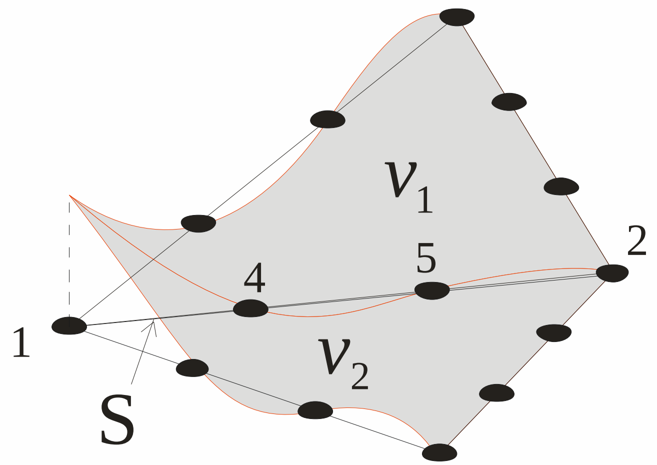


Introducción al Método de los Elementos Finitos

Parte 1

Introducción al MEF para problemas elípticos

Alberto Cardona, Víctor Fachinotti
Cimec-Intec (UNL/Conicet), Santa Fe, Argentina

1. Introducción al MEF para problemas elípticos

- Problemas elípticos “modelo” y solución por MEF
  - Problema simple 1-D
  - Generalización a 2-D
- Propiedades básicas del método

(1.1) Formulación variacional del problema 1-D

- Sea el problema de valores de frontera:

$$(D) \qquad \begin{aligned} -u'' &= f(x) \quad , \qquad 0 < x < 1 \\ u(0) &= u(1) = 0 \end{aligned}$$

donde $u' = \dfrac{du}{dx}$; $f(x)$ es una función continua dada.

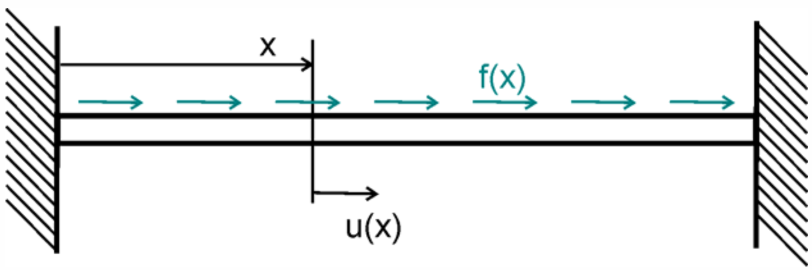
- Integrando 2 veces, vemos que el problema tiene solución única *u*.

- (D) puede describir cualquiera de los siguientes problemas de Mecánica del continuo:

  A. Barra elástica
  B. Cuerda elástica
  C. Conducción del calor en una barra

A) Barra elástica

Barra elástica sujeta en ambos extremos y sometida a carga axial de intensidad *f(x)*



Bajo hipótesis de pequeños desplazamientos y material elástico lineal:

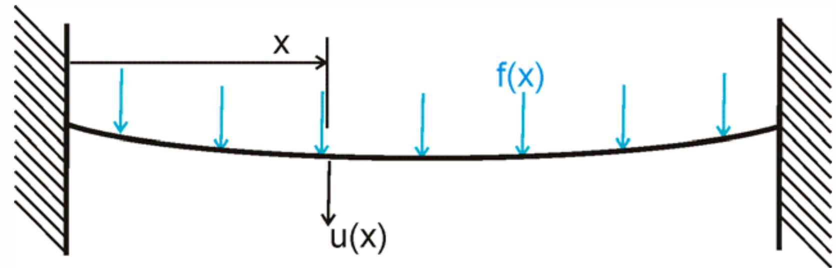
$\sigma = Eu'$	Ley de Hooke
$-\sigma' = f$	Ec. de equilibrio
$u(0) = u(1) = 0$	Cond. de borde

donde *E* es el módulo de elasticidad. Asumiendo *E=1*

$$\text{(D)} \quad \begin{array}{l} -u'' = f(x) \quad , \qquad 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{array}$$

B) Cuerda elástica

Cuerda elástica sujeta en ambos extremos, con tensión unitaria y sometida a carga transversal de intensidad *f(x)*

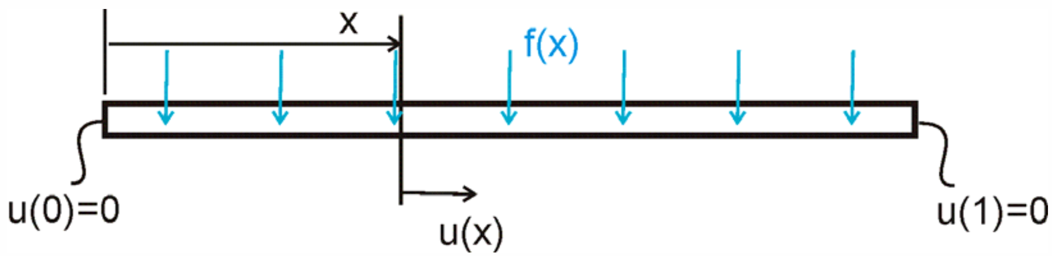


Bajo hipótesis de pequeños desplazamientos y material elástico lineal:

$$(D) \quad \begin{aligned} -u'' &= f(x) \quad , \qquad 0 < x < 1 \\ u(0) &= u(1) = 0 \end{aligned}$$

C) Conducción de calor en una barra

Barra sometida a fuente de calor distribuida *f(x)*, con temperatura nula en ambos extremos.



Bajo condiciones estacionarias y material lineal:

$-q = ku'$	Ley de Fourier
$-q' = f$	Ec de equilibrio
$u(0) = u(1) = 0$	Cond de borde

donde *k* es el conductividad. Asumiendo *k=1*

$$\text{(D)} \quad \begin{array}{ll} -u'' = f(x), & 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) = 0 & \end{array}$$

Problemas de minimización y variacional

Veremos que la solución al problema (D) es también solución del problema de minimización (M) y de un problema variacional (V)

Para formular (M) y (V) introducimos nueva notación.

1. Producto interno *(v,w)*:

$$(v,w) = \int_0^1 v(x)\, w(x)\, dx$$

para funciones reales acotadas continuas por tramos *v*, *w*.

