

CONTENIDO

	PÁG.
INTRODUCCION.....	3
1. DESCRIPCIÓN Y JUSTIFICACIÓN DEL PROBLEMA.....	5
1.1. JUSTIFICACIÓN.....	5
1.2. OBJETIVOS.....	6
1.2.1. OBJETIVO GENERAL.....	6
1.2.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS.....	
2. MARCO TEÓRICO.....	6
2.1. LA ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER DEPENDIENTE DEL TIEMPO....	7
2.2. CALCULO DE VARIACIONES.....	10
2.2.1. PRINCIPIO DE LA INTEGRAL	10
2.3. PRINCIPIO DE HAMILTON Y ECU. DE LAGRANGE.....	15
2.4. FUNCIÓN DE HAMILTON.....	17
2.5. ECUACIÓN DE HAMILTON DEL MOVIMIENTO.....	19
2.6. PRINCIPIO DE FERMAT.....	21
2.6.1. CAMINO ÓPTICO.....	21
2.6.2. PROPAGACIÓN RECTILÍNEA DE LA LUZ EN MEDIOS HOMOGÉNEOS.....	22
2.6.3. LEY DE LA REFLEXIÓN.....	22
2.6.4. LEY DE LA REFRACCIÓN.....	24
2.6.5. CONSERVACIÓN DEL PLANO DE INCIDENCIA.....	25
2.6.6. REVERSIBILIDAD DE LAS TRAYECTORIAS LUMINOSAS.....	26
2.7. COORDENADAS CÍCLICAS.....	27

2.7.1. TRANSFORMACIONES CANÓNICAS.....	28
2.8. TEORÍA DE HAMILTON-JACOBI.....	30
2.8.1. ECUACIONES DE HAMILTON-JACOBI, PARA LA FUNCIÓN PRINCIPAL DE HAMILTON.....	31
2.9. CORCHETES DE LAGRANGE Y POISSON.....	37
2.9.1. CORCHETES DE POISSON.....	39
2.9.2. PROPIEDADES ALGEBRAICAS FUNDAMENTALES DE LOS CORCHETES DE POISSON	40
2.9.3. ECUACIONES DEL MOVIMIENTO EN FUNCIÓN DE LOS CORCHETES DE POISSON	41
2.10. APROXIMACIÓN GEOMÉTRICA Y ÓPTICA DE RAYOS.....	42
2.10.1. ONDAS LOCALMENTE PLANA.....	42
2.10.2. EIKONAL Y VECTOR RAYO.....	42
2.10.3. ECUACIONES FUNDAMENTALES.....	44
2.10.4. EL PRINCIPIO DE FERMAT.....	46
2.11. MECÁNICA Y ÓPTICA GEOMÉTRICA.....	48
3. PROPUESTA DE HAMILTON – JACOBI.....	52
3.1. APROXIMACIÓN ÓPTICA.....	53
3.2. ONDAS DESDE EL FORMALISMO CLÁSICO DE HAMILTON- JACOBI.....	55
4. CONCLUSIÓN.....	61
5. BIBLIOGRAFÍA.....	62

INTRODUCCIÓN

En el proceso histórico, se puede decir que la raíz de la moderna mecánica cuántica ondulatoria pudo surgir desde de la teoría clásica de Hamilton-Jacobi.

De los principios variacionales en mecánica clásica es muy conocido el principio de mínima acción de Hamilton el cual plantea que “entre todo los caminos posibles entre dos puntos compatibles con la conservación de la energía, el sistema físico se mueve siguiendo una trayectoria muy particular para la cual el tiempo es mínimo o estrictamente un extremal”.

En nuestro trabajo es primordial este principio, así como también el tratado de las transformaciones canónicas, deducción de las ecuaciones del movimiento de Hamilton a partir de las transformaciones de Legendre, ya que este será un trabajo desde un punto de vista histórico de alrededor de la tercera década del siglo diecinueve.

Así el principio de mínima acción nos recuerda el principio de Fermat de óptica geométrica (el rayo luminoso recorre entre dos puntos un camino tal que el tiempo en recorrerlo es el mínimo).

Es aquí donde encontramos una primera conexión entre el punto figurativo de una partícula clásica y un rayo de luz según lo define la óptica geométrica, los cuales eran ya aceptados por la comunidad científica de la época del siglo diecinueve.

Los notables descubrimientos de este siglo nos proporcionan innumerables ejemplos de fenómenos inexplicables para la mecánica clásica. La estabilidad de los átomos, el efecto fotoeléctrico y el experimento de Davisson-Germer sobre la difracción de electrones, por no citar más que unos pocos, son ejemplos de este tipo, todos los cuales han servido para el progreso de nuestra visión actual sobre el comportamiento de las partículas en microscópicas regiones del espacio. La falla de la física clásica en la explicación del comportamiento aparentemente extraño de las partículas en microscópicas regiones del espacio, no es tan sorprendente si se tiene en cuenta que dicha ciencia supone naturaleza que es continua y que cuando tratamos del comportamiento de los bloques fundamentales que forman la naturaleza, las partículas fundamentales, estamos investigando aquellas partes de la misma que son discontinuas. Por esta razón y por otras que se exponen extensamente en los libros de mecánica cuántica, la física clásica no se puede aplicar al estudio de la creación, destrucción o interacción entre las partículas fundamentales.

