Titulo: **INECUACIONES RACIONALES**
Año escolar: 3er año de bachillerato
Autor: José Luis Albornoz Salazar
Ocupación: Ing Civil. Docente Universitario
País de residencia: Venezuela
Correo electrónico: martilloatomico@gmail.com

El autor de este trabajo solicita su valiosa colaboración en el sentido de enviar cualquier sugerencia y/o recomendación a la siguiente dirección :

martilloatomico@gmail.com

Igualmente puede enviar cualquier ejercicio o problema que considere pueda ser incluido en el mismo.

Si en sus horas de estudio o práctica se encuentra con un problema que no pueda resolver, envíelo a la anterior dirección y se le enviará resuelto a la suya.

//

INECUACIONES RACIONALES

Existen varios métodos para resolver este tipo de inecuaciones, en estos ejercicios vamos a utilizar uno que consideramos más sencillo y sobre todo tiene la particularidad de que paralelamente a su resolución permite comprobar si los intervalos cumplen o no con la desigualdad planteada.

Pasos del método recomendado:

1) *Se calculan los valores críticos o de interés de la variable y se señalan sobre la recta real. Estos valores de "X" serán aquellos que anulan al numerador y al denominador de la inecuación.*

2) *Una vez indicados estos valores, la recta real quedará dividida en intervalos.*

3) *Se escoge un valor en cada uno de los intervalos y se sustituye en la inecuación inicial. Si se cumple para el punto escogido se cumplirá para todos los puntos que se encuentren en dicho intervalo y viceversa.*

4) *Para indicar si los extremos de cada intervalo son abiertos o cerrados se debe tomar en cuenta lo siguiente:*

   - *El valor donde el denominador se anula **NO** formará parte de la solución porque la división por cero es indeterminada (siempre se indicará como intervalo abierto).*

   - *En el valor donde se anule el numerador se tomará en cuenta el signo de la desigualdad (intervalo cerrado si es "≤" o "≥". Intervalo abierto si es "<" o ">").*

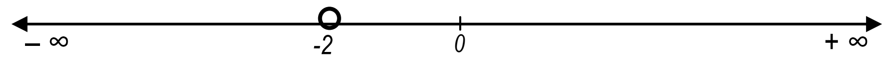
EJERCICIO 1 : *Resolver* $\frac{3X-1}{4+2X} \leq 1$

Solución :

Estudiando el denominador :

$4 + 2X = 0$; $2X = -4$; $X = \frac{-4}{2}$; $\mathbf{X = -2}$

*Esto nos indica que "X" no puede tomar el valor de "– 2" ya que anularía al denominador y la división por cero es indeterminada. Luego en la recta real debo colocar un circulo "hueco" (**○**) en "– 2" para indicar que NO forma parte de la solución (intervalo abierto)*



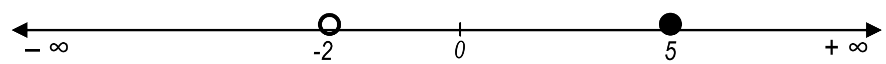
Estudiando el numerador :

Muchos autores y profesores recomiendan "pasar" primero todos los términos al lado izquierdo del signo de la desigualdad. Como esto trae algunas dificultades a los alumnos menos aventajados, recomendamos resolver la inecuación como una ecuación y resultará más cómodo :

$\frac{3X-1}{4+2X} = 1$; $3X - 1 = 1\,(4 + 2X)$; $3X - 1 = 4 + 2X$

$3X - 2X = 4 + 1$; $\mathbf{X = 5}$

Como la desigualdad es del tipo "≤" el "5" formará parte de la solución, en la recta real colocamos un circulo "relleno" para indicar que es el extremo de un intervalo cerrado (●).



La recta real queda dividida en 3 intervalos :

$(-\infty, -2)$; $(-2, 5]$; $[5, +\infty)$

Para saber cuál o cuáles de estos intervalos cumplen con la desigualdad, escojo un valor dentro de cada intervalo, lo sustituyo en la inecuación inicial y observo si cumple o no con ella.

