Titulo: FACTORIZACION (Descomposición Factorial)
Año escolar: 2do: año de bachillerato
Autor: José Luis Albornoz Salazar
Ocupación: Ing Civil. Docente Universitario
País de residencia: Venezuela
Correo electrónico: martilloatomico@gmail.com

El autor de este trabajo solicita su valiosa colaboración en el sentido de enviar cualquier sugerencia y/o recomendación a la siguiente dirección :

martilloatomico@gmail.com

Igualmente puede enviar cualquier ejercicio o problema que considere pueda ser incluido en el mismo.

Si en sus horas de estudio o práctica se encuentra con un problema que no pueda resolver, envíelo a la anterior dirección y se le enviará resuelto a la suya.

◄DESCOMPOSICIÓN FACTORIAL (FACTORIZACIÓN) :

Se llama **factores** *o divisores de una expresión algebraica a las expresiones algebraicas que multiplicadas entre sí dan como producto la primera expresión.*

Así, multiplicando "a" *por* "a + b" *tenemos :*

$$a.(a + b) = a^2 + ab$$

"a" *y* "a + b", *que multiplicadas entre sí dan como producto* "a^2 + ab", *son factores o divisores de* "$a^2 + ab$".

Del mismo modo.

$$(X + 2).(X + 3) = X^2 + 5X + 6$$

Luego, "X + 2" *y* "X + 3" *son factores de* "$X^2 + 5X + 6$"

Descomponer en factores o Factorizar *una expresión algébrica es convertirla en el producto indicado de sus factores.*

FACTORIZAR UN MONOMIO : *Los factores de un monomio se pueden hallar por simple inspección.*

Así, los factores de 15ab son 3, 5, a *y* b. *Por tanto :*

$$15ab = (3).(5).(a).(b)$$

FACTORIZAR UN POLINOMIO : *No todo polinomio se puede descomponer en dos o más factores distintos de 1, pues del mismo modo que, en Aritmética, hay números primos que solo son divisibles por ellos mismos y por 1, hay expresiones algebraicas que solo son divisibles por ellos mismos y por 1, y que por tanto, no son el producto de otras expresiones algebraicas. Así "a + b" no puede descomponerse en dos factores distintos de "1" porque solo es divisible por "a + b" y por "1".*

CUANDO TODOS LOS TERMINOS DE UN POLINOMIO TIENEN UN FACTOR COMÚN :

a) FACTOR COMÚN MONOMIO:

Ejemplo 1 : Descomponer en factores $a^2 + 2a$

a^2 *y* 2a *contienen el factor común* a. *Escribimos el factor común* "a" *como coeficiente de un paréntesis; dentro del paréntesis escribimos los* **cocientes** *de dividir* $a^2 \div a = a$ *y* $2a \div a = 2$, *y tendremos ;*

$$a^2 + 2a = a.(a + 2)$$

Ejemplo 2 : Descomponer en factores $10b - 30ab^2$

Los coeficientes 10 y 30 tienen los factores 2, 5 y 10, Tomamos 10 porque siempre se saca el **mayor** *factor común. De las letras el único factor común es "b" porque está en los dos términos de la expresión dada y la tomamos con su* **menor** *exponente "b".*

El factor común es 10b. Lo escribimos como coeficiente de un paréntesis y dentro ponemos los cocientes de dividir $10b \div 10b = 1$ *y* $-30ab^2 \div 10b = -3ab$ y tendremos

$$10b - 30ab^2 = 10b.(1 - 3ab)$$

Ejercicios :

1. $a^2 + ab = a\left(a + b\right)$
2. $b + b^2 = b\left(1 + b\right)$
3. $x^2 + x = x\left(x + 1\right)$
4. $3a^3 - a^2 = a^2\left(3a - 1\right)$
5. $x^3 - 4x^4 = x^3\left(1 - 4x\right)$
6. $5m^2 + 15m^3 = 5m^2\left(1 + 3m\right)$
7. $ab - bc = b\left(a - c\right)$
8. $x^2y + x^2z = x^2\left(y + z\right)$
9. $2a^2x + 6ax^2 = 2ax\left(a + 3x\right)$
10. $8m^2 - 12mn = 4m\left(2m - 3n\right)$

11. $9a^3x^2 - 18ax^3 = 9ax^2\left(a^2 - 2x\right)$

12. $15c^3d^2 + 60c^2d^3 = 15c^2d^2\left(c + 4d\right)$

13. $35m^2n^3 - 70m^3 = 35m^2\left(n^3 - 2m\right)$

14. $abc + abc^2 = abc\left(1 + c\right)$

15. $24a^2xy^2 - 36x^2y^4 = 12xy^2\left(2a^2 - 3xy^2\right)$

16. $a^3 + a^2 + a = a\left(a^2 + a + 1\right)$

17. $4x^2 - 8x + 2 = 2\left(2x^2 - 4x + 1\right)$

18. $15y^3 + 20y^2 - 5y = 5y\left(3y^2 + 4y - 1\right)$

19. $a^3 - a^2x + ax^2 = a\left(a^2 - ax + x^2\right)$

20. $2a^2x + 2ax^2 - 3ax$
$= ax\left(2a + 2x - 3\right)$

21. $x^3 + x^5 - x^7 = x^3\left(1 + x^2 - x^4\right)$

22. $14x^2y^2 - 28x^3 + 56x^4$
$= 14x^2\left(y^2 - 2x + 4x^2\right)$

23. $34ax^2 + 51a^2y - 68ay^2$
$= 17a\left(2x^2 + 3ay - 4y^2\right)$

24. $96 - 48mn^2 + 144n^3$
$= 48\left(2 - mn^2 + 3n^3\right)$

25. $a^2b^2c^2 - a^2c^2x^2 + a^2c^2y^2$
$= a^2c^2\left(b^2 - x^2 + y^2\right)$

b) ***FACTOR COMÚN POLINOMIO:***

Ejemplo 1 : **Descomponer en factores X(a + b) + m(a + b)**

Los dos términos de esta expresión tienen como factor común el binomio (a + b)

Escribo este factor común (a + b) y lo multiplico por otro paréntesis que tendrá dentro los dos coeficientes que tiene el factor común en la ecuación inicial (respetando el signo que tenga cada uno). O sea :