2. Espacio lineal *V*:

$$\begin{aligned} V = \{ v \,/\, v & \text{ funcion continua sobre } [0,1] \quad , \\ & v' \text{ es continua p/tramos y acotada en } [0,1], \\ & v(0) = v(1) = 0 \qquad \} \end{aligned}$$

3. Funcional lineal $F : V \to \mathbb{R}$

$$F(v) = \frac{1}{2}(v',v') - (f,v)$$

Problemas de minimización y variacional (cont)

Problema (M):

$$\text{(M)} \qquad \text{Hallar } u \in V \quad / \quad F(u) \leq F(v) \ \forall\, v \in V$$

Problema (V):

$$\text{(V)} \qquad \text{Hallar } u \in V \quad / \quad (u',v') = (f,v) \ \ \forall\, v \in V$$

Nota: en el contexto de los problemas (A) y (B)

$F(v)$ es la energía potencial total asociada al desplazamiento v

$\frac{1}{2}(v',v')$ es la energía elástica interna

(f,v) es el potencial de cargas

Problema (M): principio de mínima energía potencial en Mecánica

Problema (V): principio de trabajos virtuales en Mecánica

Veremos la equivalencia de los problemas (D), (V) y (M)

La solución de (D) es solución de (V)

1. Multiplicamos $-u'' = f$ por una función arbitraria $v \in V$ (func. de test). Integramos sobre *(0,1)*:

$$-(u'', v) = (f, v)$$

2. Integramos por partes el lado izquierdo, y usamos *v(0)=v(1)=0*:

$$-(u'', v) = -u'(1)v(1) + u'(0)v(0) + (u', v') = (u', v')$$

3. Al ser *v* arbitraria:

$$(u', v') = (f, v) \qquad \forall\, v \in V \tag{1.1}$$

o sea, *u* es solución de (V)

Los problemas (M) y (V) tienen la misma solución

1. Sea *u* solución de (V). Sea $v \in V \;\; \text{y} \;\; w = v - u \;\; / \;\; v = u + w \;\wedge\; w \in V.$

   Luego:
$$F(v) = F(u+w) = \frac{1}{2}\big(u'+w', u'+w'\big) - (f, u+w) =$$
$$= \underbrace{\frac{1}{2}\big(u', u'\big) - (f, u)}_{F(u)} + \underbrace{(u', w') - (f, w)}_{=0 \text{ por } (1.1)} + \underbrace{\frac{1}{2}\big(w', w'\big)}_{\geq 0} \geq F(u)$$

   o sea, *u* es solución del problema (M).

- Sea *u* solución de (M). Luego $\forall\, v \in V \;\; \text{y} \;\; \varepsilon \in \mathbb{R} : \quad F(u) \leq F(u + \varepsilon v) \qquad (*)$

   Definiendo:
$$g(\varepsilon) \triangleq F(u+\varepsilon v) = \frac{1}{2}(u', u') + \varepsilon (u', v') + \frac{\varepsilon^2}{2}(v', v') - (f, u) - \varepsilon (f, v)$$

   Por (*) $g(\varepsilon)$ tiene un mínimo en $\varepsilon = 0$. Luego :
$$g'(0) \;=\; (u', v') - (f, v) \underbrace{=}_{g(\varepsilon)\ \text{min en } 0} 0$$

   o sea, *u* es solución del problema (V).

La solución de (V) es única

1. Sean u_1, u_2 soluciones de (V): $u_1, u_2 \in V$ y

$$(u'_1, v') = (f, v) \qquad \forall \quad v \in V$$
$$(u'_2, v') = (f, v) \qquad \forall \quad v \in V$$

2. Sustrayendo, y eligiendo $v = u_1 - u_2 \in V$

$$\int_0^1 (u'_1 - u'_2)^2 \, dx = 0$$

lo cual muestra que:

$$u'_1(x) - u'_2(x) = (u_1 - u_2)'(x) = 0 \qquad \forall \; x \in (0,1)$$

3. Usando la condición de borde:

$$u_1(0) = u_2(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad u_1(x) = u_2(x) \quad \forall \; x \in [0,1]$$

o sea, la solución a (V) es única.

Equivalencia de soluciones a (D), (V) y (M)

1. Hasta ahora hemos visto que si *u* es solución a (D), luego es solución a los problemas equivalentes (V) y (M) :

$$(D) \quad \Rightarrow \quad (V) \quad \Leftrightarrow \quad (M)$$

   Mostraremos que si *u* es solución de (V), luego *u* satisface (D).

2. Sea

$$u \in V \quad / \quad \int_0^1 u'v'\,dx - \int_0^1 fv\,dx = 0 \quad \forall \quad v \in V$$

   Asumimos u'' existe y es continua. Integ.p/partes y usando $v(0) = v(1) = 0$

$$-\int_0^1 u''v\,dx - \int_0^1 fv\,dx + u'v\Big|_0^1 = 0$$

$$-\int_0^1 (u''+f)v\,dx = 0 \qquad \forall \qquad v \in V$$

   Como $(u''+f)$ es continua, luego:

$$(u''+f)(x) = 0 \qquad 0 < x < 1$$

   o sea, *u* es solución de (D).

Equivalencia de soluciones (D), (V) y (M)

Resumiendo: Hemos demostrado que

1. La solución de la ecuación diferencial es solución de un problema variacional
2. La solución del problema variacional es también solución de un problema de minimización y viceversa
3. La solución del problema variacional es única
4. Si se cumple un requisito de regularidad (u” continua), la solución del problema variacional es también solución de la ecuación diferencial

Notar: Las soluciones a los problemas variacional y de minimización vistos hasta ahora tienen dimensión infinita, no pueden hallarse en computadora.

Veremos ahora cómo el MEF construye aproximaciones de dimensión finita a las soluciones de (V) y (M).

(1.2) MEF p/problema modelo c/funciones lineales p/tramos

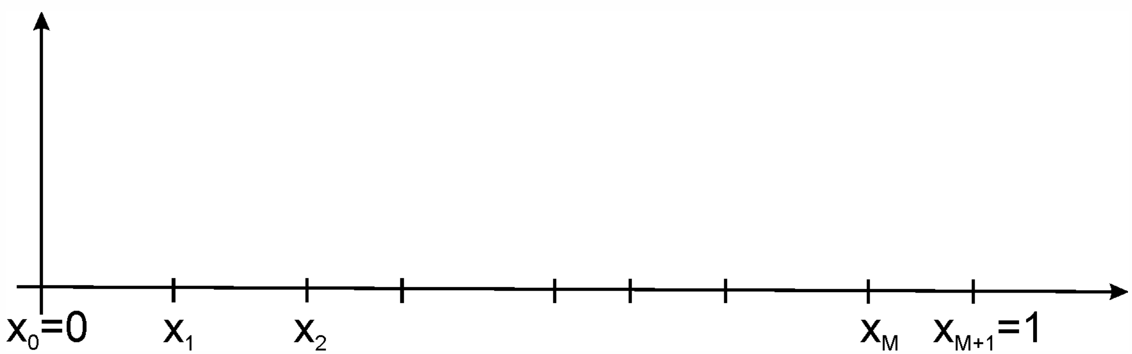
1. Construiremos un subespacio de dimensión finita V_h del espacio V, consistente en funciones lineales p/tramos.
2. Sea

$$0 < x_0 < x_1 \cdots x_M < x_{M+1} = 1$$

una partición del intervalo (0,1) en subintervalos $I_j = (x_{j-1}, x_j)$ de longitud

$$h_j = x_j - x_{j-1}, \quad j = 1, \cdots M+1$$

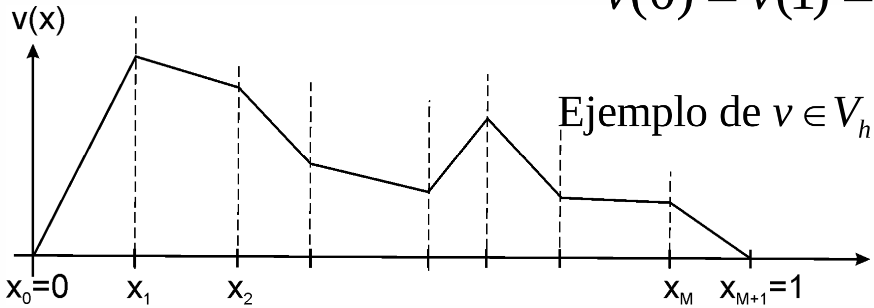
La cantidad $h = \max h_j$ es una medida de la densidad de la partición.



