Titulo: Inecuaciones de SEGUNDO GRADO
Año escolar: 3er año de bachillerato
Autor: José Luis Albornoz Salazar
Ocupación: Ing Civil. Docente Universitario
País de residencia: Venezuela
Correo electrónico: martilloatomico@gmail.com

El autor de este trabajo solicita su valiosa colaboración en el sentido de enviar cualquier sugerencia y/o recomendación a la siguiente dirección :

martilloatomico@gmail.com

Igualmente puede enviar cualquier ejercicio o problema que considere pueda ser incluido en el mismo.

Si en sus horas de estudio o práctica se encuentra con un problema que no pueda resolver, envíelo a la anterior dirección y se le enviará resuelto a la suya.

INECUACIONES DE 2do. GRADO

Existen varios métodos para resolver este tipo de inecuaciones; casi todos consideran el estudio de las dos raíces del polinomio de segundo grado que contiene la desigualdad.

Cuando la ecuación de segundo grado (parábola) no intercepta al eje "X" (eje horizontal o eje de las abscisas) sus raíces son imaginarias y no pueden indicarse sobre la recta real y esta consideración confunde muchas veces a nuestros estudiantes.

El método que hemos considerado más sencillo consiste en graficar la parábola e indicar que los valores que estén sobre el eje horizontal son los valores positivos y los que estén por debajo son los negativos.

EJERCICIO 1 : *Resolver* $X^2 \geq 3 + 2X$

Solución :

Lo primero que debemos hacer es "pasar" todos los términos al lado izquierdo de la desigualdad y ordenarlo como un polinomio en forma descendente ($aX^2 + bX + c$) :

$$X^2 - 2X - 3 \geq 0$$

Ahora procedemos a graficar el miembro que está al lado izquierdo del signo de la desigualdad, considerándolo como una función.

Para graficar una función de segundo grado se pueden seguir los siguientes pasos :

Primer paso : *Se identifican los valores de* a, b *y* c *de la función.*

$$a = 1 \quad ; \quad b = -2 \quad ; \quad c = -3$$

Segundo paso : *Se calcula el eje de simetría con la fórmula :* $X = \frac{-b}{2a}$

$$X = \frac{-b}{2a} \quad ; \quad X = \frac{-(-2)}{2(1)} \quad ; \quad X = \frac{2}{2} \quad ; \quad X = 1$$

Esto significa que por X = 1 pasará una recta perpendicular al eje X que representa al eje de simetría de la parábola.

Se introduce este valor en la función $f(x) = X^2 - 2X - 3$ *para determinar el vértice de la parábola.*

$$f(1) = (1)^2 - 2(1) - 3 = 1 - 2 - 3 = -4 \quad ; \quad f(1) = -4$$

Esto nos indica que el vértice de la parábola es el punto. ***(1, – 4)***

Tercer paso : *Se determina si la función intercepta o no al eje X con el uso de la formula conocida como discriminante* **($b^2 - 4ac$).**

Recuerde que la intercepción o corte con el eje X lo indican las raíces de la función.

- *Si* $b^2 - 4ac > 0$ *la función tiene 2 raíces diferentes (corta al eje X en dos puntos).*
- *Si* $b^2 - 4ac = 0$ *la función tiene 2 raíces iguales (tiene su vértice en un punto contenido en el eje X).*
- *Si* $b^2 - 4ac < 0$ *la función no tiene raíces reales (NO corta al eje X).*

$$b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(-3) = 4 + 12 = 16$$

Como $b^2 - 4ac > 0$ *la función tiene 2 raíces diferentes (corta al eje X en dos puntos).*

Cuarto paso : *Se calculan las raíces de la función con el uso de la fórmula general de segundo grado o resolvente:*

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-3)}}{2(1)} \quad = \quad \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} \quad = \quad \frac{2 \pm 4}{2}$$

$$X_1 = \frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} \qquad ; \qquad \boldsymbol{X_1 = 3}$$

