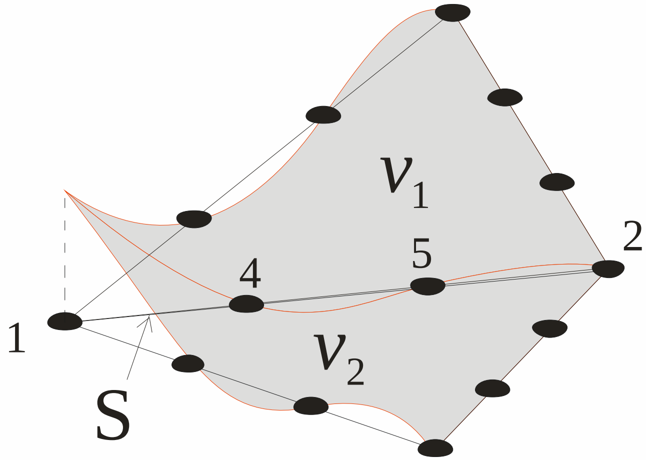


Introducción al Método de los Elementos Finitos

Parte 9

Introducción al Método de los Elementos de Borde

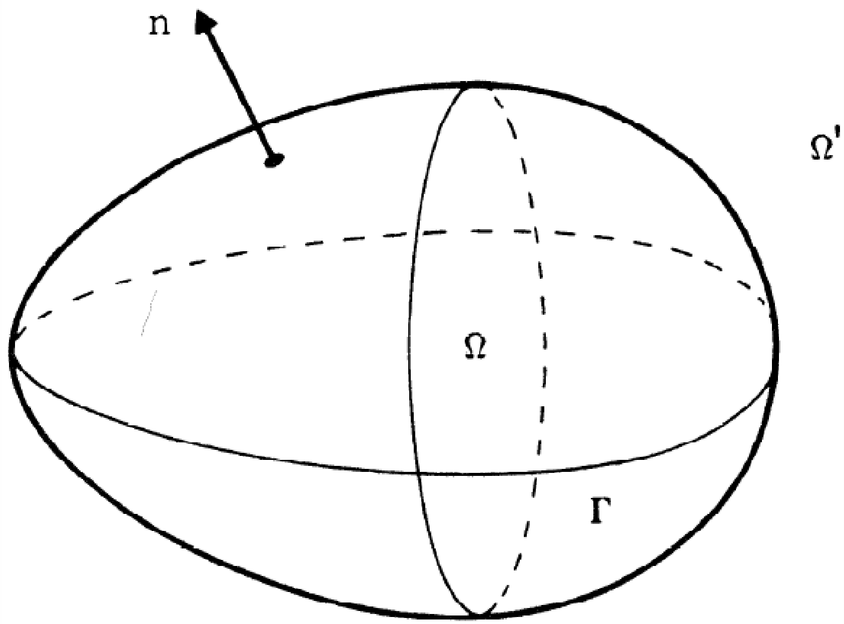
Alberto Cardona, Víctor Fachinotti
Cimec-Intec (UNL/Conicet), Santa Fe, Argentina

Método de Elementos de Borde (MEB)

- Sea el problema exterior de Dirichlet :

$$\triangle u = 0 \qquad \text{in } \Omega',$$

$$u = u_0 \text{ on } \Gamma,\ u(x) \to 0 \text{ as } |x| \to \infty$$



- Como la ED es homogénea, es posible reformular el problema como una ecuación integral sobre la superficie cerrada y acotada Γ.

- El uso del MEF para resolver dicha ecuación integral da lugar al MEB.

Ecuaciones integrales de Fredholm

- **Ecuación de Fredholm de 1er tipo:** dados $f:\Gamma \to R$ y el kernel $k:\Gamma \times \Gamma \to R$, hallar $q:\Gamma \to R$ tal que

$$\int_\Gamma k(x,y)q(y)d\gamma(y) = f(x), \qquad x \in \Gamma. \qquad \longrightarrow \qquad Kq = f$$

- **Ecuación de Fredholm de 2º tipo:** dados $f:\Gamma \to R$, y el kernel $k:\Gamma \times \Gamma \to R$, hallar $q:\Gamma \to R$ tal que

$$q(x) + \int_\Gamma k(x,y)q(y)d\gamma(y) = f(x), \qquad x \in \Gamma. \qquad \longrightarrow \qquad (I+K)q = f$$

- Los kernels $k(x,y)$ que encontraremos son débilmente singulares, de la forma :

$$k(x,y) = \frac{c(x,y)}{|x-y|}, \quad x \neq y,$$

donde $c(x,y)$ es una función acotada. Los kernels de este tipo son integrables :

$$\int_\Gamma |k(x,y)| d\gamma(y) < \infty, \qquad x \in \Gamma.$$

Algunas ecuaciones integrales

Veremos algunas ec. integrales asociadas con PVB gobernados por la ecuación de Laplace. La solución fundamental para el operador de Laplace en 3D está dada por

$$E(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|}$$

lo que significa que

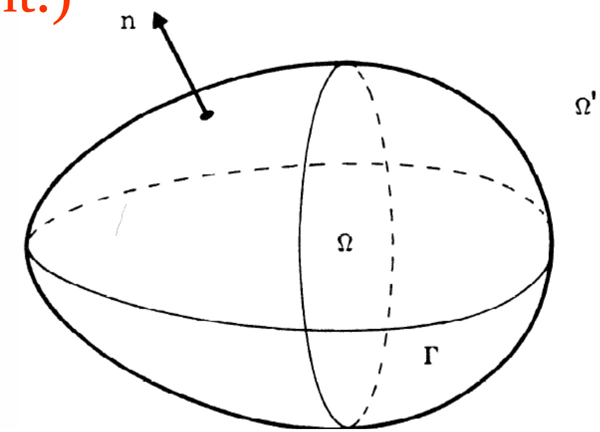
$$\int_{\mathbf{R}^3} E(\mathbf{x})\,\Delta\varphi(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \varphi(0)$$

para toda función suave $\varphi \in R^3$ que se anule fuera de un dominio acotado.