Subespacio de funciones lineales por tramos

1. Sea

$$V_h = \{ v \,/\, v \text{ es lineal en cada subintervalo } I_j$$
$$v \text{ es continua en el } [0,1]$$
$$v(0) = v(1) = 0 \quad \}$$

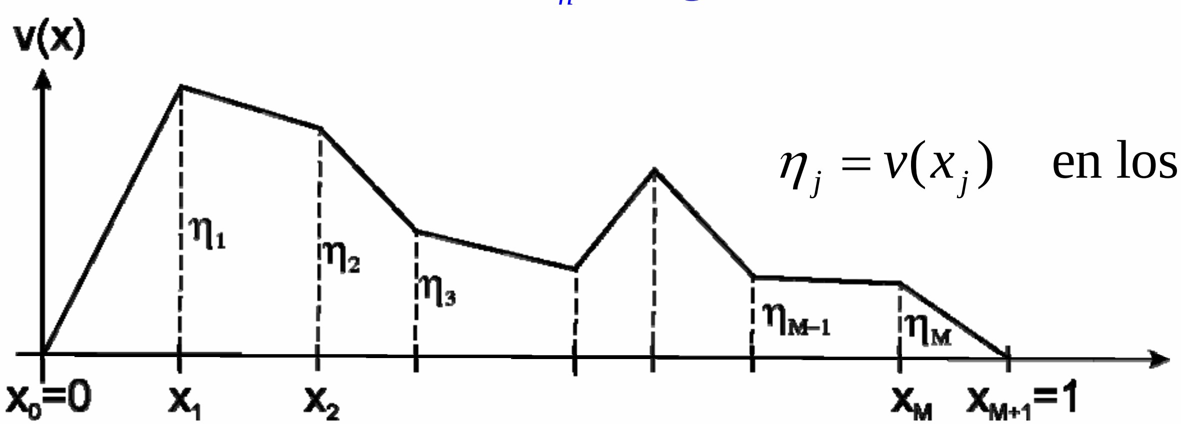


Ejemplo de $v \in V_h$

Notar que $V_h \subset V$

2. Para describir $v \in V_h$ elegimos los valores

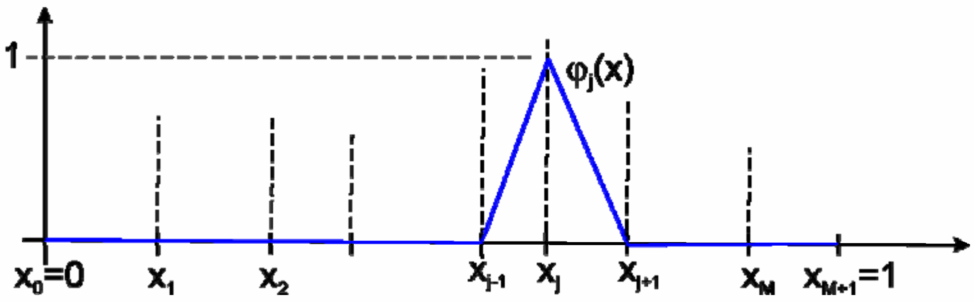
$$\eta_j = v(x_j) \quad \text{en los nodos} \quad x_j, \quad j = 1, \cdots M$$



Subespacio de funciones lineales por tramos

3. Definimos funciones de base $\varphi_j(x) \in V_h, \quad j = 1, \cdots M$

$$\varphi_j(x_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases} \qquad i, j = 1, \cdots M$$



$\varphi_j(x)$: función continua lineal por tramos que verifica la propiedad *delta*.

4. Toda función $v \in V_h$ puede ser escrita en forma única como combinación lineal de las funciones de base $\varphi_i(x)$:

$$v(x) = \sum_{i=1}^{M} \eta_i \, \varphi_i(x) \qquad x \in [0,1] \quad , \quad \eta_i = v(x_i)$$

Luego, V_h es un espacio vectorial lineal de dimensión M con base: $\quad \{\varphi_i\}_{i=1}^{M}$

MEF para problema modelo (D)

1. Formulación como problema de minimización discreto:

$(\mathrm{M_h})$ Hallar $u_h \in V_h \quad / \quad F(u_h) \leq F(v) \ \ \forall \ \ v \in V_h$ (método Ritz)

2. De la manera ya vista, es equivalente al problema variacional discreto:

(1.2) $(\mathrm{V_h})$ Hallar $u_h \in V_h \quad / \quad (u_h', v') = (f, v) \ \ \forall \ \ v \in V_h$ (método Galerkin)

3. Notar, que si $u_h \in V_h$ satisfface (1.2), luego en particular

(1.3) $$(u_h', \varphi_j') = (f, \varphi_j) \qquad j = 1, \cdots M$$

(además, si se cumple (1.3), luego vale (1.2) $\forall \, v \in V_h$)

4. Siendo $u_h(x) = \sum_{i=1}^{M} \xi_i \, \varphi_i(x) \quad , \quad \xi_i = u_h(x_i)$, escribimos (1.3) en la forma:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{M} \xi_i \left(\varphi_i', \varphi_j' \right) = \left(f, \varphi_j \right) \qquad j = 1, \ldots, M}$$

Sistema de M ecuaciones algebraicas lineales con M incógnitas ξ_i

Forma matricial

(1.5) $\mathbf{A} \quad \xi \quad = \quad \mathbf{b}$

$$\begin{bmatrix} (\varphi_1',\varphi_1') & (\varphi_1',\varphi_2') & \cdots & (\varphi_1',\varphi_M') \\ (\varphi_2',\varphi_1') & (\varphi_2',\varphi_2') & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ (\varphi_M',\varphi_1') & \cdots & & (\varphi_M',\varphi_M') \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_M \end{Bmatrix}$$

A : matriz de rigidez

b : vector de cargas

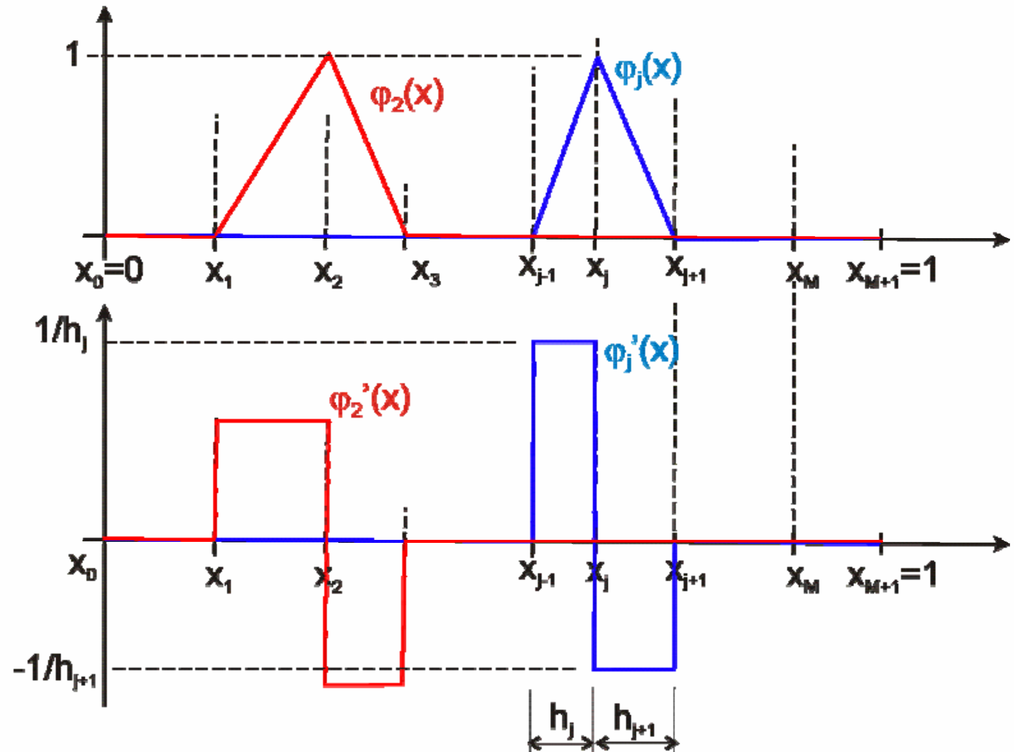
$$b_i = (f, \varphi_i)$$

Los elementos $a_{ij} = \left(\varphi_i', \varphi_j'\right)$ pueden calcularse fácilmente.