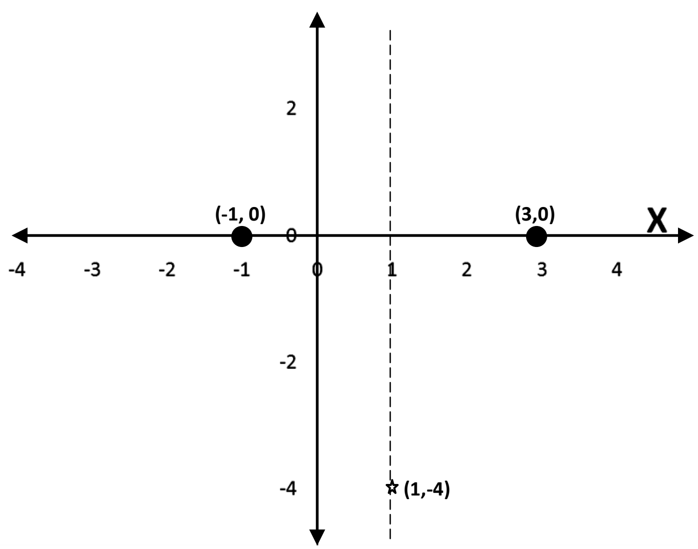
*Esto nos indica que la parábola pasa por el punto .**(3,0)***

$$X_2 = \frac{2-4}{2} = \frac{-2}{2} \qquad ; \qquad \boldsymbol{X_2 = -1}$$

*Esto nos indica que la parábola pasa por el punto. **(–1,0)***

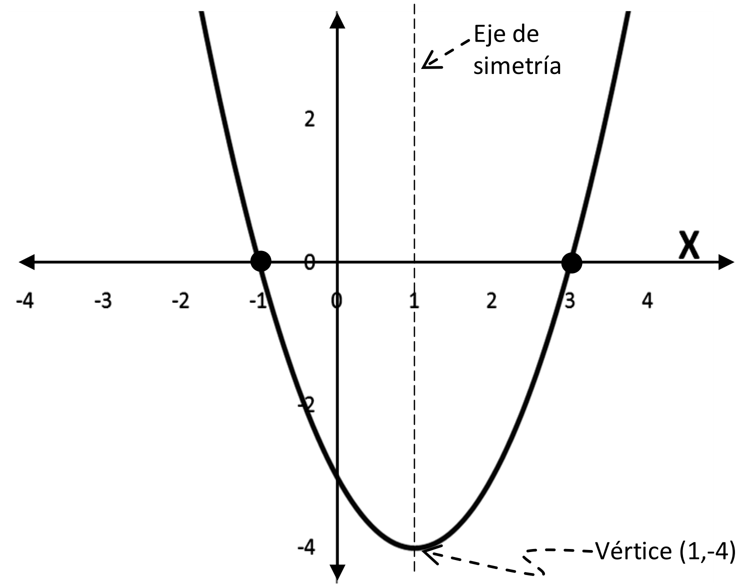
<u>Quinto paso :</u> *Se indican los puntos calculados en un sistema de coordenadas rectangulares y posteriormente se grafica la parábola.*

Como la inecuación es del tipo ≥ los cortes con el eje X formarán parte de la solución y por lo tanto se indican con un círculo "relleno".



El hecho de calcular el eje de simetría y el vértice de la parábola nos facilita el procedimiento para graficarla debido a que nos permite visualizar inmediatamente como será su configuración y sobre todo su concavidad y su punto más alto o más bajo (vértice) según sea el caso.

En este caso en particular si unimos los tres puntos se deduce fácilmente que la parábola quedará graficada así :



Una vez graficada la parábola resulta extremadamente fácil visualizar cuales son los valores positivos de la función (están por encima del eje X) y los valores negativos (están por debajo del eje X).

