Aspectos formales de la integral definida y la función integral

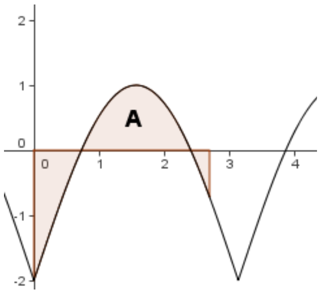
A continuación, se presentan los aspectos formales vinculados a las funciones integrables según Riemann, siguiendo los lineamientos establecidos en los capítulos 13 y 14 de Spivak (1996).

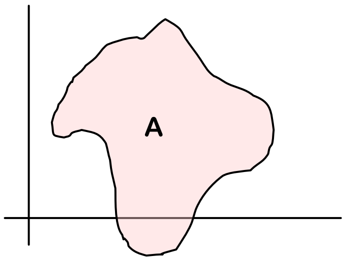
Se comienza el estudio planteando el problema de calcular el área de una región acotada del plano. La intención es plantear la necesidad de definir conceptos, procedimientos y criterios vinculados a la integración. De esta manera, se definirán las "sumas superiores" y "sumas inferiores" de una función acotada cualquiera definida en un intervalo acotado y cerrado; para luego determinar bajo qué condiciones, tal función se dice "Riemann – Integrable". Se consideran varios ejemplos elementales y se establece un criterio para la integrabilidad de Riemann. A partir de ello, se estudian las propiedades más relevantes que cumple la integral.

La integral según Riemann

Si bien se ha trabajado desde los primeros años el cálculo de áreas en figuras elementales, es común que el estudiante que llega a niveles superiores de estudio, tenga dificultad para definir o consolidar el concepto de área de una región cualquiera del plano.

A este concepto se lo puede interpretar como el número de unidades de longitudes cuadradas contenidas en una región acotada del plano (Spivak, 1996; pág. 345). Esto último es comprensible e intuitivo para regiones poligonales, podemos llamarlas "simples" (estudiadas en la primaria y la secundaria); pero pierde algo de sentido si queremos hallar el área A de las siguientes regiones sombreadas:



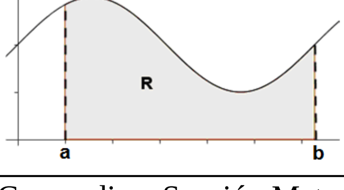


O también cuando decimos que un círculo de radio $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ tiene área 1; lo que sugiere pensar que el círculo tiene la misma superficie que un cuadrado de lado unitario. Dicho de otro modo, un cuadrado puede "llenar" el círculo dado. Bajo estas cuestiones, claramente es necesario reformular y sobre todo ampliar el significado del área de una región y la forma de calcularla.

Motivación: Aproximando el área

A continuación se desarrolla una situación particular para aproximar el área de una región, pero cuyo procedimiento, dará una idea sobre los conceptos que subyacen en la definición de integral de una función f definida sobre un intervalo.

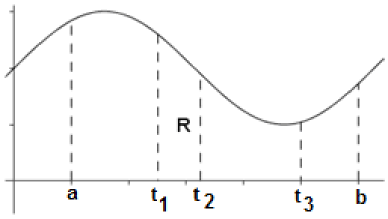
En la siguiente figura se representa una región R limitada en su parte superior por la gráfica de una función f(x) continua no negativa, en su parte inferior por el eje x, a la izquierda por la recta x = a y a la derecha por la recta x = b. Dicha región se denotará por ***R(f, a, b)***.



¿Qué número, si lo hubiese, debería considerarse como el área de R? Esta es la cuestión que se desea resolver.

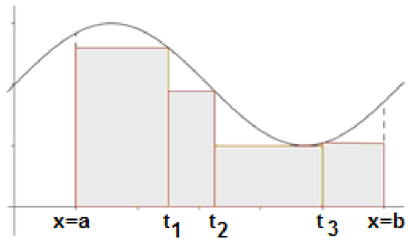
El número que se asignará como área de R(f, a, b) se llamará eventualmente **integral** de f sobre el intervalo [a; b].

Para calcularlo se podría comenzar dividiendo el intervalo [a;b], en un número finito de intervalos que no se superponen, por ejemplo en cuatro subintervalos como se aprecia en la siguiente figura. Estos son: [t_0 , t_1] [t_1 , t_2] [t_2 , t_3] [t_3 , t_4] por medio de los números t_0 , t_1 , t_2 , t_3 , t_4 siendo $a = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4 = b$.

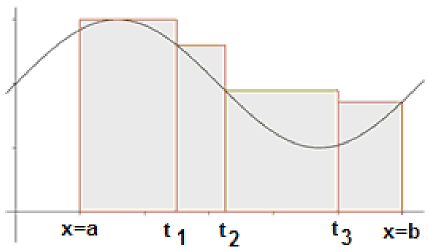


Pero observando que en cada subintervalo cerrado, la función f tiene un mínimo m_i y un valor máximo M_i (pues estamos asumiendo f continua), es posible plantear dos sumatorias, que representarán sumas de áreas de rectángulos, determinados por la subdivisión, que se llamarán: por defecto y por exceso.