Si un punto de un intervalo cumple con la inecuación, cumplirán todos los puntos de ese intervalo y viceversa.

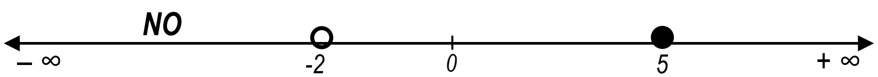
Se puede escoger cualquiera de los puntos de cada intervalo.

Estudiando el intervalo (– ∞ , – 2) : *escojo el valor "– 3" (está ubicado a la izquierda de "– 2 ") y lo sustituyo en la inecuación inicial*

$$\frac{3X-1}{4+2X} \leq 1 \quad ; \quad \frac{3(-3)-1}{4+2(-3)} \leq 1 \quad ; \quad \frac{-9-1}{4-6} \leq 1$$

$$\frac{-10}{-2} \leq 1 \quad ; \quad \mathbf{5 \leq 1}$$

Como "5" ***NO*** *es menor ni igual a "1" significa que "– 3"* **no cumple** *con la inecuación y por lo tanto* **ninguno** *de los valores que están en el intervalo (– ∞ , – 2)* **cumple.**

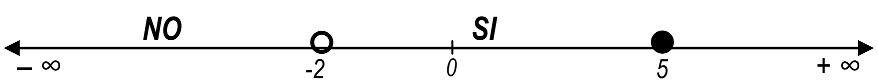


Estudiando el intervalo (– 2 , 5] : *escojo el valor "0" (está ubicado entre "– 2" y " 5") y lo sustituyo en la inecuación inicial*

$$\frac{3X-1}{4+2X} \leq 1 \quad ; \quad \frac{3(0)-1}{4+2(0)} \leq 1 \quad ; \quad \frac{0-1}{4+0} \leq 1$$

$$\frac{-1}{4} \leq 1 \quad ; \quad \mathbf{-\ 0{,}25 \leq 1}$$

Como "– 0,25 " ***SI*** *es menor a "1" significa que "0"* **si cumple** *con la inecuación y por lo tanto* **todos los valores** *que están en el intervalo estudiado (– 2 , 5]* **cumplen.**

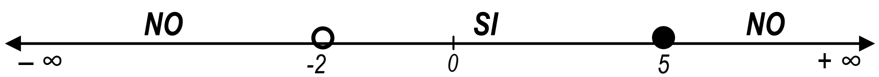


Estudiando el intervalo [5 , + ∞) : *escojo el valor "6" (está ubicado a la derecha de "5") y lo sustituyo en la inecuación inicial*

$$\frac{3X-1}{4+2X} \leq 1 \quad ; \quad \frac{3(6)-1}{4+2(6)} \leq 1 \quad ; \quad \frac{18-1}{4+12} \leq 1$$

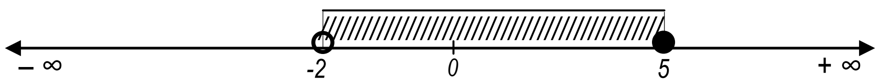
$$\frac{17}{16} \leq 1 \quad ; \quad \mathbf{1{,}06 \leq 1}$$

Como "1,06" ***NO*** *es menor ni igual a "1" significa que "6"* **no cumple** *con la inecuación y por lo tanto* **ninguno** *de los valores que están en el intervalo [5 , + ∞)* **cumple.**



La solución puede ser mostrada de tres formas :

<u>En forma gráfica:</u>



<u>En forma de intervalo:</u>

X = (– 2 , 5]

<u>En forma de conjunto:</u>

X = { X Є ℝ ⁄ – 2 < X ≤ 5 }

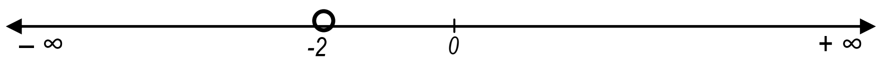
EJERCICIO 2 : *Resolver* $\frac{X-2}{X+2} \leq 0$