Como la desigualdad estudiada quedó ordenada como $X^2 - 2X - 3 \geq 0$ nos interesa determinar los valores mayores e iguales a cero (valores positivos de la función) y es evidente al observar la grafica que serán los intervalos

$$\mathbf{(-\infty\ ,\ -1]} \qquad y \qquad \mathbf{[\ 3\ ,\ +\infty\ )}$$

La solución puede ser mostrada de tres formas :

<u>En forma gráfica:</u>

En forma de intervalo:

$$X = (-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$$

En forma de conjunto:

$$X = \{ X \in \mathbb{R} \ / \ X \leq -1 \ \wedge \ X \geq 3 \}$$

*Todos los "X" menores e iguales a "**– 1**" y todos los "X" mayores e iguales a "3",*

Nota: *Si la desigualdad estudiada hubiese quedado ordenada como* $X^2 - 2X - 3 \leq 0$ *nos hubiese interesado determinar los valores menores e iguales a cero (valores negativos de la función mas el cero) y es evidente al observar la grafica que serán los valores que están por debajo del eje "X".*

$$[-1, 3]$$

EJERCICIO 2 : *Resolver* $X^2 \geq -4$

Solución :

Lo primero que debemos hacer es "pasar" todos los términos al lado izquierdo de la desigualdad y ordenarlo como un polinomio en forma descendente $(aX^2 + bX + c)$ *:*

$$X^2 + 4 \geq 0$$

Ahora procedemos a graficar el miembro que está al lado izquierdo del signo de la desigualdad, considerándolo como una función.

Para graficar una función de segundo grado se pueden seguir los siguientes pasos :

Primer paso : *Se identifican los valores de* a, b *y* c *de la función.*

$$a = 1 \quad ; \quad b = 0 \quad ; \quad c = 4$$

Segundo paso : *Se calcula el eje de simetría con la fórmula :* $X = \frac{-b}{2a}$

$$X = \frac{-b}{2a} \quad ; \quad X = \frac{-(0)}{2(1)} \quad ; \quad X = \frac{0}{2} \quad ; \quad X = 0$$

Esto significa que por X = 0 pasará una recta perpendicular al eje X que representa al eje de simetría de la parábola (en este caso el eje de simetría será el eje "Y" del sistema de coordenadas).

Se introduce este valor en la función $f(x) = X^2 + 4$ *para determinar el vértice de la parábola.*

$$f(0) = (0)^2 + 4 = 0 + 4 = 4 \quad ; \quad f(0) = 4$$

Esto nos indica que el vértice de la parábola es el punto. ***(0 , 4)***

Tercer paso : *Se determina si la función intercepta o no al eje X con el uso de la formula conocida como discriminante* $(b^2 - 4ac)$.

Recuerde que la intercepción o corte con el eje X lo indican las raíces de la función.

- *Si* $b^2 - 4ac > 0$ *la función tiene 2 raíces diferentes (corta al eje X en dos puntos).*
- *Si* $b^2 - 4ac = 0$ *la función tiene 2 raíces iguales (tiene su vértice en un punto contenido en el eje X).*
- *Si* $b^2 - 4ac < 0$ *la función no tiene raíces reales (NO corta al eje X).*

$$b^2 - 4ac = (0)^2 - 4(1)(4) = 0 - 16 = -16$$

Como $b^2 - 4ac < 0$ *la función no tiene raíces reales (NO corta al eje X).*

Cuarto paso : *Como no se pueden calcular las dos raíces de la función se procede a calcular dos puntos de la parábola, uno ubicado al lado izquierdo del eje de simetría y el otro al lado derecho, esto nos facilitará visualizar fácilmente la configuración de la parábola.*

Como el eje de simetría es $X = 0$ *puedo calcular los puntos cuando* $X = -1$ *y cuando* $X = 1$*, para lo cual sustituyo estos valores en la función* $\mathbf{f(x) = X^2 + 4}$

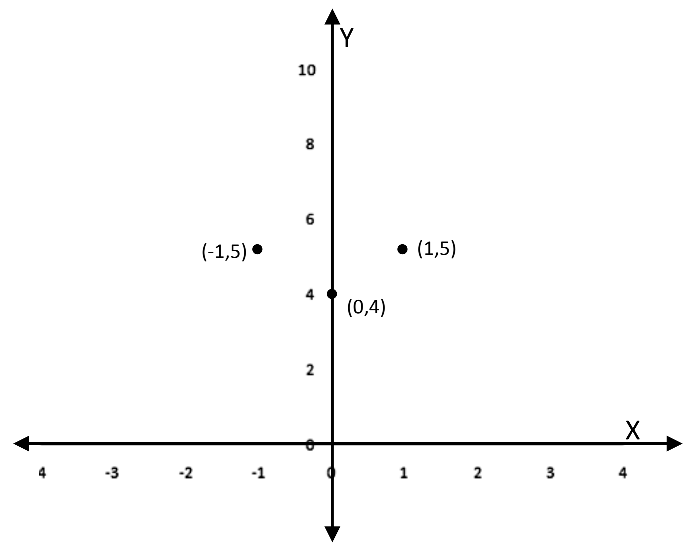
Para $X = -1$; $f(-1) = (-1)^2 + 4 = 1 + 4 = 5$