Estas son: "s" a la suma por defecto: $s = \sum_{i=1}^{4} m_i \cdot (t_i - t_{i-1})$:



y "S" es la suma exceso: $S = \sum_{i=1}^{4} M_i \cdot (t_i - t_{i-1})$:

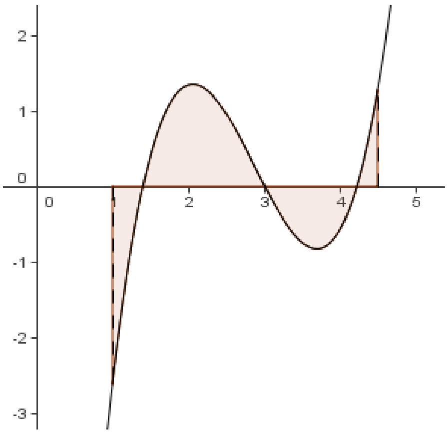


Estas sumas justamente nos aproximan al valor del área buscada. Pero observando las figuras es evidente que los valores que se obtienen no serían los deseables, ya que "visualmente", se observa que el error que se comete es grande con respecto al valor que se desea encontrar como área. Un hecho intuitivo y determinante, es que el numero que representará al área "A" de la región R(f;a;b) deberá cumplir la siguiente desigualdad: $s \leq A \leq S$; para cualquier subdivisión del intervalo [a;b].

Hasta aquí, existen algunas suposiciones implícitas, por ejemplo que la función f(x) sea continua, positiva y acotada en un [a; b]. ¿Pero cómo se resuelve una situación similar cuando las funciones carecen de ciertas propiedades, entre ellas la de la continuidad? ¿En qué casos es posible encontrar el área?

Para responder a estas preguntas, se necesitan formalizar algunos conceptos. Por medio de los mismos se podrá establecer bajo qué condiciones y en qué casos es válido este procedimiento para aproximar el área de R(f;a;b).

Una cuestión a destacar es que, como veremos, se puede calcular el área de regiones determinadas por funciones que no satisfacen la condición $f(x) \geq 0$ para todo x de [a; b]. Si *f* es la función dibujada en la siguiente figura, la integral representará la diferencia entre las áreas de las regiones sombreadas por encima y por debajo del eje de abscisas, área "algebraica" de ***R(f, a, b)***)



Definiciones y propiedades

Definición 1: *dado un intervalo [a, b], siendo a < b, se llama "**partición**" a toda colección finita de puntos del [a, b]; es decir, al conjunto* $P = \{a = t_0; t_1; ...; b = t_n\}$

Definición 2: *sea una función f acotada en el [a, b] y* $P = \{a = t_0; t_1; ...; b = t_n\}$ *una partición del mismo.*

Sea: $m_i = \inf\{f(x) : t_{i-1} \leq x \leq t_i\}$ $\qquad M_i = \sup\{f(x) : t_{i-1} \leq x \leq t_i\}$ *donde* $1 \leq i \leq n$

*La **suma inferior** de la función f para P, se denota como* $L(f;P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (t_i - t_{i-1})$*; y la **suma superior** de la función f para la partición P, como* $U(f;P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot (t_i - t_{i-1})$ ♦

Observar que se habla de ínfimo y supremo, pues la definición no expresa que la función sea continua en [a; b]. Pero sí exige que sea acotada para asegurar la existencia de ellos.

Estas particiones cumplen ciertas propiedades, que se estudian a continuación:

Teorema 1

Siendo f una función acotada en el [a;b] y P una partición cualquiera, se cumple que $L(f;P) \leq U(f;P)$.

Demostración:

Sea la partición $P = \{a = t_0; t_1; ...; b = t_n\}$; como la función es acotada en cada intervalo, resulta que $m_i \leq M_i$, donde $1 \leq i \leq n$.

Por las propiedades de monotonía resulta que $m_i \cdot (t_i - t_{i-1}) \leq M_i \cdot (t_i - t_{i-1})$, pues el número $(t_i - t_{i-1})$ es no negativo.

Entonces $\sum_{i=1}^{n} [m_i \cdot (t_i - t_{i-1})] \leq \sum_{i=1}^{n} [M_i \cdot (t_i - t_{i-1})]$.

Luego, por definición de L(f; P) y U(f; P), se verifica que $L(f;P) \leq U(f;P)$. □

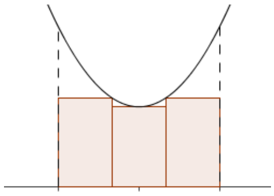
♦ Notación: se ha optado por utilizar las letras L y U, en relación a las palabras Lower y Upper (inferior y superior respectivamente).
Nomenclatura: estas sumas inferior y superior, son llamadas "sumas de Riemann" (en honor a Bernard Riemann – s. XIX).

