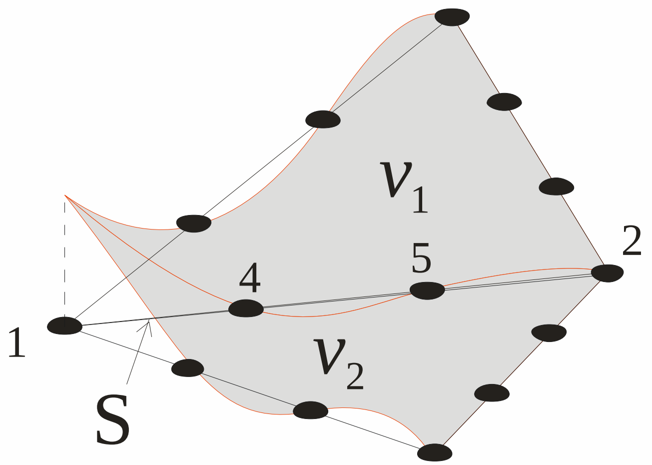


Introducción al Método de los Elementos Finitos

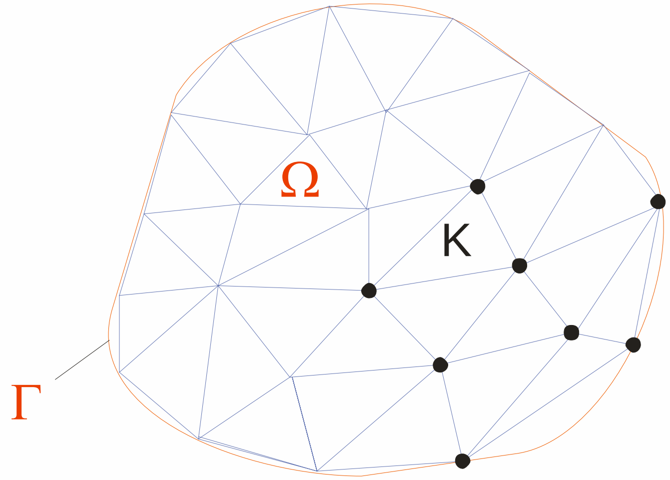
Parte 3

Algunos espacios de elementos finitos

Alberto Cardona, Víctor Fachinotti
Cimec-Intec (UNL/Conicet), Santa Fe, Argentina

Algunos espacios de elementos finitos

- Sea el dominio acotado Ω representado por la "triangulación" (o malla) de elementos finitos $T_h=\{K\}$.
  - En 1D, el elemento K es un intervalo.
  - En 2D, los elementos más comunes son triángulos o cuadriláteros.
  - En 3D, tetraedros o hexaedros.



- Los espacios V_h más comunes en elementos finitos consisten en funciones polinómicas por tramos definidas sobre la malla T_h.
- La definición de un espacio de elementos finitos V_h requiere especificar
  - La malla T_h del dominio Ω.
  - La naturaleza de las funciones $v \in V_h$ sobre cada elemento K (ej., lineal, cuadrática, cúbica, etc.)
  - Los parámetros usados para definir dichas funciones.

Requisitos de regularidad

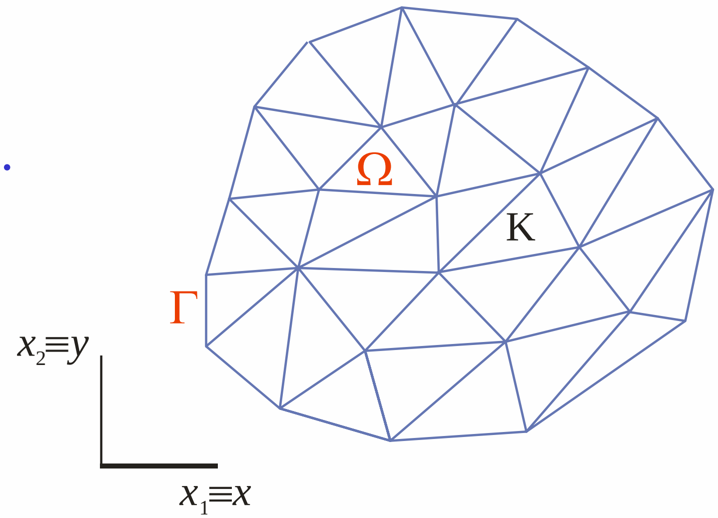
- BVP de 2º orden $\Rightarrow$ $V_h \subset H^1(\Omega)$
- BVP de 4º orden $\Rightarrow$ $V_h \subset H^2(\Omega)$

- Si los espacios consisten de funciones polinómicas, resulta

$$V_h \subset H^1(\Omega) \Leftrightarrow V_h \subset C^0(\bar{\Omega}) = \left\{ v : v \text{ es continua en } \bar{\Omega} \right\} \qquad \left(\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma \right)$$

$$V_h \subset H^2(\Omega) \Leftrightarrow V_h \subset C^1(\bar{\Omega}) = \left\{ v : v, \frac{\partial v}{\partial x_i} \in C^1(\bar{\Omega}),\ i = 1, \ldots, \mathrm{d} \right\}$$

Algunos ejemplos de elementos finitos en 2D



- Sea el dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ con frontera poligonal Γ.
- Sea $T_h=\{K\}$ una triangulación de Ω en triángulos K.
- Definimos los espacios

$$\mathrm{P}_r(\mathrm{K}) = \{ v : v \text{ es un polinomio de grado} \leq r \text{ en K} \}$$

– $\mathrm{P}_1(\mathrm{K})$ es el espacio de funciones lineales en K:

$$v(x,y) = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y, \quad \forall (x,y) \in \mathrm{K},\ a_{ij} \in \mathbb{R}$$

luego $\{1,x,y\}$ es una base en $\mathrm{P}_1(\mathrm{K})$ y dim $\mathrm{P}_1(\mathrm{K})=3$.

– $\mathrm{P}_2(\mathrm{K})$ es el espacio de funciones cuadráticas en K:

$$v(x,y) = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2, \quad \forall (x,y) \in \mathrm{K},\ a_{ij} \in \mathbb{R}$$

luego $\{1,x,y,x^2,xy, y^2\}$ es una base en $\mathrm{P}_2(\mathrm{K})$ y dim $\mathrm{P}_2(\mathrm{K})=6$.