Esto nos indica que la parábola pasa por el punto ***(–1,5)***

Para $X = 1$; $f(1) = (1)^2 + 4 = 1 + 4 = 5$

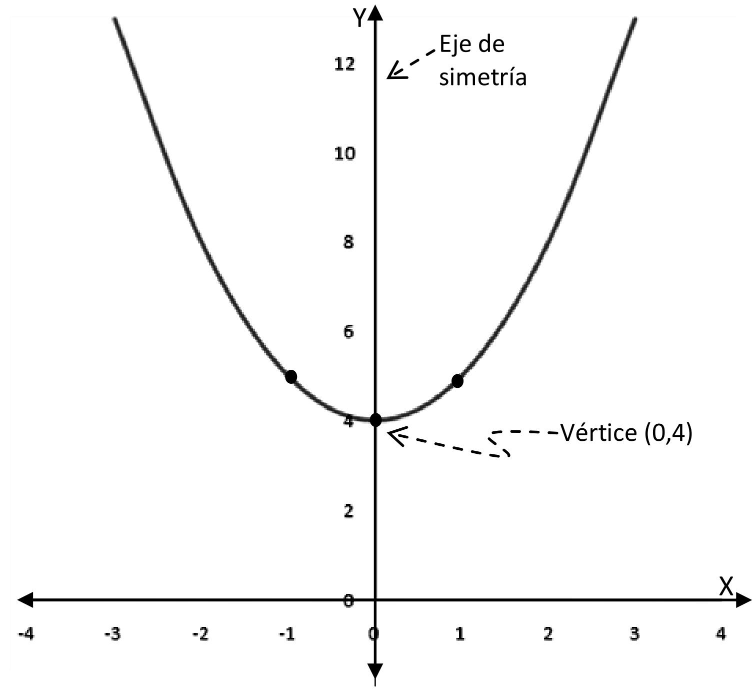
Esto nos indica que la parábola pasa por el punto ***(1,5)***

Quinto paso : *Se indican los puntos calculados en un sistema de coordenadas rectangulares y posteriormente se grafica la parábola.*



El hecho de calcular el eje de simetría y el vértice de la parábola nos facilita el procedimiento para graficarla debido a que nos permite visualizar inmediatamente como será su configuración y sobre todo su concavidad y su punto más alto o más bajo (vértice) según sea el caso.

En este caso en particular si unimos los tres puntos se deduce fácilmente que la parábola quedará graficada así :



Una vez graficada la parábola resulta extremadamente fácil visualizar cuales son los valores positivos de la función (están por encima del eje X) y los valores negativos (están por debajo del eje X).

En este caso la parábola está ubicada completamente por encima del eje X por lo tanto todos los valores que toma son positivos.

Como la desigualdad estudiada quedó ordenada como $X^2 + 4 \geq 0$ *nos interesa determinar los valores mayores e iguales a cero (valores positivos de la función) y es evidente al observar la grafica que serán todos los números reales.*

<u>Solución en forma de intervalo:</u>

$$\mathbf{X = (-\infty, +\infty)}$$

<u>En forma de conjunto:</u>

$$\mathbf{X = \{ \mathbb{R} \}}$$

Nota: *Si la desigualdad estudiada hubiese quedado ordenada como* $X^2 + 4 \leq 0$ *nos hubiese interesado determinar los valores menores e iguales a cero (valores negativos de la función) y es evidente al observar la grafica que estos no existen.*

Luego, la solución será un conjunto vacío (X no pertenece al conjunto de los números reales).

