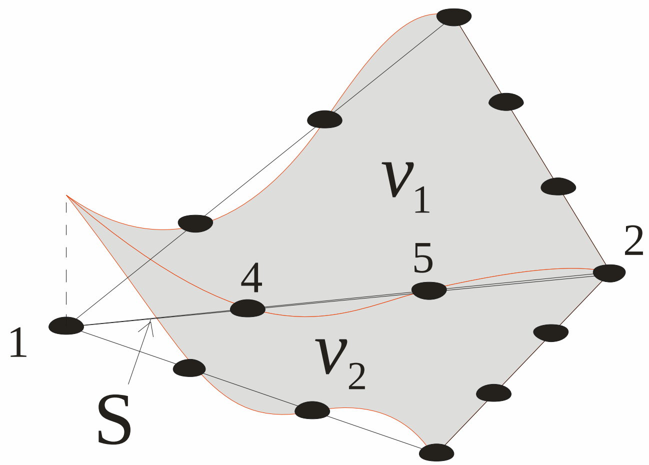


Introducción al Método de los Elementos Finitos

Parte 2

Formulación abstracta del MEF para problemas elípticos

Alberto Cardona, Víctor Fachinotti
Cimec-Intec (UNL/Conicet), Santa Fe, Argentina

Espacios de Hilbert

1. En formulaciones variacionales para solución de BVP, trabajaremos con espacios V más grandes que los vistos hasta ahora.

2. Sucesión de Cauchy: sucesión $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathrm{V}$ que verifica

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \,/\, \left\| v_i - v_j \right\| < \varepsilon \text{ si } i, j > N$$

   La sucesión de Cauchy es convergente si $\left\| v - v_i \right\| \to 0$ cuando $i \to \infty$

3. Espacio de Hilbert: Es un espacio lineal V, equipado de producto escalar y norma asociada, *completo* (o sea que las sucesiones de Cauchy convergen respecto de la norma del espacio).

Espacios de Hilbert: ejemplos 1D

- Espacio $L_2(I)$ de funciones de cuadrado integrable en I=(a,b)

$$\mathrm{L}_2(\mathrm{I}) = \left\{ v : v \text{ está definida en I y } \int_{\mathrm{I}} v^2 dx < \infty \right\}$$

dotado del producto interno: $(v, w) = \int_{\mathrm{I}} vw\, dx$

y la norma: $\|v\|_{\mathrm{L}_2(\mathrm{I})} = \left(\int_{\mathrm{I}} v^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}} = (v, v)^{\frac{1}{2}}$

La desigualdad de Cauchy: $|(v, w)| \leq \|v\|_{\mathrm{L}_2(\mathrm{I})} \|w\|_{\mathrm{L}_2(\mathrm{I})}$

Ejemplo: $v(x) = x^{-\beta},\ x \in \mathrm{I} = (0,1),\ v \in \mathrm{L}_2(\mathrm{I}) \text{ si } \beta < \dfrac{1}{2}$

Espacios de Hilbert: ejemplos 1D (cont.)

- Espacio $H^1(I)$ en I=(a,b): $\mathrm{H}^1(\mathrm{I}) = \{ v : v, v' \in \mathrm{L}_2(\mathrm{I}) \}$

  dotado del producto interno: $(v,w)_{\mathrm{H}^1(\mathrm{I})} = \int_{\mathrm{I}} \left(vw + v'w' \right) dx$

  y la norma: $\|v\|_{\mathrm{H}^1(\mathrm{I})} = \left\{ \int_{\mathrm{I}} \left[v^2 + (v')^2 \right] dx \right\}^{\frac{1}{2}} = \left[(v,v)_{\mathrm{H}^1(\mathrm{I})} \right]^{\frac{1}{2}}$

- Espacio $\mathrm{H}_0^1(\mathrm{I})$ en I=(a,b): $\mathrm{H}_0^1(\mathrm{I}) = \{ v : v \in \mathrm{H}^1(\mathrm{I}) \text{ y } v(\mathrm{a}) = v(\mathrm{b}) = 0 \}$