– <u>En general:</u> $\mathrm{P}_r(\mathrm{K}) = \left\{ v : v(x,y) = \sum_{0 \leq i+j \leq r} a_{ij} x^i y^j,\ \forall (x,y) \in \mathrm{K},\ a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$

$$\dim \mathrm{P}_r(\mathrm{K}) = \frac{(r+1)(r+2)}{2}$$

Elemento finito triangular lineal

- Sea el espacio de funciones lineales a trozos:

$$\mathrm{V}_h = \left\{ v : v \in \mathrm{C}^0(\bar{\Omega}) \text{ y } v\big|_{\mathrm{K}} \in \mathrm{P}_1(\mathrm{K}),\ \forall \mathrm{K} \in \mathrm{T}_h \right\}$$

- Los parámetros necesarios para describir las funciones $v \in \mathrm{V}_h$ se denominan grados de libertad (gdl) globales, y se eligen coincidentes con los valores de v en los nodos de la triangulación T_h.
- Si $\mathrm{K} \in \mathrm{T}_h$ es un triángulo lineal de vértices (x_i, y_i), $i=1,2,3$, los gdl elementales son los valores de v en los dichos vértices.

Elemento finito triangular lineal (cont)

- **Teorema:** Sea $K \in T_h$ un triángulo de vértices (x_i, y_i), i=1,2,3. Una función $v \in P_1(K)$ está determinada de manera única por los gdl elementales, i.e., dados los valores α_i,

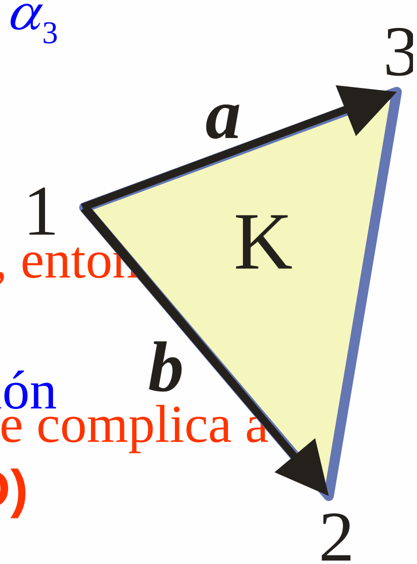
$$\exists! v \in P_1(K) \, / \, v(x_i, y_i) = \alpha_i, \quad i = 1, 2, 3$$

•**Demo.:** $v \in P_1(K) \Rightarrow v(x,y) = c_1 + c_2 x + c_3 y, \quad \forall (x,y) \in K, \; c_i \in \mathbb{R}$

Evaluando en los vértices $\longrightarrow \begin{cases} v(x_1, y_1) = c_1 + c_2 x_1 + c_3 y_1 = \alpha_1 \\ v(x_2, y_2) = c_1 + c_2 x_2 + c_3 y_2 = \alpha_2 \\ v(x_3, y_3) = c_1 + c_2 x_3 + c_3 y_3 = \alpha_3 \end{cases}$ ec (3.7)

$\exists$!solución para α_i dados si det B= $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \neq 0$

det B= $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = 2$ area $K \neq 0 \quad \Rightarrow$ B es no singular $\Rightarrow \exists$!solución



•**Demo. 2:** Notar que dim $P_1(K)$ = # gdl, i.e., # incógn = # ecs.

•Luego, det B≠0 implica que si $v \in P_1(K)$ y $v(x_i, y_i)=0$ para i=1,2,3, enton
debe ser $v \equiv 0$.

•Esto se puede probar sin necesidad de calcular det B, tarea que se complica a medida que se usan polinomios de mayor orden.

(QED)

Determinación de las funciones de base para el triángulo lineal

Toda función $v \in P_1(K)$ puede representarse $v(x,y) = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i(x,y) v(x_i,y_i), \quad \forall (x,y) \in K.$

Las funciones de base λ_i ($\equiv$ coord de área del triángulo K) verifican

$$\lambda_i(x,y) = a_i + b_i x + c_i y \;/\; \lambda_i(x_j,y_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \qquad i,j = 1,2,3.$$

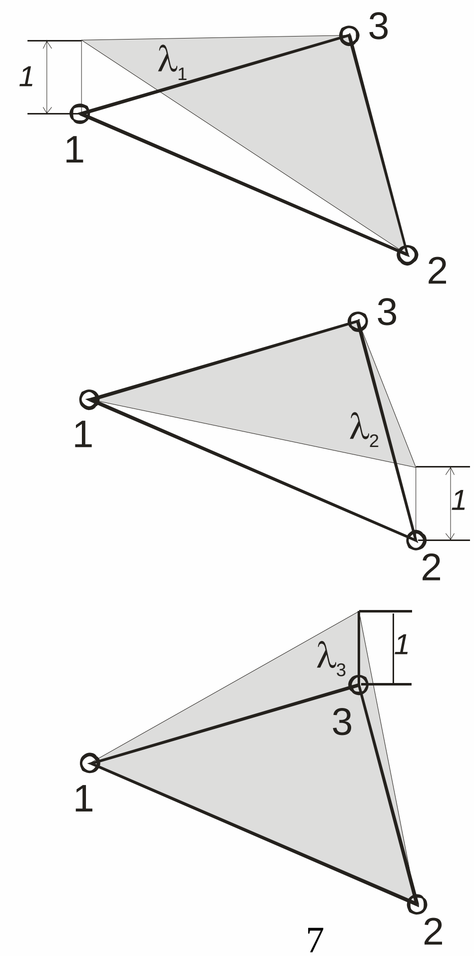
lo que da lugar al sist de ecs $\begin{cases} \lambda_1(x_1,y_1) = a_1 + b_1 x_1 + c_1 y_1 = 1 \\ \lambda_1(x_2,y_2) = a_1 + b_1 x_2 + c_1 y_2 = 0 \\ \lambda_1(x_3,y_3) = a_1 + b_1 x_3 + c_1 y_3 = 0 \end{cases}$

de donde

$$a_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 0 & x_2 & y_2 \\ 0 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}} = \frac{x_2 y_3 - x_3 y_2}{2 \text{ area K}} \qquad b_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & y_1 \\ 1 & 0 & y_2 \\ 1 & 0 & y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}} = \frac{y_3 - y_2}{2 \text{ area K}} \qquad c_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & 1 \\ 1 & x_2 & 0 \\ 1 & x_3 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}} = \frac{x_2 - x_3}{2 \text{ area K}}$$

Análogamente: $a_3 = \dfrac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{2 \text{ area K}} \qquad b_2 = \dfrac{y_1 - y_3}{2 \text{ area K}} \qquad c_2 = \dfrac{x_3 - x_1}{2 \text{ area K}}$

$a_2 = \dfrac{x_3 y_1 - x_1 y_3}{2 \text{ area K}} \qquad b_3 = \dfrac{y_2 - y_1}{2 \text{ area K}} \qquad c_3 = \dfrac{x_1 - x_2}{2 \text{ area K}}$