En otras palabras :

$$\Delta E = \delta(0)$$

Algunas ecuaciones integrales (cont.)



Teorema: si u es suave en Ω y Ω' y

$$\Delta u = 0 \qquad \text{in } \Omega \text{ and } \Omega',$$

$$u(x) = 0(|x|^{-1}),\ |\nabla u(x)| = 0(|x|^{-2}) \text{ as } |x| \to \infty$$

entonces

$$\frac{1}{4\pi}\left\{ \int_\Gamma \left[\frac{\partial u}{\partial n}\right] \frac{1}{|x-y|}\, d\gamma(y) - \int_\Gamma [u] \frac{\partial}{\partial n_y}\left(\frac{1}{|x-y|}\right) d\gamma(y) \right\} = \begin{cases} u(x) & \text{if } x \notin \Gamma \\ \dfrac{u^i(x)+u^e(x)}{2} & \text{if } x \in \Gamma \end{cases}$$

con :

$$u^i(x) = \lim_{\substack{y\to x\\ y\in\Omega}} u(y),\ u^e(x) = \lim_{\substack{y\to x\\ y\in\Omega'}} u(y),\ [u] = u^i - u^e, \left[\frac{\partial u}{\partial n}\right] = \frac{\partial u^i}{\partial n} - \frac{\partial u^e}{\partial n},$$

$$\frac{\partial u^i}{\partial n}(x) = \lim_{s\to 0^-} \frac{u(x+sn)-u(x)}{s},\ \frac{\partial u^e}{\partial n}(x) = \lim_{s\to 0^+} \frac{u(x+sn)-u(x)}{s}$$

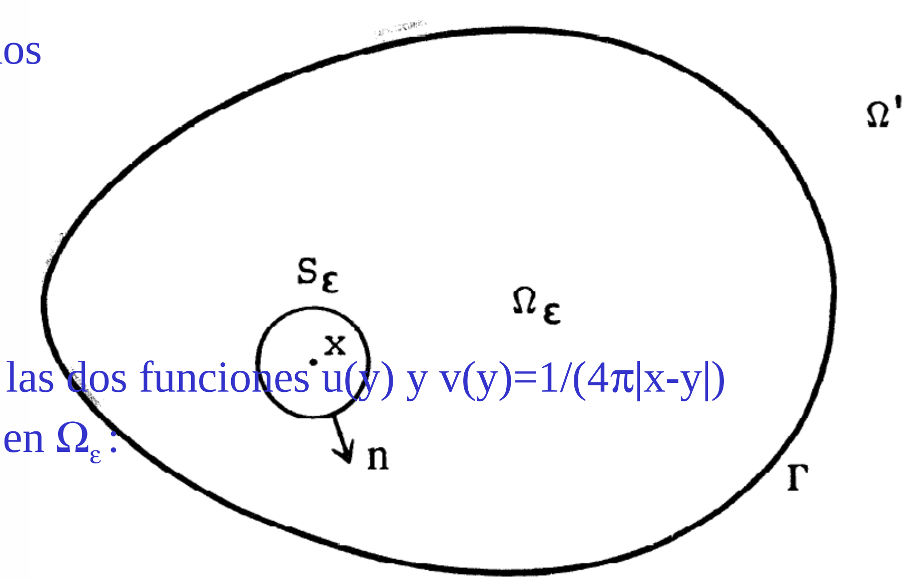
Algunas ecuaciones integrales (cont.)

Demostración: sea x un punto dado en Ω y definimos

$$\Omega_\varepsilon = \{y \in \Omega : |y-x| > \varepsilon\},$$

$$S_\varepsilon = \{y \in R^3 : |y-x| = \varepsilon\},$$

con ε tan pequeño que $S_\varepsilon \in \Omega$.



Aplicamos el teorema de Green sobre Ω_ε para las dos funciones u(y) y v(y)=1/(4π|x-y|) que satisfacen $\Delta u = \Delta v = 0$ en Ω_ε :

$$0 = \int_{\Omega_\varepsilon} u \, \Delta v \, dy - \int_{\Omega_\varepsilon} v \, \Delta u \, dy = \int_{\Gamma} u^i \frac{\partial v}{\partial n} d\gamma - \int_{\Gamma} v \frac{\partial u^i}{\partial n} d\gamma - \int_{S_\varepsilon} u \frac{\partial v}{\partial n} d\gamma + \int_{S_\varepsilon} v \frac{\partial u}{\partial n} d\gamma$$

$$\left| \int_{S_\varepsilon} v \frac{\partial u}{\partial n} d\gamma \right| \leqslant C \int_{S_\varepsilon} \frac{d\gamma(y)}{4\pi |x-y|} = C\varepsilon \to 0 \text{ as } \varepsilon \to 0.$$

Algunas ecuaciones integrales (cont.)

