072, 7.0)$, $(0.235529, 8.5)$, $(0.221856, 10.0)$ y $(0.196948, 12.5)$, corresponden a la línea sólida, línea con trazos, línea sólida con trazos y línea gruesa sólida.

I.2.2 CONTRACCIÓN ADIABÁTICA Y LENTA DE ESTRELLAS ANISÓTROPAS

Se estudiará, en esta sección, la respuesta de los nuevos modelos para $\Delta > 0$ ante una contracción adiabática y lenta. Se analiza cuales valores del parámetro α junto con el factor de anisotropía C pudiera permitir obtener soluciones mas estables. El método a seguir es el utilizado por Bondi [52] y generalizado por Herrera et. al.[14] en el estudio de la contracción adiabática de estrellas anisótropas. Se considerara una distribución no estática de materia que es esféricamente simétrica y cuyo tensor de energía- impulso es localmente anisótropo. Ahora las funciones métricas también dependen del tiempo.

$$ds^2 = e^\nu dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

Denotando la diferenciación con respecto a τ por un punto y con respecto a r por una prima, con $(\tau, r, \theta, \phi) = (0, 1, 2, 3)$ las ecuaciones de campo de Einstein ahora se escriben como

$$8\pi T^0_0 = 1/r^2 - e^{-\lambda}(1/r^2 - \lambda'/r) \quad (20)$$

$$8\pi T^1_1 = 1/r^2 - e^{-\lambda}(1/r^2 + v'/r) \quad (21)$$

$$8\pi T^2_2 = 8\pi T^3_3 = \frac{-1}{4}e^{-\lambda}(2v'' + v'^2 - \lambda'v' + 2(v' - \lambda')/r) \quad (22)$$

$$8\pi T_{01} = -\dot{\lambda}/r \quad (23)$$

Para dar un significado físico a (20), (21), (22) y (23), se han de introducir las coordenadas locales minkowskianas,

$$d\tau = e^{v/2} dt, \quad dx = e^{\lambda/2} dr, \quad dy = r d\theta, \quad dz = r \sin \theta d\varphi \quad (24)$$

De (24) y aplicando las transformaciones de Lorentz sobre el tensor momento-energía [39,40] para un fluido anisótropo se obtiene,

$$T^0_0 = \frac{\rho + P_r \omega^2}{1 - \omega^2} \quad (25)$$

$$T^1_1 = -\frac{\rho \omega^2 + P_r}{1 - \omega^2} \quad (26)$$

$$T_{01} = \frac{-e^{(v+\lambda)/2} \omega (\rho + P_r)}{1 - \omega^2} \quad (27)$$

$$T^2_2 = T^3_3 = -P_t \quad (28)$$

donde ρ , P_r , P_t y ω son la densidad de energía, la presión radial, la presión tangencial y la velocidad radial de materia medida por un observador local minkowskiano.

Para una esfera de fluido cuya densidad de energía es independiente de las coordenadas espaciales, se tiene que

$$\begin{aligned} \rho = \rho(t) & \quad 0 \leq r \leq a(t) \\ \rho = 0 & \quad r \geq a(t) \end{aligned} \quad (29)$$

donde $a(t)$ es el radio de la esfera. Supóngase que la relación entre las presiones radiales y tangenciales es la misma que en el caso estático:

$$P_t - P_r = \frac{2\pi Cr^2 (P_r^2 + \alpha P_r \rho + \rho^2)}{3(1 - \frac{2m}{r})} \quad (30)$$

En la aproximación de contracción lenta se desprecian las segundas derivadas temporales de la función métrica como también los términos de la forma $\omega^2, \dot{\lambda}\dot{\nu}, \dot{\nu}^2, \dot{\lambda}^2, \omega\dot{\lambda}, \dot{\nu}\omega$. De este modo, con esta aproximación se obtiene de (21) y (22) para $r \geq a(t)$

$$\frac{dP_r}{dr} = -(\rho + P_r) \frac{4\pi P_r r^3 + m(r)}{r^2(1 - 2m(r)/r)} + 2 \frac{(P_t - P_r)}{r} \quad (31)$$

Se escoge para este estudio la solución dada por :

$$P_r = \rho(1 - C) \left[\frac{(1 - \frac{8\pi\rho r^2}{3})^{\Gamma/2} - (1 - \frac{8\pi\rho a^2}{3})^{\Gamma/2}}{(\beta + \Gamma)(1 - \frac{8\pi\rho a^2}{3})^{\Gamma/2} - (\beta - \Gamma)(1 - \frac{8\pi\rho r^2}{3})^{\Gamma/2}} \right] \quad (32)$$

Usando las ecuaciones (20), (23), (25), (27) y (32) se deduce una ecuación que describe el movimiento de una partícula dentro de la esfera durante una contracción adiabática:

$$\frac{dr}{da} = \left(\frac{r}{a}\right) \left\{ \frac{(\beta + \Gamma)(1 - \frac{2M}{a})^{\Gamma/2} - (\beta - \Gamma)(1 - \frac{2M}{a}(\frac{r}{a})^2)^{\Gamma/2}}{(\bar{\beta} + \Gamma)(1 - \frac{2M}{a})^{\Gamma/2} - (\bar{\beta} - \Gamma)(1 - \frac{2M}{a}(\frac{r}{a})^2)^{\Gamma/2}} \right\} \quad (33)$$

donde M representa la masa total y se ha definido $\bar{\beta}$ como:

$$\bar{\beta} = 1 + C(1 - \frac{\alpha}{2})$$

Se ha enfocado la atención en el estudio de la relación presión local-densidad para el equilibrio el cual se pudo medir a través del coeficiente

$$\gamma = \frac{dP_{red} / (P_{red} - P_{red}^0)}{d\rho / \rho} \quad (34)$$

donde $P_{red} = P_r / (\frac{4\pi}{3})^{1/3}$, P_{red}^0 , que es el límite newtoniano para P_{red} , es obtenido

considerando la forma asintótica de P_{red}^0 para pequeñas densidades dada por

$$P_{red} \approx P_{red}^0 + \lambda \rho^{1/3}$$

donde λ es una función de $\Gamma(\alpha, C)$. P_{red}^0 y λ pueden ser obtenidos por extrapolación lineal de mínimos cuadrados del valor de P_{red} como función de $\rho^{1/3}$ en la región asintótica.

La ecuación (33) se integró numéricamente para el valor de $\alpha = 2$ y diferentes valores de C para las condiciones iniciales elegidas. Se obtuvo numéricamente el valor de γ para estos valores de α y C . La figura 9 muestra la variación de r/a y del coeficiente adiabático γ durante la contracción para $\alpha = 2$ y los valores del factor anisótropo $C=0.1, 0.35$ y 0.6 , para valores iniciales de $r/a= 0.1, 0.5, 0.75$ y 0.9 .

Finalmente, se comparó el comportamiento del coeficiente adiabático del modelo presentado con la solución de Bowers y Liang. Los valores de α y C son ajustados con el fin de mantener la misma dependencia radial en ambos modelos. Los resultados obtenidos se presentan en la figura 10 para los datos iniciales elegidos y los valores de $\Gamma/2 = q = 0.2, 0.45$ y 0.51 .

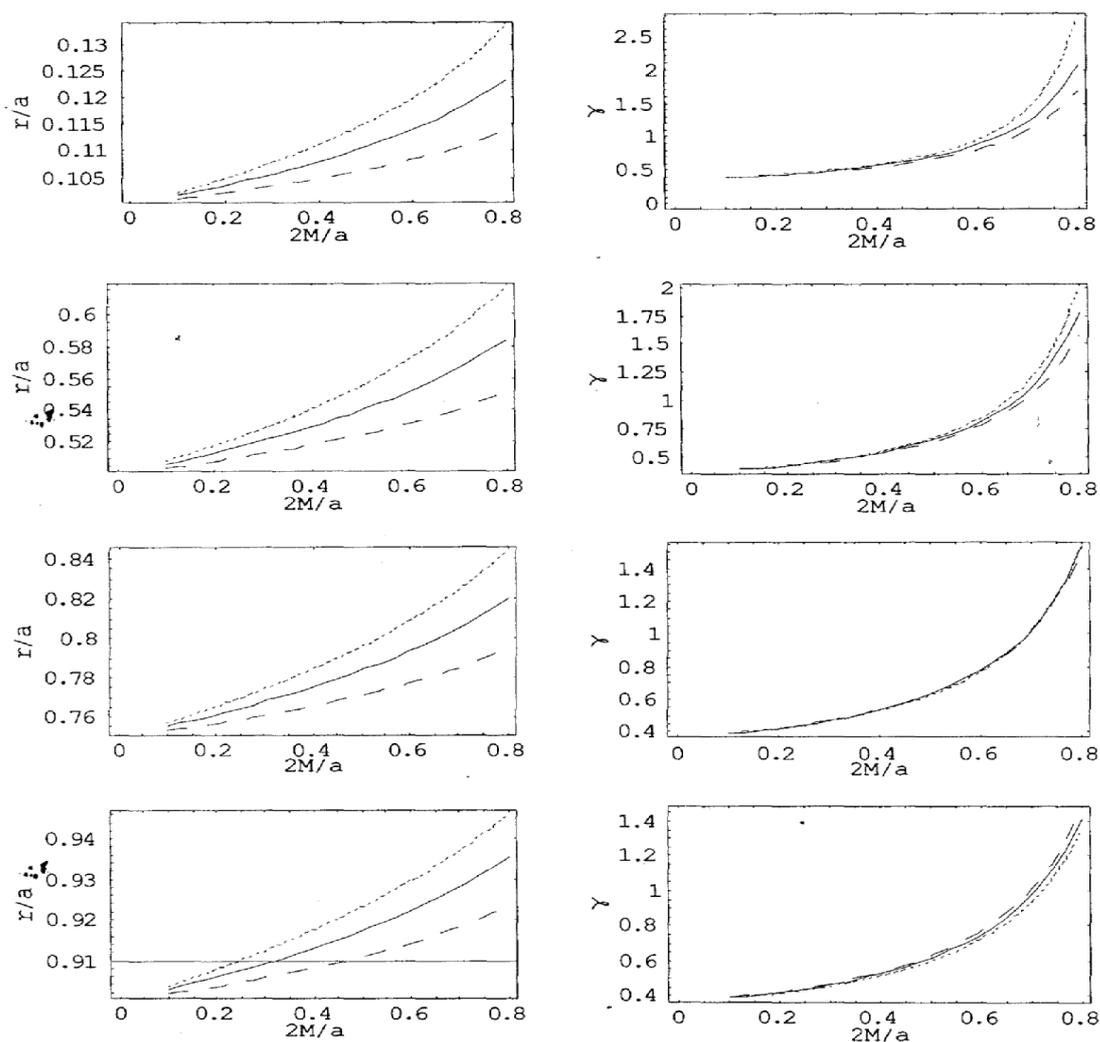


Figura 9. r/a en función de $2M/a$ durante una contracción adiabática para el modelo con $\alpha = 2$ para los gráficos del lado izquierdo. Variación de γ en función de $2M/a$ para los gráficos del lado derecho. Los gráficos de arriba hacia abajo corresponden a los valores iniciales de $r/a=0.1, 0.5, 0.75$ y 0.9 . $C=0.1, 0.35$ y 0.6 para la línea punteada, línea sólida y línea a trazos, respectivamente.

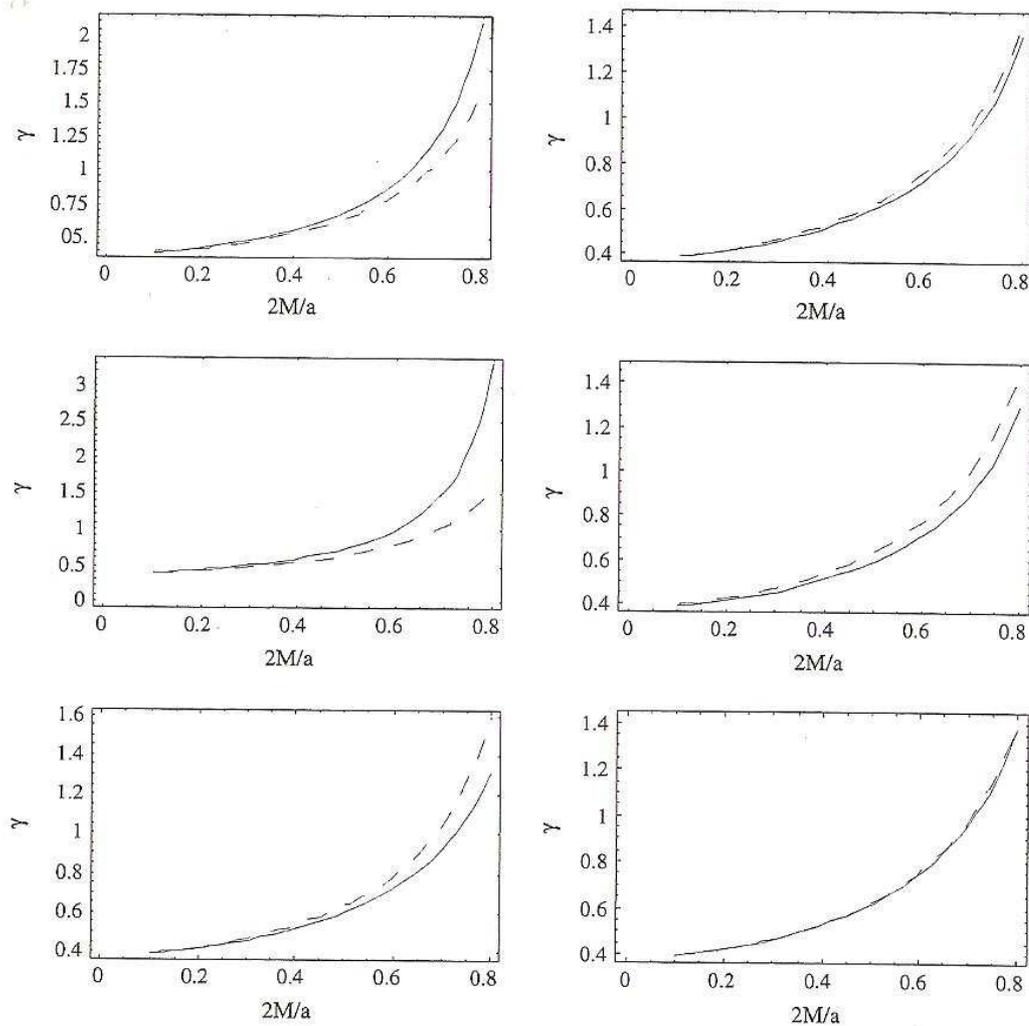


Figura 10. Coeficiente γ en función de $2M/a$. Los valores de $\Gamma/2$ varían de abajo hacia arriba como $\Gamma/2 = q = 0.2, 0.4$ y 0.51 . Para los gráficos del lado izquierdo se eligió $r/a = 0.1$ y para los gráficos del lado derecho se escogió $r/a=0.9$. Las líneas sólidas en todos los gráficos corresponden a la solución de Bowers y Liang y las líneas a trazos al nuevo modelo.