<u>Solución :</u>

<u>Estudiando el denominador :</u>

$$X + 2 = 0 \quad ; \quad \mathbf{X = -\,2}$$

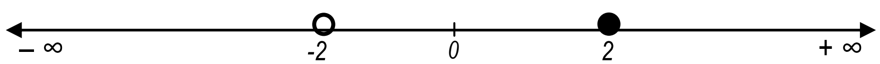
Esto nos indica que "X" no puede tomar el valor de "– 2" ya que anularía al denominador y la división por cero es indeterminada. Luego en la recta real debo colocar un circulo "hueco" (○) en "– 2" para indicar que NO forma parte de la solución (intervalo abierto)



<u>Estudiando el numerador :</u>

$$X - 2 = 0 \qquad ; \qquad \boldsymbol{X = 2}$$

Como la desigualdad es del tipo "≤" el "2" formará parte de la solución, en la recta real colocamos un circulo "relleno" para indicar que es el extremo de un intervalo cerrado (●).



La recta real queda dividida en 3 intervalos :

$$(- \infty , - 2) \qquad ; \qquad (- 2 , 2] \qquad ; \qquad [2 , + \infty)$$

Para saber cuál o cuáles de estos intervalos cumplen con la desigualdad, escojo un valor dentro de cada intervalo, lo sustituyo en la inecuación inicial y observo si cumple o no con ella.

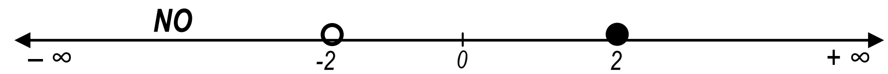
Si un punto de un intervalo cumple con la inecuación, cumplirán todos los puntos de ese intervalo y viceversa.

Se puede escoger cualquiera de los puntos de cada intervalo.

<u>Estudiando el intervalo (– ∞ , – 2) :</u> *escojo el valor "– 3" (está ubicado a la izquierda de "– 2 ") y lo sustituyo en la inecuación inicial*

$$\frac{X-2}{X+2} \leq 0 \quad ; \quad \frac{-3-2}{-3+2} \leq 0 \quad ; \quad \frac{-5}{-1} \leq 0 \quad ; \quad \boldsymbol{5 \leq 0}$$

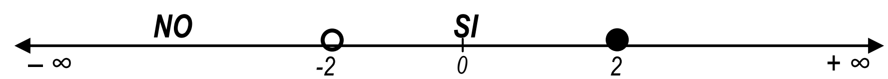
Como "5" ***NO*** *es menor ni igual a "0" significa que "– 3"* **no cumple** *con la inecuación y por lo tanto* **ninguno** *de los valores que están en el intervalo (– ∞ , – 2)* **cumple.**



<u>Estudiando el intervalo (– 2 , 2] :</u> *escojo el valor "0" (está ubicado entre "– 2" y " 2") y lo sustituyo en la inecuación inicial*

$$\frac{X-2}{X+2} \leq 0 \quad ; \quad \frac{0-2}{0+2} \leq 0 \quad ; \quad \frac{-2}{2} \leq 0 \quad ; \quad \boldsymbol{-1 \leq 0}$$

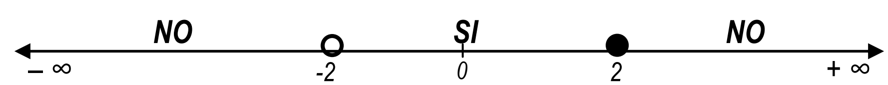
Como "– 1 " ***SI*** *es menor a "0" significa que "0"* **si cumple** *con la inecuación y por lo tanto* **todos los valores** *que están en el intervalo estudiado (– 2 , 2]* **cumplen.**



<u>Estudiando el intervalo [2 , + ∞) :</u> *escojo el valor "3" (está ubicado a la derecha de "2") y lo sustituyo en la inecuación inicial*