Continuidad entre elementos triangulares lineales

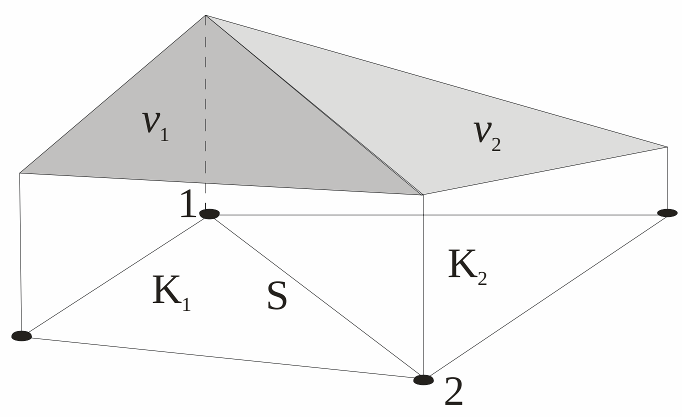
- Dado $V_h = \left\{ v : v \in C^0(\bar{\Omega}) \text{ y } v|_K \in P_1(K),\ \forall K \in T_h \right\}$ ec (3.3)
- Adoptando como gdl los nodos de la malla T_h, podemos definir alternativamente

$$V_h = \left\{ v : v|_K \in P_1(K),\ \forall K \in T_h,\ \text{y } v \text{ es continua en los nodos} \right\} \qquad \text{ec (3.11)}$$

- **Demo.:** Para probar que (3.11)≡(3.4), es necesario probar que la función $v \in V_h$ definida de acuerdo a (3.11) es continua no sólo en los nodos sino también a través de las fronteras interelementales.
  - Sean K_1 y K_2 dos triángulos en T_h que comparten el lado S y los nodos 1 y 2.
  - Sea $v_i = v|_{K_i} \in P_1(K_i)$ la restricción de v a K_i.
  - $v_1 = v_2$ en los nodos 1 y 2, y v_1, v_2 lineales.

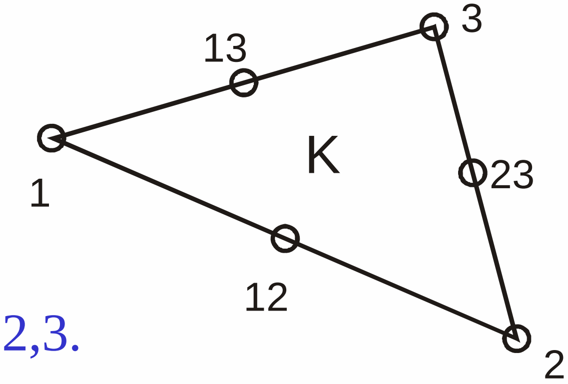
  $\Rightarrow v_1 = v_2$ a lo largo de todo el lado S

  $\Rightarrow v$ es continua a través de S



$\Rightarrow \quad v \in C^0(\bar{\Omega})$ **(QED)**

Elemento finito triangular cuadrático



- Sea el espacio de funciones cuadráticas a trozos:

$$V_h = \left\{ v : v \in C^0(\bar{\Omega}) \text{ y } v\big|_K \in P_2(K), \ \forall K \in T_h \right\}$$

- Sea $K \in T_h$ un triángulo de vértices $\mathbf{x}_i=(x_i,y_i)$, i=1,2,3,
  y sea $\mathbf{x}_{ij}=(\mathbf{x}_i+\mathbf{x}_j)/2$ el punto medio del lado ij, $i<j$, i,j=1,2,3.

- **Teorema:** toda función $v \in P_2(K)$ está únicamente determinada por los gdl

$$v(\boldsymbol{x}_i), \quad i = 1, 2, 3,$$

$$v(\boldsymbol{x}_{ij}), \quad i < j, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Elemento finito triangular cuadrático (cont)

- **Demo.:** como dim $P_2(K)$= #gdl =6, es suficiente probar que si $v \in P_2(K)$ y $v(\boldsymbol{x}_i)=v(\boldsymbol{x}_{ij})=0$ (con $i<j$, $i,j=1,2,3$), entonces debe ser $v \equiv 0$.

1. A lo largo del lado 23, v varía cuadráticamente y $v=0$ en $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$ y $\boldsymbol{x}_{23}$. Luego, $v=0\ \forall \boldsymbol{x} \in \overline{23}$, y v puede escribirse

$$v(\boldsymbol{x}) = \lambda_1(\boldsymbol{x}) w_1(\boldsymbol{x}), \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathrm{K}, \quad w_1 \in \mathrm{P}_1(\mathrm{K}), \quad \lambda_1 \text{ función de base en } \mathrm{P}_1(\mathrm{K}).$$

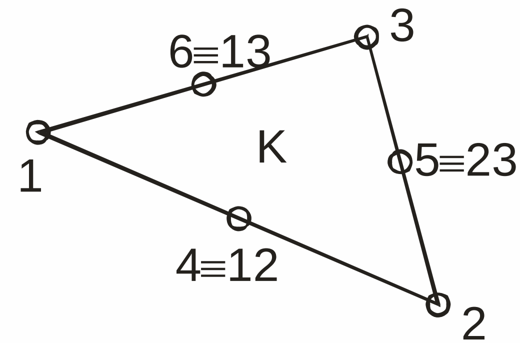
2. Ídem a lo largo del lado 13, luego

$$v(\boldsymbol{x}) = \lambda_1(\boldsymbol{x}) \lambda_2(\boldsymbol{x}) w_0, \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathrm{K}, \quad w_0 \text{ cte}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \text{ funciones de base en } \mathrm{P}_1(\mathrm{K}).$$

3. Evaluando en $\boldsymbol{x}_{12}$

$$v(\boldsymbol{x}_{12}) = \lambda_1(\boldsymbol{x}_{12}) \lambda_2(\boldsymbol{x}_{12}) w_0 = \frac{1}{2}\frac{1}{2} w_0 = 0 \Rightarrow w_0 = 0 \Rightarrow v = 0 \qquad \textbf{(QED)}$$

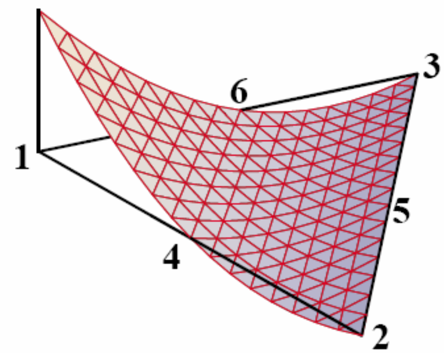
Elemento finito triangular cuadrático (cont)