Notar:

$$\left(\varphi_i', \varphi_j'\right) = 0 \qquad \text{si} \quad |i-k| > 1$$

Luego A es tridiagonal



Sistema de ecuaciones

Entonces:

$$a_{jj} = (\varphi_j{}', \varphi_j{}') = \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{1}{h_j^2}\, dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{1}{h_{j+1}^2}\, dx = \frac{1}{h_j} + \frac{1}{h_{j+1}} \qquad j = 1, \cdots M$$

$$a_{j(j-1)} = (\varphi_j{}', \varphi_{j-1}{}') = -\int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{1}{h_j^2}\, dx = -\frac{1}{h_j} \qquad j = 2, \cdots M$$

1. **A** es simétrica pues: $\left(\varphi_i{}', \varphi_j{}'\right) = \left(\varphi_j{}', \varphi_i{}'\right)$
2. **A** es definida positiva pues siendo $v(x) = \sum_{i=1}^{M} \eta_i\, \varphi_i(x)$ luego:

$$\sum_{i,j=1}^{M} \eta_i \left(\varphi_i{}', \varphi_j{}'\right) \eta_j = \left(\sum_{i=1}^{M} \eta_i\, \varphi_i{}', \sum_{j=1}^{M} \eta_j\, \varphi_j{}' \right) = \left(v', v'\right) \geq 0 \qquad \begin{cases} > 0 & \text{casi siempre} \\ = 0 & \text{solo si} \quad v' = 0 \end{cases}$$

Como $v(0) = 0$ luego $(v', v') = 0 \iff v = 0$ o sea: $\eta_j = 0 \quad j = 2, M$

Entonces:

$$\boldsymbol{\eta}^{\mathbf{T}} \mathbf{A} \boldsymbol{\eta} > 0 \quad \forall \quad \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^M, \boldsymbol{\eta} \neq 0$$

$\boxed{\textbf{A} \text{ simétrica y definida positiva}}$

Propiedades sistema de ecuaciones (1.5)

1. **A** sim > 0 $\Rightarrow$ **A** es no singular y el sistema (1.5) tiene solución única

2. **A** es rala, o sea pocos elementos de **A** son distintos de cero.

   Esto se debe a que φ_j tiene soporte local ($\varphi_j \neq 0$ en un intervalo pequeño, interfiriendo con pocas funciones φ_k).

3. Si la partición es uniforme, $h_j = h = \dfrac{1}{M+1}$ y logramos

$$\mathbf{A} = \frac{1}{h}\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \mathbf{0} \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 2 & -1 \\ \mathbf{0} & & & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

(1.3) Estimación de error del MEF para problema modelo

Sean u solucion de (D) $\left\{ \begin{array}{ll} -u'' = f(x) \quad , & 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) = 0 & \end{array} \right.$

u_h solucion de (V_h) Hallar $u_h \in V_h \quad / \quad (u_h', v') = (f, v) \quad \forall \; v \in V_h$

Recordando que

$$(u', v') = (f, v) \qquad \forall \; v \in V$$

y como $V_h \subset V$

$$\boxed{\left((u - u_h)', v' \right) = 0 \qquad \forall \; v \in V}$$

Ecuación del error

donde $u - u_h$ es el error de la aproximación

Veremos que en cierto modo, u_h es la mejor aprox posible a la sol exacta u

Norma asociada al producto escalar (,): $\|w\| \triangleq (w, w)^{1/2} = \left(\int_0^1 w^2 \, dx \right)^{1/2}$

Desigualdad de Cauchy:

$$\left| (v, w) \right| \leq \|v\| \, \|w\|$$

Estimación de error del MEF para problema modelo

Teo 1.1) $$\boxed{\left\|(u-u_h)'\right\| \le \left\|(u-v)'\right\| \qquad \forall\, v \in V_h}$$

D) Sean $v \in V_h$ arbitraria y $w = u_h - v \in V_h$. Reemplazando *v* por *w* en la ecuación del error:

$$\left\|(u-u_h)'\right\|^2 = \left((u-u_h)',(u-u_h)'\right) + \underbrace{\left((u-u_h)',w'\right)}_{=0 \quad \text{ecuacion del error}} = \left((u-u_h)',(u-u_h+w)'\right) =$$

$$= \left((u-u_h)',(u-v)'\right) \underbrace{\le}_{\text{Cauchy}} \left\|(u-u_h)'\right\| \left\|(u-v)'\right\| \qquad \forall\, v \in V$$

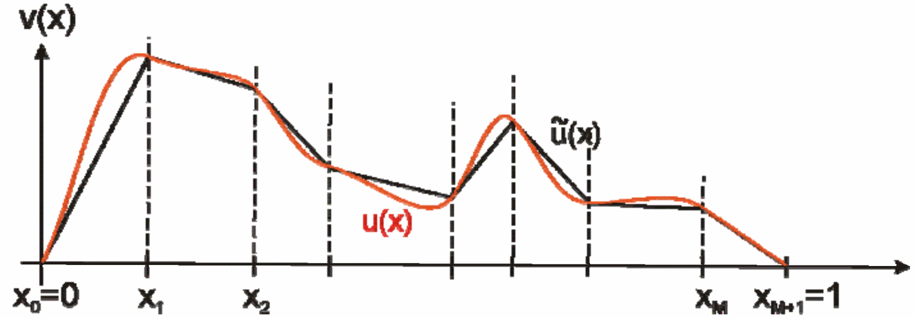
Luego $$\left\|(u-u_h)'\right\| \le \left\|(u-v)'\right\| \qquad \forall\, v \in V_h \qquad \blacksquare$$

Para lograr una estimación cuantitativa del error, usamos una $\tilde{u}_h \in V_h$ elegida convenientemente. Por el resultado anterior:

$$\left\|(u-u_h)'\right\| \le \left\|(u-\tilde{u}_h)'\right\|$$

Estimación del error

Haremos $\tilde{u}_h \in V_h$ interpolante de u , o sea:



$$\tilde{u}_h(x_j) = u(x_j) \qquad j = 0, \cdots M+1$$

En *Análisis Numérico*, se ve que:

$$\left| u'(x) - \tilde{u}_h'(x) \right| \le h \max_{0 \le y \le 1} \left| u''(y) \right| \qquad \left| u(x) - \tilde{u}_h(x) \right| \le \frac{h^2}{8} \max_{0 \le y \le 1} \left| u''(y) \right|$$

