UNIVERSIDAD DE ORIENTE
NÚCLEO DE MONAGAS
POST GRADO EN CIENCIAS ADMINISTRATIVAS
MENCIÓN FINANZAS

FINANZAS INTERNACIONALES

Ensayo:

Construcción de la Frontera Eficiente de Markowitz mediante el uso de la herramienta SOLVER de Excel y el modelo Matricial.

PRESENTADO A:
PROF. MCS. José Pérez Montenegro

REALIZADO POR:
Helston Coronel

Maturín-Venezuela, Abril 2010

INTRODUCCIÓN

La frontera eficiente, en términos del mundo de los portafolios de inversión, es la curva de Rendimiento vs. Riesgo que representa el conjunto de portafolios considerados como óptimos, es decir, aquellos portafolios que para un riesgo dado, se obtiene un máximo rendimiento, o visto de manera similar, para un rendimiento deseado, se obtiene un mínimo riesgo. Este es precisamente el concepto que Markowitz desarrolló en el año de 1952, cuyo trabajo, hoy día, aún tiene vigencia en el mundo de la teoría del portafolio.

Este ensayo tiene como objetivo encontrar la frontera eficiente de un portafolio de inversión a través del uso de la herramienta SOLVER de Excel. El mismo está escrito en forma de tutorial con el fin de guiar al lector en el uso de la hoja Excel "Modelo SOLVER para Frontera Eficiente.xls", donde se han cargado los modelos matemáticos que sirven para hallar los valores de rentabilidad y riesgo de un portafolio compuesto de 4 valores de renta variable, con la disposición de 5 períodos de datos de rentabilidad para cada valor.

Aunque los cálculos están limitados a 4 acciones para 5 períodos de datos por acción, el concepto del modelo puede fácilmente funcionar para un mayor número de acciones y períodos, con tan solo ampliar el número de acciones y de rendimientos por períodos en la tabla de datos históricos mostrada en la hoja.

Básicamente el modelo se basa en las ecuaciones de la teoría del portafolio pero, en su forma matricial, dado que desde el punto de vista de las funciones de cálculo con matrices de Excel, constituye una herramienta de más fácil manejo que el método de cálculo por suma de productos que se derivan de las ecuaciones originales de la teoría del portafolio.

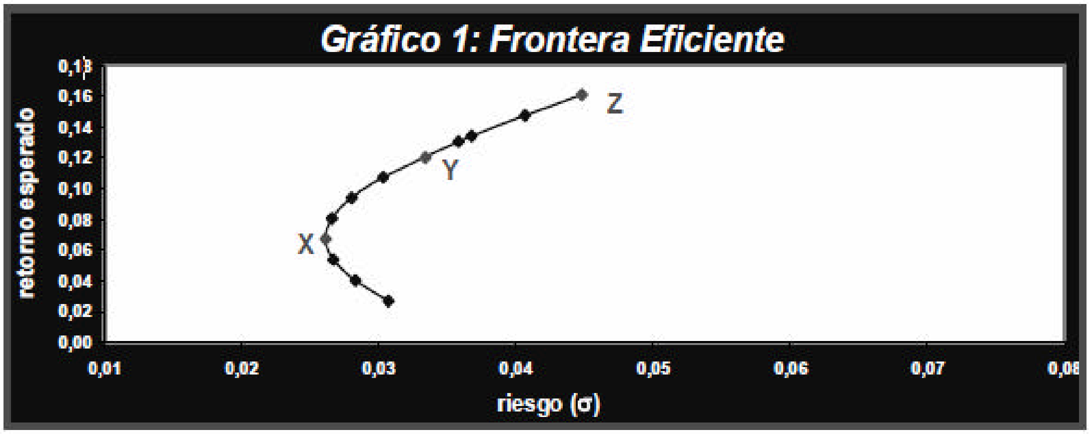
Este ensayo se constituye como un manual para el uso de la hoja de cálculo “Modelo SOLVER para Frontera Eficiente.xls”, la cual es necesario obtener para así poder cumplir con el objetivo de este documento.

La Frontera Eficiente

“Es un subconjunto del conjunto de varianza mínima. La frontera eficiente también se conoce como el conjunto eficiente y el loci eficiente y en ocasiones se denomina la frontera eficiente de Markowitz.