X(a + b) + m(a + b) = (a + b).(X + m)

Ejercicios :

1. $a\left(x+1\right)+b\left(x+1\right)=\left(x+1\right)\left(a+b\right)$

2. $x\left(a+1\right)-3\left(a+1\right)=\left(a+1\right)\left(x-3\right)$

3. $2\left(x-1\right)+y\left(x-1\right)=\left(x-1\right)\left(2+y\right)$

4. $m\left(a-b\right)+\left(a-b\right)n=\left(a-b\right)\left(m+n\right)$

5. $2x\left(n-1\right)-3y\left(n-1\right)=\left(n-1\right)\left(2x-3y\right)$

6. $a\left(n+2\right)+n+2=\left(n+2\right)\left(a+1\right)$

7. $x\left(a+1\right)-a-1=\left(a+1\right)\left(x-1\right)$

8. $a^2+1-b\left(a^2+1\right)=\left(a^2+1\right)\left(1-b\right)$

9. $3x\left(x-2\right)-2y\left(x-2\right)=\left(x-2\right)\left(3x-2y\right)$

10. $1-x+2a\left(1-x\right)=\left(1-x\right)\left(1+2a\right)$

11. $4x\left(m-n\right)+n-m=\left(m-n\right)\left(4x-1\right)$

12. $-m-n+x\left(m+n\right)=\left(m+n\right)\left(x-1\right)$

13. $a^3\left(a-b+1\right)-b^2\left(a-b+1\right)=\left(a-b+1\right)\left(a^3-b^2\right)$

14. $4m\left(a^2+x-1\right)+3n\left(x-1+a^2\right)=\left(a^2+x-1\right)\left(4m+3n\right)$

15. $x\left(2a+b+c\right)-2a-b-c$
$=x\left(2a+b+c\right)-\left(2a+b+c\right)=\left(2a+b+c\right)\left(x-1\right)$

16. $\left(x+y\right)\left(n+1\right)-3\left(n+1\right)=\left(n+1\right)\left(x+y-3\right)$

17. $\left(x+1\right)\left(x-2\right)+3y\left(x-2\right)=\left(x-2\right)\left(x+1+3y\right)$

18. $\left(a+3\right)\left(a+1\right)-4\left(a+1\right)=\left(a+1\right)\left(a+3-4\right)=\left(a+1\right)\left(a-1\right)$

19. $(x^2+2)(m-n)+2(m-n)=(m-n)(x^2+4)$

20. $a(x-1)-(a+2)(x-1)=(x-1)(a-a-2)=-2(x-1)$

21. $5x(a^2+1)+(x+1)(a^2+1)=(a^2+1)(6x+1)$

22. $(a+b)(a-b)-(a-b)(a-b)$
$=(a-b)(a+b-a+b)=2b(a-b)$

23. $(m+n)(a-2)+(m-n)(a-2)=2m(a-2)$

24. $(x+m)(x+1)-(x+1)(x-n)$
$=(x+1)(x+m-x+n)=(x+1)(m+n)$

25. $(x-3)(x-4)+(x-3)(x+4)=(x-3)2x$

26. $(a+b-1)(a^2+1)-a^2-1=(a^2+1)(a+b-2)$

27. $(a+b-c)(x-3)-(b-c-a)(x-3)$
$=(x-3)(a+b-c+a-b+c)=(x-3)2a$

28. $3x(x-1)-2y(x-1)+z(x-1)=(x-1)(3x-2y+z)$

29. $a(n+1)-b(n+1)-n-1=(n+1)(a-b-1)$

30. $x(a+2)-a-2+3(a+2)=(a+2)(x+2)$

31. $(1+3a)(x+1)-2a(x+1)+3(x+1)=(x+1)(a+4)$

FACTOR COMÚN POR AGRUPACIÓN DE TÉRMINOS:

Ejemplo 1 : **Descomponer en factores aX + bX + aY + bY**

Los dos primeros términos tienen el factor común "X" y los dos últimos el factor común "Y".

Agrupamos los dos primeros términos en un paréntesis y los dos últimos en otro precedido del signo "+" porque el tercer término tiene el signo "+" y tendremos :

(aX + bX) + (aY + bY)

Notamos que la expresión está conformada ahora por dos binomios "(aX + bY)" y "(aY + bY)". Cada binomio puede descomponerse en factores (Factor común monomio pág. 51).

(aX + bX) = X.(a + b)
(aY + bY) = Y.(a + b)

Una vez realizada la descomposición de ambos monomios la expresión "(aX + bX) + (aY + bY)" quedaría como :

X.(a + b) + Y.(a + b)

Esta expresión puede descomponerse sacando factor común polinomio de acuerdo a lo explicado en la página 52.

X.(a + b) + Y.(a + b) = (a + b).(X + Y)

Resumiendo podemos indicar toda la operación así:

aX + bX + aY + bY

(aX + bX) + (aY + bY)

= X.(a + b) + Y.(a + b)

= (a + b).(X + Y)

La agrupación puede hacerse generalmente de más de un modo con tal que los dos términos que se agrupan tengan algún factor común, y siempre que las cantidades que quedan dentro de los paréntesis después de sacar el factor común en cada grupo sean exactamente iguales. Si esto no es posible lograrlo la expresión dada no se puede descomponer por este método.

Así, en el ejemplo anterior podemos agrupar el primero y tercer término que tienen el factor común "a" y el segundo y cuarto término que tienen el factor común "b" y tendremos:

$$aX + bX + aY + bY$$

$$(aX + aY) + (bX + bY)$$

$$= a.(X + Y) + b.(X + Y)$$

$$= (X + Y).(a + b)$$

El resultado obtenido es el mismo con ambos métodos.