Siendo $\dfrac{\partial v}{\partial n}(y) = -\dfrac{1}{4\pi|x-y|^2}$

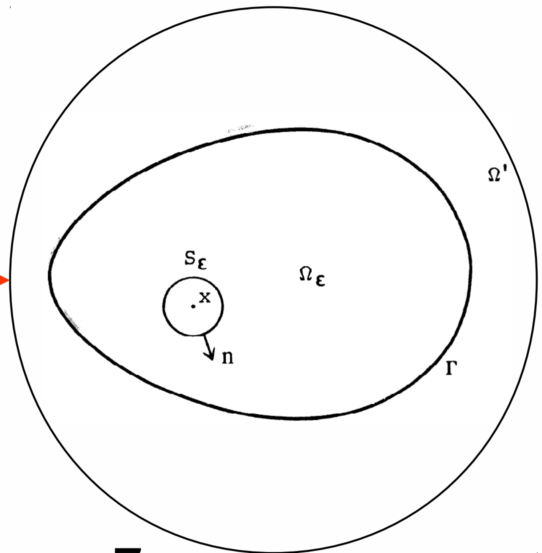
resulta $\int_{S_\varepsilon} u \dfrac{\partial v}{\partial n} d\gamma = -\dfrac{1}{4\pi\varepsilon^2} \int_{S_\varepsilon} u \, d\gamma \to -u(x) \;$ as $\varepsilon \to 0$

Luego:

$$\frac{1}{4\pi}\left\{ \int_\Gamma \frac{\partial u^i}{\partial n} \frac{1}{|x-y|} d\gamma(y) - \int_\Gamma u^i \frac{\partial}{\partial n_y}\left(\frac{1}{|x-y|}\right) d\gamma(y) \right\} = \begin{cases} u(x) & x \in \Omega, \\ \frac{1}{2} u^i(x) & x \in \Gamma, \\ 0 & x \in \Omega'. \end{cases}$$

Seguidamente, se aplica el teorema de Green en el dominio exterior truncado

$$\Omega_b' = \{y \in \Omega' : |y| \leqslant b\}$$



Haciendo b→∞, se obtiene la expresión correspondiente.

(QED)

Ecuación integral para un problema de Dirichlet exterior usando un potencial de capa simple

Consideremos el problema de Dirichlet exterior

$$\begin{aligned}
&\triangle u = 0 && \text{in } \Omega', \\
&u = u_0 && \text{on } \Gamma, \\
&u(x) = 0(|x|^{-1}),\ |\nabla u(x)| = 0(|x|^{-2}),\ \text{as } |x| \to \infty.
\end{aligned}$$

Si u_0 es suficientemente regular, o más precisamente, si u_0 es la restricción a Γ de cierta función $w \in H^1(R^3)$, entonces el problema tiene solución única u. Podemos extender esta solución al interior Ω haciendo que u satisfaga

$$\begin{aligned}
&\triangle u = 0 && \text{in } \Omega, \\
&u = u_0 && \text{on } \Gamma.
\end{aligned}$$

Este problema también tiene solución única con las condición fijada a u_0.

Ecuación integral para un problema de Dirichlet exterior usando un potencial de capa simple (cont.)

Usando el teorema recién visto, tenemos

$$[u]=0 \text{ on } \Gamma \quad \Rightarrow \quad u(x)=\frac{1}{4\pi}\int_\Gamma \left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]\frac{1}{|x-y|}\,d\gamma(y) \qquad x\notin\Gamma$$

Llegamos a la siguiente ecuación integral: dado u_0, hallar q tal que

$$(u^i+u^e)/2=u_0 \text{ on } \Gamma \quad \Rightarrow \quad u_0(x)=\frac{1}{4\pi}\int_\Gamma \underbrace{\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]}_{q}\frac{1}{|x-y|}\,d\gamma(y), \qquad x\in\Gamma \tag{10.15}$$

Esta es una ecuación de Fredholm del 1[er] tipo con kernel débilmente

El kernel $1/|x-y|$ se denomina potencial de capa simple.

Puede probarse que si $u_0\in H^s(\Gamma)$, luego existe solución única $q\in H^{s-1}(\Gamma)$.

Una vez calculada $q=[\partial u/\partial n]$, se puede calcular u usando (10.15).

$$\frac{1}{4\pi}\int_\Gamma \frac{q(y)}{|x-y|}\,d\gamma(y)=u_0(x), \qquad x\in\Gamma \tag{10.17}$$

Ecuación integral para un problema de Dirichlet exterior usando un potencial de capa simple (cont.)

Otra forma de obtener la ecuación integral es buscando una solución al problema exterior de Dirichlet de la forma

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \int_\Gamma \frac{q(y)}{|x-y|} d\gamma(y), \qquad x \in \Omega'. \qquad (10.18)$$

Dado que $\partial(1/|x-y|)/\partial x = 0$ para $x \neq y$, la función u dada por (10.18) satisfará $\Delta u = 0$ en Ω'. Haciendo $x \to \Gamma$, y considerando que la función definida por (10.18) es continua en x, obtenemos la ecuación integral (10.17) para la densidad incógnita q.

Interpretación física: la función u dada por (10.18) para $x \in R^3$ puede interpretarse como el potencial eléctrico debido a cargas eléctricas distribuidas en Γ con densidad q, o como la temperatura debida a fuentes de calor de intensidad q en Γ.

Problema de Dirichlet exterior con potencial de capa doble (cont.)