En terminología de H. Markowitz, el lugar geométrico del espacio media-varianza definido por aquellas carteras que para un riesgo dado le proporcionan al inversor un rendimiento máximo o, equivalentemente, para un rendimiento dado el riesgo que le deparan es mínimo”. (La gran enciclopedia de la economía).

En la Frontera Eficiente, están situadas las mejores rentabilidades para un riesgo determinado, clasificadas de la forma que a mayor riesgo corresponda una mayor rentabilidad. Según el grado de aversión al riesgo, el inversor se situará de forma razonable en uno u otro punto de la línea de la frontera eficiente. Cualquier otro punto sería irracional. Sin embargo, a nivel práctico el modelo presenta algún grado de complejidad. Primero, la pesadez de su desarrollo estadístico, así, para hallar la matriz de covarianzas hay que relacionar todos los valores dos a dos y calcular varianzas y covarianzas, complicándose para portafolios con un número considerable de acciones. Segundo, los datos para tener en cuenta, son las rentabilidades y riesgos históricos y se supone que en el futuro serán similares. Esta suposición es demasiado fuerte en la mayoría de los casos porque es lo mismo que suponer que la inercia del mercado es total en el futuro. Sin embargo, este conflicto lo presentan todos los modelos de comportamiento bursátil. Como se puede apreciar en el gráfico (1), el riesgo es medido en el eje horizontal y el retorno esperado en el eje vertical. Los puntos por debajo de la curva son distintas combinaciones de riesgo y retorno esperados.



02 0,03 0,04 0,05 0,06 0,07 0,08

Gráfico 1: Frontera

La línea curva (XYZ) representa el conjunto de portafolios eficientes. Cualquier portafolio situado por debajo y a la derecha de la Frontera Eficiente (XYZ) será ineficiente, ofrece retornos inferiores dado cada nivel de riesgo. Para el conjunto de portafolios eficientes, el inversor podrá escoger el portafolio que prefiera dado su apetito o grado de aversión al riesgo. Si el inversor quiere unos retornos esperados altos sin importar el nivel de riesgo que debe asumir, escoge el portafolio (Z) en el gráfico (1). Si prefiere un nivel medio de riesgo escoge el portafolio (Y), y si tiene aversión al riesgo al riesgo tendrá que escoger el portafolio (X).

De lo anterior, se deduce que todos los portafolios en la línea (XYZ) son eficientes y las diferentes combinaciones de acciones dependerán del nivel de riesgo que el inversor este dispuesto a asumir”. (Alvaro José Cobo Quintero, pp. 4-5)

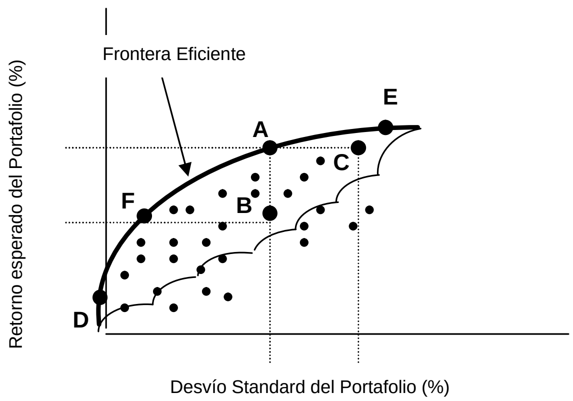
¿Cómo se calcula la frontera eficiente?

Para su determinación se necesita primero determinar los activos elegibles. En segundo lugar se necesita contar con los siguientes datos de dichos activos:

- Rendimiento esperado de cada uno de los activos

- Riesgo o desviación estándar esperada de cada uno de los activos
- Matriz de varianzas y covarianzas o matriz de correlaciones entre todos los activos.

La forma de cálculo de la frontera eficiente surge de resolver un problema de programación lineal que podría ser planteado de la siguiente manera: tomemos como ejemplo el cálculo del punto F de la frontera eficiente del gráfico siguiente.



Función objetivo: Minimización del riesgo suponiendo un rendimiento dado por F

Incógnitas a resolver: determinación de las proporciones de cada uno de los activos que componen el portafolio F.