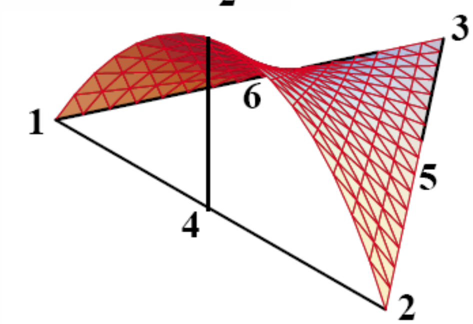
Toda función $v \in P_2(K)$ puede expresarse

$$v = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \left(2\lambda_i - 1\right) v(\boldsymbol{x}_i) + \sum_{i,j=1, i<j}^{3} 4\lambda_i \lambda_j v(\boldsymbol{x}_{ij}) = \sum_{i=1}^{6} \Psi_i v(\boldsymbol{x}_i)$$

Con las funciones de base en $P_2(K)$ dadas por



$$\left.\begin{aligned} \psi_1 &= \lambda_1 \left(2\lambda_1 - 1\right) \\ \psi_2 &= \lambda_2 \left(2\lambda_2 - 1\right) \\ \psi_3 &= \lambda_3 \left(2\lambda_3 - 1\right) \end{aligned}\right\} \text{funciones asociadas a los nodos en vértices}$$



$$\left.\begin{aligned} \psi_4 &= 4\lambda_1 \lambda_2 \\ \psi_5 &= 4\lambda_2 \lambda_3 \\ \psi_6 &= 4\lambda_1 \lambda_3 \end{aligned}\right\} \text{funciones asociadas a los nodos en el medio de los lados}$$

Es fácil verificar que ψ_i, $i=1,\ldots,6$, conforman una base en $P_2(K)$ y además $\psi_i(\boldsymbol{x}_j)=\delta_{ij}$.

Continuidad entre elementos triangulares cuadráticos

- Dado $V_h = \{ v : v \in C^0(\bar{\Omega}) \text{ y } v|_K \in P_2(K), \ \forall K \in T_h \}$ ec (a)

  o, alternativamente,

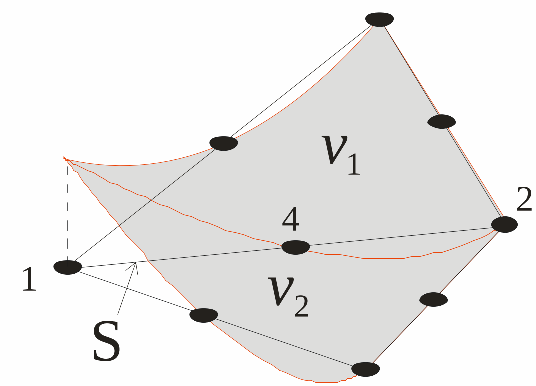
  $V_h = \{ v : v|_K \in P_2(K), \ \forall K \in T_h, \text{ y } v \text{ es continua en los nodos} \}$ ec (b)

- **Demo.:** Para probar que (a)≡(b), es necesario probar que la función $v \in V_h$ definida de acuerdo a (b) es continua no sólo en los nodos sino también a través de las fronteras interelementales.
  - Sean K_1 y K_2 dos triángulos en T_h que comparten el lado S, con nodos 1, 2 y 4.
  - Sea $v_i = v|_{K_i} \in P_2(K_i)$ la restricción de v a K_i.
  - $v_1 = v_2$ en los nodos 1, 2 y 4, y v_1, v_2 cuadráticas.

  $\Rightarrow v_1 = v_2$ a lo largo de todo el lado S

  $\Rightarrow v$ es continua a través de S

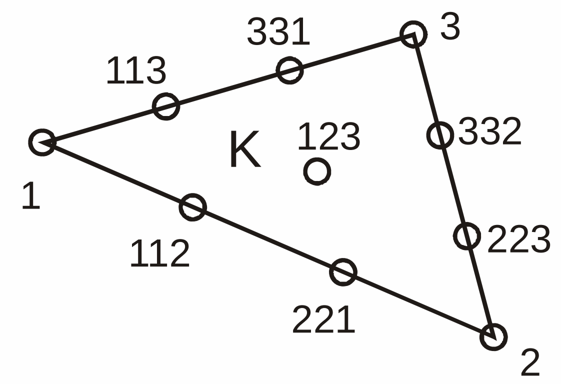
  $\Rightarrow \ v \in C^0(\bar{\Omega})$ **(QED)**



Elemento finito triangular cúbico

- Sea el espacio de funciones cúbicas a trozos:

$$V_h = \left\{ v : v \in C^0(\bar{\Omega}) \text{ y } v|_K \in P_3(K),\ \forall K \in T_h \right\}$$



- Sea $K \in T_h$ un triángulo de vértices $\mathbf{x}_i=(x_i,y_i)$, $i=1,2,3$, y

$$\boldsymbol{x}_{iij} = \frac{2}{3}\boldsymbol{x}_i + \frac{1}{3}\boldsymbol{x}_j, \quad i, j = 1,2,3, \quad i \neq j$$

$$\boldsymbol{x}_{123} = \frac{1}{3}\left(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3\right)$$

- **Teorema:** toda función $v \in P_3(K)$ está únicamente determinada por los gdl

$$v(\boldsymbol{x}_i), \quad i = 1,2,3$$

$$v(\boldsymbol{x}_{iij}), \quad i, j = 1,2,3, \quad i \neq j$$

$$v(\boldsymbol{x}_{123})$$

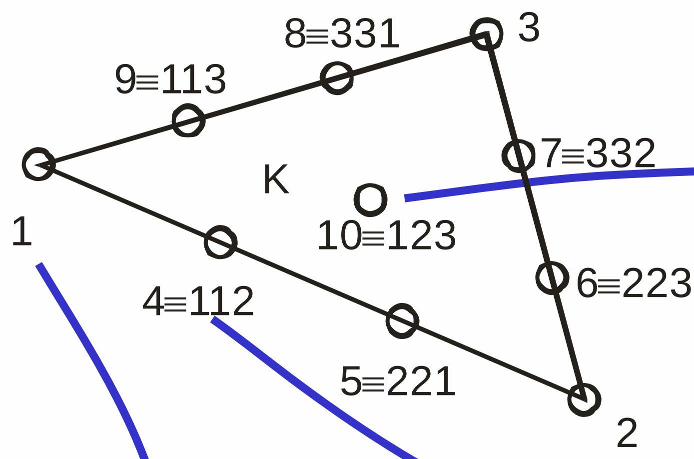
Elemento finito triangular cúbico (cont)

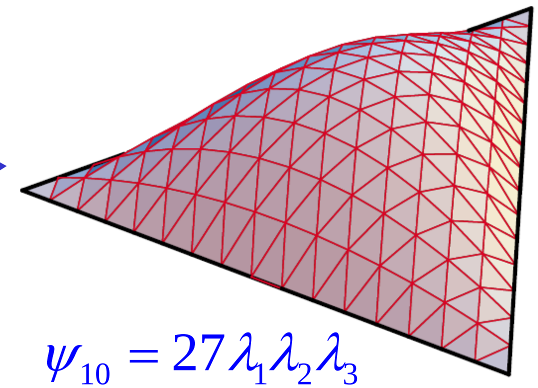
- **Demo.:** como dim $P_3(K)$= #gdl =10, es suficiente probar que si $v \in P_3(K)$ y $v(\boldsymbol{x}_i)=v(\boldsymbol{x}_{iij})=v(\boldsymbol{x}_{123})=0$ (con $i,j=1,2,3$, $i \neq j$), entonces debe ser $v \equiv 0$.