Consideremos el problema de Dirichlet exterior

$$\triangle u = 0 \qquad \text{in } \Omega',$$

$$u = u_0 \qquad \text{on } \Gamma,$$

$$u(x) = 0(|x|^{-1}),\ |\nabla u(x)| = 0(|x|^{-2}),\ \text{as } |x| \to \infty.$$

Si u_0 es suficientemente regular, entonces el problema tiene solución única u.
Podemos extender esta solución al interior Ω haciendo que u satisfaga

$$\triangle u = 0 \qquad \text{in } \Omega$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \equiv \frac{\partial u^i}{\partial n} = \frac{\partial u^e}{\partial n} = g \qquad \text{on } \Gamma \qquad (10.19)$$

Para que exista solución u a (10.19), es condición necesaria que $\int_\Gamma g\, d\gamma \equiv \int_\Gamma \frac{\partial u^e}{\partial n} d\gamma = 0$

Además, la solución u de (10.19) es única sólo hasta una constante, i.e., u+c también es solución para cualquier constante c.

Problema de Dirichlet exterior con potencial de capa doble (cont.)

$$\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{u^e(x)+u^i(x)}{2}=-\frac{1}{4\pi}\int_\Gamma [u]\,\frac{\partial}{\partial n_y}\left(\frac{1}{|x-y|}\right)d\gamma(y), \qquad x\in\Gamma$$

$$\Rightarrow\; u^e(x)=-\frac{u^i(x)-u^e(x)}{2}+\frac{u^e(x)+u^i(x)}{2}=-\frac{\varphi}{2}-\frac{1}{4\pi}\int_\Gamma \varphi(y)\,\frac{\partial}{\partial n_y}\left(\frac{1}{|x-y|}\right)d\gamma(y)$$

$$\varphi=[u]=u^i-u^e$$

Siendo $u^e(x)=u_0(x)$ para $x\in\Gamma$, llegamos a la siguiente ecuación integral de Fredholm de 2º tipo: dado u_0, hallar φ tal que

$$\frac{\varphi(x)}{2}+\frac{1}{4\pi}\int_\Gamma \varphi(y)\,\frac{\partial}{\partial n_y}\left(\frac{1}{|x-y|}\right)d\gamma(y)=-u_0(x),\quad x\in\Gamma. \qquad (10.21)$$

A su vez, para $x\notin\Gamma$, tenemos

$$\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]=0 \quad\Rightarrow\quad u(x)=-\frac{1}{4\pi}\int_\Gamma \varphi(y)\,\frac{\partial}{\partial n_y}\left(\frac{1}{|x-y|}\right)d\gamma(y)$$

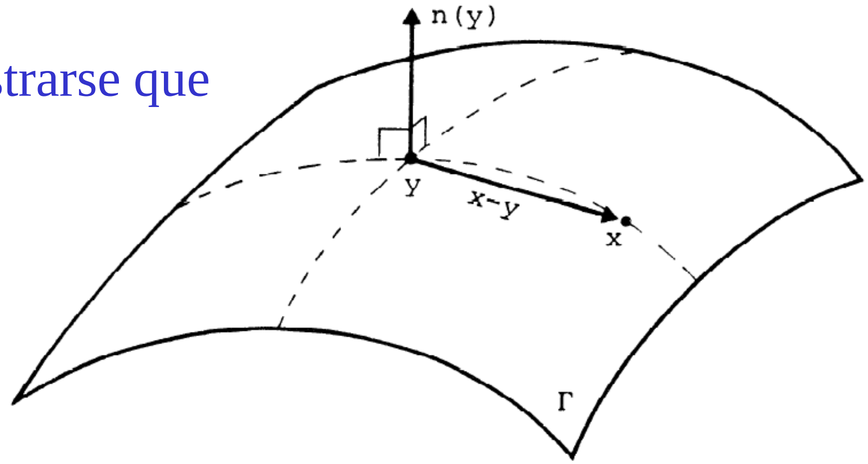
La función u así defi… [u]=φ al cruzar Γ.

Problema de Dirichlet exterior con potencial de capa doble (cont.)

El kernel de la ec. integral (10.21) es $\dfrac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y}\left(\dfrac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\right)$ (potencial de capa doble)

Se observa que $$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y}\left(\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\right) = -\frac{\mathbf{n}(\mathbf{y})\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^3} \qquad \mathbf{x},\ \mathbf{y}\in\Gamma,\ \mathbf{x}\neq\mathbf{y}$$

Siendo Γ suave, n(y) es casi ortogonal a x–y para x cercano a y.



Más precisamente, para Γ suave puede demostrarse que

$$\mathbf{n}(\mathbf{y})\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = |\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2 c(\mathbf{x},\ \mathbf{y})$$

donde c(x,y) es una función acotada.

Luego, el kernel tiene la forma

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y}\left(\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\right) = \frac{c(\mathbf{x},\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}$$

y es débilmente singular.

Problema de Neumann exterior con potencial de capa simple

Consideremos el problema exterior de Neumann

$$\Delta u = 0 \qquad \text{in } \Omega',$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g \qquad \text{on } \Gamma,$$

$$u(x) = 0(|x|^{-1}), \; |\nabla u(x)| = 0(|x|^{-2}) \text{ as } |x| \to \infty.$$

Si g es suficientemente suave, i.e. si $g = \partial w/\partial n$ para cierta función $w \in H^1(R^3)$, este problema tiene solución única.