EJERCICIO 3 : Resolver $5X - 4 - X^2 > 0$

Solución :

Ordenando el polinomio en forma descendente $(aX^2 + bX + c)$ *:*

$$-X^2 + 5X - 4 > 0$$

Ahora procedemos a graficar el miembro que está al lado izquierdo del signo de la desigualdad, considerándolo como una función.

Para graficar una función de segundo grado se pueden seguir los siguientes pasos :

Primer paso : *Se identifican los valores de a, b y c de la función.*

$$a = -1 \quad ; \quad b = 5 \quad ; \quad c = -4$$

Segundo paso : *Se calcula el eje de simetría con la fórmula :* $X = \frac{-b}{2a}$

$$X = \frac{-b}{2a} \quad ; \quad X = \frac{-(5)}{2(-1)} \quad ; \quad X = \frac{-5}{-2} \quad ; \quad X = 2{,}5$$

Esto significa que por X = 2,5 pasará una recta perpendicular al eje X que representa al eje de simetría de la parábola.

Se introduce este valor en la función $f(x) = -X^2 + 5X - 4$ *para determinar el vértice de la parábola.*

$$f(2{,}5) = -(2{,}5)^2 + 5(2{,}5) - 4 = -6{,}25 + 12{,}5 - 4 = -2{,}25$$

$$f(2{,}5) = 2{,}25$$

Esto nos indica que el vértice de la parábola es el punto. ***(2.5 , 2.25)***

Tercer paso : *Se determina si la función intercepta o no al eje X con el uso de la formula conocida como discriminante* $(b^2 - 4ac)$.

$$b^2 - 4ac = (5)^2 - 4(-1)(-4) = 25 - 16 = 9$$

Como $b^2 - 4ac > 0$ *la función tiene 2 raíces diferentes (corta al eje X en dos puntos).*

Cuarto paso : *Se calculan las raíces de la función con el uso de la fórmula general de segundo grado o resolvente:*

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Este cálculo se nos facilita por el hecho de que la cantidad sub-radical o radicando es la misma conocida como discriminante y ya fue calculada.

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{2(-1)} = \frac{-5 \pm 3}{-2}$$

$$X_1 = \frac{-5+3}{-2} = \frac{-2}{-2} \quad ; \quad X_1 = 1$$

*Esto nos indica que la parábola pasa por el punto .***(1,0)**

$$X_2 = \frac{-5-3}{-2} = \frac{-8}{-2} \quad ; \quad X_2 = 4$$

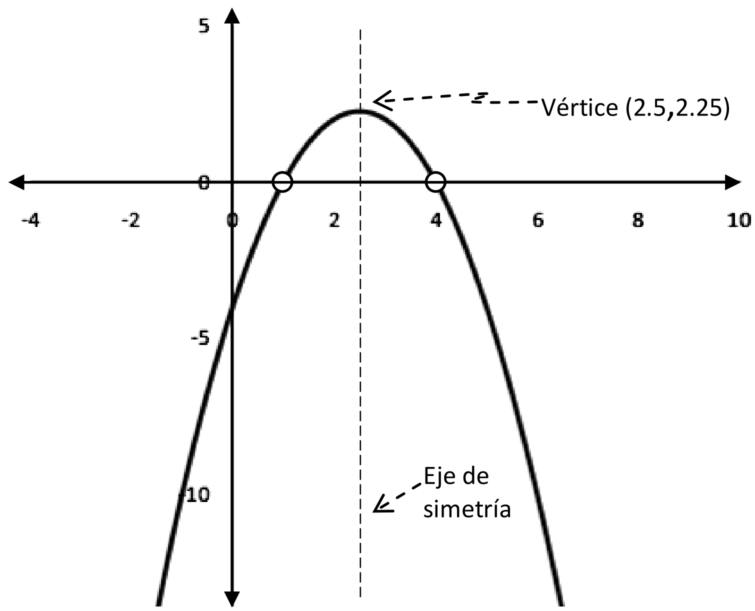
Esto nos indica que la parábola pasa por el punto. ***(4,0)***

Quinto paso : *Se indican los puntos calculados en un sistema de coordenadas rectangulares y posteriormente se grafica la parábola.*

*Como la inecuación es del tipo > los cortes con el eje X **NO** formarán parte de la solución y por lo tanto se indican con un círculo "hueco".*

El hecho de calcular el eje de simetría y el vértice de la parábola nos facilita el procedimiento para graficarla debido a que nos permite visualizar inmediatamente como será su configuración y sobre todo su concavidad y su punto más alto o más bajo (vértice) según sea el caso.