  1. v tiene variación cúbica a lo largo de los lados 12, 23 y 13, y v=0 en cuatro puntos de cada lado, luego v=0 en los tres lados y puede escribirse
  $$v(\boldsymbol{x}) = \lambda_1(\boldsymbol{x})\lambda_2(\boldsymbol{x})\lambda_3(\boldsymbol{x})w_0, \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathrm{K}, \quad w_0 \text{ cte}, \quad \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3 \text{ bases en } \mathrm{P}_1(\mathrm{K}).$$
  2. Evaluando en $\boldsymbol{x}_{123}$
  $$v(\boldsymbol{x}_{123}) = \lambda_1(\boldsymbol{x}_{123})\lambda_2(\boldsymbol{x}_{123})\lambda_3(\boldsymbol{x}_{123})w_0 = \frac{1}{3}\frac{1}{3}\frac{1}{3}w_0 = 0 \Rightarrow w_0 = 0 \Rightarrow v = 0$$

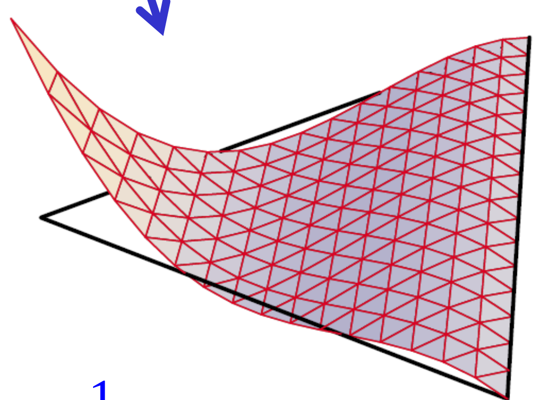
(QED)

Funciones de base para elemento finito triangular cúbico

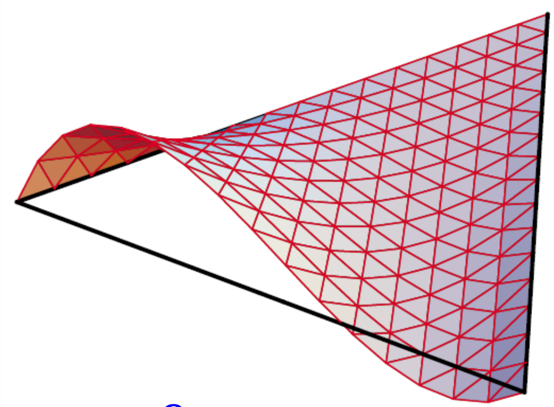




$$\psi_{10} = 27\lambda_1\lambda_2\lambda_3$$



$$\psi_1 = \frac{1}{2}(3\lambda_1 - 1)(3\lambda_1 - 2)\,\lambda_1$$



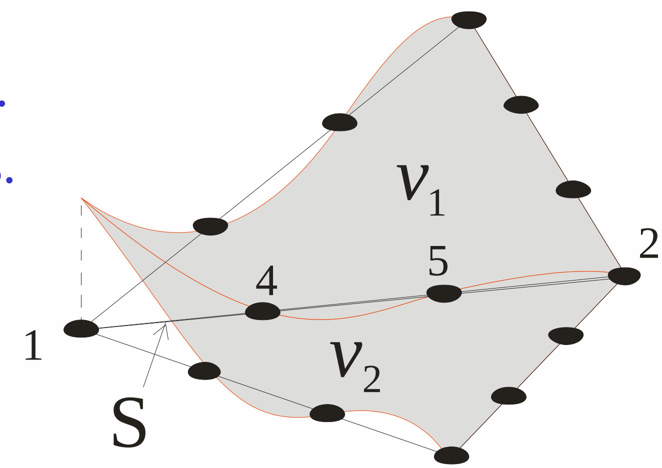
$$\psi_4 = \frac{9}{2}\lambda_1\lambda_2(3\lambda_1 - 1)$$

Continuidad entre elementos triangulares cúbicos

- Dado $V_h = \left\{ v : v \in C^0(\bar{\Omega}) \text{ y } v|_K \in P_3(K),\ \forall K \in T_h \right\}$ ec (a)
- Adoptando como gdl los nodos de la malla T_h, podemos definir alternativamente

$$V_h = \left\{ v : v|_K \in P_3(K),\ \forall K \in T_h,\ \text{y } v \text{ es continua en los nodos} \right\} \qquad \text{ec (b)}$$

- **Demo.:** Para probar que (a)≡(b), es necesario probar que la función $v \in V_h$ definida de acuerdo a (b) es continua no sólo en los nodos sino también a través de las fronteras interelementales.
  - Sean K_1 y K_2 dos triángulos en T_h que comparten el lado S, de nodos extremos 1 y 2, y nodos intermedios 4 y 5.
  - Sea $v_i = v|_{K_i} \in P_3(K_i)$ la restricción de v a K_i.
  - $v_1 = v_2$ en los nodos 1, 2, 4 y 5, y v_1, v_2 cúbicas.
  - $\Rightarrow v_1 = v_2$ a lo largo de todo el lado S
  - $\Rightarrow v$ es continua a través de S
  - $\Rightarrow\ v \in C^0(\bar{\Omega})$ **(QED)**

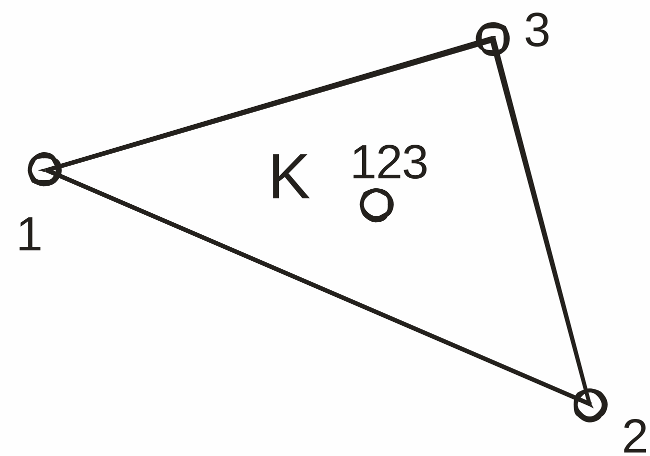


Elemento finito triangular cúbico con gdl en derivadas

- Sea el espacio de funciones cúbicas a trozos:

$$V_h = \left\{ v : v|_K \in P_3(K),\ \forall K \in T_h \right\}$$

- Sea $K \in T_h$ un triángulo de vértices $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i)$, i=1,2,3, y centro de gravedad $\mathbf{x}_{123}$.