Hagamos que dicha solución también satisfaga el problema de Dirichlet interior

$$\Delta u = 0 \qquad \text{in } \Omega,$$

$$u = u^e \qquad \text{on } \Gamma.$$

Problema de Neumann exterior con potencial de capa simple (cont.)

$$[u]=0,\ q=\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right] \quad \Rightarrow \quad u(x)=\frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma}\frac{q(y)}{|x-y|}d\gamma(y), \qquad x\in R^3$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial u^e}{\partial n}(x)=-\frac{q(x)}{2}+\frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma}q(y)\frac{\partial}{\partial n_x}\left(\frac{1}{|x-y|}\right)d\gamma(y), \quad x\in\Gamma$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}q(x)-\frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma}q(y)\frac{\partial}{\partial n_x}\left(\frac{1}{|x-y|}\right)d\gamma(y)=-g(x),\ x\in\Gamma$$

Esta es una ecuación integral de Fredholm de 2º tipo, con kernel débilmente singular, no simétrico.

Este problema tiene solución única $q\in L_2(\Gamma)$ para cualquier $g\in L_2(\Gamma)$.

MEF aplicado a las ecuaciones integrales

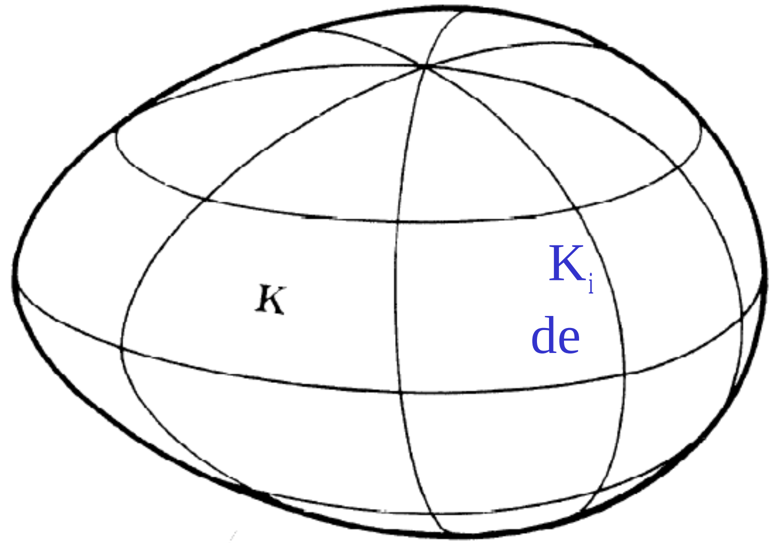
Apliquemos el MEF para la solución numérica de las ecuaciones integrales

$$\frac{1}{4\pi}\int_\Gamma \frac{q(y)}{|x-y|}d\gamma(y)=u_0(x), \qquad x\in\Gamma,$$

$$\frac{1}{2}q(x)-\frac{1}{4\pi}\int_\Gamma q(y)\frac{\partial}{\partial n_x}\left(\frac{1}{|x-y|}\right)d\gamma(y)=-g(x), \qquad x\in\Gamma.$$

Por simplicidad, usaremos aproximaciones constantes por trozos.

Sea $T_h=\{K_1,\ldots,K_M\}$ una malla de elementos K_i de (por ej., triángulos o cuadrángulos curvos), diámetro máximo h.



Introducimos luego el espacio de EF

$$W_h=\{v\in L_2(\Gamma):\ v|_{K_i}\ \text{is constant},\ i=1,\ .\ .\ .,\ M\}$$

MEF aplicado a la ecuación de Fredholm de 1er tipo

Sea la ec. de Fredholm de 1er tipo

$$\frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma}\frac{q(y)}{|x-y|}d\gamma(y)=u_0(x), \qquad x\in\Gamma \qquad (10.29)$$

Multiplicando (10.29) por una función de peso $p(x)\in W$ (W por especificar), e integrando sobre Γ, llegamos a la forma variacional: hallar $q(x)\in W$ t.q.

$$b(q,\ p)=l(p) \qquad \forall p\in W,$$

con :

$$b(q,\ p)=\frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma}\int_{\Gamma}\frac{q(y)p(x)}{|x-y|}d\gamma(y)d\gamma(x),$$

$$l(p)=\int_{\Gamma}u_0(x)p(x)d\gamma(x).$$

MEF aplicado a la ecuación de Fredholm de 1er tipo (cont.)

Luego, la forma MEF Galerkin de (10.29) resulta: hallar $q^h \in W_h$ t.q.

$$b(q^h, p^h) = l(p^h) \qquad \forall p^h \in W_h \qquad (10.32)$$

Dada la base $\{\psi_1, \ldots, \psi_M\}$ en Wh tenemos $q^h = \sum_{j=1}^{M} \xi_j \psi_j$

Luego, (10.32) toma la forma matricial

$$B\xi = l, \quad (10.33) \qquad \text{con} \quad \begin{cases} b_{ij} = \int_{K_i}\int_{K_j} \dfrac{d\gamma(y)\,d\gamma(x)}{|x-y|}, \\ l_i = \int_{K_i} u_0\, d\gamma, \quad i, j = 1, \ldots, M. \end{cases}$$

La forma b(x,y) es bilineal y claramente simétrica. También es positiva-definida (como demostraremos a continuación). Luego, definimos la norma

$$\|p\|_W = b(p, p)^{1/2}$$

MEF aplicado a la ecuación de Fredholm de 1er tipo (cont.)