I.2.3. MODELOS DE DENSIDAD VARIABLE

La solución obtenida para estrellas anisótropas con densidad de energía uniforme se puede generalizar para estrellas con densidad no uniforme utilizando un procedimiento análogo al discutido anteriormente. Si se supone que la densidad de materia correspondiente a la solución isótropa del modelo de Tolman [2] es :

$$\rho = \frac{3}{56\pi r^2} \quad (35)$$

se obtiene que:

$$m(r) = \frac{3r}{14} \quad (36)$$

El factor de anisotropía es :

$$P_t - P_r = \frac{7Cr^2(P_r^2 + 3\alpha P_r / 56\pi r^2 + 9/(56\pi r^2)^2)}{4} \quad (37)$$

La ecuación (7) toma la forma:

$$\frac{dP_r}{dr} + 7\pi(1 - C/2\pi)rP_r^2 + \frac{3}{4}(1 - \alpha C/4\pi)\frac{P_r}{r} + \frac{9}{448\pi^3}(1 - C/2\pi) = 0 \quad (38)$$

de donde se obtiene para la presión radial:

$$P_r = \frac{y_1}{r^2} \left[-\frac{-2 + C_2 + 2C_1 y_1}{y_1 C_1 + (C_2 - 2 + C_1 y_1)(r/a)^{(2C_1 y_1 + C_2 - 2)}} + 1 \right] \quad (39)$$

Para este caso

$$C_1 = 7\pi(1 - C/2\pi); \quad C_2 = \frac{3}{4}(1 - \alpha C/4\pi); \quad C_3 = \frac{9}{448\pi}(1 - C/2\pi)$$

donde

$$y_1 = (2 - C_2)/2C_1 \pm [(C_2 - 2)^2 - 4C_1C_3]^{1/2}/2C_1$$

colocando

$$A = C_2 - 2 + 2C_1y_1 \quad y \quad B = C_2 - 2 + C_1y_1$$

La ecuación (39) se convierte en :

$$P_r = \frac{y_1}{r^2} \left[-\frac{A}{y_1C_1 + B(r/a)^A} + 1 \right] \quad (40)$$

Ahora bien, sustituyendo (37), (38) y (40) en (7) se obtiene:

$$v' = \frac{3}{4}r - \frac{14\pi y_1}{r} \left[\frac{A}{y_1C_1 + B(r/a)^A} + 1 \right] \quad (41)$$

Integrando esta expresión queda que:

$$e^v = \left[\left(1 - \frac{2M}{a}\right) \left(\frac{r}{a}\right)^{[3/4 + 14\pi y_1(C_1 - A)/C_1]} \right] \left[\left(\frac{r}{a}\right)^A \frac{B}{A} + \frac{y_1C_1}{A} \right]^{\frac{14\pi y_1}{C_1}} \quad (42)$$

En la superficie $r = a$

$$e^{v(r=a)} = 1 - 2M/a = 4/7$$

lo que es de esperarse de acuerdo con la expresión para la métrica exterior de Schwarzschild [16].

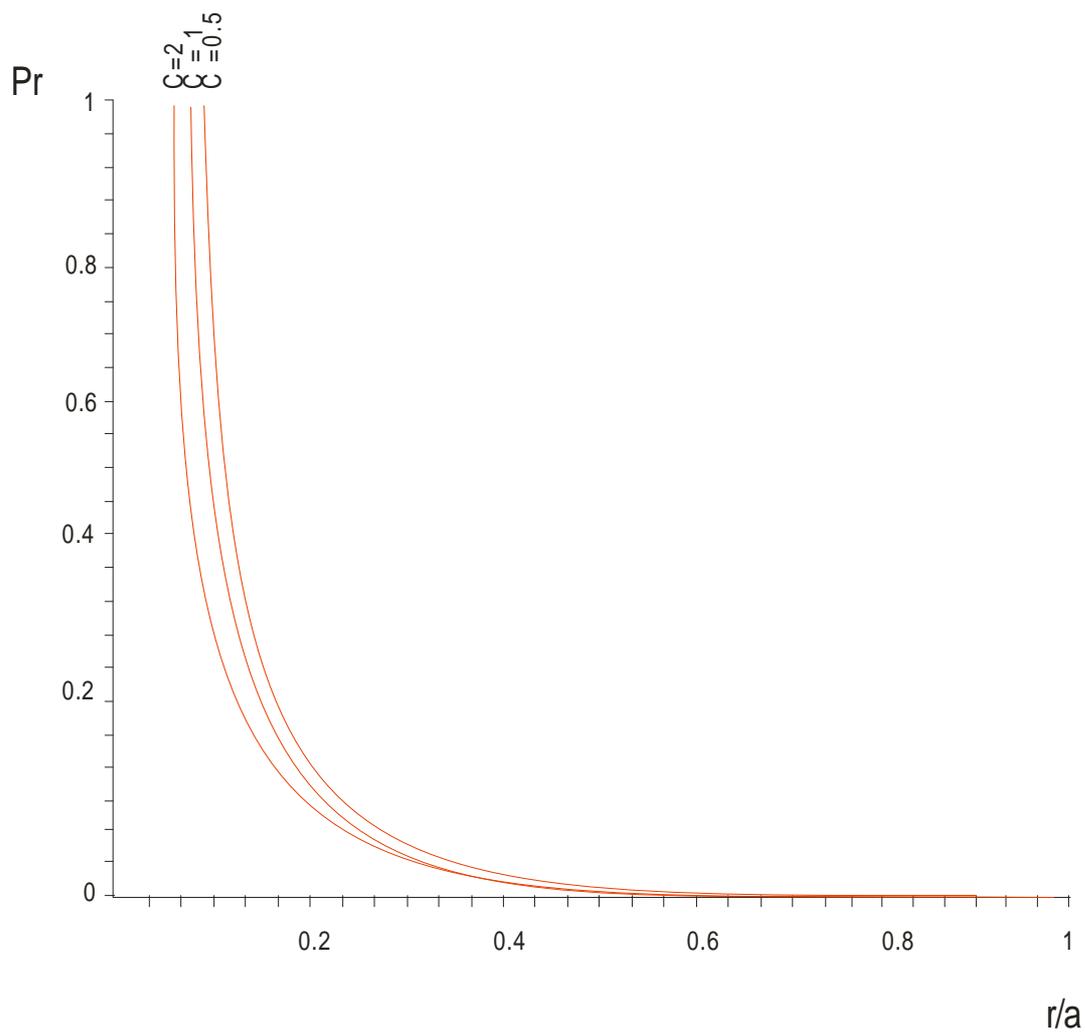
En la figura 11 se muestran la variación de la presión radial en función del radio r/a para valores del parámetro de anisotropía $C = 0.5, 1, 2$ cuando $\alpha = 2$ y un potencial gravitacional de $M/a = 0.4$. Para este caso se tiene que $-2\pi/3 < C < 2\pi$ y la expresión para la presión radial es:

$$P_r = \frac{B}{7\pi r^2 \left(1 - \frac{C}{2\pi}\right)} \left[\frac{\sqrt{1 + \frac{3C}{2\pi}}}{A \left(\frac{r}{R}\right)^{\sqrt{1 + \frac{3C}{2\pi}}} - B} + 1/2 \right] \quad (43)$$

$$\text{donde } A = \frac{5}{4} + \frac{3C}{8\pi} - \sqrt{1 + \frac{3C}{2\pi}} \quad \text{y} \quad B = \frac{5}{4} + \frac{3C}{8\pi} + \sqrt{1 + \frac{3C}{2\pi}}$$

Como es de esperarse para este modelo de densidad variable con $\alpha=2$ la presión radial y la densidad tienden a infinito en el centro de la estrella, comportamiento similar al observado en los modelos de Tolman [2] y Cosenza et al. [10]. Para la condición de isotropía con $C=0$, el cociente presión-densidad en el centro de la estrella es $\frac{P_c}{\rho_c} = \frac{1}{3}$, comportamiento que también se observa para la solución de Tolman VI [2,16].

Para $\alpha=2$ y $C=-2\pi/3$, se tiene que $P_c/\rho_c=1$, que es el valor límite natural del cociente para la ecuación de estado en el centro de la estrella. Es de esperarse que para cada parámetro ajustable de α , le corresponda un factor de anisotropía C para el cual $P_c/\rho_c=1$, comportamiento que difiere del modelo de Cosenza et al. [10] donde hay un solo valor de C para el cual se cumple esta condición.

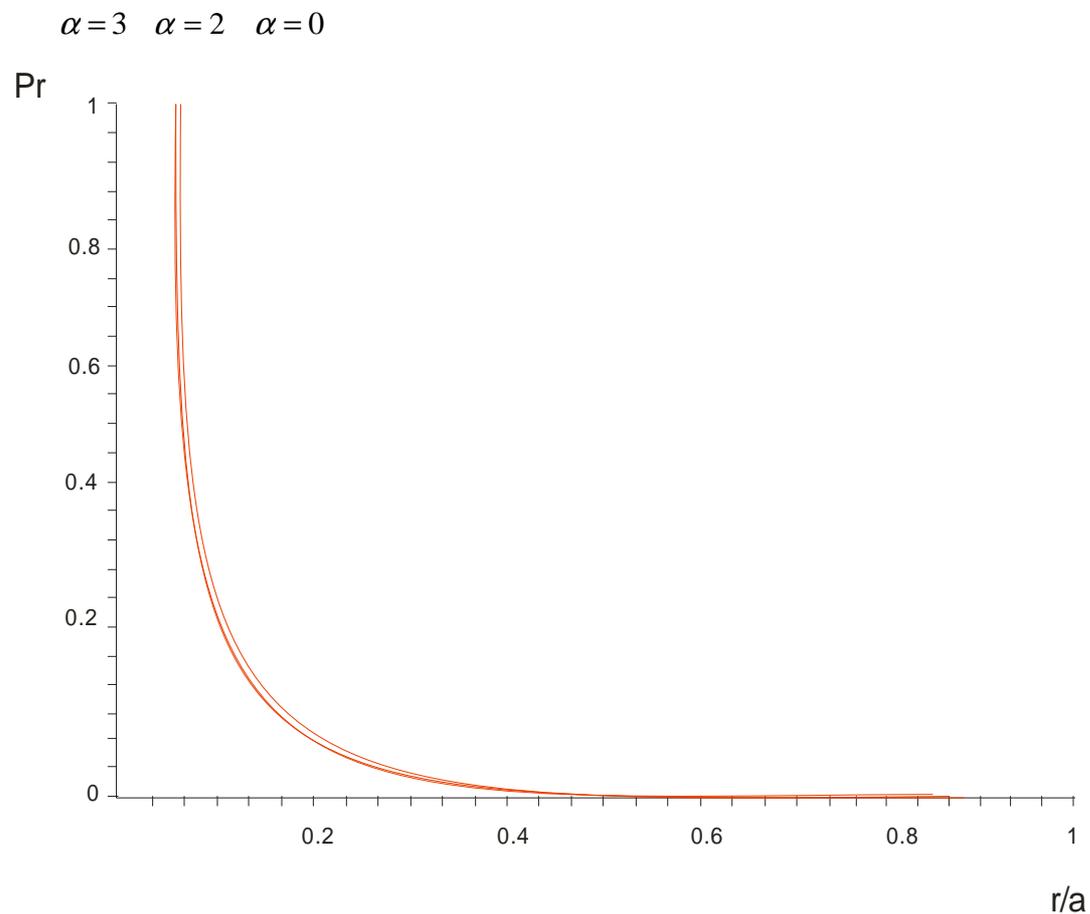


$$\frac{M}{a} = 0.4 \quad \alpha = 2$$

Figura 11. Presión Radial Pr en función del radio r/a para diferentes valores del parámetro de anisotropía C , manteniendo un potencial de $M/a = 0.4$ y $\alpha = 2$.

Se observa una disminución de la presión radial cuando se incrementa el parámetro C de anisotropía. En la figura 12 se representa la variación de la presión radial vs el radio de la estrella para un potencial gravitacional de $M/a=0.4$ y $C=0.5$ y los valores de $\alpha=0, 2, 3$. A diferencia de los modelos discutidos anteriormente, no hay una variación

apreciable de la presión radial de la estrella con el radio r/a cuando se modifican los valores del parámetro α .



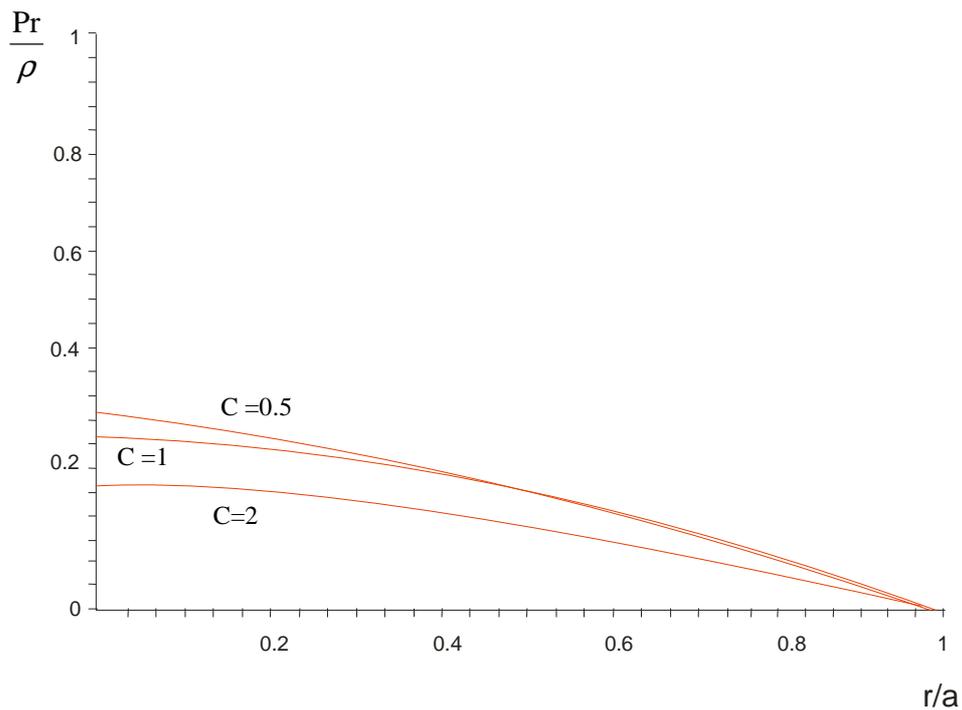
Pr vs r/a

$$\frac{M}{R} = 0.4$$

Figura 12. Presión radial Pr en función del radio r/a para diferentes valores de α y donde el potencial tiene un valor $\frac{M}{a} = 0.4$ y $C=0.5$.

En este modelo también se satisface la condición de energía fuerte, como se observa en la figura 13, donde se muestra la variación del cociente $\frac{P_r}{\rho}$ vs r/a para $\alpha=2$. Es

interesante hacer referencia al hecho de que un incremento en el parámetro C de anisotropía causa una disminución del cociente $\frac{P_r}{\rho}$ lo que es de esperarse debido a que mayores valores de C implican menores presiones radiales.



$$\frac{P_r}{\rho} \text{ vs } r/a \text{ para } \alpha = 2$$

Figura 13: P_r/ρ en función de r/a para un valor fijo de $\alpha = 2$ y $\frac{M}{a} = 0.4$ y diferentes valores de C

En la figura 14 se muestra el incremento de la presión radial con el radio r/a para valores del potencial gravitacional $M/a = 0.25, 0.35, 0.45$ y $\alpha=2$. Como es de esperarse

un incremento del potencial gravitacional ocasiona un aumento de la presión radial de la estrella.