- **Teorema:** toda función $v \in P_3(K)$ está únicamente determinada por los gdl

$$v(\boldsymbol{x}_i), \qquad i = 1, 2, 3$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(\boldsymbol{x}_i), \quad \frac{\partial v}{\partial y}(\boldsymbol{x}_i), \qquad i = 1, 2, 3$$

$$v(\boldsymbol{x}_{123})$$

Elemento finito triangular cúbico con gdl en derivadas (cont)

- **Demo.:** como dim $P_3(K)$= #gdl =10, es suficiente probar que si $v \in P_3(K)$ y

$$v(\boldsymbol{x}_i) = \frac{\partial v}{\partial x}(\boldsymbol{x}_i) = \frac{\partial v}{\partial y}(\boldsymbol{x}_i) = v(\boldsymbol{x}_{123}) = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

entonces debe ser $v \equiv 0$.

$$v(\boldsymbol{x}) = \lambda_1(\boldsymbol{x})\lambda_2(\boldsymbol{x})\lambda_3(\boldsymbol{x})w_0, \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathrm{K}, \quad w_0 \text{ cte}, \quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \text{ bases en } \mathrm{P}_1(\mathrm{K}).$$

1. la función v tiene variación cúbica a lo largo del lado 12, y se anula así como su derivada en dos puntos del lado, luego v=0 en todos los puntos del lado 12.
2. Razonando análogamente con los lados 23 y 13, llegamos a

$$v(\boldsymbol{x}) = \lambda_1(\boldsymbol{x})\lambda_2(\boldsymbol{x})\lambda_3(\boldsymbol{x})w_0, \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathrm{K}, \quad w_0 \text{ cte}, \quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \text{ bases en } \mathrm{P}_1(\mathrm{K}).$$

3. Evaluando en $\boldsymbol{x}_{123}$

$$v(\boldsymbol{x}_{123}) = \lambda_1(\boldsymbol{x}_{123})\lambda_2(\boldsymbol{x}_{123})\lambda_3(\boldsymbol{x}_{123})w_0 = \frac{1}{3}\frac{1}{3}\frac{1}{3}w_0 = 0 \Rightarrow w_0 = 0 \Rightarrow v = 0$$

(QED)

Continuidad entre EF triangulares cúbicos con gdl en derivadas

- Dado $V_h = \left\{ v : v \in C^0(\bar{\Omega}) \text{ y } v|_K \in P_3(K),\ \forall K \in T_h \right\}$ ec (a)
- Adoptando como gdl los nodos de la malla T_h, podemos definir alternativamente
$$V_h = \left\{ v : v|_K \in P_3(K),\ \forall K \in T_h,\ \text{y } v, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \text{ continuas en los nodos} \right\} \qquad \text{ec (b)}$$
- **Demo.:** Para probar que (a)≡(b), es necesario probar que la función $v \in V_h$ definida de acuerdo a (b) es continua no sólo en los nodos sino también a través de las fronteras interelementales.
  - –Sean K_1 y K_2 dos triángulos en T_h que comparten el lado S, de nodos 1 y 2.
  - –Sea $v_i = v|_{K_i} \in P_3(K_i)$ la restricción de v a K_i.
  - –$v_1 = v_2$ y $\dfrac{\partial v_1}{\partial s} = \dfrac{\partial v_2}{\partial s}$ (derivadas en la dirección s a lo largo de S)

    en los nodos 1 y 2, y v_1, v_2 cúbicas $\Rightarrow v_1 = v_2$ a lo largo de todo el lado S

    $\Rightarrow v$ es continua a través de S $\Rightarrow v \in C^0(\bar{\Omega})$ **(QED)**
- **Nota:** no se logra continuidad C^1 por cuanto la función de base asociada a $\boldsymbol{x}_{123}$ no llega con pendiente nula a los lados.

Elemento finito triangular C¹-continuo

- Consideremos un espacio de EF $\mathrm{V}_h \subset \mathrm{C}^1(\overline{\Omega})$, lo que requiere usar polinomios de grado 5 por triángulo, i.e.

$$\mathrm{V}_h = \left\{ v : v \in \mathrm{C}^1(\overline{\Omega}) \text{ y } v\big|_{\mathrm{K}} \in \mathrm{P}_5(\mathrm{K}),\ \forall \mathrm{K} \in \mathrm{T}_h \right\}$$

- Sea $\mathrm{K} \in \mathrm{T}_h$ un triángulo de vértices $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i)$, $i=1,2,3$, y sea $\mathbf{x}_{ij} = (\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_j)/2$ el punto medio del lado ij, $i<j$, $i,j=1,2,3$.

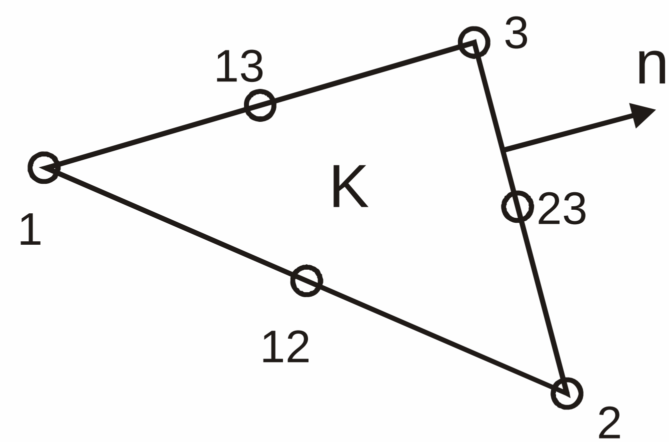
- **Teorema:** toda función $v \in \mathrm{P}_5(\mathrm{K})$ está únicamente determinada por los gdl

$$v(\boldsymbol{x}_i), \qquad i = 1, 2, 3$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(\boldsymbol{x}_i), \quad \frac{\partial v}{\partial y}(\boldsymbol{x}_i), \qquad i = 1, 2, 3$$