Sujeto a las siguientes restricciones:
La sumatoria de todas las ponderaciones debe ser igual a 1, es decir:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 1 \qquad (A)$$

Las restricciones son ilimitadas pues dependerán de las limitaciones de inversión que tenga el portafolio. Por ejemplo, otra restricción podría ser que no se puede estar corto en ningún activo; otra podría ser que no se puede invertir más del x% en un determinado activo; y así sucesivamente.

El riesgo viene dado por la suma de todos productos obtenidos de multiplicar cada varianza o covarianza (s_i^2 o s_{ij}) de pares de valores pertenecientes al portafolio, por el producto de las proporciones (X_i^2 o X_{ij}) de dichos valores en el portafolio, es decir:

$$s^2p = \underset{i=1}{\overset{n}{S}} X_i^2 \, s_i^2 + 2 \underset{i=1}{\overset{n}{S}} \; \underset{j>1}{\overset{n}{S}} X_i X_j \, s_{ij} \qquad \text{ó} \qquad s^2p = \underset{i=1}{\overset{n}{S}} \; \underset{j=1}{\overset{n}{S}} X_i X_j \, s_{ij} \qquad \text{(B)}$$

$$sp = V\overline{s^2p} \qquad \Rightarrow \qquad \text{(RIESGO)}$$

El rendimiento esperado del portafolio se calcula de la suma de los productos entre el riesgo esperado de cada valor por su proporción een el portafolio, esto es:

$$Ep = \underset{i=1}{\overset{n}{S}} X_i \; E_i \qquad \text{(Rendimiento esperado del Portafolio)}$$

(C)

Donde:

s^2p es la varianza del portafolio p, es decir, el nivel de riesgo.

X_i es la proporción a invertir en el activo i.

s_i^2 es la varianza del activo i.

Ep es el rendimiento esperado del portafolio.

Ei es el rendimiento esperado del activo i, obtenido como el promedio de los rendimientos del activo en un período de tiempo.

La varianza del portafolio también se puede obtener mediante su forma de cálculo matricial, como se muestra:

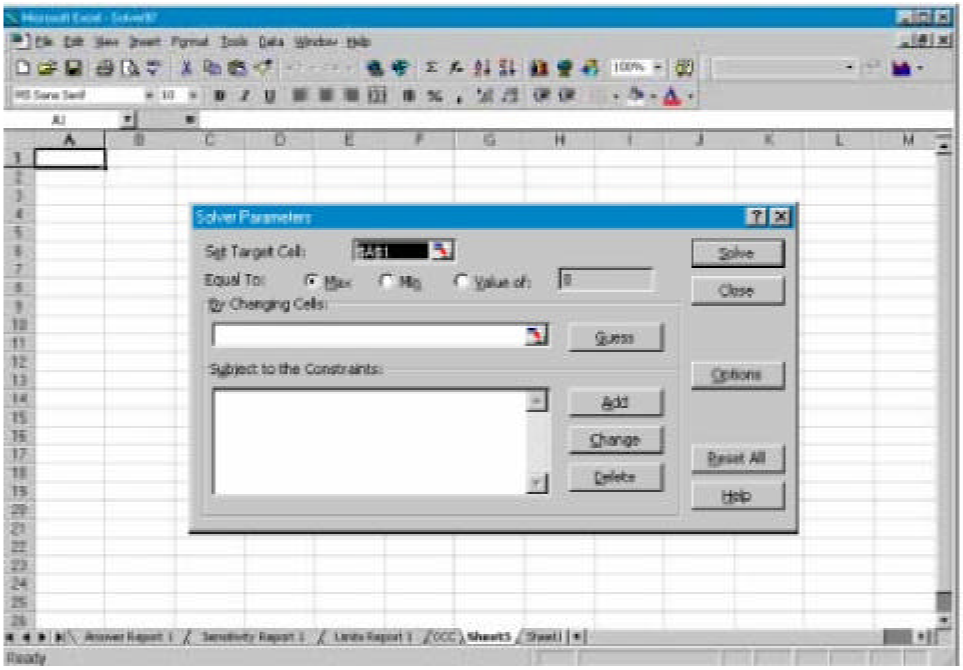
Varianza del portafolio (Calculada matricialmente) …..(D).