Luego, por el teorema y (1.12):

$$\boxed{\left\| \left(u - u_h\right)' \right\| \le h \max_{0 \le y \le 1} \left| u''(y) \right|}$$

Mediante análisis detallado, se puede mostrar :

$$\boxed{\left\| \left(u - u_h\right) \right\| \le o\left(h^2\right)}$$

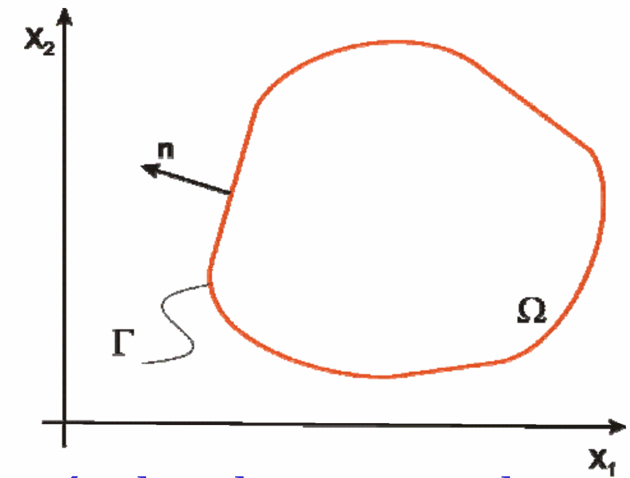
Notar:

- No necesitamos construir explícitamente $\tilde{u}_h$, sino sólo la estimación de error del interpolante.
- u' es una deformación o tensión, y tiene interés práctico la estimación de su error

(1.4) MEF para la ecuación de Poisson

Sea el problema:

$$(D)\quad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma \end{cases}$$



con

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$$

Puede corresponder a muchos problemas físicos: conducción de calor, potencial electromagnético, desplazamiento de una membrana fija en la frontera, etc.

Teorema de la divergencia:

$$\boxed{\int_\Omega \text{div } \mathbf{A}\; d\mathbf{x} = \int_\Gamma \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\; ds}$$

con:

$$\mathbf{A} = \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} \qquad \text{div } \mathbf{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} \qquad \mathbf{n} = \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{Bmatrix}$$

Fórmula de Green:

$$\boxed{\int_\Omega \nabla v\cdot\nabla w\; d\mathbf{x} = \int_\Gamma v\left(\nabla w\cdot\mathbf{n}\right) ds - \int_\Omega v\;\Delta w\; d\mathbf{x}}$$

Formulación variacional

1. Si u satisface (D), luego es solución de:

$$\boxed{\text{(V)} \qquad \text{Hallar } u \in V \quad / \quad a(u,v) = (f,v) \quad \forall \ v \in V}$$

con $\quad a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, d\mathbf{x}$ (forma bilineal) $\qquad (f,v) = \int_\Omega f \, v \, d\mathbf{x}$

$$V = \left\{ v : \text{(i) } v \text{ es continua en } \Omega \text{ ; (ii) } \frac{\partial v}{\partial x_1}, \frac{\partial v}{\partial x_2} \text{ continuas a trozos en } \Omega \text{ ; (iii) } v = 0 \text{ sobre } \Gamma \right\}$$

D) Multiplicamos (D) por una $v \in V_h$ arbitraria e integramos

$$(f,v) = -\int_\Omega v \, \Delta u \, d\mathbf{x} = \underbrace{-\int_\Gamma v \left(\nabla u \cdot \mathbf{n} \right) ds}_{=0 \ (v=0 \text{ en } \Gamma)} + \underbrace{\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, d\mathbf{x}}_{a(u,v)} = a(u,v)$$

■

2. Como en el caso 1-D, si u suficientemente regular : $\boxed{(D) \quad \Leftrightarrow \quad (V) \quad \Leftrightarrow \quad (M)}$

con

$$\boxed{\text{(M)} \qquad \text{Hallar } u \in V \quad / \quad F(u) \le F(v) \quad \forall \ v \in V}$$

Energía potencial total:

$$F(v) = \frac{1}{2} a(v,v) - (f,v)$$

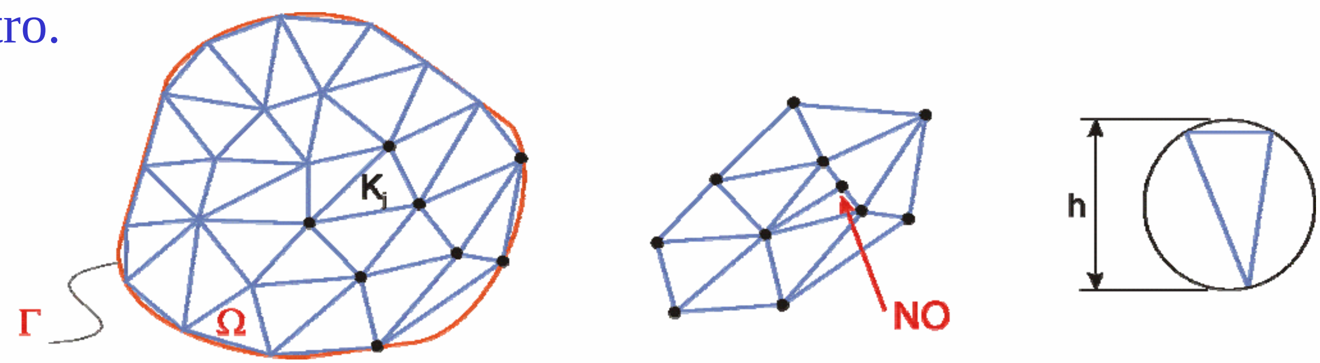
Subespacio de funciones lineales por tramos

1. Construiremos un subespacio de dimensión finita $V_h \subset V$ consistente en funciones lineales p/tramos.
2. Asumimos Γ poligonal. Sea una triangulación de Ω : $T_h = K_1, K_2, \cdots K_m$ con triángulos no superpuestos K_i /

$$\Omega = K_1 \cup K_2 \cup \cdots \cup K_m = \bigcup_{K \in T_h} K$$

$$\bigcap_{K \in T_h} K = \{\varnothing\}$$

y de forma que no haya ningún vértice de algún triángulo ubicado sobre el lado de otro.



El parámetro de malla $h = \max_{K \in T_h} \operatorname{diam}(K)$ mide la densidad de triangulación.