Para demostrar que b(.,.) es positiva-definida, recordemos que si

$$v(x)=\frac{1}{4\pi}\int_\Gamma \frac{p(y)}{|x-y|}d\gamma(y),\quad x\in R^3 \Rightarrow \begin{cases} \Delta v=0 \text{ in } \Omega \text{ and } \Omega', \\ \left[\frac{\partial v}{\partial n}\right]=p \text{ and } [v]=0 \text{ on } \Gamma, \\ v(x)=0(|x|^{-1}),\ |\nabla v(x)|=0(|x|^{-2}) \text{ as } |x|\to\infty. \end{cases}$$ (10.37b)

Luego:

$$\int_{R^3}|\nabla v|^2dx=\int_\Omega \nabla v\cdot\nabla v\,dx+\int_{\Omega'}\nabla v\cdot\nabla v\,dx=\int_\Gamma v^i\frac{\partial v^i}{\partial n}d\gamma-\int_\Gamma v^e\frac{\partial v^e}{\partial n}d\gamma=\int_\Gamma vp\,d\gamma$$

por (10.37b)

$$b(p,p)\equiv\frac{1}{4\pi}\int_\Gamma\int_\Gamma\frac{p(y)p(x)}{|x-y|}d\gamma(x)d\gamma(y)=\int_{R^3}|\nabla v|^2dx\geq 0$$

or (10.37b) se deduce que

MEF aplicado a la ecuación de Fredholm de 1er tipo (cont.)

Siendo b(.,.) positiva-definida, el problema (10.32) tiene solución única $q^h \in W_h$.

Además, por la teoría de MEF aplicado a problemas elípticos, sabemos que

$$\|q - q^h\|_W \leq \|q - p^h\|_W \qquad \forall p^h \in W_h$$

La norma $\|.\|_W$ es ligeramente más débil que la norma en $L_2(\Gamma)$, luego:

$$\|p\|_W \leq C \|p\|_{L_2(\Gamma)} \quad \Rightarrow \quad \|q - q^h\|_W \leq Ch \|q\|_{H^1(\Gamma)}$$

Nota 1: El número de condición del sistema lineal (10.33) es O(1/h) si la malla T_h es quasi-uniforme. Luego, para h realísticos, el sistema es bastante bien condicionado.

Nota 2: El cálculo de $b_{ij}=\iint(\ldots)$ demanda un alto costo computacional. Si los elementos K_i y K_j no están muy próximos, se puede usar cuadratura de un solo punto. En caso contrario, se deberán usar reglas de cuadratura especiales.

MEF aplicado a la ecuación de Fredholm de 2º tipo

Consideremos la ec. de Fredholm de 2º tipo

$$\frac{1}{2}q(x)-\frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma} q(y)\frac{\partial}{\partial n_x}\left(\frac{1}{|x-y|}\right)d\gamma(y)=-g(x), \qquad x\in\Gamma.$$

o

$$(I-K)q=f \quad \text{con} \quad \begin{cases} f=-2g, \\ Kq(x)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\Gamma} q(y)\frac{\partial}{\partial n_x}\left(\frac{1}{|x-y|}\right)d\gamma(y), \quad x\in\Gamma \end{cases}$$

Si $f\in L_2(\Gamma)$, este problema admite solución única $q\in L_2(\Gamma)$ que, para cierta constante C independiente de f, satisface

$$||q||\leqslant C||f||\equiv C||(I-K)q||$$

con $||p||=(\int_{\Gamma} p^2 d\gamma)^{1/2}$

MEF aplicado a la ecuación de Fredholm de 2º tipo (cont.)

La forma MEF Galerkin de este problema consiste en hallar $q^h \in W_h$ tal que

$$(q^h, p^h) - (Kq^h, p^h) = (f, p^h) \qquad \forall p^h \in W_h \qquad (10.42)$$

con $(q, p) = \int_\Gamma qp\, d\gamma$

lo que equivale al sistema lineal de ecuaciones

$$(D - B)\xi = l \qquad (10.43)$$

$$\begin{cases} q^h = \sum_{j=1}^{M} \xi_j \psi_j, \quad \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_M) \in R^M, \\ b_{ij} = \dfrac{1}{2\pi} \int_{K_i} \int_{K_j} \dfrac{\partial}{\partial n_x} \left(\dfrac{1}{|x-y|} \right) d\gamma(y)\, d\gamma(x), \quad d_i = \int_{K_i} d\gamma, \\ l_i = \int_{K_i} f\, d\gamma. \end{cases}$$

La matriz D es diagonal, y B es densa y no simétrica

MEF aplicado a la ecuación de Fredholm de 2º tipo (cont.)

Definamos la proyección $P_h : L_2(\Gamma) \to W_h$ como

$$(P_h q,\ p^h) = (q,\ p^h) \qquad \forall p^h \in W_h,\ q \in L_2(\Gamma).$$

$$\Rightarrow \quad (P_h q, P_h p) = (q, P_h p) \qquad \forall p,\ q \in L_2(\Gamma)$$

Ahora podemos reformular (10.42) como

$$(q^h, P_h p) - (K q^h, P_h p) = (f, P_h p) \qquad \forall p \in L_2(\Gamma)$$

de donde :

$$(q^h, p) - (P_h K q^h, p) = (P_h f, p) \qquad \forall p \in L_2(\Gamma)$$

o :

$$(I - K_h) q^h = P_h f \qquad \text{con } K_h = P_h K,\ K_h : L_2(\Gamma) \to W_h.$$

MEF aplicado a la ecuación de Fredholm de 2º tipo (cont.)