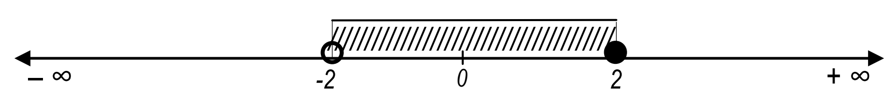
$$\frac{X-2}{X+2} \leq 0 \quad ; \quad \frac{3-2}{3+2} \leq 0 \quad ; \quad \frac{1}{5} \leq 0 \quad ; \quad \boldsymbol{0{,}20 \leq 0}$$

Como "0,20" ***NO*** *es menor ni igual a "0" significa que "3"* **no cumple** *con la inecuación y por lo tanto* **ninguno** *de los valores que están en el intervalo [2 , + ∞)* **cumple.**



La solución puede ser mostrada de tres formas :

<u>En forma gráfica:</u>



En forma de intervalo:

$$X = (-2, 2]$$

En forma de conjunto:

$$X = \{ X \in \mathbb{R} \ / \ -2 < X \leq 2 \}$$

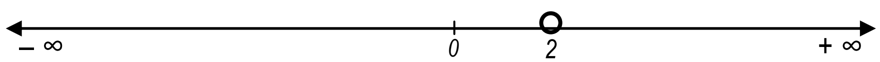
EJERCICIO 3 : *Resolver* $\dfrac{X+4}{X-2} > 3$

Solución :

Estudiando el denominador :

$$X - 2 = 0 \quad ; \quad \boldsymbol{X = 2}$$

Esto nos indica que "X" no puede tomar el valor de "2" ya que anularía al denominador y la división por cero es indeterminada. Luego en la recta real debo colocar un circulo "hueco" (O) en "2" para indicar que NO forma parte de la solución (intervalo abierto)



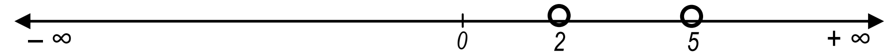
Estudiando el numerador :

Muchos autores y profesores recomiendan "pasar" primero todos los términos al lado izquierdo del signo de la desigualdad. Como esto trae algunas dificultades a los alumnos menos aventajados, recomendamos resolver la inecuación como una ecuación y resultará más cómodo :

$$\frac{X+4}{X-2} = 3 \quad ; \quad X + 4 = 3(X - 2) \quad ; \quad X + 4 = 3X - 6$$

$$X - 3X = -6 - 4 \quad ; \quad -2X = -10 \quad ; \quad \boldsymbol{X = 5}$$

Como la desigualdad es del tipo ">" el "5" NO formará parte de la solución, en la recta real colocamos un circulo "hueco" para indicar que es el extremo de un intervalo abierto (O).



La recta real queda dividida en 3 intervalos :

$$(-\infty, 2) \quad ; \quad (2, 5) \quad ; \quad (5, +\infty)$$

Para saber cuál o cuáles de estos intervalos cumplen con la desigualdad, escojo un valor dentro de cada intervalo, lo sustituyo en la inecuación inicial y observo si cumple o no con ella.

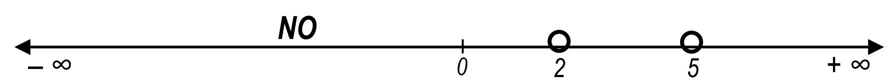
Si un punto de un intervalo cumple con la inecuación, cumplirán todos los puntos de ese intervalo y viceversa.

Se puede escoger cualquiera de los puntos de cada intervalo.