Subespacio de funciones lineales por tramos (cont)

3. Definimos

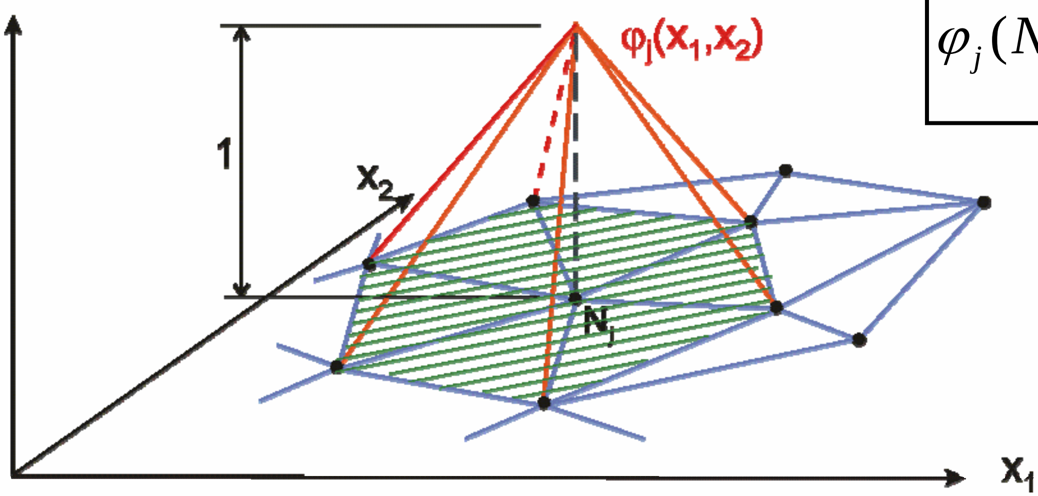
$$V_h = \{ v : \text{(i) } v \text{ es continua en } \Omega \text{ ; (ii) } v|_K \text{ es lineal para } K \in T_h \text{ ; (iii) } v = 0 \text{ sobre } \Gamma \}$$

Notar $V_h \subset V$

4. Parámetros p/def. $v \in V_h$: valores $v(N_i)$ de v en los nodos N_i $i = 1, \cdots M$ de T_h
   Excluimos los nodos de frontera pues $v = 0$ sobre Γ.

5. Def. funciones de base : $\varphi_j(\mathbf{x}) \in V_h$ /

$$\boxed{\varphi_j(N_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \qquad i, j = 1, \cdots M}$$



Soporte de $\varphi_j(\mathbf{x}) = \{ \mathbf{x} \,/\, \mathbf{x} \in T_h \text{ con nodo } N_j \}$

Subespacio de funciones lineales por tramos (cont)

6. Toda función $v \in V_h$ tiene luego la representación:

$$v(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{M} \eta_i \, \varphi_i(\mathbf{x}) \qquad \mathbf{x} \in \Omega \quad , \quad \eta_i = v(N_i)$$

7. Formulamos luego el siguiente MEF p/el problema de Poisson (D):

$$(\mathrm{V_h}) \qquad \text{Hallar } u_h \in V_h \quad / \quad a(u_h, v) = (f, v) \quad \forall \ v \in V_h$$

8. De manera similar al caso 1-D, este problema es equivalente a resolver el sistema de ecuaciones:

$$\boxed{\mathbf{A} \quad \xi \quad = \quad \mathbf{b}}$$

donde ahora: $a_{ij} = a\left(\varphi_i, \varphi_j\right) = \int_\Omega \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j \; d\mathbf{x}$ $\qquad b_i = (f, \varphi_i) = \int_\Omega f \; \varphi_i \; d\mathbf{x}$

$$\xi_i = u_h(N_i)$$

9. Nuevamente **A** es simétrica, definida positiva y no singular, con lo cual el sistema de ecuaciones tiene solución única. Además, **A** es rala pues:

$$a_{ij} = 0 \qquad \text{si} \quad N_i, N_j \notin \text{ al mismo triángulo}$$

Noción de *mejor aproximación*

1. $u_h \in V_h$ es la mejor aproximación a la solución u en el sentido:

$$\boxed{\|\nabla u - \nabla u_h\| \le \|\nabla u - \nabla v\| \qquad \forall\, v \in V_h}$$

con $\|v\| \triangleq a(v,v)^{1/2} = \left(\int_\Omega |\nabla v|^2 \, d\mathbf{x}\right)^{1/2}$

2. En particular, si encontramos $\tilde{u}_h \in V_h$ tal que

$$\|\nabla u - \nabla u_h\| \le \|\nabla u - \nabla \tilde{u}_h\|$$

podremos probar convergencia. Ejemplo, usando el interpolante

$$\tilde{u}_h(N_j) = u(N_j) \qquad j = 1, \cdots M$$

tendremos: $\boxed{\|\nabla u - \nabla \tilde{u}_h\| \le Ch}$ con $C>0$ cte independiente de h, que depende de:

- tamaño derivadas segundas de u
- menor ángulo de los triángulos $K \in T_h$

3. Puede mostrarse luego:

$$\boxed{\|u - u_h\| \le \left(\int_\Omega (u-u_h)^2 \, d\mathbf{x}\right)^{1/2} \le Ch^2}$$

4. Así, si u es sufic. regular, el error y su gradiente tienden a cero con $h \to 0$

Cálculo matriz rigidez

1. Los elementos $a_{ij} = a\left(\varphi_i, \varphi_j\right)$ son calculadas por suma de contribuciones de los distintos triángulos:

$$a\left(\varphi_i, \varphi_j\right) = \int_\Omega \nabla\varphi_i \cdot \nabla\varphi_j \, d\mathbf{x} = \sum_{K \in T_h} \int_K \nabla\varphi_i \cdot \nabla\varphi_j \, d\mathbf{x} = \sum_{K \in T_h} a_K\left(\varphi_i, \varphi_j\right)$$

Notar que

$$a_K\left(\varphi_i, \varphi_j\right) \neq 0 \qquad \text{sólo si} \quad N_i, N_j \in K$$

2. Sean N_i, N_j y N_k los nodos del triángulo *K*. Luego, la matriz de rigidez del elemento *K*:

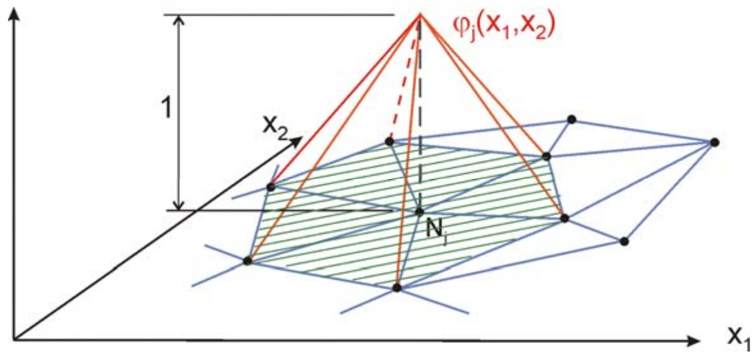
$$\mathbf{A}_K \triangleq \begin{bmatrix} a_K\left(\varphi_i, \varphi_i\right) & a_K\left(\varphi_i, \varphi_j\right) & a_K\left(\varphi_i, \varphi_k\right) \\ & a_K\left(\varphi_j, \varphi_j\right) & a_K\left(\varphi_j, \varphi_k\right) \\ \text{sim.} & & a_K\left(\varphi_k, \varphi_k\right) \end{bmatrix}$$

3. La matriz de rigidez global **A** es armada luego en 2 etapas:
    1. Cálculo de las matrices de rigidez elementales
    2. Sumatoria de las contribuciones de cada elemento (<u>ensamble</u>)

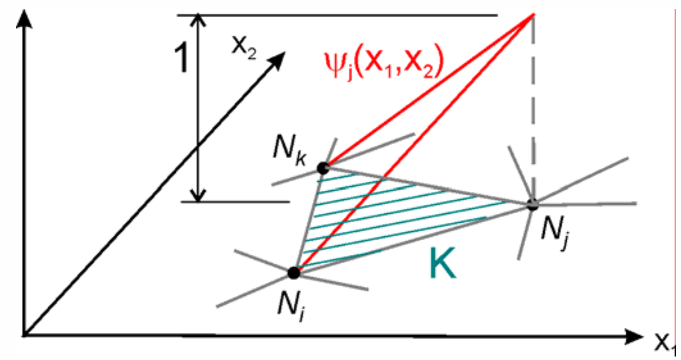
El vector de cargas **b** es armado de la misma manera.