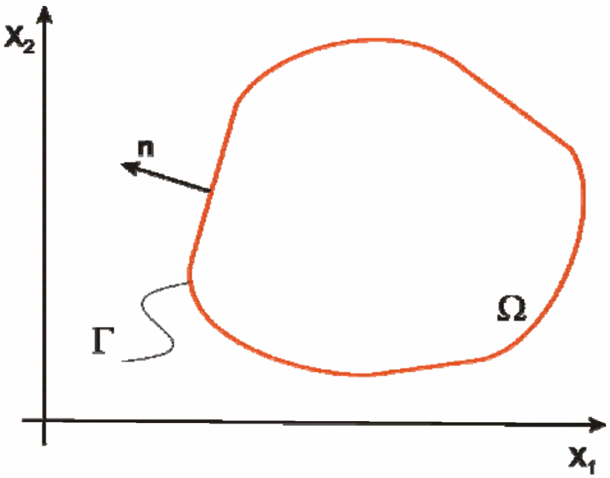
- Dado el problema modelo: (D) $\begin{cases} -u'' = f(x), & x \in \mathrm{I} \\ u(\mathrm{a}) = u(\mathrm{b}) = 0 \end{cases}$

  luego: (V) Hallar $u \in \mathrm{H}_0^1(\mathrm{I})$ / $(u', v') = (f, v)$ $\forall v \in \mathrm{H}_0^1(\mathrm{I})$

- Notas:
  - $\mathrm{H}_0^1(\mathrm{I})$ es más grande que el espacio V de funciones lineales a trozos que veníamos usando.
  - En MEF, la norma del error es simplemente la norma en $H^1(I)$.

Espacios de Hilbert en $\Omega \in \mathbb{R}^d$, d=2,3

- $\mathrm{L}_2(\Omega) = \left\{ v : v \text{ está definida en } \Omega \text{ y } \int_\Omega v^2 dx < \infty \right\}$
  - Producto escalar: $(v,w) = \int_\Omega vw\,dx$
  - Norma: $\|v\| = \left(\int_\Omega v^2\,dx \right)^{\frac{1}{2}}$



- $\mathrm{H}^1(\Omega) = \left\{ v : v \in \mathrm{L}_2(\Omega), \frac{\partial v}{\partial x_i} \in \mathrm{L}_2(\Omega), i = 1, \ldots, d \right\}$
  - Producto escalar: $(v,w)_{\mathrm{H}^1(\Omega)} = \int_\Omega \left(vw + \nabla v \cdot \nabla w \right) dx$
  - Norma: $\|v\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)} = \left[\int_\Omega \left(v^2 + \nabla v \cdot \nabla v \right) dx \right]^{\frac{1}{2}} = \left[(v,v)_{\mathrm{H}^1(\Omega)} \right]^{\frac{1}{2}}$
- $\mathrm{H}_0^1(\Omega) = \left\{ v : v \in \mathrm{H}_1(\Omega), v\big|_\Gamma = 0 \right\}$

Espacios de Hilbert en $\Omega \in \mathbb{R}^d$, d=2,3 (cont)

- Dado el problema modelo (ec. de Poisson + CB homogéneas)

$$(D)\quad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma \end{cases}$$

luego: (V) Hallar $u \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ / $\underbrace{\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx}_{\mathrm{a}(u,v)} = \underbrace{\int_\Omega fv \, dx}_{(f,v)} \quad \forall v \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$

o, equivalentemente:

$$(M)\quad \text{Hallar } u \in \mathrm{H}_0^1(\Omega) \,/\, \underbrace{\frac{1}{2}\mathrm{a}(u,u) - (f,u)}_{\mathrm{F}(u)} \le \underbrace{\frac{1}{2}\mathrm{a}(v,v) - (f,v)}_{F(v)} \quad \forall v \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$$

- Nota: (V) se dice la formulación débil de (D), y la solución de (V) es la solución débil de (D). Ésta no es necesariamente una solución clásica de (D). Para que lo sea, u debe ser suficientemente regular de modo que Δu esté definida en el sentido clásico.

Interpretación geométrica del MEF

Consideremos el BVP de difusión-reacción con CB homogéneas:

$$(D)\quad \begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma \end{cases}$$

luego: $(V)\quad$ Hallar $u \in \mathrm{H}_0^1(\Omega) \,/\, \underbrace{\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega uv \, dx}_{\langle u,v \rangle} = \underbrace{\int_\Omega fv \, dx}_{(f,v)} \quad \forall v \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$