Estudiando el intervalo (– ∞ , 2) : *escojo el valor "0" (está ubicado a la izquierda de "2 ") y lo sustituyo en la inecuación inicial*

$$\frac{X+4}{X-2} > 3 \quad ; \quad \frac{0+4}{0-2} > 3 \quad ; \quad \boldsymbol{-2 > 3}$$

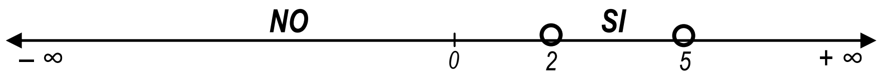
Como "– 2" ***NO*** *es mayor que "3" significa que "0"* **no cumple** *con la inecuación y por lo tanto* **ninguno** *de los valores que están en el intervalo (– ∞ , 2)* **cumple.**



Estudiando el intervalo (2 , 5) : *escojo el valor "3" (está ubicado entre "2" y " 5") y lo sustituyo en la inecuación inicial*

$$\frac{X+4}{X-2} > 3 \quad ; \quad \frac{3+4}{3-2} > 3 \quad ; \quad \frac{7}{1} > 3 \quad ; \quad \boldsymbol{7 > 3}$$

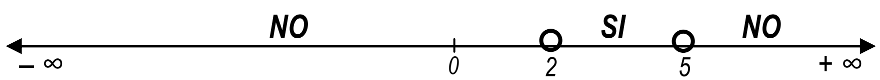
*Como "7" **SI** es mayor que "3" significa que "3"* **si cumple** *con la inecuación y por lo tanto* **todos los valores** *que están en el intervalo estudiado (2 , 5)* **cumplen.**



Estudiando el intervalo (5 , + ∞) : *escojo el valor "6" (está ubicado a la derecha de "5") y lo sustituyo en la inecuación inicial*

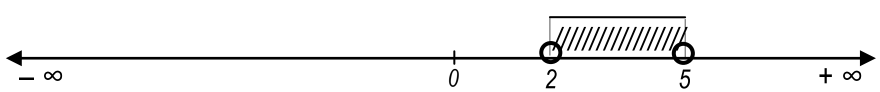
$\frac{X+4}{X-2} > 3$; $\frac{6+4}{6-2} > 3$; $\frac{10}{4} > 3$; **2,5 > 3**

Como "2,5" ***NO*** *es mayor que "3" significa que "6"* **no cumple** *con la inecuación y por lo tanto* **ninguno** *de los valores que están en el intervalo (5 , + ∞)* **cumple.**



La solución puede ser mostrada de tres formas :

En forma gráfica:



En forma de intervalo:

X = (2 , 5)

En forma de conjunto:

X = { X Є ℝ / 2 < X < 5 }

EJERCICIO 4 :

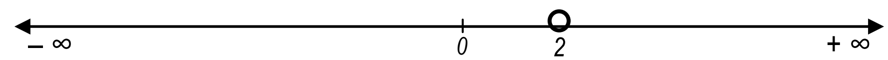
Resolver $\frac{X+4}{X-2} < 3$

Solución :

Estudiando el denominador :

X – 2 = 0 ; ***X = 2***

Esto nos indica que "X" no puede tomar el valor de "2" ya que anularía al denominador y la división por cero es indeterminada. Luego en la recta real debo colocar un circulo "hueco" (○) en "2" para indicar que NO forma parte de la solución (intervalo abierto)



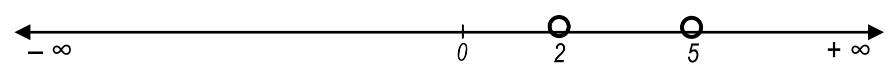
Estudiando el numerador :

Muchos autores y profesores recomiendan "pasar" primero todos los términos al lado izquierdo del signo de la desigualdad. Como esto trae algunas dificultades a los alumnos menos aventajados, recomendamos resolver la inecuación como una ecuación y resultará más cómodo :

$\frac{X+4}{X-2} = 3$; *X + 4 = 3 (X – 2)* ; *X + 4 = 3X – 6*

X – 3X = – 6 –4 ; *– 2X = – 10* ; ***X = 5***

Como la desigualdad es del tipo "<" el "5" NO formará parte de la solución, en la recta real colocamos un circulo "hueco" para indicar que es el extremo de un intervalo abierto (○).



La recta real queda dividida en 3 intervalos :

(– ∞ , 2) ; (2 , 5) ; (5 , + ∞)

Para saber cuál o cuáles de estos intervalos cumplen con la desigualdad, escojo un valor dentro de cada intervalo, lo sustituyo en la inecuación inicial y observo si cumple o no con ella.