Cálculo matriz rigidez elemental

1. Trabajamos con las restricciones de las funciones de base al triángulo *K*:



$$\boxed{\psi_i \triangleq \varphi_i\big|_K}$$



2. ψ_i es una función lineal /

$$\psi_i = \begin{cases} 1 & \text{en el nodo } i \\ 0 & \text{en los nodos } j,k \end{cases}$$

$$\boxed{\{\psi_i(x), \psi_j(x), \psi_k(x)\} \text{ base de fcs lineales en } K}$$

3. Si $w(x)$ es una función lineal en *K*, tiene luego la representación:

$$w(x) = w(N_i)\psi_i(x) + w(N_j)\psi_j(x) + w(N_k)\psi_k(x)$$

4. La matriz de rigidez elemental:

$$\mathbf{A}_K \triangleq \begin{bmatrix} a(\psi_i,\psi_i) & a(\psi_i,\psi_j) & a(\psi_i,\psi_k) \\ & a(\psi_j,\psi_j) & a(\psi_j,\psi_k) \\ \text{sim.} & & a(\psi_k,\psi_k) \end{bmatrix}$$

Ejemplo

$$\psi_i(x,y) = \alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y$$

$$\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \quad / \qquad \begin{aligned} \psi_i(x_i, y_i) &= 1 \\ \psi_i(x_j, y_j) &= 0 \\ \psi_i(x_k, y_k) &= 0 \end{aligned} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \\ \gamma_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Resolviendo:

$$\alpha_i = \frac{x_j y_k - x_k y_j}{2\Delta}$$

$$\beta_i = \frac{y_j - y_k}{2\Delta} \quad ; \quad \gamma_i = \frac{x_k - x_j}{2\Delta}$$

$$\Delta = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix} \qquad \text{(área triángulo)}$$

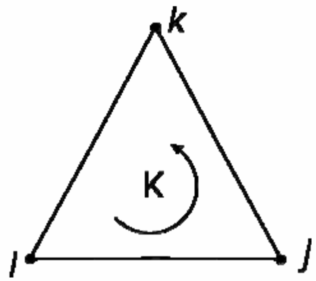
Luego:

$$a(\psi_i, \psi_i) = \int_K \nabla \psi_i \cdot \nabla \psi_i \, d\mathbf{x} = \int_K \begin{Bmatrix} \partial \psi_i / \partial x \\ \partial \psi_i / \partial y \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \partial \psi_i / \partial x \\ \partial \psi_i / \partial y \end{Bmatrix} d\mathbf{x} = \int_K \begin{Bmatrix} \beta_i \\ \gamma_i \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \beta_i \\ \gamma_i \end{Bmatrix} d\mathbf{x} = \left(\beta_i^2 + \gamma_i^2\right) \Delta$$

$$a(\psi_i, \psi_j) = \int_K \nabla \psi_i \cdot \nabla \psi_j \, d\mathbf{x} = \left(\beta_i \beta_j + \gamma_i \gamma_j\right) \Delta$$

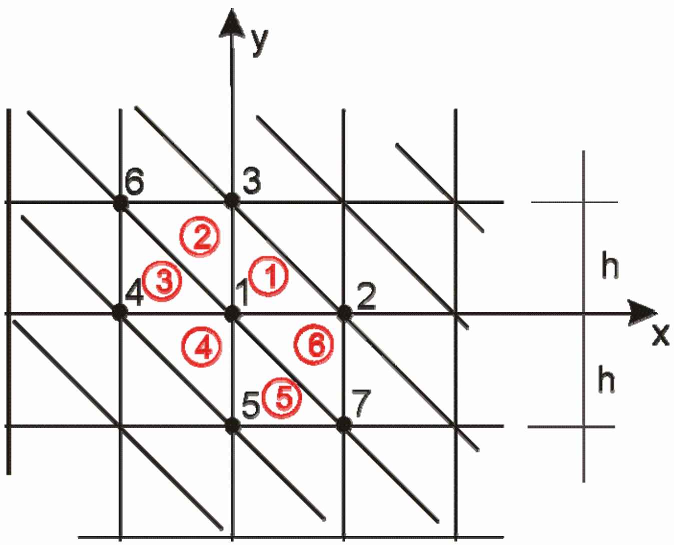
Ejemplo

Matriz de rigidez elemental:



$$\mathbf{A}_K \triangleq \Delta \begin{bmatrix} \left(\beta_i^2+\gamma_i^2\right) & \left(\beta_i\beta_j+\gamma_i\gamma_j\right) & \left(\beta_i\beta_k+\gamma_i\gamma_k\right) \\ & \left(\beta_j^2+\gamma_j^2\right) & \left(\beta_j\beta_k+\gamma_j\gamma_k\right) \\ \text{sim.} & & \left(\beta_k^2+\gamma_k^2\right) \end{bmatrix}$$

Ilustraremos el <u>proceso de ensamble</u> para el caso siguiente:



Elemento 1) *i=1; j=2; k=3*

$$\alpha_1^1=0 \qquad \alpha_2^1=0 \qquad \alpha_3^1=0$$

$$\beta_1^1=-\frac{1}{h} \qquad \beta_2^1=\frac{1}{h} \qquad \beta_3^1=0$$

Sustituyendo:

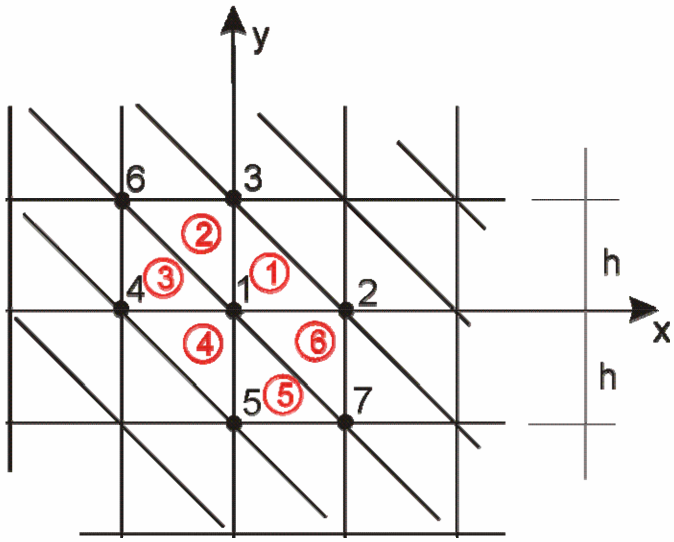
$$\gamma_1^1=-\frac{1}{h} \qquad \gamma_2^1=0 \qquad \gamma_3^1=\frac{1}{h}$$

$$\mathbf{A}_1\boldsymbol{\xi}^1=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Bmatrix}$$

Ejemplo

Por similaridad:

$$\mathbf{A}_3\boldsymbol{\xi}^3 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \xi_4 \\ \xi_1 \\ \xi_6 \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{A}_5\boldsymbol{\xi}^5 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \xi_5 \\ \xi_7 \\ \xi_1 \end{Bmatrix}$$



