Titulo: ***INECUACIONES IRRACIONALES***
Año escolar: 5to. año de bachillerato
Autor: José Luis Albornoz Salazar
Ocupación: Ing Civil. Docente Universitario
País de residencia: Venezuela
Correo electrónico: martilloatomico@gmail.com

El autor de este trabajo solicita su valiosa colaboración en el sentido de enviar cualquier sugerencia y/o recomendación a la siguiente dirección :

martilloatomico@gmail.com

Igualmente puede enviar cualquier ejercicio o problema que considere pueda ser incluido en el mismo.

Si en sus horas de estudio o práctica se encuentra con un problema que no pueda resolver, envíelo a la anterior dirección y se le enviará resuelto a la suya.

INECUACIONES IRRACIONALES

Para la solución de este tipo de inecuaciones se recomienda "refrescar" los conocimiento sobre solución de ECUACIONES IRRACIONALES debido a que sus procedimientos son muy similares. En el caso de las inecuaciones el paso "extra" consistirá en el análisis del signo que se le debe hacer a la cantidad sub-radical o radicando

Recordando algunos aspectos importantes sobre los SIGNOS DE LAS RAICES :

1) Las **raíces impares** *de una cantidad tienen el mismo signo que la cantidad sub-radical o radicando.*

Así,

- $\sqrt[3]{27a^3}$ = *3a* *porque* $(3a)^3 = 27a^3$
- $\sqrt[3]{-27a^3}$ = *–3a* *porque* $(-3a)^3 = -27a^3$
- $\sqrt[5]{X^{10}}$ = X^2 *porque* $(X^2)^5 = X^{10}$
- $\sqrt[5]{-X^{10}}$ = $-X^2$ *porque* $(-X^2)^5 = -X^{10}$

2) Las **raíces pares** *de una cantidad positiva tienen doble signo.*

Así,

- $\sqrt{25X^2}$ = *5X ó –5X* *porque* $(5X)^2 = 25X^2$ *y* $(-5X)^2 = 25X^2$

  Esto se indica de este modo : $\sqrt{25X^2} = \pm 5X$
- $\sqrt[4]{16a^4}$ = *2a* *y* *–2a* *porque* $(2a)^4 = 16a^4$ *y* $(-2a)^4 = 16a^4$

  Esto se indica : $\sqrt[4]{16a^4} = \pm 2a$

3) Las **raíces pares** *de una cantidad negativa no se pueden extraer. Estas raíces se llaman* **cantidades imaginarias**.

Así,

$\sqrt{-4}$ *no se puede extraer. La raíz de – 4 no es 2 porque "$2^2 = 4$" y no – 4, y tampoco es – 2 porque $(-2)^2 = 4$ y no – 4.*

"$\sqrt{-4}$ " *es una* **cantidad imaginaria**.

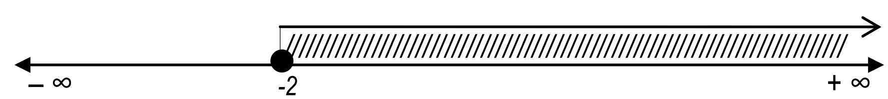
Del propio modo, $\sqrt{-9}$, $\sqrt{-a^2}$, $\sqrt[4]{-16X^2}$ *son* ***cantidades imaginarias.***

EJERCICIO 1 : *Resolver* $\sqrt{X+2} \geq 3$

Se analiza la cantidad sub-radical o radicando. Como la raíz es par, ésta cantidad no puede ser negativa, es decir **X + 2** *tiene que ser mayor o igual a cero.*

$$X + 2 \geq 0 \quad ; \quad \boldsymbol{X \geq -2}$$

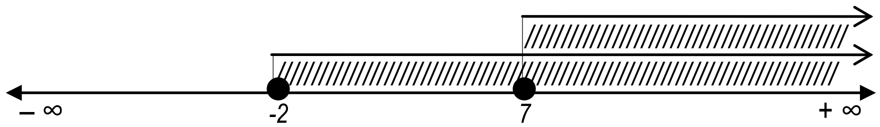
Señalamos en la recta real los valores que puede tomar la raíz cuadrada estudiada :