Ejercicios :

1. $a^2 + ab + ax + bx$

$= (a^2 + ab) + (ax + bx)$

$= a(a+b) + x(a+b)$

$= (a+b)(a+x)$

2. $am - bm + an - bn$

$= (am - bm) + (an - bn)$

$= m(a-b) + n(a-b)$

$= (a-b)(m+n)$

3. $ax - 2bx - 2ay + 4by$

$= (ax - 2bx) - (2ay - 4by)$

$= x(a-2b) - 2y(a-2b)$

$= (a-2b)(x-2y)$

4. $a^2x^2 - 3bx^2 + a^2y^2 - 3by^2$

$= (a^2x^2 - 3bx^2) + (a^2y^2 - 3by^2)$

$= x^2(a^2 - 3b) + y^2(a^2 - 3b)$

$= (a^2 - 3b)(x^2 + y^2)$

5. $3m - 2n - 2nx^4 + 3mx^4$

$= (3m + 3mx^4) - (2n + 2nx^4)$

$= 3m(1 + x^4) - 2n(1 + x^4)$

$= (1 + x^4)(3m - 2n)$

6. $x^2 - a^2 + x - a^2x$

$= -(a^2 + a^2x) + (x^2 + x)$

$= -a^2(1+x) + x(x+1)$

$= (x+1)(x - a^2)$

7. $4a^3 - 1 - a^2 + 4a$

$= (4a^3 + 4a) - (1 + a^2)$

$= 4a(a^2 + 1) - (1 + a^2)$

$= (a^2 + 1)(4a - 1)$

8. $x + x^2 - xy^2 - y^2$

$= (x + x^2) - (xy^2 + y^2)$

$= x(1+x) - y^2(x+1)$

$= (x+1)(x - y^2)$

9. $3abx^2 - 2y^2 - 2x^2 + 3aby^2$

$= (3abx^2 + 3aby^2) - (2y^2 + 2x^2)$

$= 3ab(x^2 + y^2) - 2(x^2 + y^2)$

$= (x^2 + y^2)(3ab - 2)$

10. $3a - b^2 + 2b^2x - 6ax$

$= (3a - 6ax) - (b^2 - 2b^2x)$

$= 3a(1 - 2x) - b^2(1 - 2x)$

$= (1 - 2x)(3a - b^2)$

11. $4a^3x - 4a^2b + 3bm - 3amx$

$= (4a^3x - 4a^2b) + (3bm - 3amx)$

$= 4a^2(ax - b) + 3m(b - ax)$

$= 4a^2(ax - b) - 3m(ax - b)$

$= (ax - b)(4a^2 - 3m)$

12. $6ax + 3a + 1 + 2x$

$= (6ax + 3a) + (1 + 2x)$

$= 3a(2x+1) + (2x+1)$

$= (2x+1)(3a+1)$

13. $3x^3 - 9ax^2 - x + 3a$

$= (3x^3 - x) - (9ax^2 - 3a)$

$= x(3x^2 - 1) - 3a(3x^2 - 1)$

$= (3x^2 - 1)(x - 3a)$

14. $2a^2x - 5a^2y + 15by - 6bx$

$= (2a^2x - 5a^2y) + (15by - 6bx)$

$= a^2(2x - 5y) + 3b(5y - 2x)$

$= a^2(2x - 5y) - 3b(2x - 5y)$

$= (2x - 5y)(a^2 - 3b)$

15. $2x^2y + 2xz^2 + y^2z^2 + xy^3$

$= (2x^2y + xy^3) + (2xz^2 + y^2z^2)$

$= xy(2x + y^2) + z^2(2x + y^2)$

$= (2x + y^2)(xy + z^2)$

16. $6m - 9n + 21nx - 14mx$

$= (6m - 14mx) - (9n - 21nx)$

$= 2m(3 - 7x) - 3n(3 - 7x)$

$= (3 - 7x)(2m - 3n)$

17. $n^2x - 5a^2y^2 - n^2y^2 + 5a^2x$
$= (n^2x - n^2y^2) - (5a^2y^2 - 5a^2x)$
$= n^2(x - y^2) - 5a^2(y^2 - x)$
$= n^2(x - y^2) + 5a^2(x - y^2)$
$= (x - y^2)(n^2 + 5a^2)$

18. $1 + a + 3ab + 3b$
$= (1 + a) + (3ab + 3b)$
$= (1 + a) + 3b\,(a + 1)$
$= (1 + a)(3b + 1)$

19. $4am^3 - 12amn - m^2 + 3n$
$= (4am^3 - 12amn) - (m^2 - 3n)$
$= 4am(m^2 - 3n) - (m^2 - 3n)$
$= (m^2 - 3n)(4am - 1)$

20. $20ax - 5bx - 2by + 8ay$
$= (20ax + 8ay) - (5bx + 2by)$
$= 4a(5x + 2y) - b(5x + 2y)$
$= (5x + 2y)(4a - b)$

TRINOMIO CUADRADO PERFECTO :

Un trinomio es cuadrado perfecto cuando es el cuadrado de un binomio, o sea, el producto de dos binomios iguales.

Así, $a^2 + 2ab + b^2$ *es cuadrado perfecto de* $a + b$ *porque :*

$(a + b)^2 = (a + b).(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$

Del mismo modo, $(2X + 3Y)^2 = 4X^2 + 12XY + 9Y^2$ *luego* $4X^2 + 12XY + 9Y^2$ *es un trinomio cuadrado perfecto.*

Para factorizar un trinomio cuadrado perfecto se extrae la raíz cuadrada al primero y tercer término del trinomio y se separan estas raíces por el signo del segundo término. El binomio así formado, que es la raíz cuadrada del trinomio, se multiplica por sí mismo o se eleva al cuadrado.

Ejemplo 1 : **Factorizar** $m^2 + 2m + 1$

Se extrae la raíz cuadrada al primero y tercer término del trinomio

$\sqrt{m^2} = m \quad ; \quad \sqrt{1} = 1$

y se separan estas raíces por el signo del segundo término. El binomio así formado, que es la raíz cuadrada del trinomio, se multiplica por sí mismo o se eleva al cuadrado.