Elemento 2) *i=3; j=6; k=1*

$$\alpha_3^2 = 0 \qquad \alpha_6^2 = 0 \qquad \alpha_1^2 = 0$$

$$\beta_3^2 = \frac{1}{h} \qquad \beta_6^2 = \frac{1}{h} \qquad \beta_1^2 = 0$$

$$\gamma_3^2 = \frac{1}{h} \qquad \gamma_6^2 = 0 \qquad \gamma_1^2 = -\frac{1}{h}$$

Luego:

$$\mathbf{A}_2\boldsymbol{\xi}^2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \xi_3 \\ \xi_6 \\ \xi_1 \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{A}_4\boldsymbol{\xi}^4 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_4 \\ \xi_5 \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{A}_6\boldsymbol{\xi}^6 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \xi_2 \\ \xi_1 \\ \xi_7 \end{Bmatrix}$$

Ensamble primer elemento

$$\mathbf{A}_1\boldsymbol{\xi}^1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{A}\,\boldsymbol{\xi} = \frac{1}{2}\left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} 2 & -1 & -1 & & & & \\ \hline -1 & 1 & 0 & & & & \\ \hline -1 & 0 & 1 & & & & \\ \hline & & & & & & \\ \hline & & & & & & \\ \hline & & & & & & \\ \hline & & & & & & \end{array}\right)\begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \\ \xi_5 \\ \xi_6 \\ \xi_7 \end{Bmatrix}$$

Ensamble segundo elemento

$$\mathbf{A}_2\boldsymbol{\xi}^2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \xi_3 \\ \xi_6 \\ \xi_1 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{A}\,\boldsymbol{\xi} = \frac{1}{2}\left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} 2+1 & -1 & -1-1 & & & 0 & \\ \hline -1 & 1 & 0 & & & & \\ \hline -1-1 & 0 & 1+2 & & & -1 & \\ \hline & & & & & & \\ \hline & & & & & & \\ \hline 0 & & -1 & & & 1 & \\ \hline & & & & & & \end{array}\right)\begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \\ \xi_5 \\ \xi_6 \\ \xi_7 \end{Bmatrix}$$

Ensamble tercer elemento

$$\mathbf{A}_3\boldsymbol{\xi}^3 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \xi_4 \\ \xi_1 \\ \xi_6 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{A}\,\boldsymbol{\xi} = \frac{1}{2}\left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} 2+1+1 & -1 & -1-1 & -1 & & 0+0 & \\ \hline -1 & 1 & 0 & & & & \\ \hline -1-1 & 0 & 1+2 & & & -1 & \\ \hline -1 & & & 2 & & -1 & \\ \hline & & & & & & \\ \hline 0+0 & & -1 & -1 & & 1+1 & \\ \hline & & & & & & \end{array}\right)\begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \\ \xi_5 \\ \xi_6 \\ \xi_7 \end{Bmatrix}$$

Ensamble cuarto elemento

$$\mathbf{A}_4 \boldsymbol{\xi}^4 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_4 \\ \xi_5 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{A}\,\boldsymbol{\xi} = \frac{1}{2} \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} 2+1+1+2 & -1 & -1-1 & -1-1 & -1 & 0+0 & \\ \hline -1 & 1 & 0 & & & & \\ \hline -1-1 & 0 & 1+2 & & & -1 & \\ \hline -1-1 & & & 2+1 & 0 & -1 & \\ \hline -1 & & & 0 & 1 & & \\ \hline 0+0 & & -1 & -1 & & 1+1 & \\ \hline & & & & & & \end{array} \right) \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \\ \xi_5 \\ \xi_6 \\ \xi_7 \end{Bmatrix}$$

Ensamble quinto elemento

$$\mathbf{A}_5 \boldsymbol{\xi}^5 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_5 \\ \xi_7 \\ \xi_1 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{A}\,\boldsymbol{\xi} = \frac{1}{2}\left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} 2+1+1+2+1 & -1 & -1-1 & -1-1 & -1-1 & 0+0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 & & & & \\ \hline -1-1 & 0 & 1+2 & & & -1 & \\ \hline -1-1 & & & 2+1 & 0 & -1 & \\ \hline -1-1 & & & 0 & 1+2 & & -1 \\ \hline 0+0 & & -1 & -1 & & 1+1 & \\ \hline 0 & & & & -1 & & 1 \end{array}\right) \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \\ \xi_5 \\ \xi_6 \\ \xi_7 \end{Bmatrix}$$

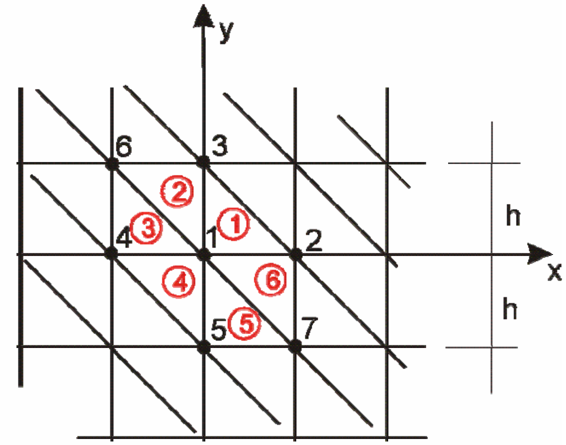
Ensamble sexto elemento

$$\mathbf{A}_6\boldsymbol{\xi}^6 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \xi_2 \\ \xi_1 \\ \xi_7 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{A}\,\boldsymbol{\xi} = \frac{1}{2}\left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} 2+1+1+2+1+1 & -1-1 & -1-1 & -1-1 & -1-1 & 0+0 & 0+0 \\ \hline -1-1 & 1+2 & 0 & & & & -1 \\ \hline -1-1 & 0 & 1+2 & & & -1 & \\ \hline -1-1 & & & 2+1 & 0 & -1 & \\ \hline -1-1 & & & 0 & 1+2 & & -1 \\ \hline 0+0 & & -1 & -1 & & 1+1 & \\ \hline 0+0 & -1 & & & -1 & & 1+1 \end{array}\right)\begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \\ \xi_5 \\ \xi_6 \\ \xi_7 \end{Bmatrix}$$

Sistema de ecuaciones global

$$
\mathbf{A}\,\boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix}
4 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & & \\
-1 & 1.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & & \\
-1 & 0 & 1.5 & 0 & 0 & -0.5 & 0 & & \\
-1 & 0 & 0 & 1.5 & 0 & -0.5 & 0 & \cdots & \cdots \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 1.5 & 0 & -0.5 & & \\
0 & 0 & -0.5 & -0.5 & 0 & 0.5 & 0 & & \\
0 & -0.5 & 0 & 0 & -0.5 & 0 & 0.5 & & \\
 & & & \vdots & & & & \ddots & \\
 & & & \vdots & & & & & \ddots
\end{pmatrix}
\begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \\ \xi_5 \\ \xi_6 \\ \xi_7 \\ \vdots \\ \vdots \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \\ b_7 \\ \vdots \\ \vdots \end{Bmatrix}
$$



Notar que la ecuación 1 está completa (no hay más elementos que contribuyan allí) :

$$\boxed{4\xi_1 - \xi_2 - \xi_3 - \xi_4 - \xi_5 = b_1}$$

Puede mostrarse, de manera similar, que:

$$b_1 = \frac{h^2}{6}\left(f^1 + f^2 + f^3 + f^4 + f^5 + f^6\right) \qquad \text{con:} \qquad f^i = \int_i \psi_1^i f \; d\mathbf{x}$$

La ecuación es idéntica a la que se obtiene por diferencias finitas. El término a derecha cambia.