$$\sigma_p^2 = \begin{bmatrix} X1 & X2 & Xn \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{2n} \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \sigma_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X1 \\ X2 \\ Xn \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X1 & X2 & Xn \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \sigma_{2n} \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X1 \\ X2 \\ Xn \end{bmatrix}$$

La matriz cuadrada nxn es la matriz de covarianza de los instrumentos, que en su diagonal contiene a la varianza de cada instrumento dentro del portafolio. Esta forma de cálculo es muy importante conocerla dado que la hoja EXCEL tiene capacidad de hacer cálculos con matrices, esto significa que a la hora de construir un modelo en Excel para el cálculo de la varianza del portafolio (s^2p) será más conveniente y sencillo desarrollar los cálculos en su forma matricial que en la forma de suma de productos representada en la ecuación (B).

Los cálculos del riesgo y rendimiento esperado del portafolio se pueden realizar mediante la ayuda de la planilla de Excel y mediante el uso de la función SOLVER.

La función Solver de EXCEL sirve para resolver problemas de optimización lineal y no lineal; es una herramienta que permite calcular máximos o mínimos de una variable que depende de otras, representadas en un modelo de una o varias ecuaciones; también se pueden indicar restricciones enteras sobre las variables de decisión. Con Solver es posible resolver problemas que tengan hasta 200 variables de decisión, 100 restricciones explícitas y 400 simples (cotas superior e inferior o restricciones enteras sobre las variables de decisión). Para acceder a Solver, se selecciona Tools (Herramientas) en el menú principal y luego Solver. La ventana con los parámetros de Solver aparecerá tal y como se muestra a continuación:



Para ejemplificar lo anterior, se tomaran un grupo de 4 acciones cualquiera cuyas principales características se presentan en el siguiente cuadro:

	Tabla de Datos Históricos							
	Rendimientos en cada Período							
Activos del Portafolio	Período 1 (enero)	Período 2 (febrero)	Período 3 (marzo)	Período 4 (abril)	Período 5 (mayo)	Ri= Rendimiento Promedio	s^2=Varianza	s= Desviación Estándar
Acción 1	5,00%	6,00%	4,00%	4,50%	5,30%	4,96%	0,01%	0,76%
Acción 2	10,00%	15,00%	8,00%	2,00%	11,00%	9,20%	0,23%	4,76%
Acción 3	15,00%	20,00%	22,00%	21,00%	19,00%	19,40%	0,07%	2,70%
Acción 4	30,00%	23,00%	20,00%	19,00%	25,00%	23,40%	0,19%	4,39%

La tabla anterior representa los datos históricos de rendimientos mensuales de las acciones 1, 2, 3 y 4 que forman parte del portafolio, en 5 períodos (enero-mayo). Con la ayuda de la hoja Excel se calcula el rendimiento esperado de cada acción (Ri), la varianza (s^2) y la desviación Estándar (s). Para estos cálculos se aprovechan las funciones de

Excel: =PROMEDIO(xx:yy), =VAR(xx:yy) y =DESVEST(xx:yy), donde xx:yy representa en Excel la fila de datos históricos de cada acción.

Con la ayuda de EXCEL se puede obtener la matriz de varianzas y covarianzas. Del cálculo anterior ya se obtuvieron las varianzas de cada acción. Para el cálculo de las covarianzas se aprovecha la función =COVAR(xx:yy;XX:YY); en este caso xx:yy representa la fila de datos históricos de una acción i, y XX:YY representa la fila de datos históricos de una acción j. Se debe recordar que la matriz de varianzas y covarianzas es una matriz cuadrada nxn (ver ecuación D) donde n representa el número de acciones que componen el portafolio. Entre las características de esta matriz podemos mencionar que:

* Es una Matriz Cuadrada nxn, donde n es igual al número de acciones del portafolio.
* Es una Matriz simétrica, ya que el cálculo de la Cov (Acción i, Acción j) es igual a la Cov (Acción j, Acción i), dicho de otra manera, $s_{ij} = s_{ji}$.
* En la diagonal de la matriz se encuentran las varianzas de cada acción ya que, la Cov(Acción i, Acción i) es igual a la Var(Acción i), dicho de otra forma, $s_{ii} = s^2_i$. Esto es un caso especial de s_{ij} cuando i=j.