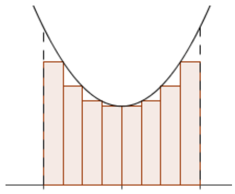
Esta propiedad garantiza que sea cual fuere la partición elegida, siempre sucede que la suma inferior es menor que la suma superior; a lo más, será igual.

Ahora bien, es necesario considerar la variante donde las particiones sean diferentes; en tal caso, observaremos si la desigualdad antes vista entre L y U sigue siendo válida.

Para tal fin, se analiza primeramente el comportamiento de L y U cuando se añaden más puntos a una partición.

En los siguientes ejemplos, se observa que si se agregan más números a la partición del [a;b], se obtiene una mejor aproximación al área encerrada:





Esta observación motiva el siguiente lema:

Lema:

Si Q es una partición que contiene a una partición P, entonces $L(f;P) \leq L(f;Q)$ *y por otro lado también se cumple que* $U(f;P) \geq U(f;Q)$

Demostración:

Consideremos el <u>caso particular</u> en Q que tenga un solo punto más que P:
$$P = \{t_0;\ldots;t_n\}$$
$$Q = \{t_0;\ldots;t_{k-1};u;t_k;\ldots;t_n\}$$

Denotaremos los ínfimos
$$m' = \inf\{f(x) : t_{k-1} \leq x \leq u\}$$
$$m'' = \inf\{f(x) : u \leq x \leq t_k\}$$

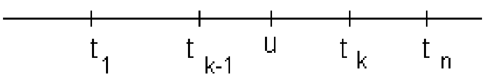
De esta forma para P:

$$L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (t_i - t_{i-1})$$

y para la partición Q:

$$L(f,Q) = \sum_{i=1}^{k-1} m_i \cdot (t_i - t_{i-1}) + m'(u - t_{k-1}) + m''(t_k - u) + \sum_{i=k+1}^{n} m_i \cdot (t_i - t_{i-1})$$

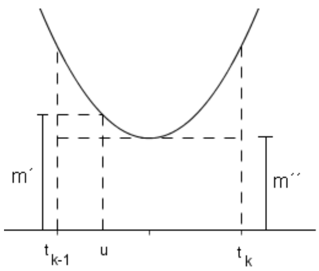
Podemos representar los subíndices en el eje x para una mejor interpretación de la igualdad anterior:



Es decir, basta probar que $L(f,P) \leq L(f;Q)$ en (t_{k-1};t_k).

O sea que $m_k \cdot (t_k - t_{k-1}) \leq m'(u - t_{k-1}) + m''(t_k - u)$. En efecto:

Para el intervalo (t_{k-1};u): el conjunto $\{f(x) : t_{k-1} \leq x \leq t_k\}$ contiene todos los números de $\{f(x) : t_{k-1} \leq x \leq u\}$ y posiblemente otros más pequeños; entonces el ínfimo del primer conjunto es menor o igual que el ínfimo del segundo conjunto:



Lo mismo sucede para el intervalo (u; t_k).

O sea que $m_k \leq m'$ $\wedge$ $m_k \leq m''$, entonces:

$$m_k \cdot (t_k - t_{k-1}) = m_k \cdot (t_k - t_{k-1} + u - u) = m_k \cdot (t_k - u) + m_k \cdot (u - t_{k-1})$$

Pero: $m_k \leq m'' \Rightarrow m_k \cdot (t_k - u) \leq m'' \cdot (t_k - u)$

$$m_k \leq m' \Rightarrow m_k \cdot (u - t_{k-1}) \leq m' \cdot (u - t_{k-1})$$

Sumando miembro a miembro resulta que: $m_k \cdot (t_k - t_{k-1}) \leq m' \cdot (u - t_{k-1}) + m'' \cdot (t_k - u)$. Que es la desigualdad buscada.

Análogamente se demuestra que $U(f,P) \geq U(f;Q)$. □

Con el Lema anterior, se deduce el caso más general donde la partición Q se puede obtener adicionando a P un punto más, obteniendo una nueva partición P_1, luego con otro punto P_2, y así sucesivamente hasta llegar a tener todos los puntos de la partición Q, cumpliéndose que:

$$L(f,P) \leq L(f,P_1) \leq L(f,P_2) \leq ... \leq L(f,P_n) = L(f,Q)$$

Y análogamente: $U(f,P) \geq U(f,P_1) \geq U(f,P_2) \geq ... \geq U(f,P_n) = U(f,Q)$. □

El resultado del lema anterior se utiliza para demostrar que, efectivamente, si las particiones P_1 y P_2 son distintas, la desigualdad entre $L(f,P_1)$ y $U(f;P_2)$, estudiada para el caso que dichas particiones sean iguales, también se cumple.