$m^2 + 2m + 1 = (m + 1).(m+1) = (m + 1)^2$

Ejercicios :

1. $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$
2. $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$
3. $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$
4. $y^4 + 2y^2 + 1 = (y^2 + 1)^2$
5. $a^2 - 10a + 25 = (a - 5)^2$
6. $9 - 6x + x^2 = (3 - x)^2$
7. $16 + 40x^2 + 25x^4 = (4 + 5x^2)^2$
8. $1 - 14a + 49a^2 = (1 - 7a)^2$
9. $36 + 12m^2 + m^4 = (6 + m^2)^2$
10. $1 - 2a^3 + a^6 = (1 - a^3)^2$
11. $a^8 + 18a^4 + 81 = (a^4 + 9)^2$
12. $a^6 - 2a^3b^3 + b^6 = (a^3 - b^3)^2$
13. $4x^2 - 12xy + 9y^2 = (2x - 3y)^2$
14. $9b^2 - 30a^2b + 25a^4 = (3b - 5a^2)^2$
15. $1 + 14x^2y + 49x^4y^2 = (1 + 7x^2y)^2$
16. $1 - 2a^5 + a^{10} = (1 - a^5)^2$
17. $49m^6 - 70am^3n^2 + 25a^2n^4$
$= (7m^3 - 5an^2)^2$
18. $100x^{10} - 60a^4x^5y^6 + 9a^8y^{12}$
$= (10x^5 - 3a^4y^6)^2$
19. $121 + 198x^6 + 81x^{12} = (11 + 9x^6)^2$
20. $a^2 - 24am^2x^2 + 144m^4x^4$
$= (a - 12m^2x^2)^2$
21. $16 - 104x^2 + 169x^4 = (4 - 13x^2)^2$
22. $400x^{10} + 40x^5 + 1 = (20x^5 + 1)^2$

DIFERENCIA DE CUADRADOS PERFECTOS :

En los productos notables (PRODUCTO DE LA SUMA POR LA DIFERENCIA DE DOS CANTIDADES pág. 36) se vió que la suma de dos cantidades multiplicadas por su diferencia es igual al cuadrado del minuendo menos el cuadrado del sustraendo, o sea:

$$(a + b).(a - b) = a^2 - b^2$$

Luego, recíprocamente;

$$a^2 - b^2 = (a + b).(a - b)$$

Para factorizar una diferencia de cuadrados se extrae la raíz cuadrada al minuendo y al sustraendo y se multiplica la suma de estas raíces cuadradas por la diferencia entre la raíz del minuendo y la del sustraendo.

Ejemplos :

1. $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$
2. $a^2 - 1 = (a+1)(a-1)$
3. $a^2 - 4 = (a+2)(a-2)$
4. $9 - b^2 = (3+b)(3-b)$
5. $1 - 4m^2 = (1+2m)(1-2m)$
6. $16 - n^2 = (4+n)(4-n)$
7. $a^2 - 25 = (a+5)(a-5)$
8. $1 - y^2 = (1+y)(1-y)$
9. $4a^2 - 9 = (2a+3)(2a-3)$
10. $25 - 36x^4 = (5+6x^2)(5-6x^2)$
11. $1 - 49a^2b^2 = (1+7ab)(1-7ab)$
12. $4x^2 - 81y^4 = (2x+9y^2)(2x-9y^2)$
13. $a^2b^8 - c^2 = (ab^4+c)(ab^4-c)$
14. $100 - x^2y^6 = (10+xy^3)(10-xy^3)$
15. $a^{10} - 49b^{12} = (a^5+7b^6)(a^5-7b^6)$
16. $25x^2y^4 - 121 = (5xy^2+11)(5xy^2-11)$
17. $100m^2n^4 - 169y^6$
    $= (10mn^2+13y^3)(10mn^2-13y^3)$
18. $a^2m^4n^6 - 144 = (am^2n^3+12)(am^2n^3-12)$

TRINOMIO DE LA FORMA $X^2 + bX + c$:

Trinomios de la forma $X^2 + bX + c$ son trinomios como :

$$X^2 + 5X + 6 \quad ; \quad m^2 + 15m - 14 \quad ; \quad X^2 - 8X + 18$$

que cumplen las condiciones siguientes :

1. *El coeficiente del primer término es 1.*
2. *El primer término es una letra cualquiera elevada al cuadrado.*
3. *El segundo término tiene la misma letra que el primero con exponente 1 y su coeficiente es una cantidad cualquiera, positiva o negativa.*
4. *El tercer término es independiente de la letra que aparece en el primero y segundo término y es una cantidad cualquiera, positiva o negativa.*

REGLA PRÁCTICA PARA FACTORIZAR UN TRINOMIO DE LA FORMA $X^2 + bX + c$

Ejemplo 1 : ***Factorizar $X^2 + 5X + 6$***

El trinomio se descompone en dos binomios cuyo primer término es la raíz cuadrada del primer término del trinomio (X^2), o sea X :

$$X^2 + 5X + 6 = (X \quad).(X \quad)$$

En el primer binomio después de X se escribe el signo del segundo término del trinomio (+5X).

$$X^2 + 5X + 6 = (X + \quad).(X + \quad)$$

En el segundo binomio después de X se escribe el signo que resulta de multiplicar el signo del segundo término del trinomio por el signo del tercer término del trinomio (en este caso multiplicamos los signos de +5X y de +6)

$$X^2 + 5X + 6 \quad = \quad (X + \quad).(X + \quad)$$

Ahora, buscamos dos números que sumados den "+5" y multiplicados den "+6". Esos números son 2 y 3, luego :

$$X^2 + 5X + 6 \quad = \quad (X + 2).(X + 3)$$

Ejemplo 2 : **Factorizar $m^2 - 7m + 12$**

El trinomio se descompone en dos binomios cuyo primer término es la raíz cuadrada del primer término del trinomio (m^2), o sea m :

$$m^2 - 7m + 12 \quad = \quad (m \quad).(m \quad)$$

En el primer binomio después de m se escribe el signo del segundo término del trinomio (– 7m).

$$m^2 - 7m + 12 \quad = \quad (m - \quad).(m - \quad)$$

En el segundo binomio después de m se escribe el signo que resulta de multiplicar el signo del segundo término del trinomio por el signo del tercer término del trinomio (en este caso multiplicamos los signos de – 7m y de +12)

$$m^2 - 7m + 12 \quad = \quad (m - \quad).(m - \quad)$$

Ahora, buscamos dos números que sumados den "–7" y multiplicados den "+12". Esos números son " – 3" y "– 4", luego :

$$m^2 - 7m + 12 \quad = \quad (m - 3).(m - 4)$$

Ejercicios :