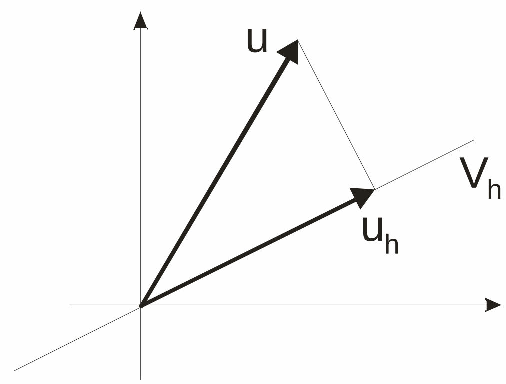
Producto interno en $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$

Sea V_h un subespacio de dimensión finita de $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$, ej. el espacio de funciones lineales a trozos. El MEF aplicado al problema de difusión-reacción da:

$(V_h)\quad$ Hallar $u_h \in \mathrm{V}_h \,/\, \langle u_h, v \rangle = (f,v) \quad \forall v \in \mathrm{V}_h$

Tomando $v \in \mathrm{V}_h \subset \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ en (V), (V)–(V_h) resulta:

$$\langle u - u_h, v \rangle = 0 \quad \forall v \in \mathrm{V}_h$$

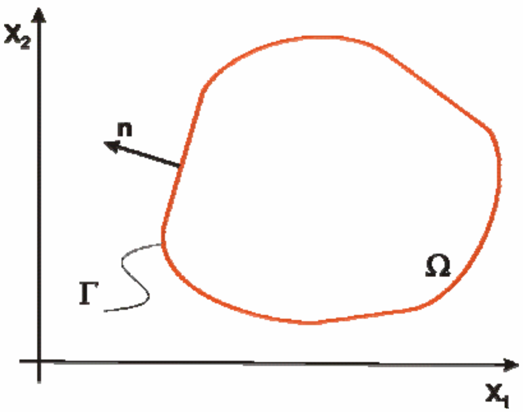


La solución MEF u_h es la proyección con resp a $\langle .,. \rangle$ de la solución exacta u sobre V_h, o sea que u_h es el elemento de V_h más próximo u con resp a $\|.\|_{\mathrm{H}_0^1(\Omega)}$, i.e.: $\|u - u_h\|_{\mathrm{H}_0^1(\Omega)} \leq \|u - v\|_{\mathrm{H}_0^1(\Omega)} \quad \forall v \in \mathrm{V}_h$

CB naturales y esenciales

Consideremos el BVP de difusión-reacción con CB tipo Neumann:

$$(D)\quad \begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{en } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = g & \text{sobre } \Gamma \end{cases}$$



luego: (V) Hallar $u \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ /

$$\underbrace{\int_\Omega \left(\nabla u \cdot \nabla v + uv\right) dx}_{\langle u,v\rangle} = \underbrace{\int_\Omega fv\, dx}_{(f,v)} + \underbrace{\int_\Gamma gv\, dx}_{(g,v)_\Gamma} \qquad \forall v \in \mathrm{H}^1(\Omega)$$

o: (M) Hallar $u \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ / $\mathrm{F}(u) \leq \mathrm{F}(v) \quad \forall v \in \mathrm{H}^1(\Omega)$

con $\mathrm{F}(u) = \dfrac{1}{2}\mathrm{a}(u,u) - (f,u) - (g,u)_\Gamma$

•La CB Neumann, que no tiene que ser impuesta explícitamente sobre *u*, se denomina CB natural.

•La CB Dirichlet $u=u_0$ sobre Γ, que debe ser satisfecha explícitamente por *u*, se conoce como CB esencial.

Problema continuo en forma abstracta

Objetivos:

- Dar un tratamiento unificado a muchos problemas de la Mecánica y la Física, a fin de no repetir el mismo argumento en distintos casos concretos.
- Entender la estructura básica del MEF.

Hipótesis: sea V un espacio de Hilbert con producto escalar $(\bullet,\bullet)_V$ y norma $\|\bullet\|_V$, a(•,•) es una forma bilineal en V×V, y L(•) una forma lineal en V, tales que

1. a(•,•) es simétrica, i.e., $\mathrm{a}(u,v) = \mathrm{a}(v,u) \quad \forall u,v \in \mathrm{V}$
2. a(•,•) es continua, i.e., $\exists \gamma > 0 \,/\, |\mathrm{a}(u,v)| \le \gamma \|u\|_{\mathrm{V}} \|v\|_{\mathrm{V}} \quad \forall u,v \in \mathrm{V}$
3. a(•,•) es V-elíptica o coerciva, i.e., $\exists \alpha > 0 \,/\, \mathrm{a}(v,v) \ge \alpha \|v\|_{\mathrm{V}}^2 \quad \forall v \in \mathrm{V}$
4. L(•) es continua, i.e., $\exists \lambda > 0 \,/\, |\mathrm{L}(v)| \le \lambda \|v\|_{\mathrm{V}} \quad \forall v \in \mathrm{V}$