Posteriormente analizo la inecuación de manera similar a una ecuación irracional, es decir, se elevan ambos miembros al cuadrado con la finalidad de cancelar la raíz cuadrada del miembro de la izquierda :

$$(\sqrt{X+2})^2 \geq (3)^2 \quad ; \quad X + 2 \geq 9 \quad ; \quad X \geq 9 - 2 \quad ; \quad \boldsymbol{X \geq 7}$$

Colocando esta solución sobre la recta real se observa la **INTERSECCION** *de las dos soluciones y ésta representará la solución total :*



Sea muy cuidadoso. La solución estará indicada por aquellos valores de X que cumplen con todas las condiciones, es decir, los valores que están en las dos áreas sombreadas a la vez.

Solución en forma de intervalo:

$$X = [\, 7\, ,\, +\infty\,)$$

Intervalo cerrado en 7 (incluido el 7) hasta infinito positivo (tanto el infinito positivo como el infinito negativo se indican como intervalo abierto "paréntesis").

En forma de conjunto:

$$X = \{\, X \in \mathbb{R} \;/\; X \geq 7 \,\}$$

Acostúmbrese a comprobar los resultados para tener la certeza que hizo bien el ejercicio. En este caso puede escoger un valor al lado izquierdo de 7 (NO debe cumplir) y otro al lado derecho de 7 (debe cumplir) e introdúzcalo en la inecuación inicial.

Probando con 2 (lado izquierdo de 7) :

$$\sqrt{X+2} \geq 3 \quad ; \quad \sqrt{2+2} \geq 3 \quad ; \quad \sqrt{4} \geq 3 \quad ; \quad 2 \geq 3$$

Como lo anterior es falso significa que los valores que están a la izquierdo de 7 NO cumplen con la inecuación estudiada.

Probando con 14 (lado derecho de 7) :

$$\sqrt{X+2} \geq 3 \quad ; \quad \sqrt{14+2} \geq 3 \quad ; \quad \sqrt{16} \geq 3 \quad ; \quad 4 \geq 3$$

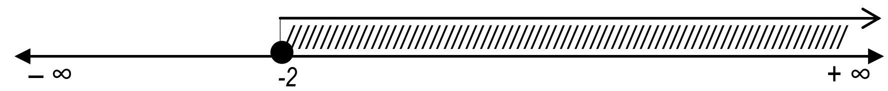
Como lo anterior es cierto significa que los valores que están a la derecha de 7 SI cumplen con la inecuación estudiada.

EJERCICIO 2 : *Resolver* $\sqrt{X+2} \leq 3$

Se analiza la cantidad sub-radical o radicando. Como la raíz es par, ésta cantidad no puede ser negativa, es decir **X + 2** *tiene que ser mayor o igual a cero.*

$$X + 2 \geq 0 \quad ; \quad X \geq -2$$

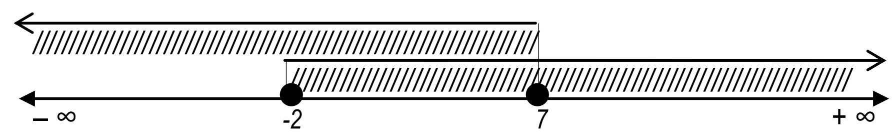
Señalamos en la recta real los valores que puede tomar la raíz cuadrada estudiada :



Posteriormente analizo la inecuación de manera similar a una ecuación irracional, es decir, se elevan ambos miembros al cuadrado con la finalidad de cancelar la raíz cuadrada del miembro de la izquierda :

$$(\sqrt{X+2})^2 \leq (3)^2 \quad ; \quad X + 2 \leq 9 \quad ; \quad X \leq 9 - 2 \quad ; \quad X \leq 7$$

Colocando esta solución sobre la recta real se observa la **INTERSECCION** *de las dos soluciones y ésta representará la solución total :*



Sea muy cuidadoso. La solución estará indicada por aquellos valores de X que cumplen con todas las condiciones, es decir, los valores que están en las dos áreas sombreadas a la vez.