En este caso en particular si unimos los tres puntos se deduce fácilmente que la parábola quedará graficada así :



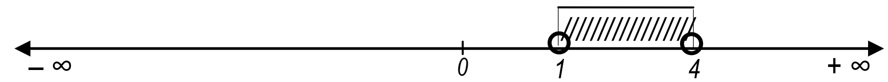
Una vez graficada la parábola resulta extremadamente fácil visualizar cuales son los valores positivos de la función (están por encima del eje X) y los valores negativos (están por debajo del eje X).

Como la desigualdad estudiada quedó ordenada como $-X^2+5X-4>0$ nos interesa determinar los valores mayores a cero (valores positivos de la función sin incluir al cero) y es evidente al observar la grafica que será el intervalo

$$(1\,,\ 4)$$

La solución puede ser mostrada de tres formas :

<u>*En forma gráfica:*</u>



<u>*En forma de intervalo:*</u>

$$X = (1\,,4)$$

<u>*En forma de conjunto:*</u>

$$X = \{ X \in \mathbb{R} \ / \ 1 < X < 4 \}$$

***<u>Nota:</u>** Si la desigualdad estudiada hubiese quedado ordenada como **$-X^2+5X-4<0$** nos hubiese interesado determinar los valores menores a cero (valores negativos de la función) y es evidente al observar la grafica que serán los valores que están por debajo del eje "X".*

$$X = (-\infty\,,1) \ \cup \ (4\,,+\infty)$$

<u>***EJERCICIO 4 :***</u> *Resolver* $X^2 \leq -16+8X$

<u>***Solución :***</u>

Lo primero que debemos hacer es "pasar" todos los términos al lado izquierdo de la desigualdad y ordenarlo como un polinomio en forma descendente (aX^2+bX+c) :

$$X^2-8X+16 \leq 0$$

Ahora procedemos a graficar el miembro que está al lado izquierdo del signo de la desigualdad, considerándolo como una función.

Para graficar una función de segundo grado se pueden seguir los siguientes pasos :

Primer paso : *Se identifican los valores de* a, b *y* c *de la función.*

$$a = 1 \quad ; \quad b = -8 \quad ; \quad c = 16$$

Segundo paso : *Se calcula el eje de simetría con la fórmula :* $X = \frac{-b}{2a}$

$$X = \frac{-b}{2a} \quad ; \quad X = \frac{-(-8)}{2(1)} \quad ; \quad X = \frac{8}{2} \quad ; \quad \boldsymbol{X = 4}$$

Esto significa que por $X = 4$ pasará una recta perpendicular al eje X que representa al eje de simetría de la parábola.

Se introduce este valor en la función $\boldsymbol{f(x) = X^2 - 8X + 16}$ *para determinar el vértice de la parábola.*

$$f(4) = (4)^2 - 8(4) + 16 = 16 - 32 + 16 = 0 \quad ; \quad \boldsymbol{f(4) = 0}$$

Esto nos indica que el vértice de la parábola es el punto. ***(4 ,0)***

Tercer paso : *Se determina si la función intercepta o no al eje X con el uso de la formula conocida como discriminante* $\boldsymbol{(b^2 - 4ac)}$.

$$b^2 - 4ac = (8)^2 - 4(1)(16) = 64 - 64 = \boldsymbol{0}$$

Como $\boldsymbol{b^2 - 4ac = 0}$ *la función tiene 2 raíces iguales (tiene su vértice en un punto contenido en el eje X).*

Otra particularidad que presenta el hecho de que el determinante sea igual a cero es que al calcular el punto donde la parábola corta al eje X es el mismo vértice.