Formulación abstracta del MEF para problemas elípticos (cont)

(M) Hallar $u \in \mathrm{V}$ / $\mathrm{F}(u) = \min\limits_{v \in \mathrm{V}} \mathrm{F}(v)$, con $\mathrm{F}(v) = \frac{1}{2}\mathrm{a}(v,v) - L(v)$

(V) Hallar $u \in \mathrm{V}$ / $\mathrm{a}(u,v) = \mathrm{L}(v)$, $\forall v \in \mathrm{V}$

Teorema: (M) y (V) son equivalentes, i.e., u satisface (M) si y sólo si u satisface (V). Además, $\exists! u \in \mathrm{V}$, y ésta verifica $\|u\|_{\mathrm{V}} \leq \lambda / \alpha$.

Formulación abstracta del MEF para problemas elípticos (cont)

Demo.: sea $v \in \mathrm{V}$ y $\varepsilon \in \mathbb{R}$ arbitrarios. Luego, $v+\varepsilon u \in \mathrm{V}$, así que

$$\underbrace{\mathrm{F}(u)}_{\mathrm{g}(0)} \leq \underbrace{\mathrm{F}(u+\varepsilon v)}_{\mathrm{g}(\varepsilon)}, \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}$$

$\mathrm{g}(0) \leq \mathrm{g}(\varepsilon) \Rightarrow$ g tiene un mínimo en $\varepsilon=0$

Siendo $\mathrm{g}(\varepsilon) = \frac{1}{2}\mathrm{a}(u+\varepsilon v, u+\varepsilon v) - \mathrm{L}(u+\varepsilon v)$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{a}(u,u) + \frac{\varepsilon}{2}\mathrm{a}(u,v) + \frac{\varepsilon}{2}\mathrm{a}(v,u) + \frac{\varepsilon^2}{2}\mathrm{a}(v,v) - \mathrm{L}(u) - \varepsilon \mathrm{L}(v)$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{a}(u,u) - \mathrm{L}(u) + \varepsilon \mathrm{a}(u,v) - \varepsilon \mathrm{L}(v) + \frac{\varepsilon^2}{2}\mathrm{a}(v,v)$$

luego $\mathrm{g}'(\varepsilon) = \mathrm{a}(u,v) - \mathrm{L}(v) + \varepsilon \mathrm{a}(v,v)$

Como g tiene un mínimo en 0, debe cumplirse

$$\mathrm{g}'(0) = \mathrm{a}(u,v) - \mathrm{L}(v) = 0 \qquad (V)$$

(QED)

Estimación del error de discretización

- Sea V_h un subespacio de V, con dimensión finita M, y sea $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_M\}$ una base para V_h, de modo que toda $v \in V_h$ puede representarse

$$v = \sum_{i=1}^{M} \varphi_i \eta_i, \; \eta_i \in \mathbb{R}$$

- Usando V_h, obtenemos los problemas discretos análogos a (M) y (V):

$$(M_h) \quad \text{Hallar } u_h \in V_h \; / \; F(u_h) \leq F(v), \; \forall v \in V_h$$

$$(V_h) \quad \text{Hallar } u_h \in V_h \; / \; a(u_h, v) = L(v), \; \forall v \in V_h$$

  - Como $\varphi_j \in V_h \Rightarrow a(u_h, \varphi_j) = L(\varphi_j), \; j = 1, 2, \ldots, M$
  - Como $u_h \in V_h \Rightarrow u_h = \sum_{i=1}^{M} \varphi_i \xi_i, \; \xi_i \in \mathbb{R} \Rightarrow \sum_{i=1}^{M} a(\varphi_i, \varphi_j) \xi_i = L(\varphi_j), \; j = 1, 2, \ldots, M$
  - Forma matricial de (V_h): $\boxed{\mathbf{A}\boldsymbol{\xi} = \mathbf{b}}$ con $A_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j), \; b_j = L(\varphi_j)$.