Solución en forma de intervalo:

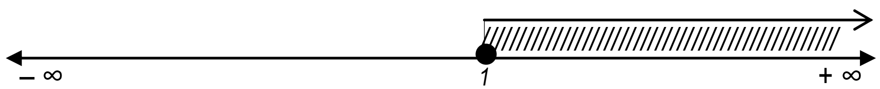
$$X = [\, -2\, ,\, 7\,]$$

EJERCICIO 3 : *Resolver* $\sqrt{5X-5} - \sqrt{X} > 0$

Como este ejercicio presenta dos raíces se analizan las dos cantidades sub-radicales o radicandos por separado, ambos deben ser mayores o iguales a cero ya que el índice de la raíz es par.

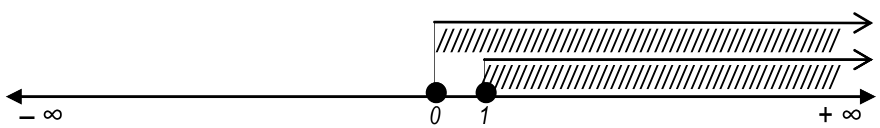
Estudiando la primera raíz :

$5X - 5 \geq 0$; $5X \geq 5$; $X \geq \frac{5}{5}$; $\boldsymbol{X \geq 1}$



Estudiando la segunda raíz :

$\boldsymbol{X \geq 0}$



Por último analizo la inecuación de manera similar a una ecuación irracional. En este caso se debe colocar una raíz en cada miembro de la desigualdad y después se elevan ambos miembros al cuadrado con la finalidad de cancelar las dos raíces cuadradas.

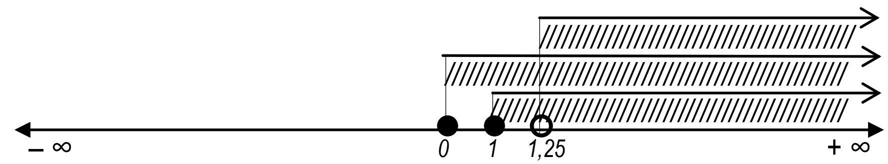
$$\sqrt{5X-5} - \sqrt{X} > 0 \quad ; \quad \sqrt{5X-5} > \sqrt{X}$$

$$(\sqrt{5X-5})^2 > (\sqrt{X})^2 \quad ; \quad 5X - 5 > X \quad ; \quad 5X - X > 5$$

$$4X > 5 \quad ; \quad X > \frac{5}{4} \quad ; \quad \boldsymbol{X > 1{,}25}$$

Como el signo de la desigualdad es >, el intervalo en 1.25 debe ser abierto.

Colocando esta solución sobre la recta real se observa la **INTERSECCION** *de las tres soluciones y ésta representará la solución total :*



Sea muy cuidadoso. La solución estará indicada por aquellos valores de X que cumplen con todas las condiciones, es decir, los valores que están en las tres áreas sombreadas a la vez.

Solución en forma de intervalo: **X = (1.25 , + ∞)**

EJERCICIO 4 : *Resolver* $\sqrt[3]{3X-8} \geq \sqrt[3]{-X+4}$

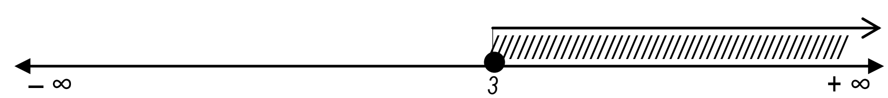
Recuerde que las **raíces impares** *de una cantidad tienen el mismo signo que la cantidad sub-radical o radicando.*

A diferencia que en los ejercicios anteriores NO debo analizar las cantidades sub-radicales o radicandos ya que estas pueden tomar cualquier valor (negativos o positivos)

Analizo la inecuación de manera similar a una ecuación irracional. En este caso se elevan ambos miembros al cubo con la finalidad de cancelar las dos raíces cúbicas.

$$(\sqrt[3]{3X-8})^3 \geq (\sqrt[3]{-X+4})^3 \quad ; \quad 3X - 8 \geq -X + 4$$

$$3X + X \geq 4 + 8 \quad ; \quad 4X \geq 12 \quad ; \quad X \geq \frac{12}{4} \quad ; \quad \boldsymbol{X \geq 3}$$



Solución en forma de intervalo: **X = [3 , + ∞)**