Teorema 2

Sean P_1 y P_2 particiones de [a;b], y f una función acotada en dicho intervalo, entonces $L(f,P_1) \leq U(f;P_2)$.

Demostración:

Existe una partición P que contiene a P_1 y P_2; podemos considerar incluso la que contiene mayor cantidad de elementos, y aplicando los resultados anteriores resulta que:

$$L(f,P_1) \leq L(f,P) \leq U(f,P) \leq P(f,P_2). \ \square$$

<u>Observación</u>: cualquier suma superior U(f, P´) es mayor o igual que el supremo de todas las sumas inferiores, es decir que $\sup\{L(f,P):$ P es una partición de [a; b]} ≤ U(f, P´) para toda P´. Esto significa a su vez que sup{L(f, P)} es una cota inferior para el conjunto inf{U(f, P)}, o sea que sup{L(f, P)} ≤ inf{U(f, P)}.

Es evidente que tanto uno como otro de estos números se encuentran entre la suma inferior y la suma superior de f para todas las particiones:

$$L(f,P') \leq \sup\{L(f,P)\} \leq U(f,P') \quad \text{para toda partición P´.}$$

Como caso particular, puede ocurrir que sup{L(f, P)} = inf{U(f, P)}; siendo así, es el único número entre las sumas inferiores y las sumas superiores de f para todas las particiones, y éste número es un candidato ideal para asignarlo como el área de R(f;a;b).

Pero también puede ocurrir que sup{L(f, P)} < inf{U(f, P)}, entonces todo número x comprendido entre sup{L(f, P)} y el número inf{U(f, P)} cumplirá la desigualdad L(f, P´) ≤ x ≤ U(f, P´).

Definición 3:

Una función f acotada sobre [a; b] es ***integrable*** *sobre dicho intervalo si:*
sup {L(f, P): P es una partición de [a;b]} = inf {U(f, P): P es una partición de [a;b]}

En este caso, este número común recibe el nombre de **integral** de f sobre [a; b]; denotado $\int_a^b f(x)$.

La integral $\int_a^b f(x)$ recibe el nombre de área de R(f; a; b) si f(x) ≥ 0 ∀ x ∈ [a; b].

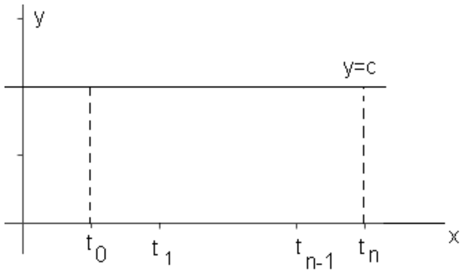
Además, se define que $\int_a^b f(x) = -\int_b^a f(x)$ y también que $\int_a^a f(x) = 0$.

Según la definición, si f es integrable, entonces: L (f, P) ≤ $\int_a^b f(x)$ ≤ U(f, P) para toda partición P del [a;b]. Además $\int_a^b f(x)$ es el único número que cumple esta propiedad (pues $L(f;P) \le \sup\{L(f;P)\} = \int_a^b f(x) = \acute{\imath}nf\{U(f;P)\} \le U(f;P)$).

A continuación se analizan dos ejemplos referidos a la determinación del área de una región (cuestión claramente relacionada a la integrabilidad de una función):

1.- Calcular el área de la función f(x) = c, con x ∈[a;b].
Definimos una partición $P = \{a = t_0; t_1; ...; b = t_n\}$, resultando $m_i = M_i = c$.

Donde $L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} [c \cdot (t_i - t_{i-1})] = c \cdot (b-a)$



En este caso coinciden: sup{L(f, P)} = inf{U(f, P)} = c . (b-a); es decir, $\int_a^b c = c \cdot (b-a)$ ♦

2.- Sea $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si x es irracional} \\ 1 \text{ si x es racional} \end{cases}$

Esta función tiene un nombre propio, se la llama "Función de Dirichlet".

Definimos una partición $P = \{a = t_0; t_1; ...; b = t_n\}$, donde $m_i = 0$ ∀ i pues en todo subintervalo de la partición existen irracionales. Y por otro lado $M_i = 1$ ∀ i pues lo mismo sucede con los racionales.

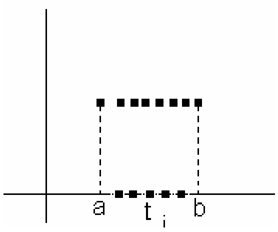
O sea que:

$$L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} [0 \cdot (t_i - t_{i-1})] = 0$$

$$U(f,P) = \sum_{i=1}^{n} [1 \cdot (t_i - t_{i-1})] = b - a$$

♦ Observar que este resultado es la fórmula para el cálculo del área de un rectángulo ya conocida.