Estimación del error de discretización (cont)

- Dado que a(.,.) es simétrica: $\mathrm{a}(\varphi_i,\varphi_j)=\mathrm{a}(\varphi_j,\varphi_i)\Rightarrow A_{ij}=A_{ji}$

  $\Rightarrow$ la matriz **A** es simétrica
- Dado que a(.,.) es V-elíptica:

$$\mathrm{a}(v,v)=\mathrm{a}\left(\sum_{i=1}^{M}\varphi_i\eta_i,\sum_{j=1}^{M}\varphi_j\eta_j\right)=\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M}\eta_i\,\mathrm{a}(\varphi_i,\varphi_j)\eta_j=\boldsymbol{\eta}\cdot\mathbf{A}\boldsymbol{\eta}\geq\alpha\|v\|_{\mathrm{V}}^{2}>0\ \text{si}\ v\neq 0\ (\boldsymbol{\eta}\neq\mathbf{0})$$

$\Rightarrow$ la matriz **A** es positiva definida

$\Rightarrow$ la matriz **A** es no singular

$\Rightarrow \exists!\boldsymbol{\xi}\,/\,\mathbf{A}\boldsymbol{\xi}=\mathbf{b}\Rightarrow\exists! u_h\in \mathrm{V}_h$ solución de (V_{h})

Estimación del error de discretización (cont)

- Teorema: Sea $u \in \mathrm{V}$ la solución de (V) y $u_h \in \mathrm{V}_h \subset \mathrm{V}$. Entonces:

$$\left\| u - u_h \right\|_{\mathrm{V}} \leq \frac{\gamma}{\alpha} \left\| u - v \right\|_{\mathrm{V}} \quad \forall v \in \mathrm{V}_h$$

- Demo.:

1. u solución de $(V) \Rightarrow \mathrm{a}(u, w) = \mathrm{L}(w), \forall w \in \mathrm{V}_h \subset \mathrm{V}$
2. u_h solución de $(V_h) \Rightarrow \mathrm{a}(u_h, w) = \mathrm{L}(w), \forall w \in \mathrm{V}_h$
3. Restando: $\mathrm{a}(u - u_h, w) = 0, \forall w \in \mathrm{V}_h$
4. Sea $w = u_h - v$, con $v \in \mathrm{V}_h$ arbitrario.
5. Operando: $\alpha \left\| u - u_h \right\|_{\mathrm{V}}^2 \leq \mathrm{a}(u - u_h, u - u_h)$

$$\begin{aligned}
&= \mathrm{a}(u - u_h, u - u_h) + \mathrm{a}(u - u_h, w) \\
&= \mathrm{a}(u - u_h, u - u_h + w) \\
&= \mathrm{a}(u - u_h, u - v) \\
&\leq \gamma \left\| u - u_h \right\|_{\mathrm{V}} \left\| u - v \right\|_{\mathrm{V}} \qquad \textit{(QED)}
\end{aligned}$$

Norma de energía

Considerando

1. a(.,.) es continua, i.e., $\exists \gamma > 0 / |\mathrm{a}(u,v)| \le \gamma \|u\|_{\mathrm{V}} \|v\|_{\mathrm{V}} \quad \forall u,v \in \mathrm{V}$
2. a(.,.) es V-elíptica o coerciva, i.e., $\exists \alpha > 0 / \mathrm{a}(v,v) \ge \alpha \|v\|_{\mathrm{V}}^2 \quad \forall v \in \mathrm{V}$

podemos definir una nueva norma llamada norma de energía:

$$\|v\|_{\mathrm{a}} = [\mathrm{a}(v,v)]^{\frac{1}{2}}, \quad \forall v \in \mathrm{V}$$

Esta norma es equiv a $\|.\|_{\mathrm{V}}$, i.e., $\exists$ constantes positivas $\mathrm{c} = \sqrt{\alpha}, \mathrm{C} = \sqrt{\gamma}$, tal que

$$\mathrm{c}\|v\|_{\mathrm{V}} \le \|v\|_{\mathrm{a}} \le \mathrm{C}\|v\|_{\mathrm{V}} \quad \forall v \in \mathrm{V}$$

El producto escalar asociado a $\|.\|_{\mathrm{a}}$ es $(u,v)_{\mathrm{a}} = \mathrm{a}(u,v)$.

La ec de error resulta $(u - u_h, v)_{\mathrm{a}} = 0 \ \forall v \in \mathrm{V}_h$

de donde $\|u - u_h\|_{\mathrm{a}} \le \|u - v\|_{\mathrm{a}} \ \forall v \in \mathrm{V}_h$

$\Rightarrow$ Medida en la norma de energía, u_h es la mejor aproximación a u.