Por tanto, tal como se mostró en la forma de ecuación matricial (D), la matriz de varianzas y covarianzas tiene la siguiente representación genérica:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{2n} \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \sigma_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \sigma_{2n} \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

De esta forma, y siguiendo con el ejemplo del portafolio de estudio, se construye la matriz de varianzas y covarianzas quedando de la siguiente forma en la hoja Excel:

Matriz de Varianzas y Covarianzas sij (S)				
	Acción 1	Acción 2	Acción 3	Acción 4
Acción 1	5,83E-05	0,0002228	-0,0000584	0,0001136
Acción 2	0,0002228	0,00227	-0,000308	0,000832
Acción 3	-0,0000584	-0,000308	0,00073	-0,000916
Acción 4	0,0001136	0,000832	-0,000916	0,00193

La matriz de varianzas y covarianzas la llamaremos (S). También se crea la matriz de ponderaciones (P) la cual representa las proporciones de cada acción en el portafolio. La Matriz de ponderaciones es una matriz del tipo 1xn donde n es el número de acciones de la matriz. Su representación genérica, tal como se representa en la ecuación (D) es:

$$\begin{bmatrix} X1 & X2 & Xn \end{bmatrix}$$

Siendo Xn la proporción de la Acción n en el portafolio. Para el caso de estudio, esta matriz quedaría montada en la hoja Excel de la siguiente manera:

Matriz Ponderación (P)			
X1	X2	X3	X4
25%	25%	25%	25%

En este caso se está asumiendo que todas las proporciones de las acciones del portafolio tienen la misma ponderación (25%), aunque éstas pueden ser diferentes. Lo importante es que la suma de todas las ponderaciones debe ser igual al 100%, tal como se expresa en la ecuación (A).

Se debe crear otra matriz llamada (P*) la cual representa la misma matriz de ponderaciones, solo que ordenada en la forma de n filas x 1 columna (nx1). La razón de esta matriz se debe a que también forma parte de la ecuación (D), cuya representación genérica es:

$$\begin{bmatrix} X1 \\ X2 \\ Xn \end{bmatrix}$$

Siguiendo con el ejemplo de estudio, esta matriz queda montada en Excel de la siguiente manera:

Ponderación (P*)
25%
25%
25%
25%

Usando la hoja Excel, se multiplican las matrices P y S "{=MMULT(A25:D25;F24:I24)}" para obtener una Matriz la cual se llamará R, es decir PxS = R.

Matriz R = P x S			
8,4075E-05	0,0007542	-0,0001381	0,0004899

La matriz R no tiene un significado específico, simplemente representa el primer resultado de la cadena de multiplicación de matrices de la ecuación (D). Por lo tanto resta multiplicar esta matriz por la matriz P*, haciendo uso nuevamente de la función de multiplicación de matrices de Excel "=MMULT(F30:I30;J6:J9)", y así se obtiene el valor de la varianza del portafolio (s^2p). Esto arroja el siguiente resultado:

Varianza	***Riesgo***
0,03%	**1,72%**

Donde el riesgo es la raíz cuadrada de la varianza (=RAIZ(Varianza)). Por otro lado, se puede obtener la rentabilidad a través de la suma de los productos de los rendimientos promedios de cada acción por la ponderación de la acción (ecuación C), de esta manera se obtiene la rentabilidad del portafolio:

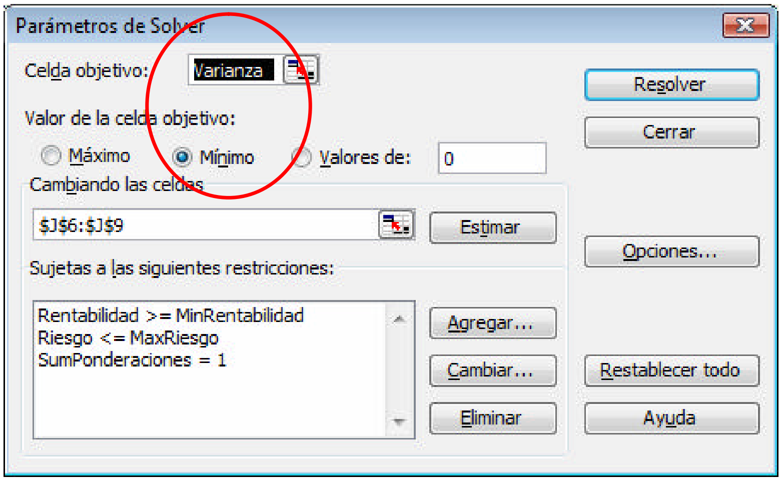
Activos del Portafolio	Ri= Rendimiento Promedio	s^2=Varianza	s= Desviación Estándar	**Ponderación (P*)**
Acción 1	4,96%	0,01%	0,76%	25,00%
Acción 2	9,20%	0,23%	4,76%	25,00%
Acción 3	19,40%	0,07%	2,70%	25,00%
Acción 4	23,40%	0,19%	4,39%	25,00%
			Total	100,00%