Se puede hacer un gráfico orientativo como "figura de análisis" de la situación, pero no es posible representar correctamente la función ya que entre dos números reales cualesquiera del intervalo [a; b] existen infinitos números racionales e irracionales y lo mismo sucede para los números racionales, así que la gráfica de la función consta de una "nube" lineal de puntos de ordenada unidad y otra "nube" lineal de puntos de ordenada nula:



Luego L (f, P) ≠ U(f, P), no se puede especificar un número para asignarlo como "área" de R(f; a; b); pues cualquier número entre 0 y b – a sería "candidato", y no podemos determinarlo.

Hasta aquí surgen preguntas intuitivas, más allá de los conceptos anteriores y primeras propiedades: ¿Qué funciones son integrables? ¿Existe algún criterio parar reconocer la integrabilidad de las mismas? Notemos que hasta ahora sólo conocemos dos ejemplos: la función constante y la función de Dirichet.

El siguiente teorema proporciona un criterio para determinar qué funciones son integrables.

Teorema 3

La función f(x) es integrable sobre [a;b], siendo acotada en dicho intervalo ⇔ ∀ ε > 0 existe una partición P de [a; b] tal que U(f, P) – L (f, P) < ε.♦

Demostración

Para simplificar la notación, se indica "L(f)" al supremo de las sumas inferiores para cualquier partición del intervalo [a; b]. Y análogamente, "U(f)" es el ínfimo de las sumas superiores para cualquier partición del intervalo [a; b].

De esta forma, si f (x) es integrable, se tiene que L(f) = U (f). Si se da un número real ε>0, por la definición de supremo existe una partición P_1 del intervalo [a; b] tal que $L(f)-\frac{\varepsilon}{2}<L(f;P_1)$. De forma similar, existe una partición P_2 del [a; b] tal que $U(f,P_2)<U(f)+\frac{\varepsilon}{2}$.

Si se considera una partición P = $P_1 \cup P_2$, por las propiedades ya vistas, se cumple que:

$$L(f)-\frac{\varepsilon}{2}<L(f;P)\wedge U(f;P)<U(f)+\frac{\varepsilon}{2}\Rightarrow L(f)-\frac{\varepsilon}{2}+U(f;P)<L(f;P)+U(f)+\frac{\varepsilon}{2}$$

De donde resulta que U(f; P) – L(f; P) < ε.

Para probar el recíproco, se tiene que ∀ ε > 0 existe una partición P de [a; b] tal que U(f, P) – L (f, P) < ε, y siendo una partición P´que contiene a P, se cumple que:

$$\begin{array}{l}\inf\{U(f,P')\}\le U(f,P)\\ \sup\{L(f,P')\}\ge L(f,P)\end{array}\quad\Rightarrow \inf\{U(f,P')\}-\sup\{L(f,P')\}<\varepsilon$$

Como esta última desigualdad se cumple para todo ε > 0, entonces se cumple que inf {U(f, P´)} = sup {L(f, P´)}. Es decir, la función f(x) es integrable en el [a; b]. □

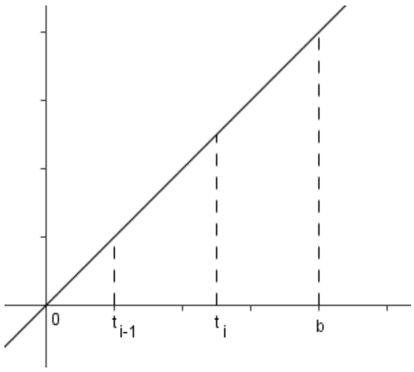
Este teorema expresa de otro modo la definición de integrabilidad, como se ve, es suficiente dar un épsilon y encontrar una partición P tal que U(f; P) – L(f; P) < ε.

♦ Las funciones que cumplan esta condición, se llaman "funciones Riemann – Integrables".

Seguidamente, se ejemplifica la utilización del teorema anterior:

1.- Integrar la función f(x) = x en [0; b] siendo b un número real positivo

Sea $P=\{0=t_0;t_1;...;b=t_n\}$ en [0; b] $\Rightarrow$ $m_i=t_{i-1} \ \wedge \ M_i=t_i$



Calculamos L y U: $$\begin{cases} L(f,P)=\sum_{i=1}^{n}\left[t_{i-1}\cdot(t_{i-1}-t_i)\right]=t_0\cdot(t_1-t_0)+t_1\cdot(t_2-t_1)+\ldots+t_{n-1}\cdot(t_n-t_{n-1}). \\ U(f,P)=\sum_{i=1}^{n}\left[t_i\cdot(t_i-t_{i-1})\right]=t_1\cdot(t_1-t_0)+t_2\cdot(t_2-t_1)+\ldots+t_n\cdot(t_n-t_{n-1}). \end{cases}$$