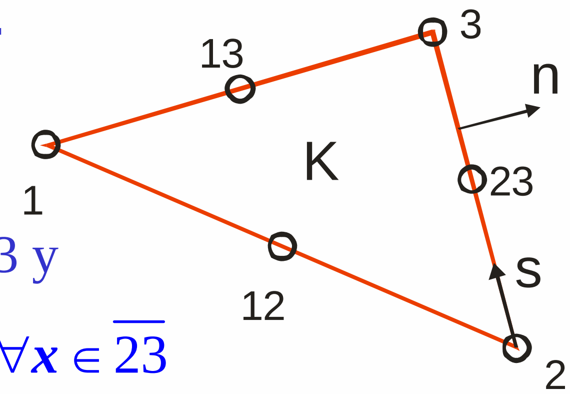
$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(\boldsymbol{x}_i), \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}(\boldsymbol{x}_i), \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(\boldsymbol{x}_i), \qquad i = 1, 2, 3$$

$$\frac{\partial v}{\partial n}(\boldsymbol{x}_{ij}), \qquad i, j = 1, 2, 3,\ i < j$$



Elemento finito triangular C¹-continuo (cont)

- **Demo.:** como dim $P_5(K)$= #gdl =21, es suficiente probar que si todos los gdl son nulos, entonces debe ser $v \equiv 0$.



1. v es un polinomio de grado ≤ 5 a lo largo del lado 23 y

$$v(\boldsymbol{x}_i) = \frac{\partial v}{\partial s}(\boldsymbol{x}_i) = \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}(\boldsymbol{x}_i) = 0, \quad i = 2,3 \quad \Rightarrow v = 0, \quad \forall \boldsymbol{x} \in \overline{23}$$

2. $\dfrac{\partial v}{\partial n}$ es un polinomio de grado ≤ 4 a lo largo del lado 23 y

$$\frac{\partial v}{\partial n}(\boldsymbol{x}_{23}) = \frac{\partial v}{\partial n}(\boldsymbol{x}_i) = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)(\boldsymbol{x}_i) = 0, \quad i = 2,3 \quad \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial n} = 0, \quad \forall \boldsymbol{x} \in \overline{23}$$

$$v = 0, \frac{\partial v}{\partial n} = 0, \quad \forall \boldsymbol{x} \in \overline{23} \quad \Rightarrow \quad v(\boldsymbol{x}) = \left[\lambda_1(\boldsymbol{x})\right]^2 p_3(\boldsymbol{x}), \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathrm{K}, p_3 \in \mathrm{P}_3(\mathrm{K})$$

3. Aplicando idéntico razonamiento sobre los lados 12 y 13, llegamos a

$$v(\boldsymbol{x}) = w_0 \left[\lambda_1(\boldsymbol{x})\right]^2 \left[\lambda_2(\boldsymbol{x})\right]^2 \left[\lambda_3(\boldsymbol{x})\right]^2, \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathrm{K}, w_0 \text{ cte}$$

$$v \in \mathrm{P}_5\left(\mathrm{K}\right) \Leftrightarrow w_0 = 0 \quad \Rightarrow v(\boldsymbol{x}) \equiv 0, \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathrm{K} \quad \textbf{(QED)}$$

Continuidad entre EF triangulares C¹-continuos

- Sean K_1 y K_2 dos triángulos en T_h que comparten el lado S, de extremos 2, 3.
- Sea $v_i = v|_{K_i} \in P_5(K_i)$ la restricción de v a K_i., y $w=v_1-v_2$ sobre S.

$$\left.\begin{array}{l} w(\boldsymbol{x}_i) = \dfrac{\partial w}{\partial s}(\boldsymbol{x}_i) = \dfrac{\partial^2 w}{\partial s^2}(\boldsymbol{x}_i) = 0, \quad i = 2,3 \;\Rightarrow w = 0, \quad \forall \boldsymbol{x} \in S \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Rightarrow \dfrac{\partial w}{\partial s} = 0, \quad \forall \boldsymbol{x} \in S \\ \dfrac{\partial w}{\partial n}(\boldsymbol{x}_{23}) = \dfrac{\partial w}{\partial n}(\boldsymbol{x}_i) = \dfrac{\partial}{\partial s}\left(\dfrac{\partial w}{\partial n}\right)(\boldsymbol{x}_i) = 0, \quad i = 2,3 \;\Rightarrow \dfrac{\partial w}{\partial n} = 0, \quad \forall \boldsymbol{x} \in S \end{array}\right\} \Rightarrow v \in C^1(\bar{\Omega})$$

(QED)

- Luego: $V_h = \left\{ v \in C^1(\bar{\Omega}) : v|_K \in P_5(K), \; \forall K \in T_h \right\}$

$$\equiv \left\{ \begin{array}{l} v : v|_K \in P_5(K), \; \forall K \in T_h, \\ v, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} \text{ continuas en los nodos vértices} \\ \dfrac{\partial v}{\partial n} \text{ continua en los nodos medios de los lados} \end{array} \right\}$$

Elemento finito tetraédrico lineal

- Sea Ω la unión de un conjunto T_h={K} de tetraedros no superpuestos K tales que ningún vértice de algún tetraedro se ubique sobre el lado de otro tetraedro.

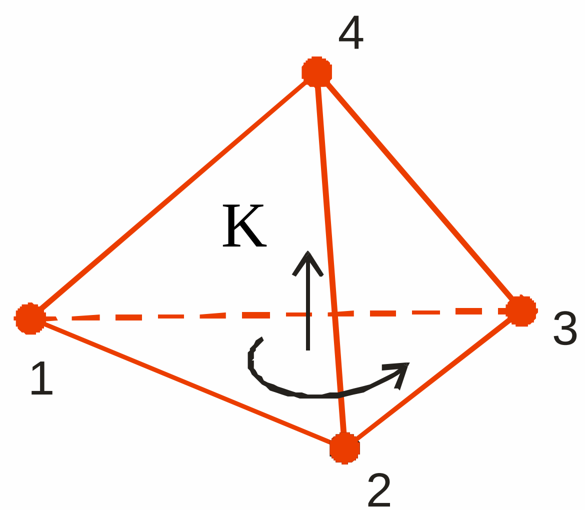
- Adoptamos los siguientes espacios polinómicos por trozos de EF

$$V_h = \left\{ v : v \in P_r(K),\ \forall K \in T_h,\ \text{i.e.},\ v = \sum_{i+j+m \le r} a_{ijm} x^i y^j z^m,\ \forall (x,y,z) \in K,\ a_{ijm} \in \mathbb{R} \right\}$$

- Para r=1, toda función $v \in P_1(K)$ está únicamente determinada por sus valores en los vértices de K.