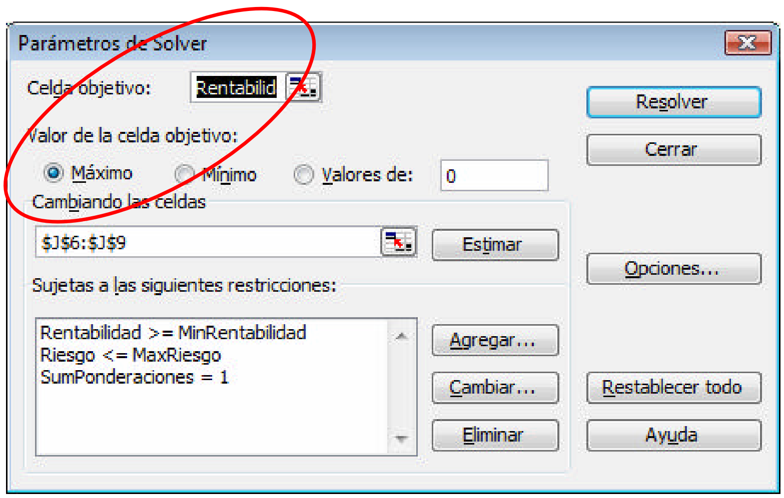
Rentabilidad	***Varianza***	***Riesgo***
14,24%	**0,03%**	**1,72%**

La hoja Excel que se acaba de describir permite el cálculo de la Rentabilidad y el Riesgo dados los valores de rendimientos históricos de cada acción que compone el portafolio y la ponderación o peso que tiene cada acción dentro del mismo. Sin embargo, esta hoja por sí sola no responde las siguientes preguntas: ¿Cuál es la ponderación que se debe dar a cada acción dentro del portafolio para obtener el mínimo riesgo posible? ¿Cómo se obtiene la máxima rentabilidad posible? ¿Asumiendo un riesgo deseado, cual es la máxima rentabilidad que se puede obtener para ese riesgo? ¿Asumiendo una rentabilidad deseada, cuál es el mínimo riesgo que se puede obtener para esa rentabilidad? Estas son preguntas que se relacionan directamente con la teoría de **la frontera eficiente de Marcowitz**, y para contestarlas es necesario complementar el ejercicio con el desarrollo de un modelo que se resolverá haciendo uso del SOLVER de Excel.

Básicamente, el ejercicio que se va a desarrollar buscará diseñar dos modelos que se pueden resolver en forma separada en el SOLVER, uno, para Maximizar

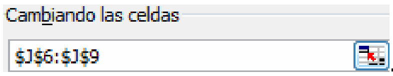
Rentabilidad y otro, para Minimizar Riesgo. Dependiendo del modelo que se utilice, se definirá la “celda objetivo” como Varianza o Rentabilidad, por ejemplo:





Se escoge la opción Mínimo para hallar el valor mínimo del la Varianza en el caso de ejecutar el modelo para cálculo de mínimo riesgo, o la opción Máximo cuando se trate de correr el modelo para el cálculo de la máxima rentabilidad.