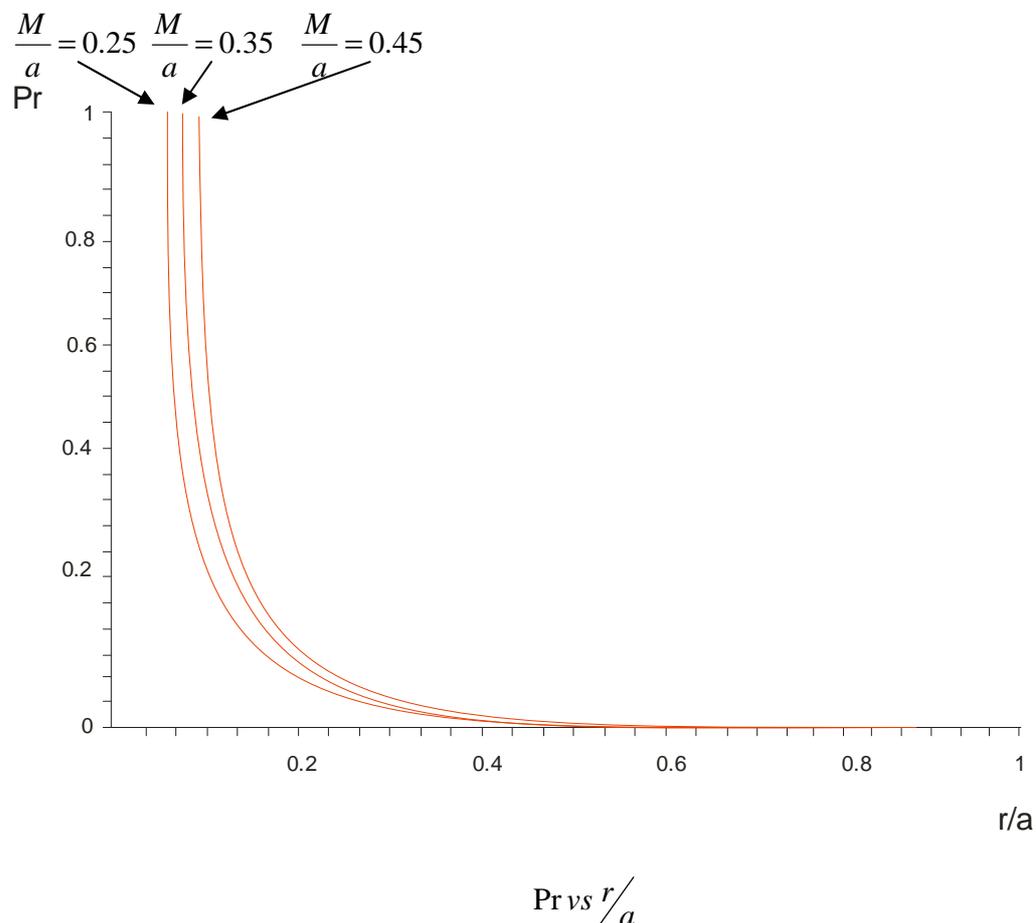


Figura 14. Presión Radial Pr en función de r/a para diferentes valores del Potencial gravitacional $\frac{M}{a}$ y para un valor fijo de $C=0.5$ y $\alpha = 2$

En la figura 15 se muestra la variación de la función métrica e^v para el valor de potencial gravitacional $M/a=0.4$ y $\alpha=2$ y se observa un decrecimiento en esta función a medida que se incrementan los valores del factor de anisotropía C . Este comportamiento también implica que se satisface la condición de energía fuerte para el modelo con densidad variable. Del mismo modo, en la figura 16 se presenta como varían los valores

de e^{ν} cuando se modifica el potencial gravitacional. Un aumento en el potencial M/a significa una disminución en los valores que adquiere la función métrica para $C = 0.5$ y $\alpha = 2$. En la figura 17 se muestra un comportamiento análogo al que se observa en la figura 11, en efecto, no hay un cambio apreciable de la función e^{ν} cuando varían los valores de α para un valor de $M/a=0.4$ y $C=0.5$.

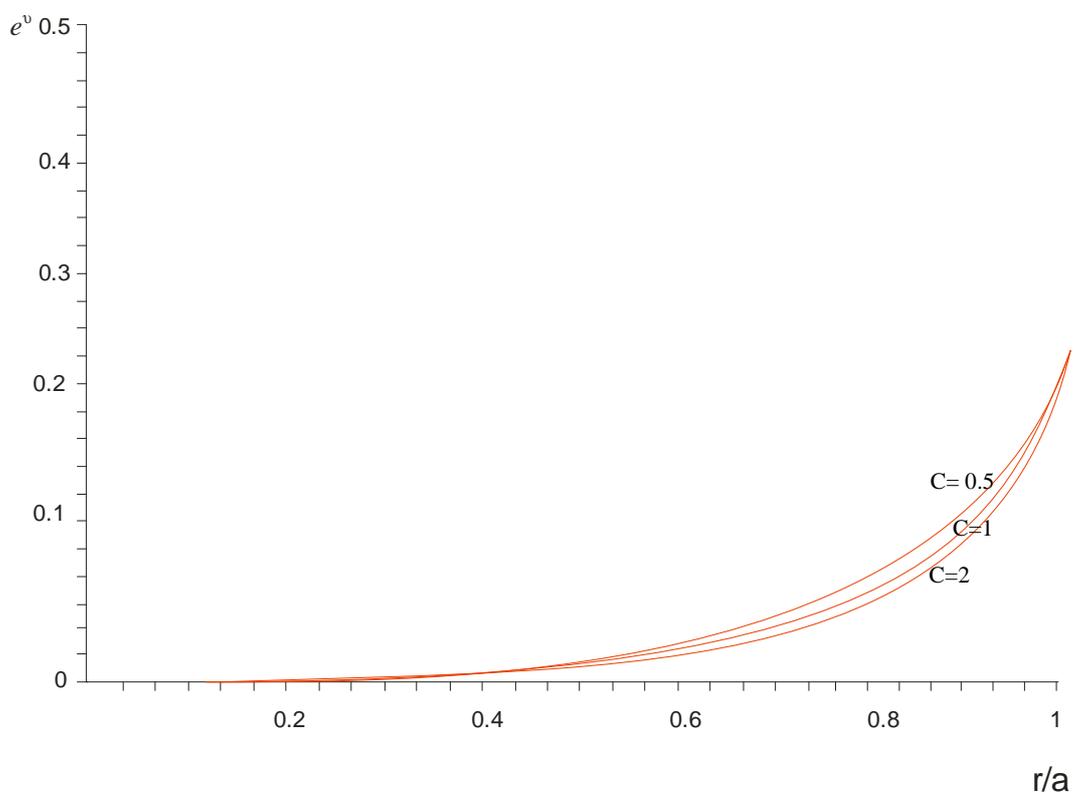
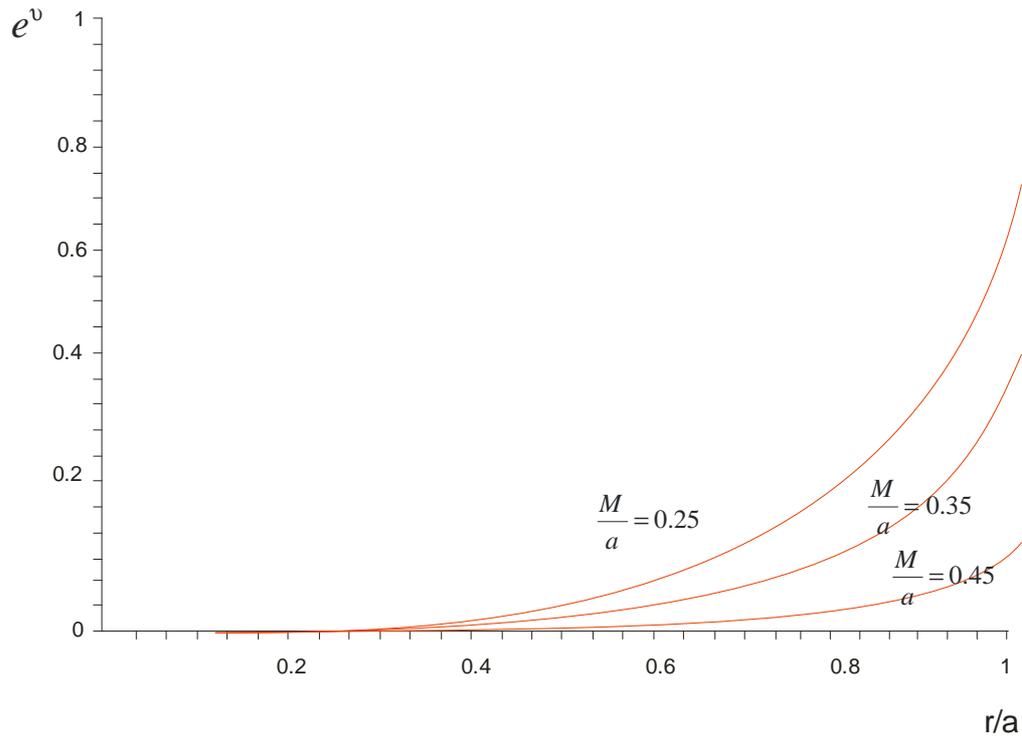


Figura 15. e^{ν} en función de r/a para un valor fijo $\frac{M}{a} = 0.4$, $c=0.5$ y $\alpha = 2$



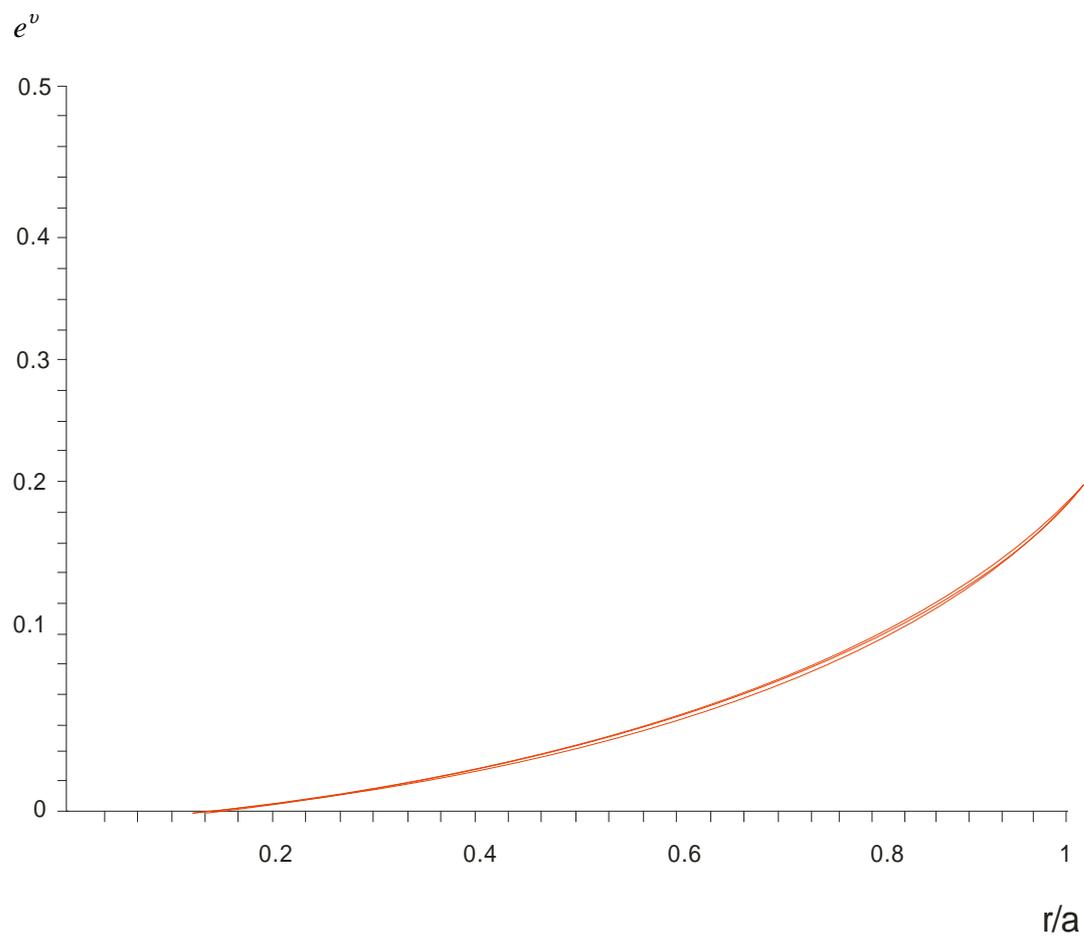
e^ν vs r/a para $C=0.5$

Figura 16. e^ν en función de r/a para diferentes valores del potencial gravitacional $\frac{M}{a}$, en todos los casos $C=0.5$ y $\alpha = 2$

La métrica para este modelo estará dada por:

$$ds^2 = \left[\left(1 - \frac{2M}{a}\right) \left(\frac{r}{a}\right)^{\left[\frac{3}{4} + \frac{14\gamma_1(C_1 - A)}{C_1}\right]} \right] \left[\left(\frac{r}{a}\right)^A \frac{B}{A} + \frac{y_1 C_1}{A} \right]^{\frac{14\gamma_1}{C_1}} dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r}} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

(44)



e^v vs r/a para $C=0.5$

Figura 17. e^v en función de r/a para diferentes valores de $\alpha = 0, 2$ y 3 y para un valor de $C = 0.5$ y $\frac{M}{a} = 0.4$

CAPÍTULO II

FRACTURAS Y FUERZAS DE MAREA

II.1. ANÁLISIS DE FRACTURAS Y FUERZAS DE MAREA

El concepto de fractura, introducido por Herrera [39] y Di Prisco et. al.[40,41] , describe el comportamiento de una distribución de fluido cuando sale del equilibrio dinámico, desde el momento en que aparecen fuerzas radiales de diferente signo en la distribución. Se dice entonces que hay fractura cuando la fuerza radial está dirigida hacia el centro de la estrella y cambia de dirección para algún valor de la coordenada radial. En caso contrario, cuando la fuerza está dirigida hacia afuera en el interior y cambia de dirección en las regiones más externas de la estrella, entonces hay una inversión.

Herrera [39] establece que la aparición de una fractura es inducida por la anisotropía local de una distribución de fluido, mientras que para el caso de un fluido perfecto fuera del equilibrio, la configuración tiende a expandirse o a colapsarse. Chan et.al.[53] estudiaron el papel que juega la anisotropía local sobre la inestabilidad dinámica y encuentran que pequeñas anisotropías pueden cambiar drásticamente la evolución de un sistema. Di Prisco et. al. [41] estudiaron el papel que desempeñan las fluctuaciones de la anisotropía local y encuentran que estas fluctuaciones son un factor crucial para que ocurran fracturas. En este capítulo se determina la aparición de fracturas cuando ocurren fluctuaciones en la anisotropía local para un modelo de estrella anisótropa con densidad de energía uniforme propuesto por Esculpi et. al. [11]. Se ha utilizado el procedimiento sugerido por Herrera [39] y Di Prisco et. al. [40,41] en el estudio de fracturas para objetos ultracompactos y anisótropos.

Existen un gran número de procesos físicos que dan origen a desviaciones de la isotropía local del fluido, como por ejemplo, las transiciones de fase exóticas que involucran la aparición de una fase anisótropa durante el proceso de colapso gravitacional [53]. La existencia de núcleos sólidos y la presencia de superfluidos puede originar anisotropía local [25]. También, la superposición de dos fluidos perfectos puede ser descrito como un fluido anisotrópico [54] .

II.2. ANÁLISIS DE FRACTURAS EN ESTRELLAS ANISÓTROPAS

Introduciendo la función de masa $m(r,t)$ a partir de (6) se puede escribir (7) en la forma:

$$R = \frac{dP_r}{dr} + \frac{4\pi r P_r^2}{1 - 2m/r} + \frac{P_r m}{r^2(1 - 2m/r)} + \frac{4\pi r \rho P_r}{1 - 2m/r} + \frac{\rho m}{r^2(1 - 2m/r)} - \frac{2(P_t - P_r)}{r} \quad (45)$$

donde R define la fuerza radial total sobre cada elemento de fluido y la función $m(r,t)$ está definida por:

$$e^{-\lambda} = 1 - 2m/r \quad (46)$$

Si el sistema sometido a estudio es sacado fuera del equilibrio por alguna perturbación, aparece una fuerza radial total R , la cual puede conducir a fracturas o inversiones de la fuente [39,40].