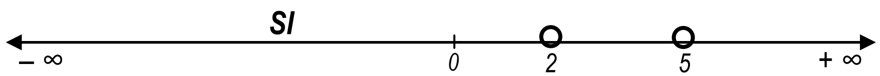
Si un punto de un intervalo cumple con la inecuación, cumplirán todos los puntos de ese intervalo y viceversa.

Se puede escoger cualquiera de los puntos de cada intervalo.

<u>Estudiando el intervalo (– ∞ , 2) :</u> *escojo el valor "0" (está ubicado a la izquierda de "2 ") y lo sustituyo en la inecuación inicial*

$$\frac{X+4}{X-2} < 3 \quad ; \qquad \frac{0+4}{0-2} < 3 \quad ; \qquad \mathbf{-2 < 3}$$

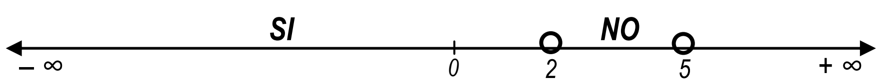
Como "– 2" ***SI*** *es menor que "3" significa que "0"* **si cumple** *con la inecuación y por lo tanto* **todos los valores** *que están en el intervalo estudiado (– ∞ , 2)* **cumplen.**



<u>Estudiando el intervalo (2 , 5) :</u> *escojo el valor "3" (está ubicado entre "2" y " 5") y lo sustituyo en la inecuación inicial*

$$\frac{X+4}{X-2} < 3 \quad ; \qquad \frac{3+4}{3-2} < 3 \quad ; \qquad \frac{7}{1} < 3 \quad ; \qquad \mathbf{7 < 3}$$

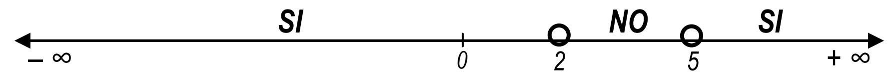
Como "7" ***NO*** *es menor que "3" significa que "3"* **no cumple** *con la inecuación y por lo tanto* **ninguno** *de los valores que están en el intervalo (– 2 , 5)* **cumple.**



<u>Estudiando el intervalo (5 , + ∞) :</u> *escojo el valor "6" (está ubicado a la derecha de "5") y lo sustituyo en la inecuación inicial*

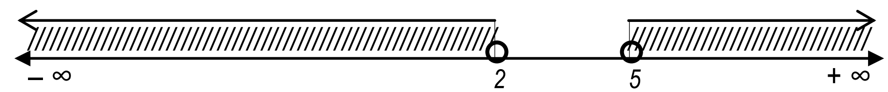
$$\frac{X+4}{X-2} < 3 \quad ; \qquad \frac{6+4}{6-2} < 3 \quad ; \qquad \frac{10}{4} < 3 \quad ; \qquad \mathbf{2{,}5 < 3}$$

Como "2,5" ***SI*** *es menor que "3" significa que "6"* **si cumple** *con la inecuación y por lo tanto* **todos los valores** *que están en el intervalo estudiado (5 , + ∞)* **cumplen.**



La solución puede ser mostrada de tres formas :

<u>En forma gráfica:</u>



<u>En forma de intervalo:</u>

X = (– ∞ , 2) U (5 , + ∞)

<u>En forma de conjunto:</u>

X = { X Є ℝ / X < 2 ∧ X > 5 }

Todos los "X" menores a "2" y todos los "X" mayores a "5",

<u>EJERCICIO 5 :</u> *Resolver* $\frac{2}{X+1} \geq \frac{3}{X-2}$

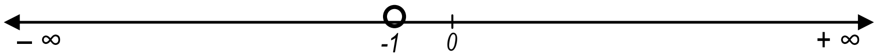
<u>Solución :</u>

Como la inecuación presenta dos denominadores los estudiamos por separado.