- En este caso, el espacio de EF es

$$V_h = \left\{ v : v \in C^0(\bar{\Omega}) \text{ y } v \in P_1(K),\ \forall K \in T_h \right\}$$

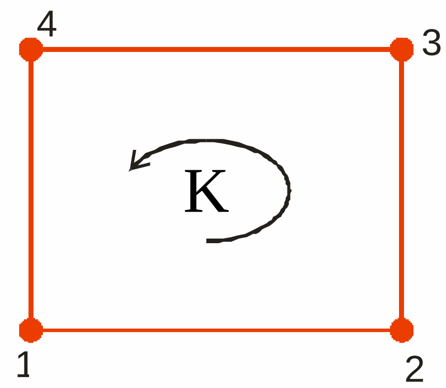


Elemento finito rectangular bilineal

- Sea Ω la unión de un conjunto T_h={K} de rectángulos no superpuestos K tales que ningún vértice de algún rectángulo se ubique sobre el lado de otro rectángulo.
- Definimos el espacio

$$Q_1(K) = \left\{ v : v \text{ es bilineal en K, i.e., } v(x,y) = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{11}xy,\ \forall (x,y) \in K,\ a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$$

- Toda función $v \in Q_1(K)$ está únicamente determinada por sus valores en los vértices del rectángulo K.



- Se puede demostrar fácilmente que existe continuidad interelementos de *v*.
- Luego, el espacio de EF es

$$V_h = \left\{ v : v \in C^0(\bar{\Omega}) \text{ y } v \in Q_1(K),\ \forall K \in T_h \right\}$$

Elemento finito rectangular bicuadrático

- Definimos el espacio de funciones bicuadráticas en K

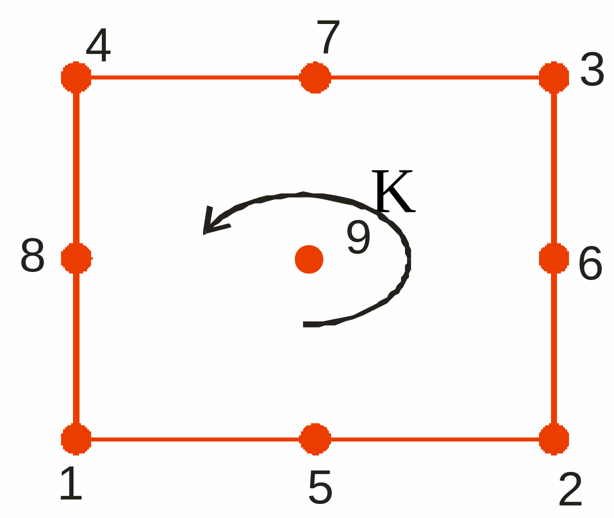
$$Q_2(K) = \left\{ v: \ v(x,y) = \sum_{i,j=0}^{2} a_{ij} x^i y^j, \forall (x,y) \in K, a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$$

- Toda función $v \in Q_2(K)$ está únicamente determinada por sus valores en los vértices, en el medio de los lados y en el centro del rectángulo K.

- Se puede demostrar fácilmente que existe continuidad interelementos de *v*.

- Luego, el espacio de EF es

$$V_h = \left\{ v : v \in C^0(\bar{\Omega}) \text{ y } v \in Q_2(K), \ \forall K \in T_h \right\}$$

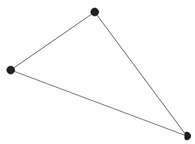
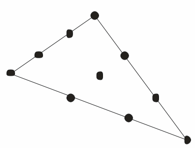
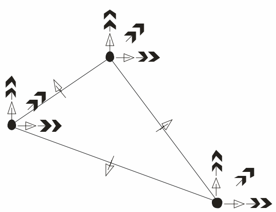


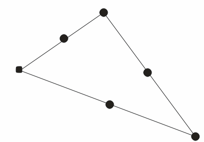
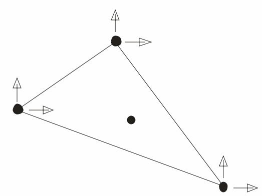
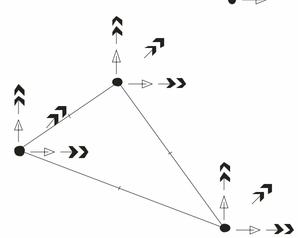
Resumen

- Definimos un elemento finito como la terna $\{K, P_K, \Sigma\}$, donde
  - K es un objeto geométrico.
  - P_K es un espacio lineal de dimensión finita de funciones definidas en K.
  - Σ es un conjunto de gdl que determinan de manera única toda función $v \in K$.

- Por ej., para el EF triangular lineal $\{K, P_K, \Sigma\}$, resulta
  - K es un triángulo.
  - $P_K = P_1(K)$.
  - Σ es el conjunto de valores de v en los vértices de K.

Tipos de elementos finitos más comunes

Geometria Grados de libertad Σ	# gdl	Espacio de funciones	Continuidad del espacio MEF
	3	$P_1(K)$	C^0
	10	$P_3(K)$	C^0
	21	$P_5(K)$	C^1

Geometria Grados de libertad Σ	# gdl	Espacio de funciones	Continuidad del espacio MEF
	6	$P_2(K)$	C^0
	10	$P_3(K)$	C^0
	18	$P_{5'}(K)$	C^1

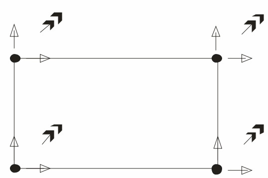
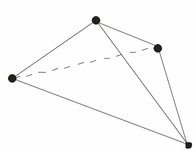
Valor de la función

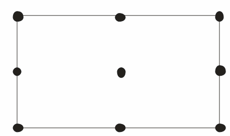
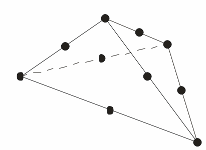
Valores de las derivadas primeras

Valores de las derivadas segundas

Valor de la derivada normal al lado

Tipos de elementos finitos más comunes (cont)

Geometria Grados de libertad Σ	# gdl	Espacio de funciones	Continuidad del espacio MEF
	4	$Q_1(K)$	C^0
	16	$Q_3(K)$	C^0
	3	$P_2(K)$	C^0
	4	$P_1(K)$	C^0

Geometria Grados de libertad Σ	# gdl	Espacio de funciones	Continuidad del espacio MEF
	9	$Q_2(K)$	C^0
	2	$P_1(K)$	C^0
	4	$P_3(K)$	C^1
	10	$P_2(K)$	C^0

Valor de la función

Valores de las derivadas primeras

Valores de las derivadas segundas

Valor de la derivada normal al lado

Soporte de diferentes funciones de base