II.2.I FRACTURA EN EL MODELO PROPUESTO CON DENSIDAD DE ENERGÍA UNIFORME

Para el tratamiento de fracturas se ha considerado la solución encontrada por Esculpi et. al. [11], que representa una nueva solución exacta para estrellas anisotrópicas con densidad uniforme en la que la presión radial tiene la siguiente forma:

$$P_r = \rho_0 \left[\frac{1-C}{\beta+\Gamma} \right] \left[\frac{(1-2m/r)^{\Gamma/2} - (1-2M/R)^{\Gamma/2}}{(1-2M/R)^{\Gamma/2} - \left(\frac{\beta-\Gamma}{\beta+\Gamma} \right) (1-2m/r)^{\Gamma/2}} \right] \quad (47)$$

C es la constante de anisotropía, $\beta = 2 \left(1 - \frac{\alpha C}{4} \right)$, $\Gamma = [\beta^2 - (3-C)(1-C)]^{1/2}$ y α es

un parámetro que mide el grado de anisotropía. Para $\alpha=2$ se tiene una expresión para la presión radial que presenta la misma dependencia funcional en la coordenada radial de la solución de Schwarzschild.

Se introducen ahora las siguiente variables adimensionales:

$$\mu = 1 - 2M/a \quad \text{y} \quad x = r/a \quad (48)$$

la expresión (47) se puede entonces escribir en la forma:

$$P_r = \rho_0 f(c) \varphi(x) \quad (49)$$

en la que:

$$\varphi(x) = \frac{[1 - (1-\mu)x^2]^{\Gamma/2} - \mu^{\Gamma/2}}{\mu^{\Gamma/2} - \left[\frac{\beta-\Gamma}{\beta+\Gamma} \right] [1 - (1-\mu)x^2]^{\Gamma/2}} \quad (50)$$

$$y \quad f(c) = \frac{1-C}{\beta+\Gamma} \quad (51)$$

Se procede ahora a perturbar el sistema de acuerdo con el esquema establecido por Herrera [39] y Di Prisco et. al., [40,41] donde se perturba la densidad y la anisotropía y la dependencia radial de P_r queda invariante, es decir:

$$\tilde{P}_r = \tilde{\rho}_0 \tilde{f}(C) \varphi(x) \quad (52)$$

$$\tilde{C} = C + \delta C \quad (53)$$

$$\tilde{\rho}_0 = \rho_0 + \delta \rho_0 \quad (54)$$

y se ha considerado que

$$\gamma = \tilde{\rho}_0 / \rho_0 \quad (55)$$

la tilde indica la cantidad que se esta perturbando.

A partir de (47) , (48) , (49) y (50) la expresión para R toma la forma:

$$R = \rho_0 \frac{f(C)}{a} \frac{d\varphi(x)}{dx} + \frac{x(1-\mu)\rho_0}{a} \frac{[f^2\varphi(x)^2(3-C) + (1-C) + f(C)\varphi(x)(4-\alpha C)]}{2[1-(1-\mu)\alpha x^2]} \quad (56)$$

Para calcular \tilde{R} se ha de introducir la siguiente función adimensional

$$\tilde{R} = a\tilde{R} / \rho_0 \quad (57)$$

y la expresión para \tilde{R} queda como

$$\tilde{R} = \tilde{f}(C) \frac{d\varphi(x)}{dx} + \gamma^2 x \frac{(1-\mu)}{2} \frac{[f^2\varphi^2(3-C) + (1-C) + f\varphi(x)(4-\alpha C)]}{[1-(1-\mu)\gamma x^2]} \quad (58)$$

Teniendo en cuenta que:

$$\delta\tilde{R} = \frac{\partial\tilde{R}}{\partial\gamma} \delta\gamma \Big|_{\tilde{c}=C}^{\gamma=1} + \frac{\partial\tilde{R}}{\partial C} \delta C \Big|_{\tilde{c}=C}^{\gamma=1} \quad (59)$$

Se obtiene la expresión:

$$\begin{aligned} \delta\tilde{R} = & \left\{ f \frac{d\varphi(x)}{dx} + \frac{x(1-\mu)}{[1-(1-\mu)x^2]^2} \left[1 - \frac{(1-\mu)x^2}{2} \right] \left[1 - C + f^2\varphi^2(3-C) + (4-\alpha C)f\varphi(x) \right] \right\} \delta\gamma \\ + & \\ & \left(\frac{\partial f}{\partial C} \frac{d\varphi(x)}{dx} + \frac{x(1-\mu)}{2[1-(1-\mu)x^2]} \left\{ -1 - f^2\varphi^2 - \alpha f\varphi(x) + \frac{\partial f}{\partial C} [2f(3-C)\varphi^2 + \varphi(x)(4-\alpha C)] \right\} \right) \delta C \end{aligned} \quad (60)$$

Para que ocurra una fractura es necesario que \tilde{R} tenga un cero en el intervalo $0 \leq x \leq 1$.

En la figura 18 se observa como varía la fuerza radial \tilde{R} con el radio de la estrella para un valor de factor de anisotropía $C=0.73$ y diferentes valores de α , manteniendo fijo el valor del potencial gravitacional e igual a $\mu = 0.2$ y donde se ha considerado que $P_r \geq 0$, $\Delta > 0$. Se muestra que a medida que aumenta α la fuerza radial \tilde{R} disminuye; para valores de $\alpha < 2$ ocurren cambios de signos y la fractura ocurre cada vez en regiones cercanas a la superficie de la estrella a medida que aumenta α , lo que corresponde a la presencia de fracturas para estos valores de α . En este modelo, al igual en el de Bowers y Liang [6], la fractura se presenta para un bajo valor de μ [41], es decir para configuraciones más compactas. Un comportamiento análogo se presenta en la figura 19 para un factor de anisotropía de $C = 0.45$ y el mismo valor del potencial

gravitacional. En ambas figuras se observa como un aumento de C provoca una disminución de la fuerza radial \tilde{R} , al contrario de lo que ocurre en el modelo de Bowers y Liang, en el que se observa que a medida que disminuye h , donde $h=1-2C$, que es el parámetro que mide la anisotropía aumenta la fuerza radial, como se muestra en la figura 20. Para los modelos considerados, pequeñas fluctuaciones en los valores de C y h , es decir cambios en la anisotropía local del fluido, pueden ocasionar la aparición de fracturas, por lo que varia la evolución del sistema.

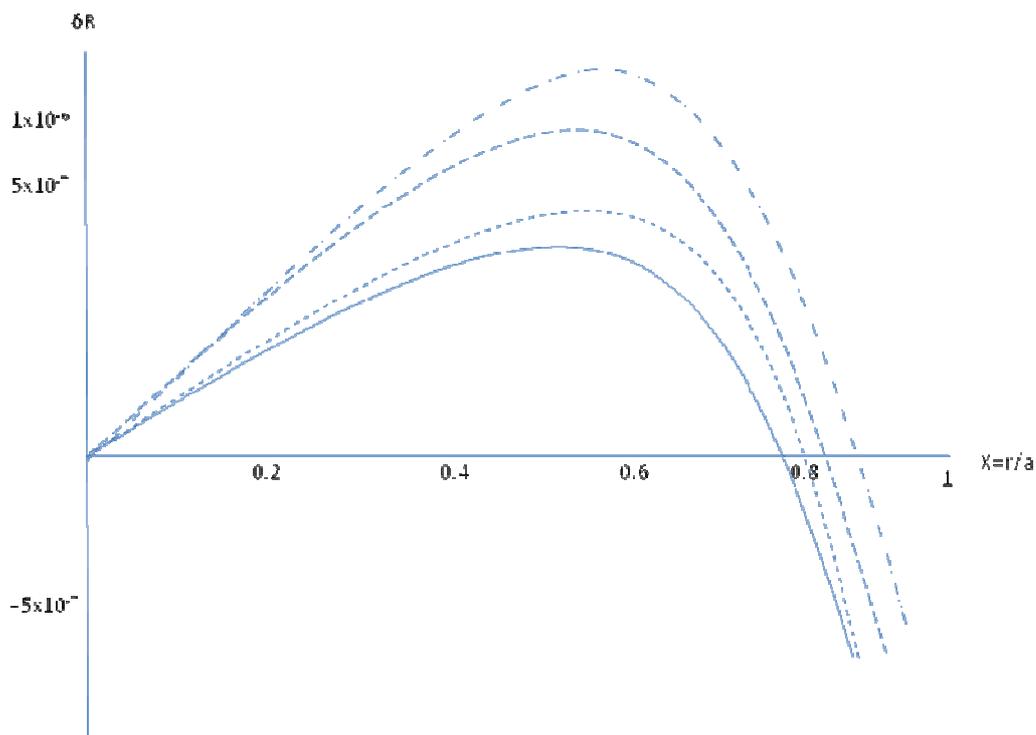


Figura 18. $\delta\tilde{R}$ en función de X para $\mu=0.2$, $C=0.73$ y diferentes valores del parámetro α . La línea con guiones y con dos puntos alternados corresponde a $\alpha=1.5$, la línea con guiones corresponde a $\alpha=1.0$, con guiones cortos es $\alpha=0.5$ y la línea sólida es para $\alpha=0.25$

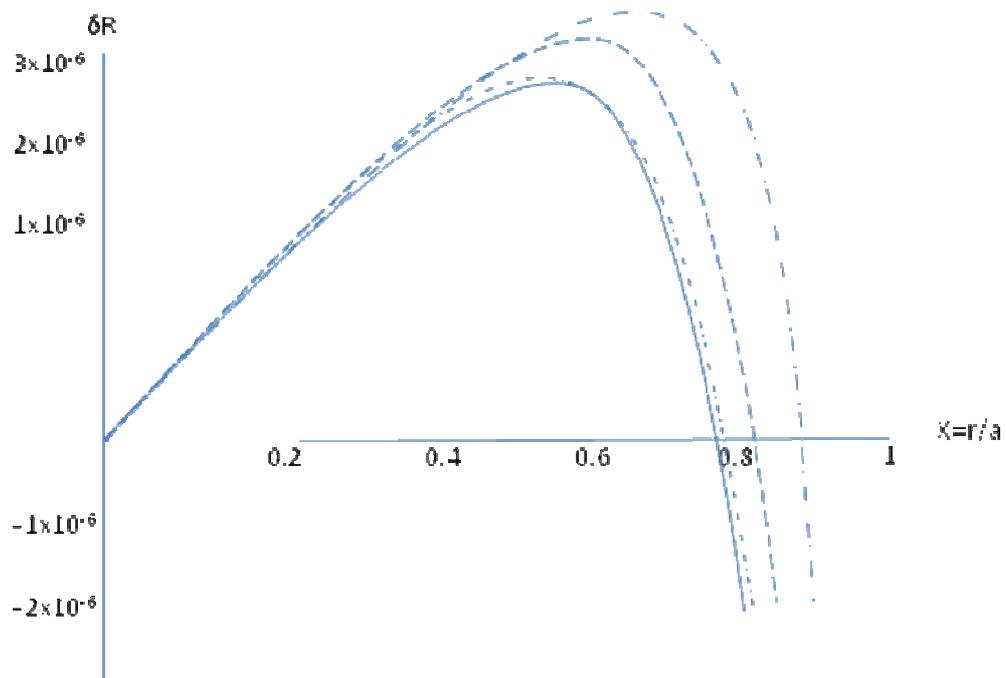


Figura 19. $\delta \hat{R}$ en función de X para $\mu=0.2$, $C=0.45$ y diferentes valores del parámetro α . La línea con guiones y con dos puntos alternados corresponde a $\alpha=1.5$, la línea con guiones corresponde a $\alpha=1.0$, con guiones cortos es $\alpha=0.5$ y la línea sólida es para $\alpha=0.25$

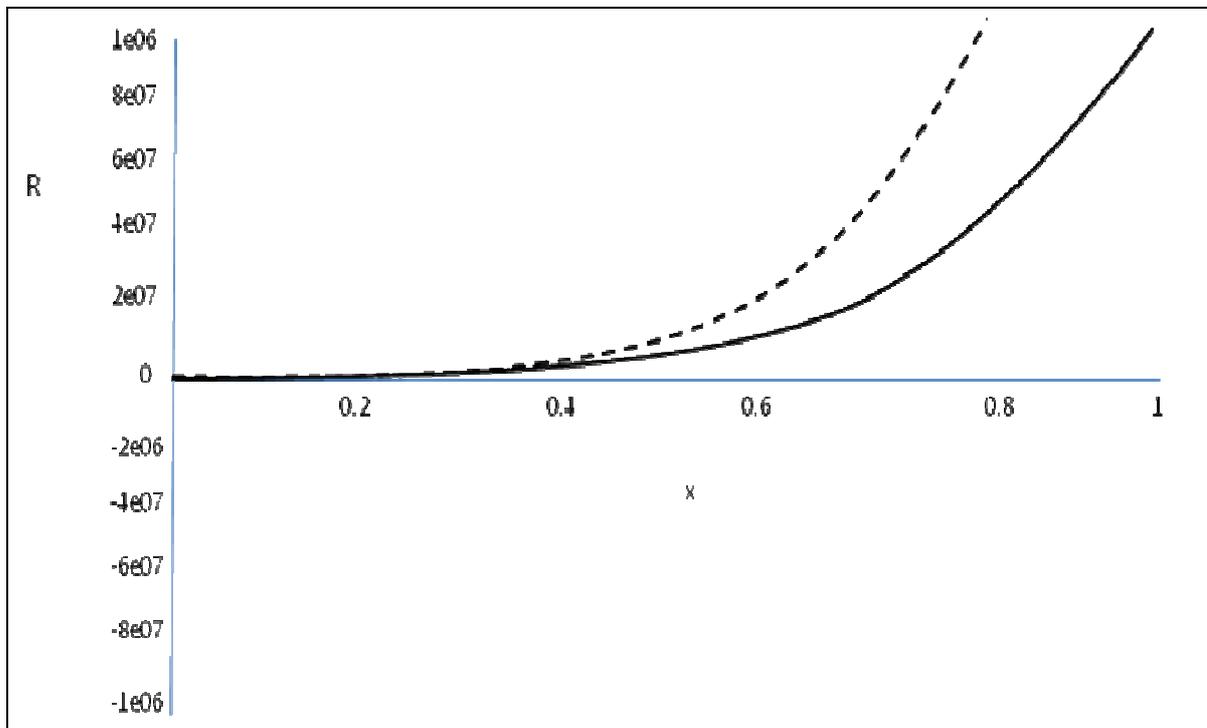


Figura 20. $\delta\hat{R}$ en función de X para $\mu=0.2$ para el modelo de Bowers y Liang. La línea continua y la línea con guiones corresponde a $C=0.45$; $h=0.1$ y $C=0.73$; $h=-0.46$, respectivamente.

CAPÍTULO III

III.1 . MODELOS DE ESTRELLAS DE ENERGÍA OSCURA

El fenómeno de colapso gravitacional es de importancia fundamental en astrofísica y ha sido objeto de gran interés en la comunidad relativista desde la formulación de la teoría de la relatividad general.

Antes de 1960 al objeto conocido como agujero negro se le refería como a una estrella colapsada [55]. Oppenheimer y Snyder [56], en 1939 hicieron los primeros estudios del colapso gravitacional que ocasionaban la formación de un agujero negro, sin embargo, fue a partir de 1965 que se inicio una era de intensa investigación en la física de los agujeros negros. En esta línea de investigación, es interesante notar que un estado final de colapso gravitacional ha sido propuesto por Visser y Wiltshire [57], el cual es un modelo simplificado del de Mazur y Mottola [50] y consiste de un objeto compacto, gobernado por una ecuación de estado dada por $p = -\rho$ para una solución interior de Schwarzschild en la interfase de juntura. Este modelo, denominado como “gravastar” o estrella de vacío gravitacional no tiene singularidad en el origen y es termodinámicamente estable [49].