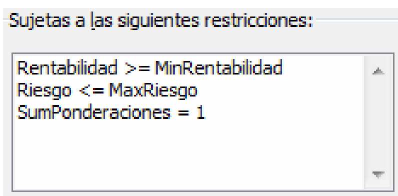
Es necesario indicar al SOLVER las celdas que se van a variar de manera que el algoritmo que corre el SOLVER pueda hallar el valor de Máxima Rentabilidad o de Mínimo Riesgo especificado en la celda objetivo según sea el caso. En cualquiera de los dos modelos, estos valores corresponden a las celdas de la matriz de ponderaciones (para este caso se utiliza P*), y se llena en el parámetro "cambiando las celdas"



. También es necesario definir las restricciones, éstas son:

- Que la suma de las ponderaciones es igual a 1, o lo que es lo mismo, 100%. Esta restricción concuerda con la ecuación (A).
- Que el máximo riesgo a tolerar sea un valor dado, por ejemplo, 1%
- Que el mínimo rendimiento a tolerar sea un valor dado, por ejemplo, 9%

Estas restricciones se deben colocar también en los parámetros del solver:



. Los valores de "Máximo riesgo a Tolerar" y "Mínima Rentabilidad a Tolerar" también se incorporaron a los modelos para que éstos se pudieran aprovechar mejor, además, estas restricciones ayudarán a calcular la frontera eficiente. Sin embargo, si no se desea trabajar con estas dos restricciones, o mejor dicho, que su efecto sea nulo, bastará con definir valores extremos para estos parámetros como por ejemplo: que el máximo riesgo a tolerar=100%, ó mínima rentabilidad a tolerar = 0%. En la hoja Excel, estos datos se llenan en las siguientes celdas:

Max Riesgo a Tolerar	100,00%
Min Rentabilidad a Tolerar	0,00%

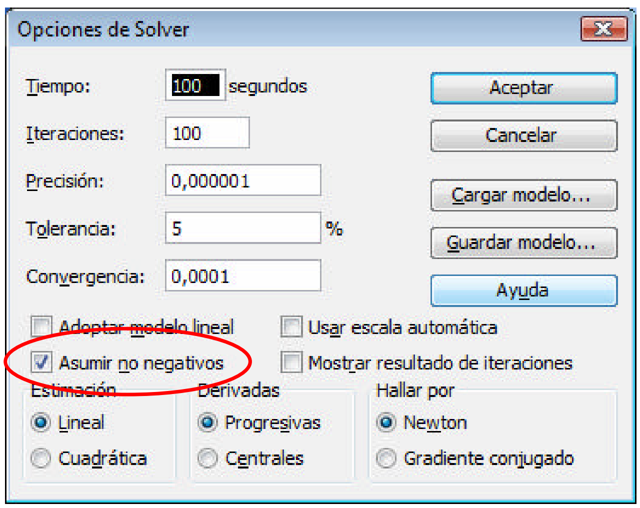
¿Cómo se carga cada modelo?

Se ha dispuesto dos bloques de celdas en la hoja Excel. Cada bloque contiene los valores de los parámetros del SOLVER que servirán para el modelo de “Maximizar Rentabilidad” o “Minimizar Riesgo”. Los parámetros son los que aparecen en la ventana del SOLVER: “Celda objetivo”, “Valores de la celda objetivo”, “Cambiando las celdas”, “Sujetas a las siguientes restricciones”. Los bloques de celdas aparecen en la hoja de cálculo como se muestra a continuación:

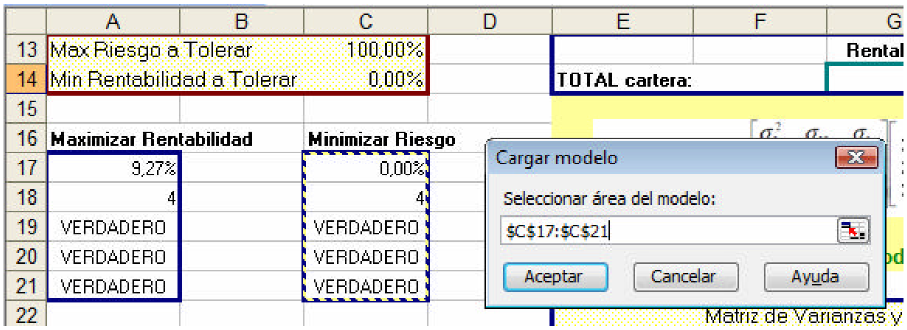
Maximizar Rentabilidad	Minimizar Riesgo	Valor de la celda:
23,40%	0,19%	=Max(Rentabilidad / =Min(Riesgo). “Celda objetivo”
4	4	=CONTAR(J6:J9). “Cambiando las Celdas”
VERDADERO	VERDADERO	=SumPonderaciones=1. “Restricción”
VERDADERO	VERDADERO	=Rentabilidad>= MinRentabilidad. “Restricción”
VERDADERO	VERDADERO	=Riesgo<= MaxRiesgo. “Restricción”