Ejemplos concretos

Ejemplo 1: sea $V = H^1(\Omega), \Omega \subset \mathbb{R}^2$.

$$a(v,w) = \int_\Omega \left(vw + \nabla v \cdot \nabla w \right) dx$$

$$L(v) = \int_\Omega fv\, dx, \quad f \in L_2(\Omega)$$

En este caso, $a(v,w) = L(v), \forall v \in H^1(\Omega)$ es la forma débil del problema de Neumann

$$(D) \quad -\Delta u + u = f \text{ en } \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sobre } \Gamma$$

Se verifica

- $a(v,w) = a(w,v) \quad \Rightarrow$ a(.,.) es una forma bilineal simétrica
- $a(v,v) = \|v\|^2_{H^1(\Omega)} \quad \Rightarrow$ a(.,.) es V-elíptica con $\alpha=1$
- $a(v,w) \leq \left[a(v,v)\right]^{\frac{1}{2}} \left[a(w,w)\right]^{\frac{1}{2}} = \|v\|_{H^1(\Omega)} \|w\|_{H^1(\Omega)} \quad \Rightarrow$ a(.,.) es continua con $\gamma=1$
- $|L(v)| = \int_\Omega fv\, dx \leq \| f \|_{L_2(\Omega)} \|v\|_{L_2(\Omega)} \quad \Rightarrow$ L(.) es continua con $\lambda = \| f \|_{L_2(\Omega)}$
- Luego: $\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \| f \|_{L_2(\Omega)}$

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq \|u - v\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

Ejemplos concretos (cont)

Ejemplo 2: sea $V = H_0^1(I),\ I = (0,1), \quad a(v,w) = \int_I v'w'\,dx, \quad L(v) = \int_I fv\,dx.$

En este caso, $a(v,w) = L(v),\ \forall v \in H_0^1(I)$ es la forma débil del problema

$$(D) \quad -u'' = f \text{ en I}, \quad u(a) = u(b) = 0$$

Se verifica

- $a(v,w) = a(w,v) \quad \Rightarrow$ a(.,.) es una forma bilineal simétrica
- $|a(v,w)| \le \|v'\|_{L_2(I)} \|w'\|_{L_2(I)} \le \|v\|_{H^1(I)} \|w\|_{H^1(I)} \quad \Rightarrow$ a(.,.) es continua con $\gamma = 1$
- $\int_I (v')^2\,dx \ge \frac{1}{2}\left(\int_I v^2 dx + \int_I (v')^2\,dx\right) \quad \Rightarrow$ a(.,.) es V-elíptica con $\alpha = 1/2$
  - Demo.: $v \in H_0^1(I) \Rightarrow v(x) = \int_0^x v'(y)\,dy \Rightarrow |v(x)| \le \int_0^x |v'|\,dy \le \int_0^1 |v'|\,dy \le \left[\int_0^1 (v')^2\,dy\right]^{\frac{1}{2}}$

    $$\Rightarrow \int_0^1 v^2 dx \le \int_0^1 (v')^2\,dx \Rightarrow \int_0^1 (v')^2\,dx \ge \frac{1}{2}\left(\int_0^1 v^2 dx + \int_0^1 (v')^2\,dx\right)$$
- $|L(v)| = \int_I fv\,dx \le \|f\|_{L_2(I)} \|v\|_{L_2(I)} \quad \Rightarrow$ L(.) es continua con $\lambda = \|f\|_{L_2(I)}$
- Luego: $\|u - u_h\|_{H^1(I)} \le 2\|u - v\|_{H^1(I)} \quad \forall v \in H_0^1(I)$

  $\|u\|_{H^1(I)} \le \|f\|_{L_2(I)}$

Ejemplos concretos (cont)

Ejemplo 3: sea $V=H_0^1(\Omega), \Omega\subset\mathbb{R}^2, \quad a(v,w)=\int_\Omega \nabla v\cdot\nabla w\,dx, \quad L(v)=\int_\Omega fv\,dx.$