Sea una partición de n intervalos de igual amplitud; es decir que $t_i-t_{i-1}=\dfrac{b}{n}$. De esta forma, el valor de la abscisa t_i es igual a $\dfrac{i\cdot b}{n}$:

$$\begin{aligned} L(f,P_n)&=0\cdot\left(\frac{b}{n}-0\right)+\frac{b}{n}\cdot\left(\frac{2b}{n}-\frac{b}{n}\right)+\frac{2b}{n}\cdot\left(\frac{3b}{n}-\frac{2b}{n}\right)+\ldots+\frac{(n-1).b}{n}\cdot\left(\frac{n.b}{n}-\frac{(n-1)b}{n}\right)= \\ &=0+\frac{b}{n}\cdot\frac{b}{n}+\frac{2b}{n}\cdot\frac{b}{n}+\frac{3b}{n}\cdot\frac{b}{n}+\ldots+\frac{(n-1).b}{n}\cdot\frac{b}{n}= \\ &=0+1\cdot\left(\frac{b}{n}\right)^2+2\cdot\left(\frac{b}{n}\right)^2+3\cdot\left(\frac{b}{n}\right)^2+\ldots+(n-1)\cdot\left(\frac{b}{n}\right)^2= \\ &=\left(\frac{b}{n}\right)^2\cdot\left(1+2+3+\ldots+(n-1)\right)=\left(\frac{b}{n}\right)^2\cdot\frac{(n-1)\cdot n}{2}=\frac{b^2}{2}\cdot\frac{n-1}{n} \end{aligned} \qquad (^\blacklozenge)$$

De forma análoga:

$$\begin{aligned} U(f,P_n)&=\left(\frac{b}{n}\right)\cdot\left(\frac{b}{n}-0\right)+\frac{2b}{n}\cdot\left(\frac{2b}{n}-\frac{b}{n}\right)+\frac{3b}{n}\cdot\left(\frac{3b}{n}-\frac{2b}{n}\right)+\ldots+\frac{n.b}{n}\cdot\left(\frac{n.b}{n}-\frac{(n-1).b}{n}\right)= \\ &=\frac{b}{n}\cdot\frac{b}{n}+\frac{2b}{n}\cdot\frac{b}{n}+\frac{3b}{n}\cdot\frac{b}{n}+\ldots+n\cdot\frac{b}{n}\cdot\frac{b}{n}= \\ &=1\cdot\left(\frac{b}{n}\right)^2+2\cdot\left(\frac{b}{n}\right)^2+3\cdot\left(\frac{b}{n}\right)^2+\ldots+n\cdot\left(\frac{b}{n}\right)^2= \\ &=\left(\frac{b}{n}\right)^2\cdot\left(1+2+3+\ldots+n\right)=\left(\frac{b}{n}\right)^2\cdot\frac{n\cdot(n+1)}{2}=\frac{b^2}{2}\cdot\frac{n+1}{n} \end{aligned}$$

♦ *Nota: S = 1+2+3+4+…+m, es la suma de los m primeros números naturales, y se demuestra por Inducción completa que dicha suma S se calcula haciendo* $S=\dfrac{n\cdot(n+1)}{2}$.

Observemos que: $U(f,P_n)-L(f,P_n)=\dfrac{b^2}{2}\cdot\left(\dfrac{n+1}{n}-\dfrac{n-1}{n}\right)=\dfrac{b^2}{2}\cdot\dfrac{2}{n}=\dfrac{b^2}{n}$.

Esto significa que existen particiones P_n de modo que la diferencia $U(f, P_n) – L(f, P_n)$ se puede hacer tan pequeña como se quiera:

si $n \to \infty$: $\quad \dfrac{b}{n}\to 0$; $U(f,P_n)\to\dfrac{b^2}{2}$ $\wedge$ $\quad L(f,P_n)\to\dfrac{b^2}{2}$

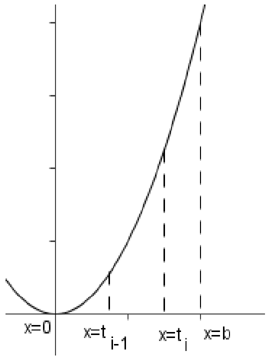
Según el Teorema 2 antes visto, la función es integrable.

Es evidente que $L(f,P_n)\le\dfrac{b^2}{2}\le U(f,P_n)$ para todo valor de n.

Pero se sabe que $U(f, P_n) – L(f, P_n)$ puede hacerse tan pequeña como se quiera, de modo que se concluye que: $\int_0^b x=\dfrac{b^2}{2}$.(♦)

2.- Integrar la función $f(x) = x^2$ en [0; b], siendo b un número real positivo

Sea una partición $P=\{0=t_0;t_1;...;t_n=b\}$ donde $m_i=f(t_{i-1})=(t_{i-1})^2$ y $M_i=f(t_i)=(t_i)^2$.