1. $x^2 + 7x + 10 = (x+5)(x+2)$
2. $x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-2)$
3. $x^2 + 3x - 10 = (x+5)(x-2)$
4. $x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$
5. $a^2 + 4a + 3 = (a+3)(a+1)$
6. $m^2 + 5m - 14 = (m+7)(m-2)$
7. $y^2 - 9y + 20 = (y-5)(y-4)$
8. $x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$
9. $x^2 - 9x + 8 = (x-8)(x-1)$
10. $c^2 + 5c - 24 = (c+8)(c-3)$
11. $x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1)$
12. $a^2 + 7a + 6 = (a+6)(a+1)$
13. $y^2 - 4y + 3 = (y-3)(y-1)$
14. $n^2 - 8n + 12 = (n-6)(n-2)$
15. $x^2 + 10x + 21 = (x+7)(x+3)$
16. $a^2 + 7a - 18 = (a+9)(a-2)$
17. $m^2 - 12m + 11 = (m-11)(m-1)$
18. $x^2 - 7x - 30 = (x-10)(x+3)$
19. $n^2 + 6n - 16 = (n+8)(n-2)$
20. $a^2 - 21a + 20 = (a-20)(a-1)$
21. $y^2 + y - 30 = (y+6)(y-5)$
22. $a^2 - 11a + 28 = (a-7)(a-4)$
23. $n^2 - 6n - 40 = (n-10)(n+4)$
24. $x^2 - 5x - 36 = (x-9)(x+4)$

El procedimiento anterior es aplicable a la factorización de trinomios que no siendo de la forma $X^2 + bX + c$ se parecen mucho ya que podemos notar que la letra del primer término tiene raíz cuadrada exacta y la letra del segundo término tiene la misma letra que el primero y su exponente es la raíz cuadrada del exponente del primer término.

Ejemplos :

1. $x^4 + 5x^2 + 4 = (x^2+4)(x^2+1)$
2. $x^6 - 6x^3 - 7 = (x^3-7)(x^3+1)$
3. $x^8 - 2x^4 - 80 = (x^4-10)(x^4+8)$
4. $x^2y^2 + xy - 12 = (xy+4)(xy-3)$
5. $(4x)^2 - 2(4x) - 15 = (4x-5)(4x+3)$
6. $(5x)^2 + 13(5x) + 42 = (5x+7)(5x+6)$

7. $x^2 + 2ax - 15a^2 = (x+5a)(x-3a)$

8. $a^2 - 4ab - 21b^2 = (a-7b)(a+3b)$

9. $(x-y)^2 + 2(x-y) - 24 = (x-y+6)(x-y-4)$

10. $-x^2 + 4x + 5$

$= -(x^2 - 4x - 5) = -(x-5)(x+1) = (5-x)(x+1)$

11. $x^{10} + x^5 - 20 = (x^5+5)(x^5-4)$

FACTORIZACIÓN UTILIZANDO LA FÓRMULA GENERAL DE SEGUNDO GRADO :

La Forma Factorizada de un polinomio de segundo grado es :

$$P(x) = a.(X - X_1).(X - X_2)$$

Donde "X_1" y "X_2" son las dos raíces del polinomio y **"a"** *es el coeficiente principal.*

$aX^2 + bX + c$

En estos apuntes, a partir de la página 48, hemos estudiado las ecuaciones de segundo grado con una incógnita. Hemos dicho que las raíces de una ecuación de segundo grado son los valores de la incógnita que satisfacen la ecuación y que toda ecuación de segundo grado tiene ***dos raíces****.*

La fórmula para hallar las dos raíces de una ecuación de segundo grado es :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Podemos entonces deducir la siguiente ***REGLA PRÁCTICA PARA FACTORIZAR UN TRINOMIO DE LA FORMA $aX^2 + bX + c$:***

1) ***Se calculan las dos raíces que satisfagan la ecuación $aX^2 + bX + c = 0$ con la utilización de la fórmula general de 2do. Grado (también conocida como resolvente).***

2) ***Se descompone el trinomio en dos binomios cuyo primer término sea la X.***

3) ***A continuación de cada X se coloca cada una de las raíces pero con signo cambiado.***

4) ***Se indica la multiplicación de los dos binomios anteriores por el valor de "a".***

$$\boxed{aX^2 + bX + c = a.(X - X_1).(X - X_2)}$$

<u>Ejemplo 1 :</u> ***Factorizar la ecuación*** $2X^2 - 4X = 6$

En la página 49 de estos apuntes calculamos las dos raíces de esta ecuación con la utilización de la fórmula general de segundo grado.

Las raíces de la ecuación $2X^2 - 4X - 6 = 0$ *son* $X = 3$ *y* $X = -1$*, porque ambos valores satisfacen esta ecuación.*

Conociendo las dos raíces y tomando en cuenta la Forma Factorizada de un polinomio de 2do grado, podemos decir que :

$$2X^2 - 4X - 6 = 2.(X - 3).(X + 1)$$

Note que los números que acompañan a la X en los dos binomios del miembro de la derecha son las raíces calculadas anteriormente pero con el signo cambiado.

<u>Ejemplo 2 :</u> ***Factorizar el trinomio*** $49X^2 - 70X + 25$

En la página 50 de estos apuntes calculamos las dos raíces de esta ecuación con la utilización de la fórmula general de segundo grado.

$$49x^2 - 70x + 25 = 0$$

$$x = \frac{70 \pm \sqrt{(70)^2 - 4(49)(25)}}{2(49)}$$

$$x = \frac{70 \pm \sqrt{4.900 - 4.900}}{98}$$

$$x_1 = x_2 = \frac{70}{98} = \frac{5}{7}$$

$$49X^2 - 70X + 25 = 49.\left(X - \frac{5}{7}\right).\left(X - \frac{5}{7}\right)$$

Note que los números que acompañan a la X en los dos binomios del miembro de la derecha son las raíces calculadas anteriormente pero con el signo cambiado.