Hoy en día ya es aceptado el hecho de que el Universo se encuentra en una fase de expansión acelerada y esta aceleración cósmica es uno de los problemas mas recientes en cosmología [49]. Una posible explicación para esta expansión es la energía oscura la cual se define como una forma hipotética de energía que tiende a incrementar la aceleración de la expansión del universo, resultando en una fuerza gravitacional repulsiva y produciendo una presión negativa [49,50]. La energía oscura es un fluido cósmico homogéneo parametrizado por una ecuación de estado dada por $\omega = p/\rho < -1/3$,

donde p es la presión espacialmente homogénea y ρ es la densidad de la estrella de energía oscura [46,47,49,50]. Para el caso particular $\omega = -1$ se obtiene el modelo de “gravastar “ de Visser y Wiltshire [57]. El rango para el cual $\omega < -1$ ha sido denotado como energía fantasma y poseen algunas propiedades bien características, tales como un incremento infinito de la densidad de energía [51], temperaturas negativas [52], violación de la condición de energía nula lo que proporciona un escenario natural para la existencia de agujeros de gusano [48, 49, 58] .

Según Lobo [46], la noción de energía oscura se puede extender a espacio-tiempos simétricos esféricamente inhomogéneos teniendo en cuenta que la presión en la ecuación de estado de energía oscura es una presión radial negativa y la presión tangencial puede ser determinada con las ecuaciones de campo de Einstein, por lo que el concepto de “ gravastar “ se puede generalizar con la inclusión de una solución interior gobernada por una ecuación de estado $p = \omega\rho$ con $\omega < -1/3$; el gravastar que cumpla con esta condición se le llamara estrella de energía oscura, de acuerdo con la definición de Chapline [47]. Basándose en esta consideración, Lobo [46] estudia algunas configuraciones de este tipo de estrellas con distintas funciones de masa y analiza la estabilidad dinámica de estos modelos aplicando el formalismo de estabilidad general desarrollado por Lobo y Crawford [59] . Asimismo, Chan et al. [60], proponen un modelo de estrella de energía oscura en el que la función de masa es una consecuencia natural de las ecuaciones de campo de Einstein y con densidad de energía homogénea en su centro.

El objetivo de este capítulo es proponer un nuevo modelo de estrella de energía oscura con una función de masa conocida dependiente de un parámetro ajustable, pero que no ha sido utilizada para modelar este tipo de objetos estelares. Basándose en Chan

et al. [60] se ha considerado que la denominación de energía oscura se aplica a fluidos que violan la condición de energía fuerte $\rho + p_r + 2p_t \geq 0$, $\rho + p_r \geq 0$ y $\rho + p_t \geq 0$.

Asimismo, se efectúa el correspondiente análisis de estabilidad del nuevo modelo presentado. Se encuentra que las regiones de estabilidad se incrementan para un decrecimiento del parámetro ω de energía oscura. Para la propuesta de este modelo, se ha utilizado la metodología sugerida por Lobo [46] en el estudio de estrellas de energía oscura.

III.2. ECUACIONES PARA LAS ESTRELLAS DE ENERGÍA OSCURA.

Considerar un espacio-tiempo interior dado por la siguiente métrica [46,49,61]:

$$ds^2 = -e^{2\phi(r)} dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2m(r)}{r}} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (61)$$

donde $\phi(r)$ y $m(r)$ son funciones arbitrarias de la coordenada radial r . $\phi(r)$ es la función asociada al corrimiento al rojo definida como $\phi(r) = -\int_r^\infty g(\tilde{r}) d\tilde{r}$ y $m(r)$ es la función de masa. Nuevamente el tensor momento-energía para una distribución de materia anisótropa está dado por (2) y la ecuación de campo de Einstein $G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$, donde $G_{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein, proporciona las siguientes relaciones:

$$m' = 4\pi r^2 \rho \quad (62)$$

$$g(r) = \frac{m + 4\pi r^3 P_r}{r(r - 2m)} \quad (63)$$

Usando la ecuación de estado de energía oscura, $p_r = \omega\rho$, y en base a las ecuaciones (62) y (63) se obtiene que:

$$g(r) = \frac{m + \omega m'}{r(r - 2m)} \quad (64)$$

Teniendo en cuenta que $p_r = \omega \rho$, la expresión (7) toma la forma:

$$p_r' = -p_r \left(\frac{1 + \omega}{\omega} \right) \left(\frac{m + \omega m'}{r(r - 2m)} \right) + \frac{2(p_t - p_r)}{r} \quad (65)$$

De acuerdo con (62) se puede expresar (65) de la siguiente forma:

$$\Lambda = \frac{\omega}{8\pi r^2} \left[m'' r - 2m' + \left(\frac{1 + \omega}{\omega} \right) m' r g \right] \quad (66)$$

$\Lambda = p_t - p_r$ es el factor de anisotropía y es una medida de la anisotropía de la presión del fluido comprimido en la estrella de energía oscura. Λ representa una fuerza debida a la anisotropía del modelo estelar, que es repulsiva si $p_t > p_r$ y atractiva si $p_t < p_r$.

III.3. ESTABILIDAD DE LAS ESTRELLAS DE ENERGÍA OSCURA.

Se puede modelar una métrica dada por (61) y que satisfaga la ecuación de estado $p_r = \omega \rho$ con $\omega < -1$. Usando el formalismo de Israel [62], el tensor superficial de momento-energía S_j^i y la condición de juntura provista por las ecuaciones de Lanczos [49], se obtienen las siguientes expresiones:

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi a} \left(\sqrt{1 - \frac{2M}{a} + \dot{a}^2} - \sqrt{1 - \frac{2m}{a} + \dot{a}^2} \right) \quad (67)$$

$$P = \frac{1}{8\pi a} \left(\frac{1 - \frac{M}{a} + \dot{a}^2 + a\ddot{a}}{\sqrt{1 - \frac{2m}{a} + \dot{a}^2}} - \frac{1 + \omega m' - \frac{m}{a} + \dot{a}^2 + a\ddot{a} + \frac{\dot{a}^2 m'(1 + \omega)}{1 - \frac{2m}{a}}}{\sqrt{1 - \frac{2m}{a} + \dot{a}^2}} \right) \quad (68)$$

donde σ y P son la densidad de energía superficial y la presión superficial tangencial, respectivamente. La ecuación (64) evaluada en a se usa para eliminar $g(r)$ de la relación de la presión tangencial [58]. Se puede utilizar la ecuación dada por:

$$S^i_{j/i} = [T_{\mu\nu} e^{\mu}_{(j)} \eta^{\nu}]^+_{-} \quad (69)$$

donde $S^i_{j/i}$ es la divergencia del tensor energía-impulso, η^{ν} es el cuadrivector normal unitario a la interfase de juntura Σ ; $e^{\mu}_{(j)}$ son las componentes de los vectores de la base holonómica tangentes a Σ ; y $[X]^+_{-}$ denota la discontinuidad a través de la interfase [46,49]. De la expresión (69) se deduce que:

$$\sigma' = -\frac{2}{a}(\sigma + P) + \Xi \quad (70)$$

donde Ξ esta dada por:

$$\Xi = -\frac{m'(1 + \omega)}{4\pi a(a - 2m)} \sqrt{1 - \frac{2m}{a} + \dot{a}^2} \quad (71)$$

De acuerdo con Lobo [49], la masa superficial de la película delgada es $m_s = 4\pi a^2 \sigma$ por lo que a partir de (67) se puede obtener la masa total de la estrella de energía oscura que es:

$$M = m(a_0) + m_s(a_0) \left[\left(1 - \frac{2m(a_0)}{a_0}\right)^{1/2} - \frac{m_s}{2a_0} \right] \quad (72)$$

Teniendo en cuenta la derivada radial σ' la ecuación (70) se puede reordenar para deducir la siguiente expresión:

$$\left(\frac{m_s}{2a}\right)' = \gamma - 4\pi\sigma' \eta \quad (73)$$

con el parámetro η definido como $\eta = P'/\sigma'$ y γ esta dado por:

$$\gamma = \frac{4\pi}{a} (\sigma + P) + 2\pi a \Xi' \quad (74)$$

La ecuación (73) juega un papel importante al momento de determinar las regiones de estabilidad de las respectivas soluciones donde η se usa como una parametrización del equilibrio estable por lo que no es necesario especificar una ecuación superficial de estado [49]. Este parámetro η usualmente es interpretado como la velocidad del sonido y debe esperarse que $0 < \eta \leq 1$ basado en la exigencia de que la velocidad del sonido no debería superar la velocidad de la luz. De acuerdo a Lobo [49] para el modelo propuesto en este trabajo de investigación se ha considerado que $0 < \eta \leq 1$ en la capa superficial y se ha impuesto la condición de que la densidad de energía superficial sea positiva $\sigma > 0$.

III.3. MODELO PROPUESTO DE ESTRELLA DE ENERGÍA OSCURA.

En el presente trabajo se ha propuesto un modelo de estrella de energía oscura utilizando una función de masa conocida pero que no ha sido usada anteriormente para modelar este tipo de objetos estelares. Considerar la siguiente función de masa propuesta por Chaisi y Maharaj [44] :

$$m(r) = \frac{r}{2} \left(j + \frac{k}{3} r^2 + \frac{l}{5} r^4 \right) \quad (75)$$

donde j, k y l son constantes. Tomando j = k = 0 queda que:

$$m(r) = \frac{lr^5}{10} \quad (76)$$

La ecuación (76) representa un incremento de la densidad de energía, en contraste con modelos conocidos. Esta dependencia radial de la masa ocurre cuando se modela el fenómeno de gravitación repulsiva en el vacío relacionada a los modelos inflacionarios del universo. En el modelo electromagnético de masas de Tiwari et. al. [63], el cual obedece la ecuación de estado $P = -\rho$, la masa gravitacional crece como r^5 dentro de la estrella. Wyman [64] propone una solución similar en el que la distribución de la densidad de energía viene dada por $\rho = ar^n$ donde a y n son constantes. También Bayin [65] ha considerado este tipo de distribución de energía, la cual puede ser usada para explicar fenómenos donde ocurre inversión de la densidad. Además esta función de masa pudiera describir porciones de estrellas.

Para esta función de masa, la violación de la condición de energía fuerte conduce a

$$5m(r)\omega^2 + [5r-4m(r)]\omega + r - m(r) \leq 0 \quad (77)$$

la cual siempre es satisfecha para $\omega < -1/5$ y $\omega > 1 - \frac{r}{m(r)}$ donde $m(r)$ y r son la masa y la coordenada radial, respectivamente.

La métrica del espacio-tiempo para esta solución esta dada por:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{lr^4}{5}\right)^{-(5\omega+1)/4} dt^2 + \frac{dr^2}{1 - lr^4/5} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (78)$$

Esta métrica puede ser reescrita como:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)^{-(5\omega+1)/4} dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2m(r)}{r}} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (79)$$

Los componentes del tensor energía-impulso están dados por $p_r = \omega lr^2$ y

$$p_t = 2\omega lr^2 \left[1 + \frac{(\omega+1)(\omega+1/5)lr^4}{8\omega(1 - lr^4/5)}\right] \quad (80)$$

La variación de la condición de energía fuerte versus la coordenada radial esta representada en la figura 21 para diferentes valores de ω con un valor fijo del potencial gravitacional de $M/a=0.38$ y $l = 0.1$. Para $\omega < -1/5$ toma valores negativos indicando una violación de la condición de energía fuerte. En las figuras 22 y 23 se muestra, para un valor fijo del potencial gravitacional M/a y valores fijos de l , la variación del cociente de la presión tangencial a la densidad de energía P_t/ρ dentro de la esfera para diferentes valores de ω . Se observa como la condición de energía dominante es totalmente satisfecha para diferentes valores de l y ω . Por ejemplo, para $l = 0.02$ y M/a

= 0.26 se tiene $-1.3 < \omega < -1/5$; si $l = 0.06$, $M/a=0.34$, se tiene que $-1.2 < \omega < -1/5$ y para $l = 0.1$, $M/a = 0.38$, $-1.1 < \omega < -1/5$.

En la figura 24 se representa la variación de la presión radial P_r vs la coordenada radial con $M/a=0.38$ y $l=0.1$, para diferentes valores de ω . Se observa como P_r disminuye para un decrecimiento del parámetro ω de energía oscura. En la figura 25, para un valor de $M/a = 0.38$ y $l = 0.02; 0.06$ and 0.1 , se muestra la dependencia de la densidad de energía ρ con $x = r/a$. Se observa como ρ se incrementa hacia el exterior de la esfera a medida que aumentan los valores de l .

Se estudio como los valores de algunos parámetros modifican la métrica del espacio-tiempo, manteniendo fijos el valor de M/a y ω y tomando diferentes valores de l . En la figura 26, se muestra como varia la función métrica $e^{2\phi}$ para valores de $l=0.02; 0.06$ y 0.1 manteniendo fijos $M/a = 0.38$ y $\omega = -0.5$, respectivamente. Para elevados valores de l , la función métrica presenta un decrecimiento, lo que es equivalente a una violación de la condición de energía fuerte para valores fijos de M/a y l .

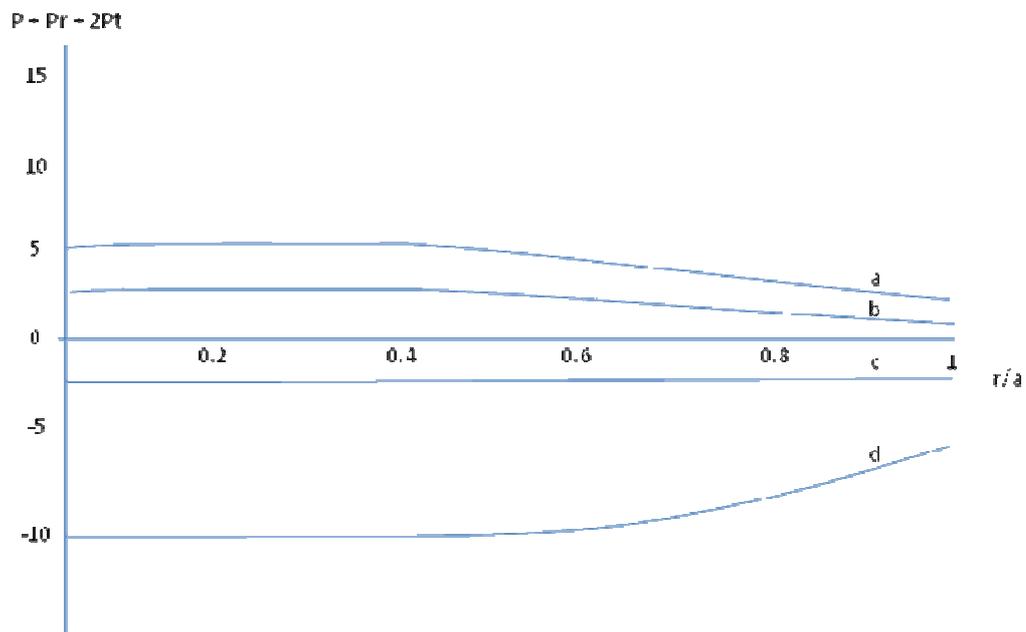


Figura 21. La condición de energía fuerte en función de r/a con $M/a = 0.38$ y $l = 0.1$ para diferentes valores de ω . Las líneas señaladas con a,b,c y d corresponden a $\omega = -0.1, -0.15, -0.25$ y -0.4 , respectivamente.