Proposición: el operador K es "suavizante" o "compacto", i.e., ∃ constante C t.q.

$$\|Kp\|_{H^1(\Gamma)} \leq C\|p\|_{L_2(\Gamma)}, \quad \forall p \in L_2(\Gamma) \qquad (10.46)$$

o sea, si $p \in L_2(\Gamma)$, entonces $Kp \in H^1(\Gamma)$, y por lo tanto aplicando K, aumentamos la regularidad en una derivada.

Estimación de error para el operador de proyección P_h:

$$\|p - P_h p\| \leq Ch\|p\|_{H^1(\Gamma)} \qquad (10.47)$$

Como W_h consiste de funciones constantes por tramos, tenemos :

$$P_h p|_{K_i} = \int_{K_i} p \, d\gamma / \int_{K_i} d\gamma = \text{valor medio de p en } K_i\text{=, i=1,…,M.}$$

Combinando (10.46) y (10.47), resulta :

$$\|(K - K_h)p\| = \|(I - P_h)Kp\| \leq Ch\|Kp\|_{H_1(\Gamma)} \leq Ch\|p\| \quad \forall p \in L_2(\Gamma) \qquad (10.48)$$

MEF aplicado a la ecuación de Fredholm de 2º tipo (cont.)

Lema: ∃ ctes. C y h_0 t.q. para $h \le h_0$ y $p \in L_2(\Gamma)$

$$\|p\| \leq C\|(I-K_h)p\|$$

Demo.:

$$\left.\begin{array}{l} \|q\| \leq C\|f\| \equiv C\|(I-K)q\| \\ \|(K-K_h)p\| \leq Ch\|p\| \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \|p\| \leq C\|(I-K)p\| = C\|(I-K_h)p-(K-K_h)p\| \\ \leq C\|(I-K_h)p\| + C\|(K-K_h)p\| \\ \leq C\|(I-K_h)p\| + C_1 h\|p\|, \end{array}$$

$$\Rightarrow (1-C_1 h)\|p\| \leq C\|(I-K_h)p\|$$

El lema queda demostrado tomado, por ej., $C_1 h_0 = 1/2$.

Nota: usando este lema, se puede probar que el número de condición de la matriz $(D-B)^T(D-B)$ está acotado independientemente de h, y en consecuencia, el sistema lineal (10.43) puede resolverse eficientemente usando, por ej., el método de gradientes conjugados aplicado a la forma en mínimos cuadrados de (10.43) :

$$(D-B)^T(D-B)\xi = (I-B)^T l$$

MEF aplicado a la ecuación de Fredholm de 2º tipo (cont.)

Teorema: $\exists$ ctes. C y h_0 t.q., si $q \in H^1(\Gamma)$ y $q^h \in W_h$, entonces para $h \leq h_0$:

$$||q-q^h|| \leq Ch$$

Demo.:

$$\left.\begin{array}{c}(I-K)q=f \\ (I-K_h)q^h=P_h f\end{array}\right\} \Rightarrow (I-K_h)\,(q-q^h)=(K-K_h)q+(I-P_h)f$$

Usando el lema anterior :

$$||q-q^h|| \leq C(||K-K_h)q||+||(I-P_h)f||)$$

El estimador buscado se obtiene usando :

$$||(K-K_h)p|| \leq Ch||p||$$

$$||p-P_h p|| \leq Ch||p||_{H^1(\Gamma)}$$

MEB aplicado a la ecuación de Laplace

Sean φ y ψ dos funciones suaves en Ω, y $x\in\Omega$ un punto fijo arbitrario. Luego :

$$\nabla\cdot\left[\phi(z)\nabla\psi(x,z)\right]=\phi(z)\Delta\psi(x,z)+\nabla\phi(z)\cdot\nabla\psi(x,z)$$
$$\nabla\cdot\left[\psi(x,z)\nabla\phi(z)\right]=\psi(z)\Delta\phi(x,z)+\nabla\psi(x,z)\cdot\nabla\phi(z)$$
$$x,z\in\Omega$$

Restando ambas ecuaciones e integrando s/Ω :

$$\int_\Omega\left[\phi(z)\Delta\psi(x,z)-\psi(x,z)\Delta\phi(z)\right]dv(z)=\int_\Omega\left\{\nabla\cdot\left[\phi(z)\nabla\psi(x,z)\right]-\nabla\cdot\left[\psi(x,z)\nabla\phi(z)\right]\right\}dv(z)$$

Teorema de Green $\Rightarrow$ $$=\int_\Gamma\left[\phi(y)\nabla\psi(x,y)-\psi(x,y)\nabla\phi(y)\right]\cdot n(y)ds(y)$$

$$=\int_\Gamma\left[\phi(y)\frac{\partial\psi}{\partial n}(x,y)-\psi(x,y)\frac{\partial\phi}{\partial n}(y)\right]ds(y)$$

$$x,z\in\Omega,\ y\in\Gamma$$

Solución fundamental de la ecuación de Laplace

Se llama solución fundamental de la ec. de Laplace a la solución de la ecuación

$$\Delta\psi(x,z)+\delta(x-z)=0 \qquad x,z\in R^3,\ x \text{ fijo.}$$

donde δ(x–z) juega el rol de una fuente unitaria aplicada en x. Luego, la solución fundamental tiene la forma