Ejemplo 3 : ***Factorizar el trinomio*** **$-X^2 - 56 - 15X$**

Primero ordenados el trinomio : **$-1X^2 - 15X - 56$** *y luego aplicamos la fórmula general de segundo grado (resolvente) :*

$$x = \frac{-(-15) \pm \sqrt{(-15)^2 - 4(-1)(-56)}}{2(-1)}$$

$$x = \frac{+15 \pm \sqrt{225 - 224}}{-2} = \frac{15 \pm \sqrt{1}}{-2} = \frac{15 \pm 1}{-2}$$

$$x_1 = \frac{15 + 1}{-2} = \frac{16}{-2} = -8$$

$$x_2 = \frac{15 - 1}{-2} = \frac{14}{-2} = -7$$

Conocidas las raíces decimos que :

$$-1X^2 - 15X - 56 = -1.(X + 8).(X + 7)$$

Ejemplo 4 : ***Factorizar el trinomio*** **$-3X^2 + 5X - 2 = 0$**

$$x = \frac{-(5) \pm \sqrt{(5)^2 - 4(-3)(-2)}}{2(-3)} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{-6} = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{-6}$$

$$x = \frac{-5 \pm 1}{-6} \qquad x_1 = \frac{-5 + 1}{-6} = \frac{-4}{-6} = \frac{2}{3}$$

$$x_2 = \frac{-5 - 1}{-6} = \frac{-6}{-6} = 1$$

Conocidas las raíces decimos que :

$$-3X^2 + 5X - 2 = -3.(X - 2/3).(X - 1)$$

Note que los números que acompañan a la X en los dos binomios del miembro de la derecha son las raíces calculadas anteriormente pero con el signo cambiado.

Ejemplo 5 : ***Factorizar el trinomio*** **$25X^2 - 15X + 2$**

$$x = \frac{15 \pm \sqrt{(15)^2 - 4(25)(2)}}{2(25)}$$

$$x = \frac{15 \pm \sqrt{225 - 200}}{50}$$

$$x = \frac{15 \pm \sqrt{25}}{50}$$

$$x_1 = \frac{15 + 5}{50} = \frac{20}{50} = \frac{2}{5}$$

$$x_2 = \frac{15 - 5}{50} = \frac{10}{50} = \frac{1}{5}$$

Conocidas las raíces decimos que :

$$25X^2 - 15X + 2 = 25.(X - 2/5).(X - 1/5)$$

Note que los números que acompañan a la X en los dos binomios del miembro de la derecha son las raíces calculadas anteriormente pero con el signo cambiado.

FACTORIZACIÓN DE UN POLINOMIO APLICANDO LA REGLA DE RUFFINI :

CONSIDERACIONES :

1) *Para factorizar por el método de RUFFINI, es necesario que el polinomio posea un término independiente.*

2) *El polinomio se debe ordenar en forma decreciente, es decir desde la potencia más alta hasta el término independiente.*

3) *Se debe vigilar que el polinomio esté completo, en aquellos polinomios donde falta un término debemos colocar el mismo acompañado del coeficiente cero.*

4) *Las posibles raíces del polinomio son todos aquellos números positivos y negativos que dividan, en forma exacta, al término independiente.*

5) *Cuando se determine el valor de una raíz, para los efectos de colocarlo como factor siempre se le debe cambiar el signo, esto ocurre porque al igualarlo a cero el número cambia de signo.*

6) *El polinomio se puede factorizar total o parcialmente. Está factorizado en forma total cuando el número de factores coincide con el grado del polinomio, en caso contrario se dice que está factorizado parcialmente.*

Factorizar $X^4 - 4X^3 - X^2 + 16X - 12$

Para aplicar la REGLA DE RUFFINI debo tener presente que las raices enteras que puede tener el polinomio serán algunos de los divisores del término independiente. (en este caso en particular de 12) o sea que se prueba con 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 6, -6, 12 y -12.

Primero se copian los coeficientes del polinomio en una tabla similar a la siguiente:

	X^4	$-4X^3$	$-X^2$	$+16X$	-12
	1	– 4	– 1	16	– 12

Se copia el primer coeficiente debajo de él mismo :

	X^4	$-4X^3$	$-X^2$	$+16X$	-12
	1	– 4	– 1	16	– 12
	1				

*Se prueba con el primer divisor del término independiente (a esto lo llamaremos raiz)(**1** en ese caso):*

	X^4	$-4X^3$	$-X^2$	$+16X$	-12
1	1	– 4	– 1	16	– 12
	1				

Se multiplica la raiz con el primer coeficiente que se bajó y el producto se copia debajo del segundo coeficiente :

	X^4	$-4X^3$	$-X^2$	$+16X$	-12
1	1	– 4	– 1	16	– 12
	1	1			

Luego se efectúa la suma algebraica de las dos cantidades ubicadas en la columna donde se colocó el producto:

	X^4	$-4X^3$	$-X^2$	$+16X$	-12
1	1	– 4 1	– 1	16	– 12
	1	– 3			

Se multiplica la raiz por el resultado de la suma algebraica realizada y este producto se copia debajo del tercer coeficiente :

	X^4	$-4X^3$	$-X^2$	$+16X$	-12
1	1	– 4 1	– 1 – 3	16	– 12
	1	– 3			

Luego se efectúa la suma algebraica de las dos cantidades ubicadas en la columna donde se colocó el producto:

	X^4	$-4X^3$	$-X^2$	$+16X$	-12
1	1	– 4 1	– 1 – 3	16	– 12
	1	– 3	– 4		

Se multiplica la raiz por el resultado de la suma algebraica realizada y este producto se copia debajo del cuarto coeficiente :

	X^4	$-4X^3$	$-X^2$	$+16X$	-12
1	1	– 4 1	– 1 – 3	16 – 4	– 12
	1	– 3	– 4		

Luego se efectúa la suma algebraica de las dos cantidades ubicadas en la columna donde se colocó el producto:

	X^4	$-4X^3$	$-X^2$	$+16X$	-12
1	1	– 4	– 1	16	– 12
		1	– 3	– 4	
	1	– 3	– 4	12	

Se multiplica la raíz por el resultado de la suma algebraica realizada y este producto se copia debajo del quinto coeficiente :

	X^4	$-4X^3$	$-X^2$	$+16X$	-12
1	1	– 4	– 1	16	– 12
		1	– 3	– 4	12
	1	– 3	– 4	12	

Luego se efectúa la suma algebraica de las dos cantidades ubicadas en la columna donde se colocó el producto:

	X^4	$-4X^3$	$-X^2$	$+16X$	-12
1	1	– 4	– 1	16	– 12
		1	– 3	– 4	12
	1	– 3	– 4	12	0

*Como el resultado final es cero (0), esto nos indica que el **1** si es una raiz del polinomio y nos sirve para factorizar.*

Si el resultado hubiese sido distinto de cero, habría que seguir probando los demás divisores de 12.