Sea la partición P de n partes iguales donde $t_i=\dfrac{i\cdot b}{n}$. Las sumas superiores e inferiores resultan:

$$L(f,P_n)=\sum_{i=1}^{n}\left[(t_{i-1})^2\cdot(t_i-t_{i-1})\right]=\sum_{i=1}^{n}\left\{\left[(i-1)\cdot\frac{b}{n}\right]^2\cdot\frac{b}{n}\right\}=\sum_{i=1}^{n}\left[(i-1)^2\cdot\left(\frac{b}{n}\right)^3\right]=\frac{b^3}{n^3}\cdot\sum_{i-1}^{n}(i-1)^2=$$

$$=\left(\frac{b}{n}\right)^3\cdot\left[0^2+1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2\right]=\frac{b^3}{n^3}\cdot\frac{1}{6}\cdot(n-1)\cdot n\cdot(2n-1)$$

$$U(f,P_n)=\sum_{i=1}^{n}\left[(t_i)^2\cdot(t_i-t_{i-1})\right]=\sum_{i=1}^{n}\left\{\left(i\cdot\frac{b}{n}\right)^2\cdot\frac{b}{n}\right\}=\sum_{i=1}^{n}\left[i^2\cdot\left(\frac{b}{n}\right)^3\right]=\frac{b^3}{n^3}\cdot\sum_{i-1}^{n}(i)^2=$$

$$=\left(\frac{b}{n}\right)^3\cdot\left[0^2+1^2+2^2+\ldots+n^2\right]=\frac{b^3}{n^3}\cdot\frac{1}{6}\cdot(n)\cdot(n+1)\cdot(2n+1).$$

Verificar que $U(f,P_n)-L(f,P_n)=\dfrac{b^3}{n}$.

Por otro lado verificar también que si $n \to \infty$: $\quad \dfrac{b}{n}\to 0$; $U(f,P_n)\to\dfrac{b^3}{3}$ $\wedge$ $\quad L(f,P_n)\to\dfrac{b^3}{3}$

Resultando que $L(f,P_n)\le\dfrac{b^3}{3}\le U(f,P_n)$; y como U – L puede hacerse tan pequeño como se quiera, eligiendo n suficientemente grande, se concluye que $\int_0^b x^2=\dfrac{b^3}{3}$ (el mismo resultado que llegó Arquímedes en el siglo III a.C.!!!) (♦)

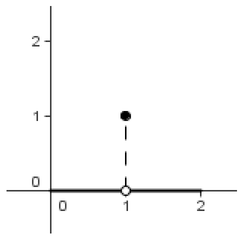
♦ Observación: el valor de esta integral coincide con el área de un triángulo rectángulo de base y altura de longitud “b”.

Algunas funciones discontinuas pero integrables.

El siguiente ejemplo corresponde al de una función integrable pero discontinua en un punto del intervalo de integración (Spivak, 1996; pág. 357).

Sea f(x) definida en el intervalo [0; 2], siendo: $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \neq 1 \\ 1 \text{ si } x = 1 \end{cases}$

Consideremos una partición P = {t_0; t_1; …;t_n} de [0; 2] con $t_{j-1} < 1 < t_j$.
La representación cartesiana resulta:



Entonces $m_i = M_i = 0$ si $i \neq j$; pero $m_j = 0$ y $M_j = 1$.

Las sumas inferiores y superiores resultan:

$$L(f,P) = \sum_{i=1}^{j-1} m_i \cdot (t_i - t_{i-1}) + m_j \cdot (t_j - t_{j-1}) + \sum_{i=j+1}^{n} m_i \cdot (t_i - t_{i-1})$$
$$U(f,P) = \sum_{i=1}^{j-1} M_i \cdot (t_i - t_{i-1}) + M_j \cdot (t_j - t_{j-1}) + \sum_{i=j+1}^{n} M_i \cdot (t_i - t_{i-1})$$

De las cuales se tiene que $U(f,P) - L(f,P) = t_j - t_{j-1}$.

O sea que f es integrable, notar que para obtener $U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$ basta con elegir una partición P tal que $t_{j-1} < 1 < t_j$ de modo que $t_j - t_{j-1} < \varepsilon$

Además, es claro que $L(f,P) \leq 0 \leq U(f,P)$ para todas las particiones P.

De esta manera, siendo f integrable, existe solamente un número entre todas las sumas inferiores y superiores que verifican la desigualdad anterior; de aquí que $\int_0^2 f(x) = 0$.

Cabe aclarar que funciones acotadas pero discontinuas en un conjunto finito de puntos son integrables. Más aún esta propiedad sigue siendo válida aún si la función es discontinua en un conjunto numerable de puntos, como se puede observar en el siguiente ejemplo.

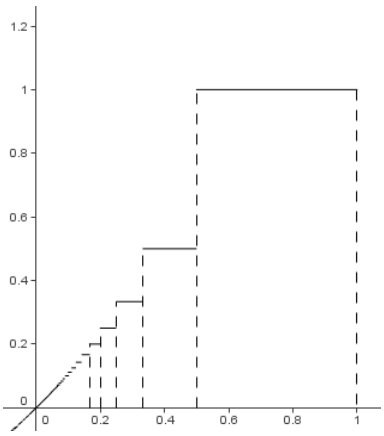
Definamos la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{E\left(\dfrac{1}{x}\right)}, x \in (0;1] \\ 0, x > 1 \end{cases}$$

Donde E(x), representa a la "función parte entera de x".