Esta consideración anterior nos obliga a aplicar el cuarto paso como si no existieran raíces reales.

Cuarto paso : *Se procede a calcular dos puntos de la parábola, uno ubicado al lado izquierdo del eje de simetría y el otro al lado derecho, esto nos facilitará visualizar fácilmente la configuración de la parábola.*

Como el eje de simetría es $X = 4$ puedo calcular los puntos cuando $X = 3$ y cuando $X = 5$, para lo cual sustituyo estos valores en la función $\boldsymbol{f(x) = X^2 - 8X + 16}$

Para $X = 3$; $f(3) = (3)^2 - 8(3) + 16 = 9 - 24 + 16 = 1$

Esto nos indica que la parábola pasa por el punto ***(3,1)***

Para $X = 5$; $f(5) = (5)^2 - 8(5) + 16 = 25 - 40 + 16 = 1$

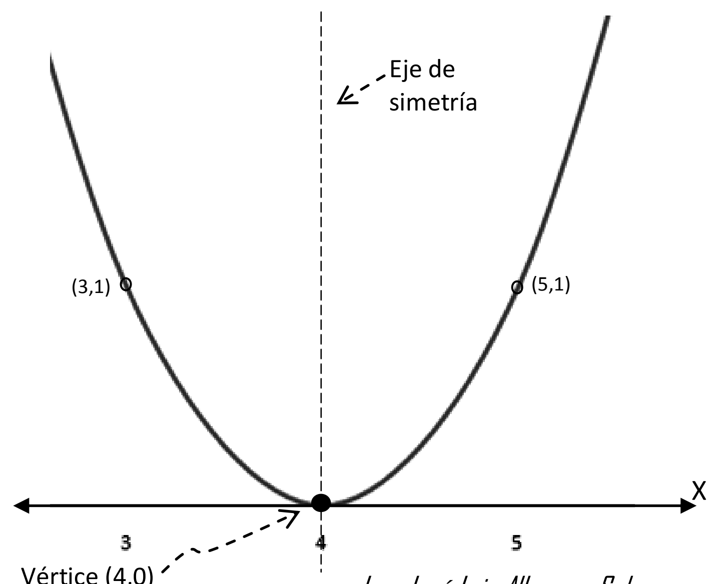
Esto nos indica que la parábola pasa por el punto ***(5,1)***

Quinto paso : *Se indican los puntos calculados en un sistema de coordenadas rectangulares y posteriormente se grafica la parábola.*

Como la inecuación es del tipo ≤ los cortes con el eje X formarán parte de la solución y por lo tanto se indican con un círculo "relleno".

El hecho de calcular el eje de simetría y el vértice de la parábola nos facilita el procedimiento para graficarla debido a que nos permite visualizar inmediatamente como será su configuración y sobre todo su concavidad y su punto más alto o más bajo (vértice) según sea el caso.

En este caso en particular si unimos los tres puntos se deduce fácilmente que la parábola quedará graficada así :



Una vez graficada la parábola resulta extremadamente fácil visualizar cuales son los valores positivos de la función (están por encima del eje X) y los valores negativos (están por debajo del eje X).

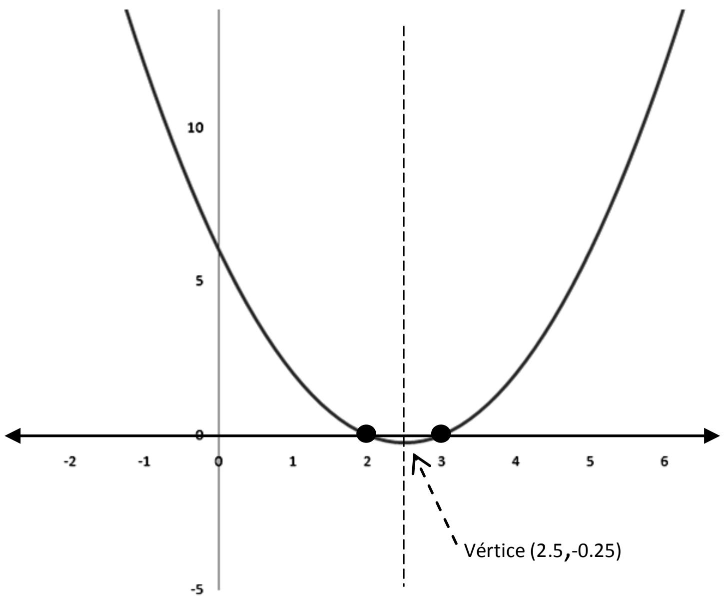
En este caso la parábola está ubicada por encima del eje X pero su vértice está contenido en el eje X (4,0).