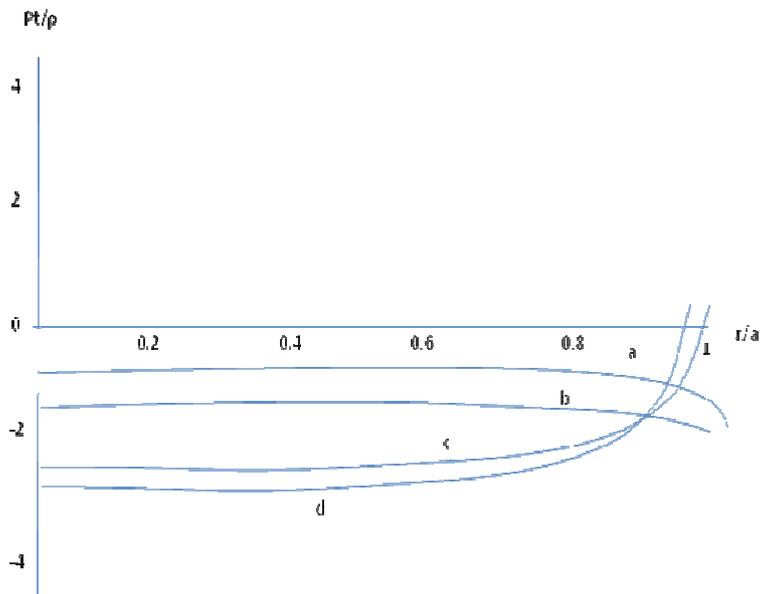
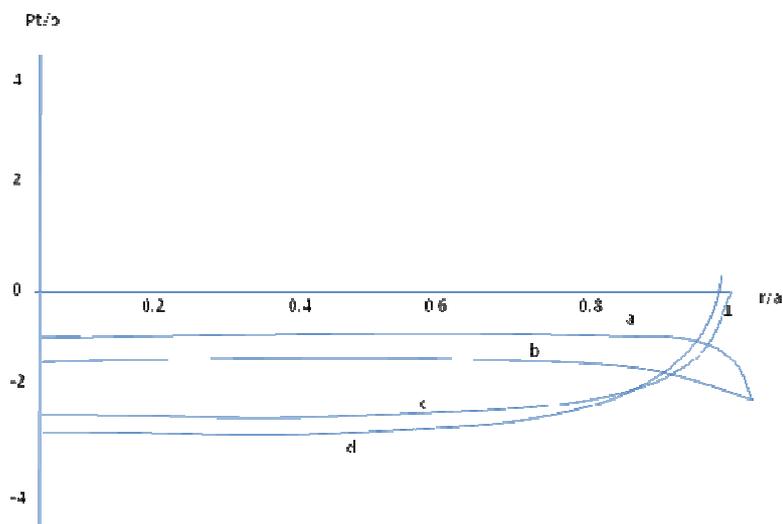
a**b**

Figura 22. Cociente Pt/ρ en función de r/a dentro de la esfera para valores de $M/a = 0.26$ y 0.34 y $l=0.02$ y 0.06 . **a.** Potencial gravitacional de $M/a = 0.26$ y $l=0.02$. **b.** Potencial gravitacional de $M/a=0.34$ y $l = 0.06$. Las Líneas etiquetadas a,b,c y d corresponden a $\omega = -0.5, -0.9, -1.3$ y -1.4 .

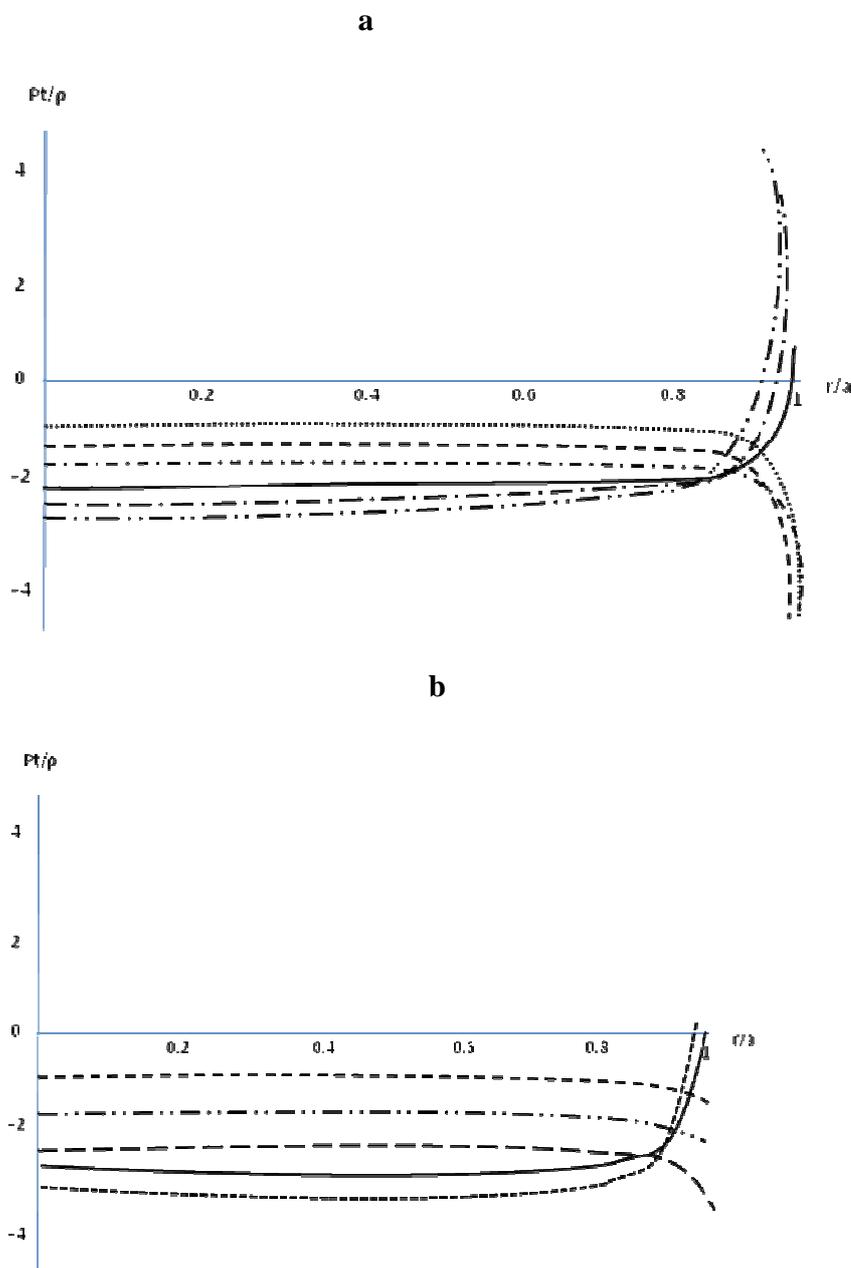


Figura 23. Cociente Pt/ρ en función de r/a dentro de la esfera para valores de $M/a=0.38$ y 0.40 y un valor de $l = 0.1$. **a** Potencial gravitacional de $M/a=0.38$. línea punteada, línea con guiones, línea con punto y guión, línea sólida gruesa, línea con guión largo y un punto y línea con guión largo y dos puntos corresponden a $\omega = -0.5, -0.7, -0.9, -1.1, -1.2$ y 1.3 **b** Potencial gravitacional de $M/a = 0.4$. La línea con guiones, línea con guión y dos puntos, línea sólida con guiones, línea sólida gruesa y línea con guión corto corresponden a $\omega = -0.5, -0.9, -1.3, -1.5, -1.6$ y -1.7 .

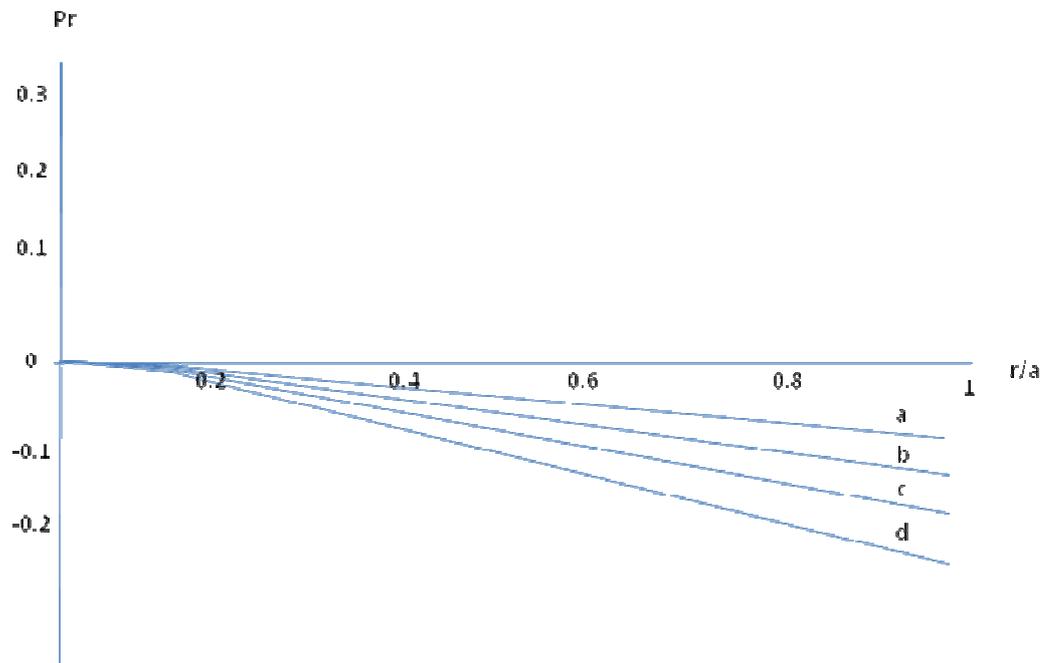


Figura 24. Presión radial Pr en función de r/a para diferentes valores de ω y $M/a = 0.38$ y $l = 0.1$. Las líneas etiquetadas con a, b, c y d corresponden a $\omega = -0.1, -0.15, -0.3$ y -0.5

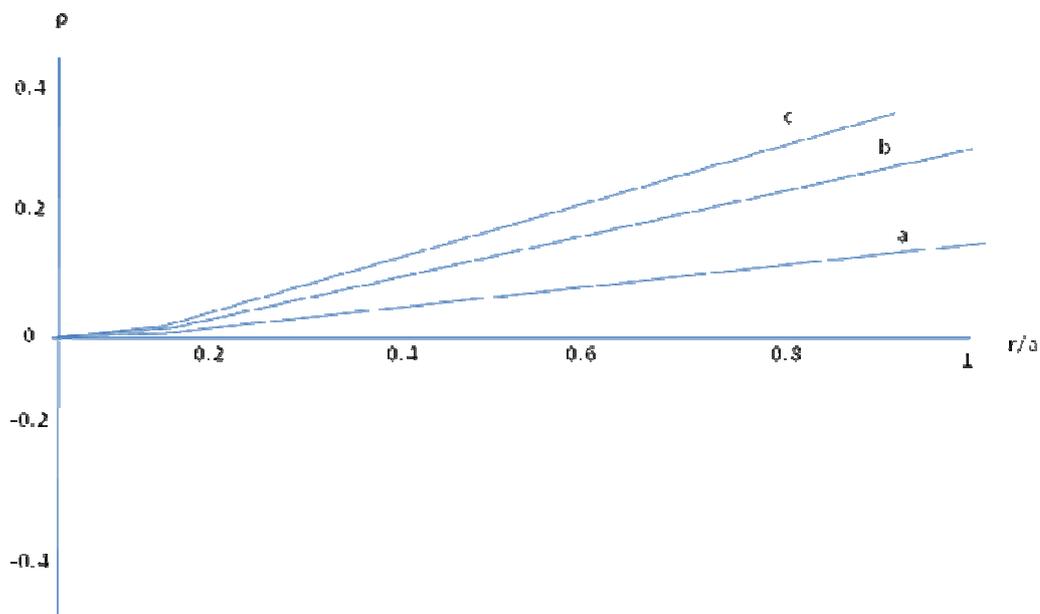


Figura 25. Densidad de energía en función de r/a con $M/a = 0.38$. Las líneas etiquetadas como a, b y c corresponden a $l = 0.02, 0.06$ y 0.1 , respectivamente .

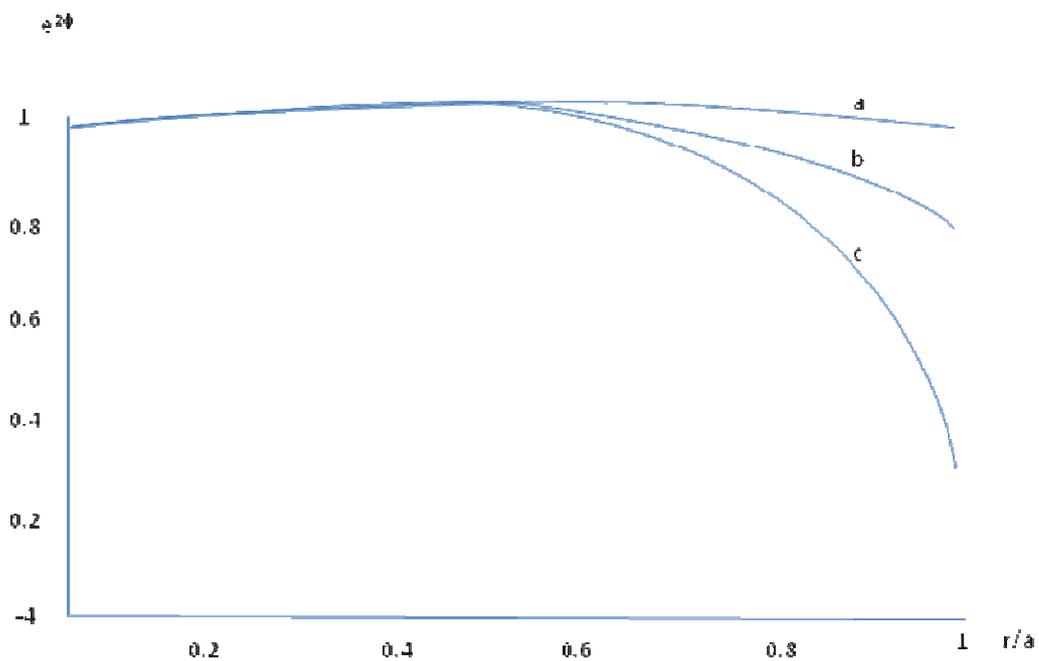


Figura 26. $e^{2φ}$ en función de r/a para diferentes valores de l con $M/a = 0.38$ y $ω = -0.5$. Las líneas etiquetadas como a, b y c corresponden a $l = 0.02, 0.06$ y 0.1 , respectivamente .