La representación aproximada de la gráfica de esta función es:

♦ Observación: logramos calcular el área de una región limitada por una parábola; que no se obtiene por herramientas de la geometría elemental.



Esta función es Integrable, porque la serie cuyos términos está representada por las áreas de los rectángulos escalonados es convergente. Y sin embargo, no es continua en una cantidad numerable de puntos, es decir, en todos los puntos de la forma 1/n, siendo n un número natural.

Acerca de la notación utilizada:
Se ha tratado a la integral como la suma de rectángulos del altura f(x) y anchura $x_i - x_{i-1}$ que podemos denotarlos Δx_i; es decir, siendo n la cantidad de intervalos, indicamos la sumatoria $\sum_{i=1}^{n}\left[f(x_i)\cdot\Delta_i\right]$. Cuando n $\to \infty$ (el paso al límite), se sustituye la sumatoria por el símbolo de integral $\int$; $f(x_i)$ se sustituye por f(x) y Δx_i por dx. Resultando $\int_a^b f(x)dx\cdot$

Esta notación tiene la ventaja sobre la que veníamos utilizando $\int_a^b f$ que la expresión "dx" nos indica la variable respecto a la cual se está integrando.

O sea que se tiene el mismo significado si se escribe $\int_a^b f(x)dx$, ó $\int_a^b f(m)dm$ o la expresión $\int_a^b f(z)dz.$

A continuación, se estudian otros teoremas y corolarios acerca de la integrabilidad de las funciones; de esta forma, es posible "ahorrar tiempo" en la búsqueda de la solución de una integral, o al menos conocer sus restricciones.

Para el siguiente teorema, es necesario el concepto de función "**uniformemente continua**".
Definición:
Sea un conjunto $A \subset \Re$, y sea $f : A \to \Re$. Se dice que f es uniformemente continua en A, si para cada ε > 0, existe δ(ε) > 0 tal que si u, v $\in$A son números cualesquiera que satisfacen $|u-v| < \delta(\varepsilon)$ entonces $|f(u)-f(v)| < \varepsilon$.

Sin mayores tecnicismos, una función es uniformemente continua si pequeños cambios en el valor de x producen pequeños cambios en el valor de la función (continuidad) y el tamaño de los cambios en f(x) depende solo del tamaño de los cambios en x pero no del valor de x (uniforme). O sea que, a diferencia de la definición de la continuidad donde el valor de δ depende del punto x, para funciones uniformemente continuas, es independiente.

Por ejemplo, se puede probar que:

La función y = 1/x para x>0 es continua pero no uniformemente continua.

La función y = x es uniformemente continua en el intervalo [0,1].

El siguiente teorema conecta la propiedad de continuidad de una función con la condición de integrabilidad. Más aún la continuidad será una condición suficiente para la integrabilidad.

Teorema 4

Si una función f(x) es ***continua*** *en [a; b],* ***entonces*** *f(x) es* ***integrable*** *en dicho intervalo.*

Demostración:

Sea $P = \{a = t_0; t_1; ...; b = t_n\}$ una partición del [a;b].

Por ser f(x) continua en un intervalo cerrado, es acotada en dicho intervalo (Teorema de Weiestrass para funciones continuas). Esto asegura la existencia de máximos y mínimos en cada subintervalo de la partición.

Para mostrar la integrabilidad es necesario demostrar que: $\forall$ ε > 0 $\exists$ una partición P de [a; b] tal que U(f, P) – L(f, P) < ε.

Además por ser f continua en un intervalo cerrado y acotado, la función f es uniformemente continua. O sea que, si se da ε > 0, existe δ(ε) > 0 tal que si u, v $\in$ [a; b] y siendo $|u - v| < \delta(\varepsilon)$ entonces $|f(u) - f(v)| < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$. Por lo dicho anteriormente, existen los números u_i y v_i en cada subintervalo $[t_{i-1}; t_i]$ de la partición, tales que $f(u_i) = M_i$ y $f(v_i) = m_i$. .

Se tiene entonces que $|f(u_i) - f(v_i)| = |M_i - m_i| = M_i - m_i < \dfrac{\varepsilon}{(b-a)}$. De donde se sigue que:

$$U(f,P) - L(f,P) = \sum_{i=1}^{n}\left[M_i \cdot (t_i - t_{i-1}) - m_i \cdot (t_i - t_{i-1})\right] = \sum_{i=1}^{n}\left[(M_i - m_i)\cdot(t_i - t_{i-1})\right] < \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\varepsilon}{b-a}\cdot(t_i - i_{i-1})\right] =$$

$$= \frac{\varepsilon}{b-a}\cdot\sum_{i=1}^{n}(t_i - i_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{b-a}\cdot(b-a) = \varepsilon \Rightarrow \boxed{U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon}$$