En este caso, $a(v,w)=L(v), \forall v\in H_0^1(\Omega)$ es la forma débil del problema de Poisson

$$(D) \quad -\Delta u = f \text{ en } \Omega, \quad u=0 \text{ sobre } \Gamma$$

Se verifica

- $a(v,w)=a(w,v) \quad \Rightarrow$ a(.,.) es una forma bilineal simétrica
- $|a(v,w)|\le\|\nabla v\|_{L_2(\Omega)}\|\nabla v\|_{L_2(\Omega)}\le\|v\|_{H^1(\Omega)}\|w\|_{H^1(\Omega)} \quad\Rightarrow$ a(.,.) es continua con γ=1
- $a(v,v)\ge\alpha\|v\|^2_{H^1(\Omega)}=\alpha\int_\Omega\left(v^2+\nabla v\cdot\nabla v\right)dx$

  $\Rightarrow$ a(.,.) es V-elíptica con $\alpha=1/(C+1)$, C tal que $\int_\Omega v^2dx\le C\int_\Omega\nabla v\cdot\nabla v\,dx$
- $|L(v)|=\int_\Omega fv\,dx\le\|f\|_{L_2(\Omega)}\|v\|_{L_2(\Omega)} \quad\Rightarrow$ L(.) es continua con $\lambda=\|f\|_{L_2(\Omega)}$
- Luego: $\|u-u_h\|_{H^1(\Omega)}\le\left(C+1\right)\|u-v\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall v\in H_0^1(\Omega)$

  $$\|u\|_{H^1(\Omega)}\le\left(C+1\right)\|f\|_{L_2(\Omega)}$$

Ejemplos concretos (cont)

Ejemplo 4: (D) $\dfrac{d^4u}{dx^4} = f$ en I=(0,1), $u(0) = u'(0) = u(1) = u'(1)$

- Definimos los espacios $\mathrm{H}^2(\mathrm{I}) = \{v : v, v', v'' \in \mathrm{L}_2(\mathrm{I})\}$

  $\mathrm{H}_0^2(\mathrm{I}) = \{v : v \in \mathrm{H}^2(\mathrm{I}), v(0) = v'(0) = v(1) = v'(1) = 0\}$

  con norma $\|v\|_{\mathrm{H}^2(\mathrm{I})} = \left\{\int_{\mathrm{I}} \left[v^2 + (v')^2 + (v'')^2\right] dx\right\}^{\frac{1}{2}}$

- La forma débil del problema (D) consiste en hallar $u \in \mathrm{V} = \mathrm{H}_0^2(\mathrm{I})$ tal que

$$\underbrace{\int_{\mathrm{I}} u'' v'' dx}_{} = \underbrace{\int_{\mathrm{I}} f v\, dx}_{} \qquad \forall v \in \mathrm{H}_0^2(\mathrm{I})$$

$$\mathrm{a}(u, v) = \mathrm{L}(v)$$

- a(.,.) es una forma bilineal y simétrica
- $|\mathrm{a}(v, w)| \le \|v'\|_{\mathrm{L}_2(\mathrm{I})} \|w'\|_{\mathrm{L}_2(\mathrm{I})} \le \|v\|_{\mathrm{H}^2(\mathrm{I})} \|w\|_{\mathrm{H}^2(\mathrm{I})}$ $\Rightarrow$ a(.,.) es continua con γ=1
- $\mathrm{a}(v, v) \ge \alpha \|v\|^2_{\mathrm{H}^1(\mathrm{I})} = \alpha \int_{\mathrm{I}} \left[v^2 + (v')^2 + (v'')^2\right] dx$ $\Rightarrow$ a(.,.) es V-elíptica con α=1/3
- L(.) es continua con $\lambda = \| f \|_{\mathrm{L}_2(\mathrm{I})}$
- Luego: $\|u\|_{\mathrm{H}^2(\mathrm{I})} \le 3 \| f \|_{\mathrm{L}_2(\mathrm{I})}$ $\qquad \|u - u_h\|_{\mathrm{H}^2(\mathrm{I})} \le 3 \|u - v\|_{\mathrm{H}^2(\mathrm{I})} \quad \forall v \in \mathrm{H}_0^2(\mathrm{I})$

Ejemplos concretos (cont)

Ejemplo 5: Consideremos el problema bi-armónico:

$$(D) \quad \Delta^2 u = f \text{ en } \Omega,\ u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sobre } \Gamma$$

- Definimos los espacios $\mathrm{H}^2(\Omega) = \left\{ v : v, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \in \mathrm{L}_2(\Omega) \right\}$

$$\mathrm{H}_0^2(\Omega) = \left\{ v : v \in \mathrm{H}^2(\Omega), v = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \text{ sobre } \Gamma \right\}$$

con norma $\|v\|_{\mathrm{H}^2(\Omega)} = \int_\Omega \left[v^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right)^2 \right] dx$