Hasta ahora tenemos un producto como se observa al utilizar los nuevos coeficientes obtenidos:

	X^4	$-4X^3$	$-X^2$	$+16X$	-12
1	1	– 4	– 1	16	– 12
		1	– 3	– 4	12
	1	– 3	– 4	12	0
$(X-1)\ .\ (X^3$		$-3X^2$	$-4X$	$+12)$	

*Note que la raiz calculada es **1** , pero por lo indicado en la consideración 5 se debe colocar **– 1***

Lo que hemos hecho hasta ahora es conseguir la primera raiz entera del polinomio que queremos factorizar, tenemos entonces que:

$$X^4 - 4X^3 - X^2 + 16X - 12 = (X-1)(X^3 - 3X^2 - 4X + 12)$$

De hecho ya hemos factorizado el polinomio, pero el segundo factor de tercer grado debemos intentar seguir factorizándolo.

Para buscar la segunda raíz se recomienda utilizar el método de Ruffini para el segundo factor de tercer grado $(X^3 - 3X^2 - 4X + 12)$ *probando con los divisores del término independiente (12 en este caso también)*

Procedemos entonces de manera similar a lo explicado al inicio de este ejercicio pero ahora con el polinomio de grado tres :

*De nuevo pruebo con **1** :*

	X^3	$-3X^2$	$-4X$	$+12$	
1	1	– 3 1	– 4 – 2	12 – 6	
	1	– 2	– 6	6	

Como el resultado final es distinto de cero (6 en este caso), sigo probando los demás divisores de 12.

*Probando ahora con **– 1** :*

	X^3	$-3X^2$	$-4X$	$+12$	
– 1	1	– 3 – 1	– 4 4	12 0	
	1	– 4	0	12	

Como el resultado final es distinto de cero (12 en este caso), sigo probando los demás divisores de 12.

*Probando ahora con **2** :*

	X^3	$-3X^2$	$-4X$	$+12$	
2	1	– 3 2	– 4 – 2	12 – 12	
	1	– 1	– 6	0	

Como el resultado final es cero, hemos conseguido la segunda raiz:

	X^3	$-3X^2$	$-4X$	$+12$	
2	1	– 3 2	– 4 – 2	12 – 12	
	1	– 1	– 6	0	
$(X-2)\ .\ (X^2$		$-X$	$-6)$		

De donde $X^3 - 3X^2 - 4X + 12 = (X-2)\ (X^2 - X - 6)$

El polinomio inicial va quedando factorizado de la siguiente manera :

$$X^4 - 4X^3 - X^2 + 16X - 12 = (X-1)(X-2)\ (X^2 - X - 6)$$

Solo nos queda factorizar el tercer factor que es un polinomio de segundo grado $(X^2 - X - 6)$

*Para algunos alumnos resulta mas fácil factorizar buscando dos números que sumados den **–1** y multiplicados den **–6** (es decir 2 y – 3).*

Como la finalidad de este trabajo es mostrar la utilización de la Regla de Ruffini, vamos a continuar con su aplicación.

*Probando con **– 2** :*

	X^2	$-X$	-6		
– 2	1	– 1 – 2	– 6 6		
	1	– 3	0		
$(X+2)\ .\ (X$		$-3)$			

*La nueva raiz es **– 2** y el último factor es* $(X-3)$:

De donde $X^2 - X - 6 = (X + 2)(X - 3)$

El polinomio inicial quedará factorizado de la siguiente manera:

$$X^4 - 4X^3 - X^2 + 16X - 12 = (X - 1)(X - 2)(X + 2)(X - 3)$$

Según como sea el polinomio hay métodos que se pueden aplicar y otros que no.

Se aconseja que se intenten aplicar los cinco métodos sucesivamente, es decir, en primer lugar se puede extraer el factor común, y luego se pueden seguir aplicando otros de los métodos.

Algunas veces es posible combinar varios métodos a la vez. Lo importante es que el alumno se ejercite en los métodos existentes y cuando se presente el problema tenga suficientes y claros criterios para afrontar la situación.

En algunas ocasiones y de acuerdo al problema planteado se puede paralizar el proceso de factorización de acuerdo a nuestra conveniencia; en este ejercicio en particular podemos señalar varias formas de factorización de este polinomio:

Con una raíz:

$$X^4 - 4X^3 - X^2 + 16X - 12 = (X - 1)(X^3 - 3X^2 - 4X + 12)$$

Con dos raíces:

$$X^4 - 4X^3 - X^2 + 16X - 12 = (X - 1)(X - 2)(X^2 - X - 6)$$

Con todas sus raíces:

$$X^4 - 4X^3 - X^2 + 16X - 12 = (X - 1)(X - 2)(X + 2)(X - 3)$$

Para aplicar la REGLA DE RUFFINI debo tener presente que las raices enteras que puede tener el polinomio serán algunos de los divisores del término independiente.

Esta condición no nos obliga a que probemos una sola vez cada raiz; por ejemplo si probamos con "1" y la suma final nos da "0" , esto significa que "1" es una raiz (la primera), pero como un polinomio puede tener dos o más raices iguales se recomienda que a continuación pruebe con la misma raiz ("1" en este caso)

El ejercicio siguiente persigue demostrar que lo indicado anteriormente es recomendable hacerlo

Factorizar $X^4 + 3X^3 - 15X^2 + 17X - 6$

Probando con ***1*** *:*

	X^4	$+3X^3$	$-15X^2$	$+17X$	-6
1	1	3 1	-15 4	17 -11	-6 6
	1	4	-11	6	0
$(X-1)$.	$(X^3$	$+4X^2$	$-11X$	$+6)$	

Lo que hemos hecho hasta ahora es conseguir la primera raiz entera del polinomio que queremos factorizar, tenemos entonces que:

$$X^4 + 3X^3 - 15X^2 + 17X - 6 = (X - 1)(X^3 + 4X^2 - 11X + 6)$$

Para buscar la segunda raiz se recomienda utilizar el método de Ruffini para el segundo factor de tercer grado indicado anteriormente $(X^3 + 4X^2 - 11X + 6)$ *probando con los divisores del término independiente (6 en este caso también)*