Estudiando el denominador del primer miembro :

$$X + 1 = 0 \quad ; \quad \boldsymbol{X = -1}$$

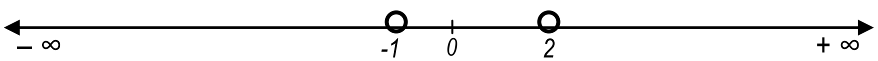
Esto nos indica que "X" no puede tomar el valor de "– 1" ya que anularía al denominador y la división por cero es indeterminada. Luego en la recta real debo colocar un circulo "hueco" (○) en "– 1" para indicar que NO forma parte de la solución (intervalo abierto)



Estudiando el denominador del segundo miembro :

$$X - 2 = 0 \quad ; \quad \boldsymbol{X = 2}$$

Esto nos indica que "X" no puede tomar el valor de "2" ya que anularía al denominador y la división por cero es indeterminada. Luego en la recta real debo colocar un circulo "hueco" (○) en "2" para indicar que NO forma parte de la solución (intervalo abierto)



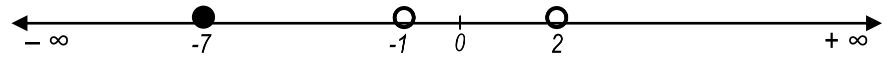
Estudiando el numerador :

Muchos autores y profesores recomiendan "pasar" primero todos los términos al lado izquierdo del signo de la desigualdad. Como esto trae algunas dificultades a los alumnos menos aventajados, recomendamos resolver la inecuación como una ecuación y resultará más cómodo :

$$\frac{2}{X+1} = \frac{3}{X-2} \quad ; \quad 2(X - 2) = 3(X + 1) \quad ; \quad 2X - 4 = 3X + 3$$

$$2X - 3X = +3 + 4 \quad ; \quad -X = +7 \quad ; \quad \boldsymbol{X = -7}$$

Como la desigualdad es del tipo "≥" el "-7" SI formará parte de la solución, en la recta real colocamos un circulo "relleno" para indicar que es el extremo de un intervalo cerrado (●).



La recta real queda dividida en 4 intervalos :

$$\boldsymbol{(-\infty, -7\,] \quad ; \quad [\,-7, -1\,) \quad ; \quad (-1, 2\,) \quad ; \quad (\,2, +\infty\,)}$$

Para saber cuál o cuáles de estos intervalos cumplen con la desigualdad, escojo un valor dentro de cada intervalo, lo sustituyo en la inecuación inicial y observo si cumple o no con ella.

Si un punto de un intervalo cumple con la inecuación, cumplirán todos los puntos de ese intervalo y viceversa.

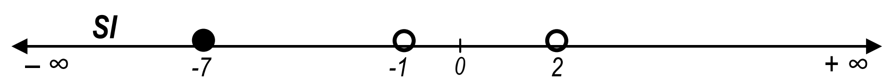
Se puede escoger cualquiera de los puntos de cada intervalo.

Estudiando el intervalo (– ∞ , – 7] : *escojo el valor "-8" (está ubicado a la izquierda de "-7 ") y lo sustituyo en la inecuación inicial*

$$\frac{2}{X+1} \geq \frac{3}{X-2} \quad ; \quad \frac{2}{-8+1} \geq \frac{3}{-8-2}$$

$$\frac{2}{-7} \geq \frac{3}{-10} \quad ; \quad \boldsymbol{-0{,}29 \geq -0{,}3}$$

*Como "***– 0,29***"* ***SI*** *es mayor que "***– 0,3***" significa que "-8"* **si cumple** *con la inecuación y por lo tanto* **todos los valores** *que están en el intervalo estudiado (– ∞ , – 7]* **cumplen.**