Como la desigualdad estudiada quedó ordenada como $X^2 - 8X + 16 \leq 0$ *nos interesa determinar los valores menores e iguales a cero y es evidente al observar la grafica que existe solo un punto que cumple con esta condición (el vértice). Luego, la solución será :*

$$X = 4$$

Nota: *Si la desigualdad estudiada hubiese quedado ordenada como* $X^2 - 8X + 16 \geq 0$ *nos hubiese interesado determinar los valores mayores e iguales a cero y es evidente al observar la grafica que estos serán todos los números reales.*

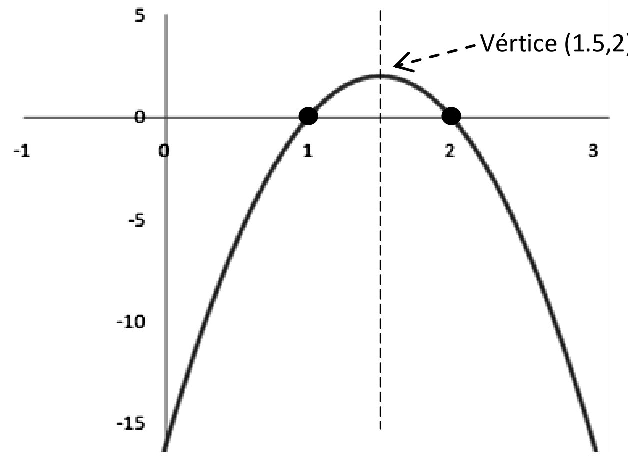
EJERCICIO 5 : *Resolver* $X^2 - 5X + 6 \leq 0$



Solución en forma de intervalo:

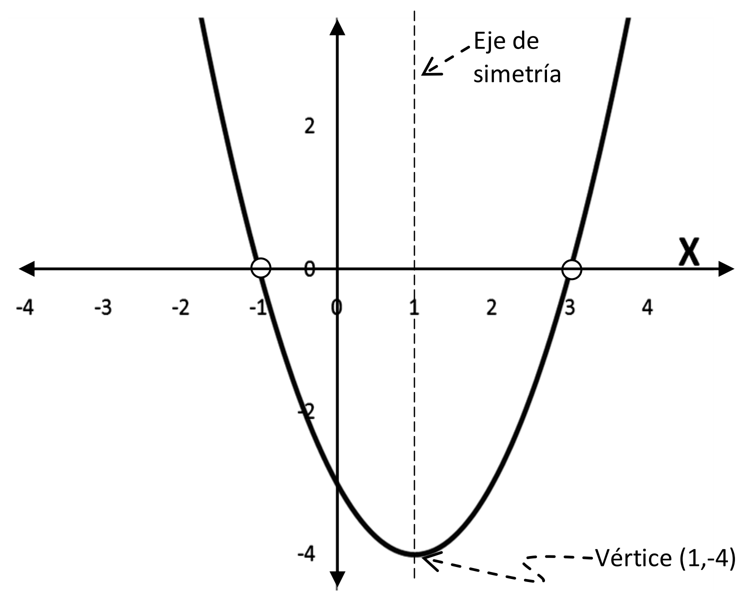
$$X = [\,2\,,\,3\,]$$

EJERCICIO 6 : *Resolver* $-8X^2 + 24X - 16 \geq 0$



Solución en forma de intervalo: $X = [\,1\,,\,2\,]$

EJERCICIO 7 : *Resolver* $X^2 - 2X - 3 < 0$



Solución en forma de intervalo: $X = (-1\,,\,3\,)$