Se selecciona el botón de 

y aparece la siguiente ventana:



Es necesario seleccionar “Asumir no negativos” puesto que los valores de las ponderaciones no pueden ser negativos. Esto se puede ver como otra restricción dentro del modelo del SOLVER. Luego se selecciona Cargar modelo... y aparece la siguiente ventana:



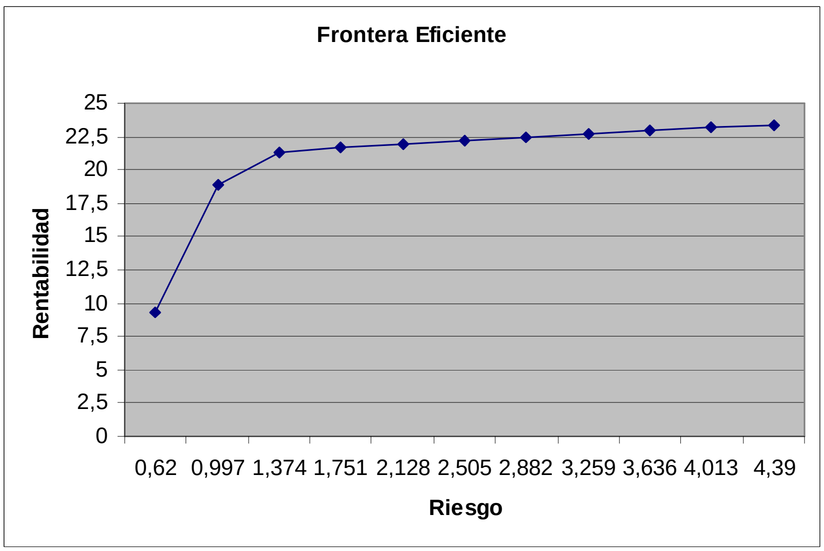
Se carga el modelo seleccionando las celdas correspondientes, en este caso, se ha seleccionado el modelo de "Minimizar Riesgo", seguidamente se selecciona "Aceptar" y se corre el modelo seleccionando Resolver, esto arroja los siguientes resultados:

	Rentabilidad	*Varianza*	*Riesgo*
TOTAL cartera:	**9,27%**	**0,00%**	**0,62%**

Ponderación (P*)
72,19%
0,00%
20,38%
7,43%

El SOLVER ha encontrado el valor de las ponderaciones de manera que se ajustan al portafolio de menor riesgo dentro de la **frontera eficiente**, además, la hoja excel automáticamente calcula la rentabilidad del portafolio para este riesgo. Este resultado brinda el primer punto o portafolio dentro de la frontera eficiente el cual, representa el punto de menor riesgo posible. Este modelo se puede correr varias veces aumentado con cada corrida el parámetro de "Máximo Riesgo a Tolerar", lo que va a permitir hallar nuevos puntos o portafolios dentro de la frontera eficiente. Si se construye con los resultados obtenidos, una tabla de pares ordenados en la hoja excel, entonces se puede graficar la frontera eficiente. Para este caso de estudio, se ha logrado obtener el siguiente resultado:

Rentabilidad	Riesgo
9,27	0,62
18,91	0,997
21,34	1,374
21,67	1,751
21,94	2,128
22,2	2,505
22,45	2,882
22,69	3,259
22,93	3,636
23,16	4,013
23,4	4,39



BIBLIOGRAFÍA:

"La gran enciclopedia de la Economía" disponible en:
http://www.economia48.com/spa/d/frontera-eficiente/frontera-eficiente.htm

Cobo Quintero, Alvaro José. "La selección de carteras: desde Markowitz". Bogotá. Disponible en: http://cashflow88.com/decisiones/carteras.pdf

Ochoa García, Sandra Ibeth. "El Modelo de Markowitz en la Teoría de portafolios de Inversión". Mexico, 2008. Disponoble en:
http://www.sepi.upiicsa.ipn.mx/tesis/346.pdf

Ayuda de Microsoft Excel online.