Para determinar las regiones de estabilidad del modelo propuesto, se ha de calcular σ y P con las ecuaciones (66) y (67). Considerando que $\sigma > 0$, la derivada radial de la densidad superficial de energía σ' vendrá dada por:

$$\sigma' = \frac{1}{4\pi a^2} \left[\frac{1 - \frac{3M}{a}}{\left(1 - \frac{2M}{a}\right)^{1/2}} - \frac{1 - \frac{3lr^5}{10a}}{\left(1 - \frac{lr^5}{5a}\right)^{1/2}} \right] \quad (81)$$

La derivada radial de la presión superficial tangencial es :

$$P' = \frac{-1}{8\pi a^2} \left[\frac{1 - 3\frac{M}{a} + 3\left(\frac{M}{a}\right)^2}{\left(1 - 2\frac{M}{a}\right)\sqrt{1 - 2\frac{M}{a}}} + \frac{-4\left(\frac{lr^5}{10a}\right)^2 + \omega\frac{lr^4}{2}\left(\frac{lr^5}{10a} - 1\right) + 3\left(\frac{lr^5}{10a}\right) - 1}{\left(1 - \frac{lr^5}{5a}\right)\sqrt{1 - \frac{lr^5}{5a}}} \right] \quad (82)$$

Entonces se ha de graficar el factor $\eta = P'/\sigma'$ como se muestra en las figuras 27, 28 y 29. Se ha considerado un valor de $\omega = -0.5$ y $\omega = -0.9$, respectivamente. Se observa para este modelo, que las regiones de estabilidad se modifican cuando disminuye el parámetro ω de energía oscura, a diferencia de lo que ocurre para el modelo de estrella de energía oscura que utiliza la función de masa de TMW [49], en el cual la regiones de estabilidad no varían apreciablemente para distintos valores de ω . En ambas figuras, se observa como las configuraciones de estabilidad se incrementan cuando aumentan los valores de m/M . Para una disminución del parámetro de energía oscura ω hay un mayor

crecimiento de η , indicando con esto mayores regiones de estabilidad en el modelo presentado.

Los valores del parámetro l también modifican las regiones de estabilidad para diferentes valores de M/a . En las figuras 27, 28 y 29 se muestra como un incremento del parámetro l permite la aparición de regiones de estabilidad para altos potenciales gravitacionales en contraste con el modelo de Lobo [49], donde no hay grandes variaciones en las configuraciones de estabilidad.

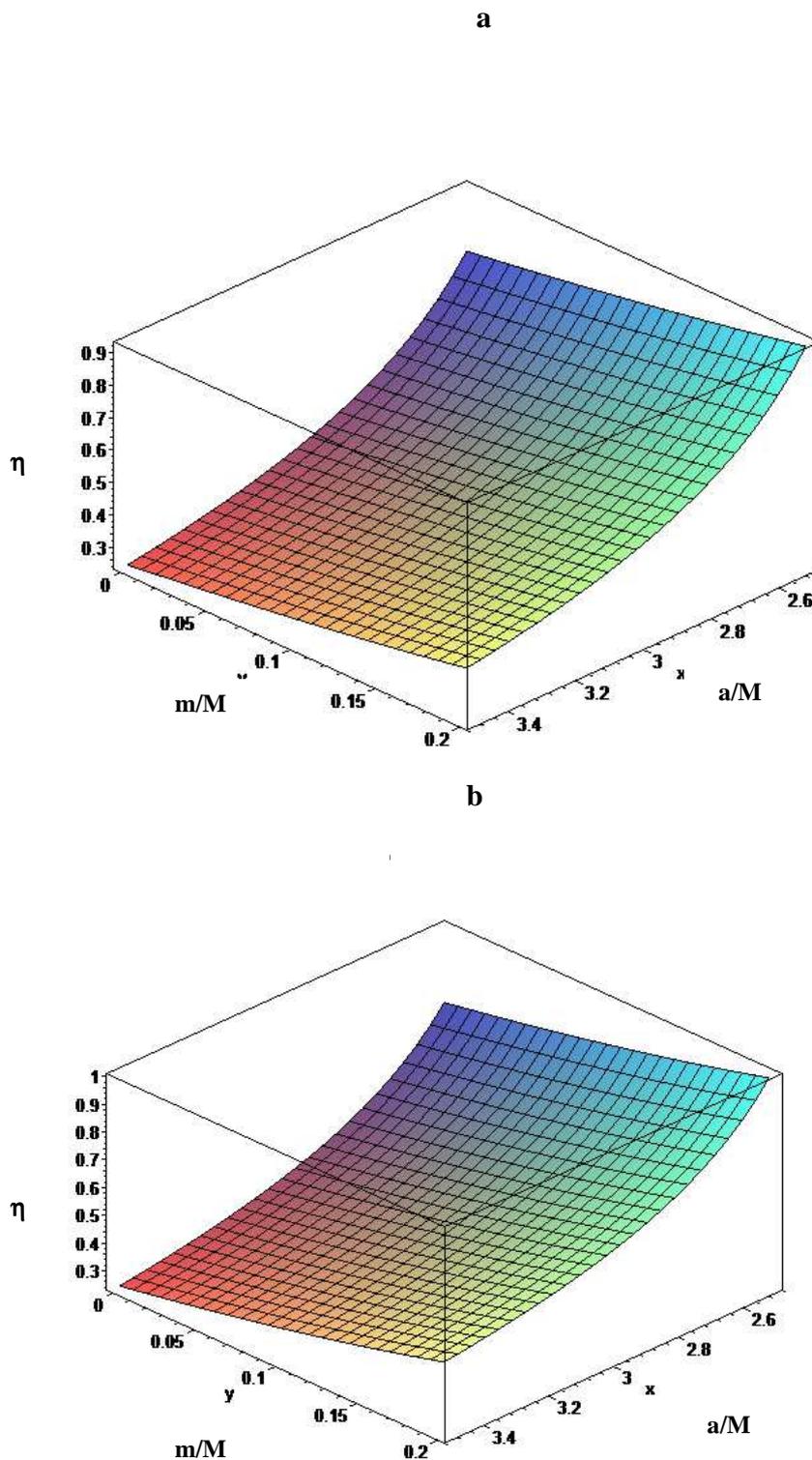


Figura 27. Gráficas de las regiones de estabilidad para una estrella de energía oscura con la nueva función de masa donde $l = 0.02$. Se ha considerado que $\omega = -0.5$ y $\omega = -0.9$, en **a** y **b**, respectivamente.

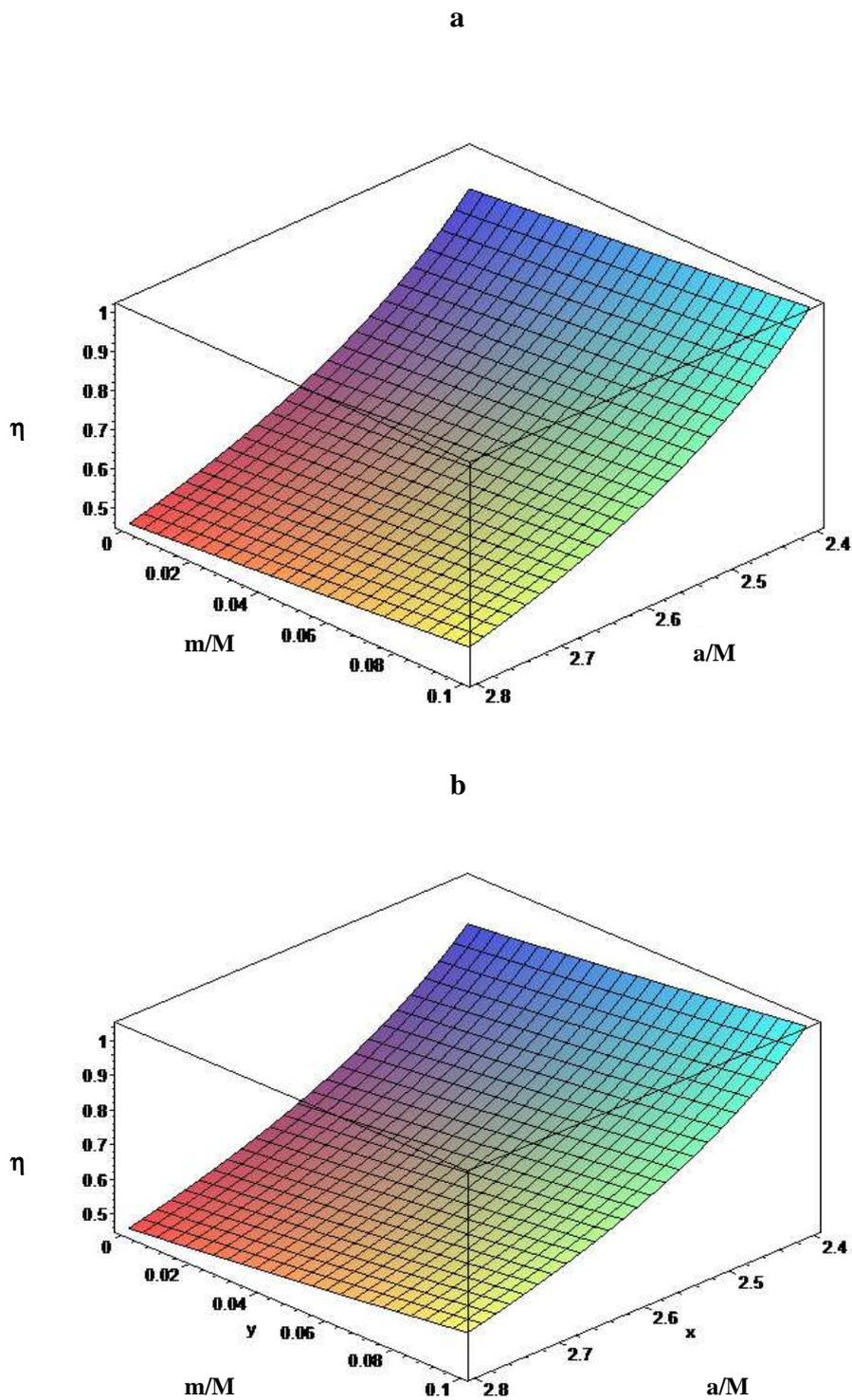


Figura 28. Gráficas de las regiones de estabilidad para una estrella de energía oscura con la nueva función de masa en la que $l=0.06$. Se ha considerado que $\omega=-0.5$ y $\omega=-0.9$, en **a** y **b**, respectivamente.

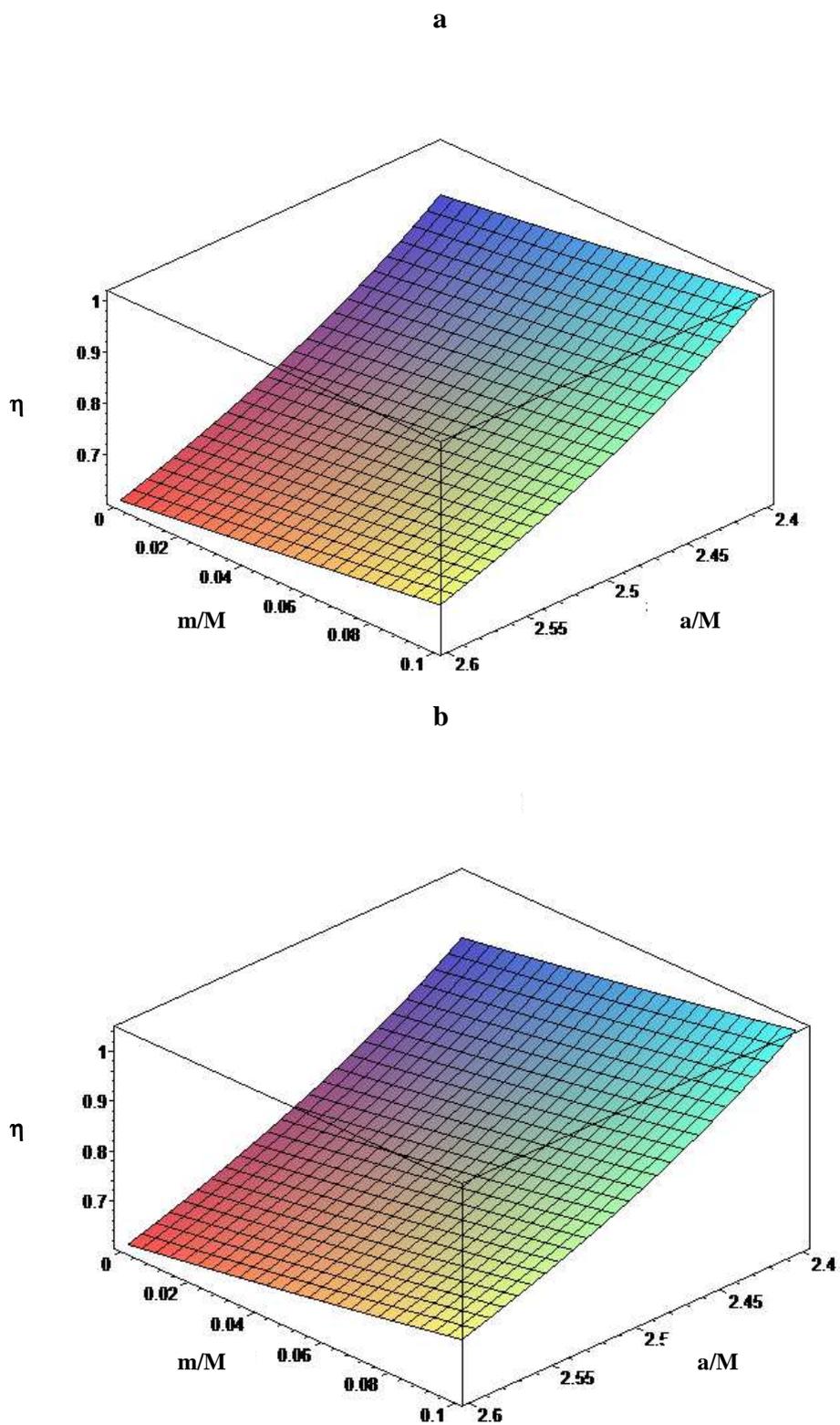


Figura 29. Gráficas de las regiones de estabilidad para una estrella de energía oscura donde $l = 0.1$. Se ha considerado que $\omega = -0.5$ y $\omega = -0.9$ en **a** y **b**, respectivamente.

CAPÍTULO IV

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

IV.1 CONCLUSIONES

En este trabajo se ha obtenido una nueva familia de soluciones anisótropas con densidad uniforme. Estas nuevas soluciones dependen de dos parámetros que pueden ser ajustados para mejorar el corrimiento al rojo gravitacional y mantener las condiciones de energía fuerte o dominante. Para el caso especial donde $\alpha = 2$, la solución mantiene la misma forma funcional de la solución de Schwarzschild con la coordenada radial y se muestra en las figuras 2 y 3 como un incremento en los valores del factor de anisotropía C incrementa la diferencia entre la presión radial y la presión tangencial lo que permite que la estrella soporte mayores valores del potencial gravitacional superficial que en el caso isótropo, satisfaciendo la condición de energía dominante.

A diferencia de otras soluciones anisótropas previas, es posible obtener soluciones con una dependencia funcional de la coordenada radial mayor que 0.5 con presión radial positiva dentro de la esfera. Para un valor fijo del factor de anisotropía C , tal como se observa en la figura 4, un incremento de los valores de α aumenta la posibilidad de que el modelo permita elevados potenciales gravitacionales o equivalentemente grandes valores del corrimiento al rojo superficial. Como se muestra en la figura 1, esto equivale a disminuir el exponente de la coordenada radial a valores menores que 0.5.

Ajustando los valores de α y C , es posible obtener soluciones similares a otras conocidas previamente, en el sentido de la forma funcional, y comparar su comportamiento. Cuando se comparan las soluciones obtenidas con las soluciones de

Bowers y Liang, las nuevas soluciones presentan mayores valores del corrimiento al rojo gravitacional siempre que la condición de energía fuerte y dominante se mantenga dentro de la estrella. Este hecho se muestra en la figura 6, donde se han utilizado diferentes valores de los exponentes q y Γ . Se ha escogido $q=\Gamma/2 = 0.2, 0.3, 0.4$ y 0.51 . También se muestra la diferencia de los perfiles de la presión tangencial para los dos tipos de solución. Este comportamiento podría marcar la diferencia en la respuesta de estos modelos ante una contracción adiabática. En el modelo propuesto los valores de α y C pueden ser ajustados para mejorar el comportamiento físico manteniendo el mismo valor del exponente Γ . Esto se muestra en la figura 7, donde se ha tomado el valor de $\Gamma/2 = 0.4$ y algunos valores de (C, α) que proporcionan el mismo valor de Γ y se comparan los resultados de la solución de Bowers y Liang con el mismo valor del exponente q . Es posible encontrar un valor del par (C, α) para un potencial gravitacional superficial elevado y donde se mantengan las condiciones de energía fuerte y dominante; esto permitiría explicar grandes valores del corrimiento al rojo superficial con estos modelos.