*De nuevo pruebo con **1***

	X^3	$+4X^2$	$-11X$	$+6$	
1	1	4 1	-11 5	6 -6	
	1	5	-6	0	
$(X-1)\,.\,(X^2$		$+5X$	$-6)$		

Hemos encontrado la segunda raíz (en este caso también es 1) y el polinomio inicial va quedando factorizado así :

$$X^4 + 3X^3 - 15X^2 + 17X - 6 = (X-1)(X-1)(X^2+5X-6)$$

Solo nos queda factorizar el tercer factor que es un polinomio de segundo grado (X^2+5X-6)

*Probando de nuevo con **1** :*

	X^2	$+5X$	-6		
1	1	5 1	-6 6		
	1	6	0		
$(X-1)\,.\,(X$		$+6)$			

*La nueva raiz es **1** y el último factor es* $(X+6)$:

Calculadas como han sido todas las raices podemos decir que:

$$X^4 + 3X^3 - 15X^2 + 17X - 6 = (X-1)(X-1)(X-1)(X+6)$$

Note que las tres primeras raices son iguales y podemos decir que:

$$X^4 + 3X^3 - 15X^2 + 17X - 6 = (X-1)^3\,(X+6)$$

Factorizar $X^4 - 11X^2 - 18X - 8$

Para aplicar la REGLA DE RUFFINI en aquellos polinomios donde falta un término debemos colocar el mismo acompañado del coeficiente cero.

En este caso en particular notamos que el polinomio no tiene el termino de grado tres, se conformará de la siguiente manera :

$$X^4 + 0X^3 - 11X^2 - 18X - 8$$

*Probando con **1** :*

	X^4	$+0X^3$	$-11X^2$	$-18X$	-8
1	1	0 1	-11 1	-18 -10	-8 -28
	1	1	-10	-28	-36

*Como el resultado es distinto de cero quiere decir que **1** no es raiz.*

*Probando con **- 1** :*

	X^4	$+0X^3$	$-11X^2$	$-18X$	-8
-1	1	0 -1	-11 1	-18 10	-8 8
	1	-1	-10	-8	0

*Como el resultado es igual a cero quiere decir que **– 1** si es una raiz.*

El polinomio va quedando factorizado así :

$$X^4 - 11X^2 - 18X - 8 = (X + 1)(X^3 - X^2 - 10X - 8)$$

Probando de nuevo con ***– 1*** *pero ahora con el segundo factor de tercer grado* $(X^3 - X^2 - 10X - 8)$

	X^3	$-X^2$	$-10X$	-8	
	1	-1	-10	-8	
-1		-1	2	8	
	1	-2	-8	0	

La segunda raíz también es ***– 1*** *, el polinomio va quedando factorizado así :*

$$X^4 - 11X^2 - 18X - 8 = (X + 1)(X + 1)(X^2 - 2X - 8)$$

Solo nos falta factorizar el polinomio $(X^2 - 2X - 8)$

Para factorizar el polinomio $(X^2 - 2X - 8)$ *buscamos dos números que sumados den* ***– 2*** *y multiplicados den* ***– 8*** *(en este caso* ***2*** *y* ***– 4*** *)*

Como $(X^2 - 2X - 8) = (X + 2)(X - 4)$

El polinomio inicial quedará factorizado así :

$$\boxed{X^4 - 11X^2 - 18X - 8 = (X + 1)(X + 1)(X + 2)(X - 4)}$$

O también puede ser indicado así :

$$X^4 - 11X^2 - 18X - 8 = (X + 1)^2 (X + 2)(X - 4)$$

FACTORIZAR : $2X^3 + 3X^2 - 3X - 2$

	$2X^3$	$+3X^2$	$-3X$	-2
	2	3	– 3	– 2
1		2	5	2
	2	5	2	**0**
– 2		– 4	– 2	
	2	1	**0**	

$$2X^3 + 3X^2 - 3X - 2 = (X - 1)(X + 2)(2X + 1)$$

FACTORIZAR : $2X^3 - 12X^2 + 64$

	$2X^3$	$-12X^2$	$+0X$	$+64$
	2	– 12	0	64
– 2		– 4	32	– 64
	2	– 16	32	**0**
4		8	– 32	
	2	– 8	**0**	
4		8		
	2	**0**		

$$2X^3 - 12X^2 + 64 = 2(X + 2)(X - 4)(X - 4)$$

COCIENTE NO FACTORIZABLE

(Factorización Parcial)

No todos los polinomios pueden ser factorizados totalmente. Algunas veces nos encontraremos con polinomios que NO permiten conseguir todas sus raíces ya que dentro de su factorización presentan en su cociente un polinomio no factorizable.

FACTORIZAR : $X^4 + 5X^3 + 8X^2 + 7X + 3$

*Probamos con **"1"** y el resultado no fue igual a cero por lo que **"1"** no es una raíz.*

Probando con "– 1" :

	X^4	$+ 5X^3$	$+ 8X^2$	$+ 7X$	$+ 3$
– 1	1	5 – 1	8 – 4	7 – 4	3 – 3
	1	4	4	3	0
$(X + 1)$	$(X^3$	$+ 4X^2$	$+ 4X$	$+ 3)$	

*Como el resultado es igual a cero, **"– 1"** si es raíz, entonces podemos decir que :*

$$X^4 + 5X^3 + 8X^2 + 7X + 3 = (X + 1)(X^3 + 4X^2 + 4X + 3)$$

Ahora tratamos de factorizar al polinomio $X^3 + 4X^2 + 4X + 3$

Probamos con 1, - 1. 2, - 2 y 3 y detrminamos que ninguno de esos valores son raíces.

*Probamos con **– 3 :***

	X^3	$+ 4X^2$	$+ 4X$	$+ 3$	
– 3	1	4 – 3	4 – 3	3 – 3	
	1	1	1	0	
$(X + 3)$	$(X^2$	$+ X$	$+ 1)$		

*Como el resultado es igual a cero, **"– 3"** si es raíz, entonces podemos decir que :*

$$X^3 + 4X^2 + 4X + 3 = (X + 3)(X^2 + X + 1)$$

Cuando tratamos de factorizar al polinomio $X^2 + X + 1$ *notaremos que no es factorizable (ni siquiera utilizando la fórmula cuadrática* $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ *) , luego podemos afirmar que:*

$$X^4 + 5X^3 + 8X^2 + 7X + 3 = (X + 1)(X + 3)(X^2 + X + 1)$$