- La forma débil del problema (D) se obtiene haciendo

$$(V) \quad \underbrace{\int_\Omega f v \, dx}_{=\mathrm{L}(v)} = \int_\Omega \Delta^2 u \, v \, dx = -\int_\Omega \nabla(\Delta u) \cdot \Delta v \, dx + \overbrace{\int_\Gamma \frac{\partial}{\partial n}(\Delta u) v \, ds}^{=0} = \underbrace{\int_\Omega \Delta u \cdot \Delta v \, dx}_{=\mathrm{a}(u,v)} - \overbrace{\int_\Gamma \Delta u \frac{\partial v}{\partial n} ds}^{=0}$$

- Se puede demostrar que a(.,.) es una forma bilineal, simétrica, continua y V-elíptica, así como L(.) es una forma lineal continua.

Ejemplos concretos (cont)

Ejemplo 6: Consideremos el problema estacionario de convección-difusión:

$$(D) \quad -\mu\Delta u + \boldsymbol{\beta}\cdot\nabla u = f \text{ en } \Omega,\ \mu \in \mathbb{R}^+, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^2, \qquad u = 0 \text{ sobre } \Gamma$$

Supongamos $\|\boldsymbol{\beta}\|/\mu$ moderado.

- La forma débil del problema (D) se obtiene haciendo

$$(V) \quad \underbrace{\int_\Omega fv\,dx}_{=\mathrm{L}(v)} = \int_\Omega \left(-\mu\Delta u + \boldsymbol{\beta}\cdot\nabla u\right) v\,dx = \underbrace{\int_\Omega \left[\mu\nabla u\cdot\nabla v + \left(\boldsymbol{\beta}\cdot\nabla u\right)v\right]dx}_{=\mathrm{a}(u,v)} + \overbrace{\int_\Gamma \mu\frac{\partial u}{\partial n}v\,ds}^{=0}$$

- L(.) es una forma lineal continua.
- a(.,.) es una forma bilineal, continua y V-elíptica, pero no simétrica.

- **Teorema:** si L(.) es una forma lineal continua, y a(.,.) es una forma bilineal, continua y V-elíptica, pero no simétrica, se puede demostrar que hay solución única a (V), y está acotada. Sin embargo, en este caso no existe problema de minimización asociado a (V).

Ejemplos concretos (cont)

Ejemplo 7: Consideremos el problema estacionario de conducción de calor en $\Omega \subset \mathbb{R}^3$

$$(D) \quad \begin{cases} -\nabla \cdot (\mathbf{k} \nabla u) = f & \text{en } \Omega,\ k_{ij} \in \mathbb{R}^+ & \text{Ecuación del calor} \\ u=0 & \text{en } \Gamma_1 & \text{CB Dirichlet} \\ \mathbf{k}\nabla u \cdot \mathbf{n} = g & \text{en } \Gamma_2 & \text{CB Neumann} \end{cases}$$

Definimos el espacio $\mathrm{V} = \left\{ v : v \in \mathrm{H}^1(\Omega),\ v = 0 \text{ sobre } \Gamma_1 \right\}$

- La forma débil del problema (D) se obtiene haciendo

$$(V) \quad \int_\Omega f v\, dx = -\int_\Omega \nabla \cdot (\mathbf{k}\nabla u) v\, dx = \int_\Omega \mathbf{k}\nabla u \cdot \nabla v\, dx - \int_\Gamma \mathbf{k}\nabla u \cdot \mathbf{n}\, v\, dx = \int_\Omega \mathbf{k}\nabla u \cdot \nabla v\, dx - \int_{\Gamma_2} g\, v\, ds$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_\Omega \mathbf{k}\nabla u \cdot \nabla v\, dx}_{\mathrm{a}(u,v)} = \underbrace{\int_\Omega f v\, dx + \int_{\Gamma_2} g\, v\, ds}_{\mathrm{L}(v)}$$

- L(.) es una forma lineal continua si $f,g \in \mathrm{L}_2(\Omega)$.
- a(.,.) es una forma bilineal, simétrica, continua y V-elíptica si

$$\exists c, C \in \mathbb{R}^+ / c \le k_{ij}(\mathbf{x}) \le C \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega$$