Cuando el valor del discriminante Δ se iguala a cero las soluciones encontradas exhiben comportamientos similares a las soluciones mencionadas arriba y también es posible satisfacer en este caso la condición de energía fuerte para fuertes campos gravitacionales ajustando los valores de (C, α) . En la figura 8, para un potencial gravitacional superficial $M/a=0.35$ se muestra como un incremento en el factor (C, α) ocasionan que los valores de Q disminuyan dentro de la esfera.

Se ha enfocado la atención en la relación presión-densidad cuando se realiza una contracción adiabática lenta. Debe recordarse que en la teoría newtoniana la relación

presión-densidad para un equilibrio neutral es $P \approx \rho^{4/3}$ y para un fluido relativista isótropo la ley correspondiente es $P \approx \rho^\gamma$ con $\gamma > 4/3$ [14]. De este modo un material para el cual $P \approx \rho^{4/3}$ en el límite newtoniano, será lo suficientemente rígido para realizar una contracción adiabática lenta. No obstante, tan pronto como el potencial gravitacional empieza a crecer rápidamente, el material no es capaz de soportar esta fuerza gravitacional y puede ocurrir un colapso. En el modelo propuesto, como se observa en la figura 9, para los puntos dentro de la región $0 \leq r/a \leq 0.8$ donde $\alpha = 2$ el coeficiente γ para pequeños valores de C toma mayores valores que los que se obtienen para mayores factores de anisotropía; ocurre lo contrario para regiones cercanas a la superficie de la esfera. Este comportamiento es el mismo cuando se comparan con las soluciones de Bowers y Liang. Fijando los valores de C y α se obtiene para un valor de $\Gamma/2$ igual a q cantidades menores que 0.5, por lo que el modelo propuesto resulta ser más estable en regiones cercanas al centro de la esfera que el de la solución de Bowers y Liang. De este modo, es probable que el nuevo modelo presente inestabilidad en las capas externas.

Es posible que el modelo propuesto tenga una presión tangencial mayor que la presión radial para valores del exponente $q = \Gamma/2$ mayores que 0.5, aunque, este modelo es menos estable que uno con valores de $\Gamma/2$ menores que 0.5.

Se ha encontrado otra nueva familia de soluciones anisótropas con densidad de energía variable que también dependen de dos parámetros ajustables. En este modelo la presión radial es positiva en el interior de la estrella, se hace cero en la superficie y en el centro ($r/a=0$) se hace infinita. Un aumento del factor de anisotropía producirá un decrecimiento de la presión radial de la estrella para un valor dado del parámetro α .

Para estas soluciones la presión radial y la densidad tienden a infinito en el centro de la estrella, comportamiento análogo a los observados en los modelos de Tolman [2] y Cosenza et al. [10]. Para la condición de isotropía con $C=0$, el cociente presión-densidad en el centro de la estrella es $\frac{P_c}{\rho_c} = \frac{1}{3}$, comportamiento observado para la solución de Tolman VI [2].

La condición de energía dominante se cumple también con este modelo. Para un potencial de $M/a = 0.4$, el cociente P_r/ρ disminuye a medida que aumenta el factor C de anisotropía, indicando con esto que se satisface la condición de energía fuerte para un elevado potencial gravitacional. En este modelo, la función métrica e^v se comporta bien en el interior de la estrella y es continua en la superficie de la estrella. Esta función decrece a medida que aumenta el factor de anisotropía y disminuye para un aumento del potencial gravitacional. En la superficie ($r=a$) $e^v = 4/7$, que coincide con la solución de Tolman VI en la superficie de la esfera [16].

Se ha presentado en este trabajo un análisis de fracturas para un nuevo modelo de estrella anisótropa con densidad de energía uniforme. Para este modelo con valores del parámetro de anisotropía $C=0.45$ y $C=0.73$, la fractura se presenta cerca de la superficie de la esfera a medida que aumentan los valores de α .

Es interesante resaltar la marcada dependencia de la respuesta a la fractura con el tipo de modelo. Es de esperarse que las variaciones en la anisotropía permitan la ocurrencia de fracturas bajo ciertas condiciones. Una modificación del parámetro α puede generar diferentes expresiones para la presión radial, lo que a su vez cambia la respuesta a la fractura. Es de esperarse que para ciertos valores de α no se presenten fracturas. Como cada valor de α cambia el exponente Γ para la presión radial es obvio

entonces que el parámetro α define los diferentes tipos de modelo, tal como se muestra en la figura 1. Se observa que α se incrementa cuando Γ decrece y toma valores menores que uno para valores de α mayores que 2, y mayores que uno para $\alpha < 2$. Si $\alpha > 2$, el exponente $\Gamma/2$ disminuye a medida que aumenta el valor de C, manteniendo constante el valor de α . Si $\alpha < 2$, $\Gamma/2$ disminuye a medida que disminuye C para un valor de α fijo. Para $\alpha < 2$ se observa la presencia de fracturas.

Se ha encontrado un nuevo modelo de estrella de energía oscura gobernado por una ecuación de estado del tipo $\omega = P/\rho < 0$, que permite valores de potenciales gravitacionales en la superficie que dependen de un parámetro ajustable. Se ha analizado la configuración estelar relativista de la estrella de energía oscura, escogiendo una función de masa específica. En este modelo la presión decrece con la coordenada radial como es de esperarse para los modelos estelares conocidos.

En este modelo, la función de masa elegida depende de un parámetro l , por lo que el potencial gravitacional aumenta cuando l se incrementa, como se muestra en las figuras 27, 28 y 29. Por ejemplo, para $l = 0.02$ corresponde a $m/a > 0.25$, para $l=0.06$ es $m/a > 0.33$ y $l = 0.1$ le corresponde $m/a > 0.37$.

Los valores del parámetro afectan las regiones de estabilidad para diferentes valores de m/a . En las figuras 27, 28 y 29 se muestra como un incremento de l permite la aparición de regiones de estabilidad para mayores valores del potencial gravitacional. Para diferentes valores del parámetro ω , manteniendo fijo el valor de l , se observan grandes variaciones en las regiones de estabilidad en contraste con el modelo de Lobo, donde no se observan modificaciones en las configuraciones de estabilidad.

Aunque la función de masa utilizada presenta un incremento radial en la densidad de energía, se ha propuesto en este trabajo un modelo de fluido anisótropo recubierto por una película delgada, donde se espera que exista gravedad repulsiva. Las densidades de energía con esta dependencia radial aparecen en los modelos de masa electromagnética de Tiwari et. al.[63] , donde esta presente la repulsión gravitacional. Esto pudiera ser el caso de fluidos anisótropos, donde el gradiente de las presiones tangenciales mantiene el equilibrio con la fuerza gravitacional repulsiva. La existencia de regiones de estabilidad para valores específicos de estos parámetros permite proponer este modelo como una aproximación para describir estrellas de energía oscura. Tal como se ha mencionado anteriormente, estos resultados podrían ser usados para describir regiones de estrellas donde ocurren procesos de inversión de densidad.

IV.2 RECOMENDACIONES

Se recomienda proponer un nuevo factor $F(\rho_o, Pr) = \gamma Pr^2 + \alpha \rho_o Pr + K \rho_o^2$ con el que se pueda obtener una expresión general para la presión radial que incluya los casos de Dev y Gleiser [25] y el modelo de densidad de energía uniforme propuesto. Esta expresión para Pr puede utilizarse para deducir una ecuación general para la fuerza resultante R y hacer el análisis de fracturas para los modelos de Dev y Gleiser. Las mismas consideraciones son válidas para el modelo de densidad variable.

Debido a que la presencia de energía oscura proporciona un escenario natural para la existencia de geometrías exóticas tales como los agujeros de gusano [46], la función de masa propuesta en este trabajo de investigación puede utilizarse para modelar un agujero de gusano soportado por energía fantasma que cumpla con la ecuación de estado $p = \omega \rho$ con $\omega < -1$. La métrica del interior de esta geometría exótica es [66] :

$$ds^2 = -e^{2\phi(r)} dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{b(r)}{r}} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (82)$$

donde $\phi(r)$ y $b(r)$ son el corrimiento al rojo y la función de forma, respectivamente. Para esto debe hacerse una escogencia apropiada para $b(r)$ o $\phi(r)$ necesaria para proponer el nuevo modelo de agujero de gusano atravesable

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] K.Schwarzschild., Math.Phys.Tech., 424-434 (1916).
- [2] R.C.Tolman., Phys.Rev. 55, 364 (1939).
- [3] J.R.Oppenheimer y G. Volkoff., Phys.Rev.55, 374 (1939).
- [4] S.Chandrasekhar., Astrophys.J. 74, 81 (1931).
- [5] W.Baade y F. Zwicky., Proc.Nat.Acad.Sci.U.S.20, 254 (1934).
- [6] R.L.Bowers y E.P.T. Liang., Astrophys.J. 188, 167 (1974).
- [7] Ruderman, M., Ann.Rev.Astr.Ap. 10, 427 (1972).
- [8] Canuto, V., Neutron Stars: General Review (Solvay Conference on Astrophysics and Gravitation, Brussels, 1973).
- [9] K.Komathiraj y S.D.Maharaj., J.Math.Phys. 042051 (2007).
- [10] M.Cosenza, L.Herrera, M.Esculpi y L.Witten, J.Math.Phys., 22(1), 118 (1981).
- [11] M.Esculpi,M.Malaver y E.Alomá., Gen.Relat.Grav., 39, 633 (2007).
- [12] M.Malaver, Revista Integración., 27(2), 125 (2009).
- [13] Lemaitre, G., Ann.Soc.Sci.Bruxelles, A53, 97 (1933).
- [14] L.Herrera, G.J.Ruggeri y L.Witten., Astrophys.J., 234, 1094 (1979).
- [15] M.Cosenza, L.Herrera, M.Esculpi y L.Witten, Phys.Rev.D25,2527 (1982).
- [16] M.Esculpi, Modelos de esferas anisotrópicas estáticas y radiativas en relatividad general , Tesis de Doctorado (1985).
- [17] J.Ponce de Leon., J.Math. Phys.28(5), 1114 (1987).
- [18] L.Herrera y J.Ponce de Leon., J.Math.Phys., 26, 2018 (1985).
- [19] L.Herrera y N.O.Santos., J.Math.Phys., 39, 3817 (1998).
- [20] H. Bondi., Mon.Not.R.Astron.Soc., 259, 365 (1992).
- [21] H. Bondi., Mon.Not.R.Astron.Soc., 302, 337 (1999).

- [22] B.V.Ivanov., gr-qc/020109090.
- [23] L.Herrera y N.O.Santos., Phys.Rep. 53, 286 (1997).
- [24] M.K.Mak y T.Harko., gr-qc/0110103.
- [25] K.Dev y M.Gleiser., Gen.Relat.Grav., 34, 1793 (2002).
- [26] R. Kippenhahn y A. Weigert, Stellar Structure and Evolution. Berlin: Springer-Verlag. 1991.
- [27] A.I. Sokolov., Sov. Phys.JETP., 52, 575 (1980).
- [28] G.Bohmer y T.Harko., Class.Quantum. Grav., 23, 6479 (2006).
- [29] A.Coley y N.Pelavas., Phys.Rev. D74., 087301 (2006).
- [30] W.Barreto, B.Rodríguez, L.Rosales y O.Serrano., Gen. Relat. Grav., 39, 23 (2007).
- [31] S.Karmakar, S.Mukherjee, R.Sharma y S.Maharaj, Pramana J., 68, 881 (2007).
- [32] H.Abreu, H.Hernández y L.A.Nuñez., Class.Quantum.Grav., 24, 4631 (2007).
- [33] R.Sharma y S.Maharaj., J.Astrophys.Astron., 28, 133 (2007).
- [34] L.Herrera, J.Ospino y A. Di Prisco., Phys.Rev. D77, 027502 (2008).
- [35] T.Bandyopadhyay y S.Chakraborty., Mod. Phys. Lett., A22, 2839 (2007).
- [36] N.Naidu y M.Govender., J.Astroph.Astron., 28, 167 (2007).
- [37] G. Brodin y M.Marklund., Phys.Rev.E76., 055403 (2007).
- [38] L.Herrera, J.Ospino, A.Di Prisco, E.Fuenmayor y O.Troconis., Phys.Rev. D79, 064025 (2009)
- [39] L.Herrera, Phys.Lett., A165, 206 (1992), ibid.188, 402 (1992).
- [40] A. Di Prisco, E.Fuenmayor, L.Herrera y V.Varela., Phys.Lett., A195, 23 (1994).
- [41] A. Di Prisco, L.Herrera y V.Varela., Gen.Relat.Grav., 29, 1239 (1997).
- [42] M.Esculpi y M.Malaver., aceptado para publicación en la Revista Mexicana de Física (2010).
- [43] M.K.Gokhroo y A.L.Mehra., Gen.Relat.Grav., 26(1), 75 (1994).

- [44] M.Chaisi y S.D.Maharaj., *Gen.Relat.Grav.*, 37, 1177 (2005).
- [45] D.Garfinkle., *gr-qc/0511082*.
- [46] F.S.N.Lobo., *gr-qc/0506001*.
- [47] G. Chapline, *astro-ph/0503200*.
- [48] S.Sushkov., *Phys.Rev. D71*, 043520 (2005).
- [49] F.S.N.Lobo., *gr-qc/0508115*.
- [50] P.O. Mazur y E.Mottola, *gr-qc/0109035*.
- [51] D. Barraco, V.Hamity y R.Gleiser., *Phys.Rev. D67*, 064003 (2003).
- [52] H.Bondi, *Proc.R.Soc.A* 281, 39 (1964).
- [53] R.Chan, L.Herrera y N.O.Santos., *Class.Quantum.Grav.*, 9, L133 (1992).
- [54] P. Letelier., *Phys.Rev.D22*, 807 (1980).
- [55] K.S.Thorne, R.H.Price y D.A.Macdonald, *Black Holes: the membrane paradigm*(Yale University Press, New Haven and London)
- [56] J.R.Oppenheimer y H.Snyder., *Phys.Rev.*, 56, 455 (1939).
- [57] M.Visser y D.L.Wiltshire, *Class.Quant.Grav.*, 21, 1135 (2004).
- [58] F.S.N.Lobo., *Phys.Rev. D71*, 124022 (2005).
- [59] F.S.N.Lobo y P.Crawford., *gr-qc/0507063*.
- [60] R.Chan, M.F.A.da Silva y J.F. Villas da Rocha, *gr-qc/08033064*.
- [61] F.S.N.Lobo., *gr-qc/0511003*.
- [62] W.Israel., *Nuovo Cimento* 44B, 1 (1966).
- [63] R.N.Tiwari, J.R.Rao y R.R. Kanakamedala., *Phys.Rev. D30*, 489 (1984).
- [64] M.Wyman., *Phys.Rev. D56*, 1930 (1949).
- [65] S.Bayin., *Phys.Rev, D18*, 2745 (1978).
- [66] M.S.Morris y K.Thorne., *Am.J.Phys.*, 56(5), 395 (1988).