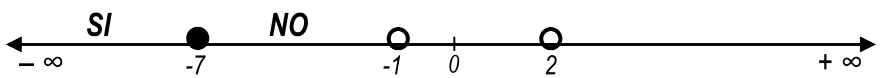


Estudiando el intervalo [–7 , – 1) : *escojo el valor "-2" (está ubicado entre "-7" y " -1") y lo sustituyo en la inecuación inicial*

$$\frac{2}{X+1} \geq \frac{3}{X-2} \quad ; \quad \frac{2}{-2+1} \geq \frac{3}{-2-2}$$

$$\frac{2}{-1} \geq \frac{3}{-4} \quad ; \quad \mathbf{-2 \geq -0,75}$$

*Como "**– 2**" **NO** es mayor ni igual que "**– 0,75**" significa que "-2"* **no cumple** *con la inecuación y por lo tanto* **ninguno** *de los valores que están en el intervalo [–7 , – 1)* **cumple.**

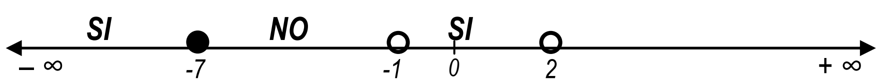


Estudiando el intervalo (– 1 , 2) : *escojo el valor "0" (está ubicado entre "-1" y " 2") y lo sustituyo en la inecuación inicial*

$$\frac{2}{X+1} \geq \frac{3}{X-2} \quad ; \quad \frac{2}{0+1} \geq \frac{3}{0-2}$$

$$\frac{2}{1} \geq \frac{3}{-2} \quad ; \quad \mathbf{2 \geq -1,5}$$

*Como "**2**" **SI** es mayor que "**– 1,5**" significa que "0"* **si cumple** *con la inecuación y por lo tanto* **todos los valores** *que están en el intervalo estudiado (**– 1** , 2)* **cumplen.**

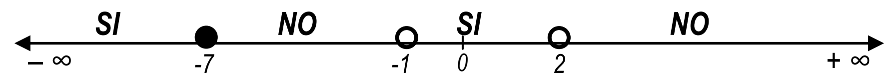


Estudiando el intervalo (2 , + ∞) : *escojo el valor "3" (está ubicado a la derecha de "2") y lo sustituyo en la inecuación inicial*

$$\frac{2}{X+1} \geq \frac{3}{X-2} \quad ; \quad \frac{2}{3+1} \geq \frac{3}{3-2}$$

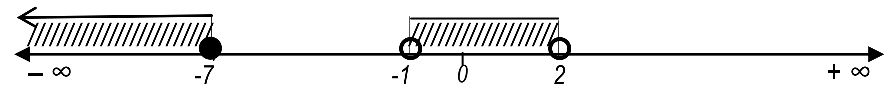
$$\frac{2}{4} \geq \frac{3}{1} \quad ; \quad \mathbf{0,5 \geq 3}$$

*Como "**0,5**" **NO** es mayor ni igual que "**3**" significa que "3"* **no cumple** *con la inecuación y por lo tanto* **ninguno** *de los valores que están en el intervalo (2 , + ∞)* **cumple.**



La solución puede ser mostrada de tres formas :

<u>En forma gráfica:</u>



<u>En forma de intervalo:</u>

$$\mathbf{X = (-\infty , -7] \cup (-1 , 2)}$$

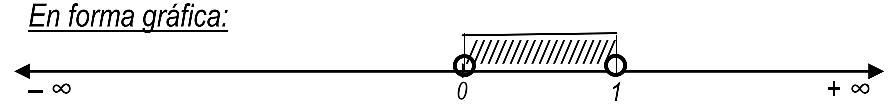
<u>En forma de conjunto:</u>

$$\mathbf{X = \{ X \in \mathbb{R} \ / \ X \leq -7 \ \wedge \ -1 < X < 2 \}}$$

Todos los "X" menores o iguales a "–7" y todos los "X" mayores a "–1" y menores a "2".

EJERCICIO 6 : *Resolver* $\frac{1+X}{1-X} > 1$

<u>En forma gráfica:</u>



<u>En forma de intervalo:</u>

$$\mathbf{X = (0 , 1)}$$

<u>En forma de conjunto:</u>

$$\mathbf{X = \{ X \in \mathbb{R} \ / \ 0 < X < 1 \}}$$