$$\psi(x,z)=\frac{1}{4\pi|x-z|}.$$

Ecuación integral en los puntos internos

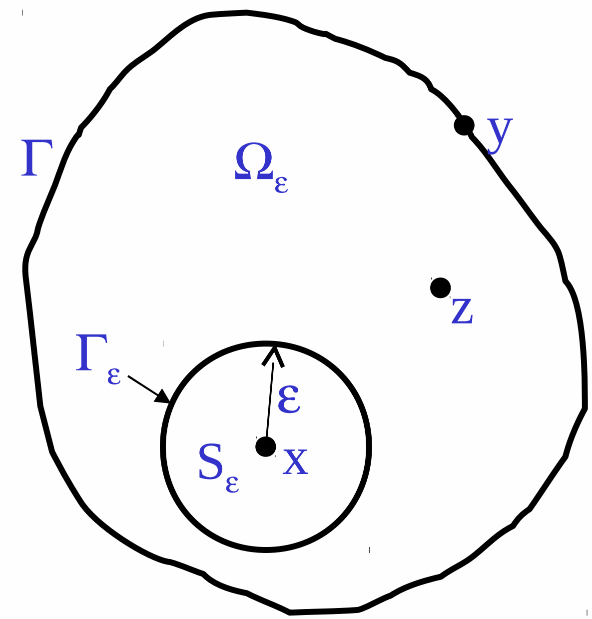
Consideremos la ecuación integral

$$\int_{\Omega} \left[\phi(z)\Delta\psi(x,z) - \psi(x,z)\Delta\phi(z)\right] dv(z) = \int_{\Gamma} \left[\phi(y)\frac{\partial\psi}{\partial n}(x,y) - \psi(x,y)\frac{\partial\phi}{\partial n}(y)\right] ds(y)$$

donde las funciones ϕ (incógnita) y ψ (solución fundamental) satisfacen

$$\Delta\phi(z) = p(z) \qquad z \in \bar{\Omega}, \quad x \in \Omega = \bar{\Omega} - \Gamma$$

$$\Delta\psi(x,z) + \delta(x-z) = 0$$



Integramos sobre $=\Omega - S_\varepsilon$ y hacemos $\varepsilon \to 0$:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Omega_\varepsilon} \phi(z)\Delta\psi(x,z)dv(z) + \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Omega_\varepsilon} \psi(x,z)\Delta\phi(z)dv(z)$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \left[\phi(y)\frac{\partial\psi}{\partial n}(x,y) - \psi(x,y)\frac{\partial\phi}{\partial n}(y)\right] ds(y)$$

$$+ \int_{\Gamma} \left[\phi(y)\frac{\partial\psi}{\partial n}(x,y) - \psi(x,y)\frac{\partial\phi}{\partial n}(y)\right] ds(y)$$

$$z \in \Omega_\varepsilon, \quad x \in S_\varepsilon, \quad y \in \Gamma \text{ o } \Gamma_\varepsilon$$

Ecuación integral en los puntos internos (cont.)

$$x \neq z \;\forall x,z \in \Omega_\varepsilon \Rightarrow \Delta\psi(x,z) = 0 \;\forall x,z \in \Omega_\varepsilon \Rightarrow \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Omega_\varepsilon} \phi(z)\Delta\psi(x,z)\,dv(z) = 0$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Omega_\varepsilon} \psi(x,z)\Delta\phi(z)\,dv(z) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Omega_\varepsilon} \psi(x,z)p(z)\,dv(z) = \int_{\Omega} \psi(x,z)p(z)\,dv(z)$$

$$\psi = \frac{1}{4\pi|x-z|}, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial n} = \frac{\partial\psi}{\partial|x-z|}\frac{\partial|x-z|}{\partial n} = -\frac{1}{4\pi r^2}(-1) = \frac{1}{4\pi r^2}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial\psi}{\partial n}\right|_{\Gamma_\varepsilon} = \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \Rightarrow \frac{1}{\mathrm{area}(\Gamma_\varepsilon)}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \phi(y)\frac{\partial\psi}{\partial n}(x,y)\,ds(y) = \underbrace{\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} [\phi(y)-\phi(x)]\frac{\partial\psi}{\partial n}(x,y)\,ds(y)}_{=0} + \phi(x)\underbrace{\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial\psi}{\partial n}(x,y)\,ds(y)}_{=1} = \phi(x)$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \psi(x,y)\frac{\partial\phi}{\partial n}(y)\,ds(y) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{4\pi\varepsilon} \underbrace{\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial\phi}{\partial n}(y)\,ds(y)}_{=0} = 0$$

$$\phi(x) = \int_{\Gamma} \left[\phi(y)\frac{\partial\psi}{\partial n}(x,y) - \psi(x,y)\frac{\partial\phi}{\partial n}(y)\right] ds(y) - \int_{\Omega} \psi(x,z)p(z)\,dv(z) \qquad x,z \in \Omega,\; y \in \Gamma$$

Ecuación integral en los puntos sobre la frontera

Integramos sobre $\Omega_\varepsilon = \Omega - S_\varepsilon$ y hacemos $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\int_{\Omega} \psi(x,z)p(z)dv(z) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon^e} \left[\phi(y)\frac{\partial \psi}{\partial n}(x,y) - \psi(x,y)\frac{\partial \phi}{\partial n}(y) \right] ds(y)$$

$$+ \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon^i} \left[\phi(y)\frac{\partial \psi}{\partial n}(x,y) - \psi(x,y)\frac{\partial \phi}{\partial n}(y) \right] ds(y) \qquad x,z \in \Omega,\ y \in \Gamma$$