Las partículas de las microscópicas regiones del espacio exhiben propiedades ondulatorias. Por otra parte, la radiación electromagnética que, en física clásica, se describe como una onda, tiene características corpusculares (o de partículas).

El punto de vista actual de la mecánica cuántica, sugerido por primera vez en 1924 por Luis de Broglie, es que es natural que las partículas, en ambiente apropiado, muestren propiedades ondulatorias y que, a su vez, las ondas exhiban propiedades corpusculares. Existe, entonces, una dualidad de onda y partícula en la naturaleza siendo la descripción corpuscular el límite de la ondulatoria. La descripción corpuscular es buena, cuando el movimiento ondulatorio se desarrolla en una región en que las propiedades que influyen en la propagación de la onda no varían apreciablemente en distancias iguales a la longitud de onda. Desde este punto de vista la analogía entre óptica geométrica y mecánica, es más fundamental de lo que podemos inferir.¹

En este trabajo monográfico el objetivo principal es imaginar como puede ser justificada la ecuación ondulatoria de Schrödinger. Desde el punto de vista histórico del desarrollo de las ideas, en este proceso de justificación se utiliza la aproximación óptica, utilizando ondas desde el formalismo clásico de Hamilton-Jacobi.

¹ Walter Hauser, INTRODUCCION A LOS PRINCIPIOS DE MECANICA.

1. DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

1.1. JUSTIFICACIÓN

El propósito es ayudar a construir un proceso histórico que le sirva a los estudiantes, a profundizar un poco sobre cómo pudo ser la deducción de la ecuación cuántica del modelo ondulatorio de Erwin Schrödinger, utilizando una justificación desde una perspectiva histórica de la mecánica clásica.

Dado que esta ecuación viene como un principio en algunos libros de mecánica cuántica.

Aquí se pretende mostrar una justificación histórica que arranca desde la tercera década del siglo diecinueve con las ecuaciones fisicomatemática de Hamilton-Jacobi.

1.2. OBJETIVOS

1.2.1. OBJETIVO GENERAL.

- A partir de la ecuación clásica de Hamilton-jacobi, justificar la ecuación ondulatoria de schrödinger.

1.2.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS.

- Encontrar la ecuación clásica de Hamilton-jacobi, a partir de principios variacionales de mínima acción.
- Mostrar un símil entre la óptica geométrica (el rayo de luz) y la teoría de la partícula de Hamilton-jacobi

2. MARCO TEÓRICO

2.1. LA ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER DEPENDIENTE DEL TIEMPO.

Se comienza primordialmente el estudio haciendo una comparación entre mecánica clásica y su límite hacia la mecánica cuántica.

La mecánica clásica es solo aplicable a partículas macroscópicas. Para “partículas” microscópicas es necesaria una nueva forma de mecánica que se denomina ***mecánica cuántica***.

En mecánica clásica el movimiento de una partícula está gobernado por la segunda ley de Newton:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m \frac{d^2x}{dt^2} \quad (1)$$

Donde \mathbf{F} es la fuerza que actúa sobre la partícula, m es su masa, t es el tiempo y \mathbf{a} es la aceleración, que viene dada por $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \left(\frac{d}{dt}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}$, donde \mathbf{v} es la velocidad.

La función de energía potencial mecanoclásica V de una partícula que se mueve en una dimensión satisface la relación

$$\partial V(x, t) / \partial x = -F(x, t) \quad (1.2)$$

Por ejemplo, para una partícula que se mueve en el campo gravitacional terrestre tenemos $\partial V / \partial x = -F = mg$, e integrando queda que $V = mgx + c$, donde c es una constante arbitraria. Se puede fijar el cero de energía potencial como se quiera. En este caso, tomando $c = 0$ se obtiene; $V = mgx$ para la función de energía potencial.

La palabra estado en mecánica clásica significa la especificación de la posición y la velocidad de cada partícula del sistema en algún instante del tiempo, más la especificación de las fuerzas que actúan sobre las partículas.

Aunque la mecánica clásica es determinista, en el año de 1970 se tuvo conocimiento de muchos sistemas mecanoclásicos (por ejemplo, en un péndulo que oscila bajo la influencias de la gravedad, sujeto a una fuerza de fricción y una fuerza impulsadora periódica) muestra un comportamiento caótico para ciertos conjuntos de valores de los parámetros del sistema. En un sistema caótico, el

movimiento es extraordinariamente sensible a los valores iniciales de las posiciones y velocidades de las partículas y a las fuerzas que actúan sobre ellas.

Conociendo de forma exacta el estado presente de un sistema mecanoclásico, podemos predecir su estado futuro. Sin embargo, el principio de incertidumbre de Heisenberg pone de manifiesto que *“no podemos determinar simultáneamente la posición y la velocidad exacta de una partícula macroscópica”*, de modo que no podemos disponer de la información que requiere la mecánica clásica para predecir el movimiento futuro del sistema. En mecánica cuántica debemos contentarnos con algo menos que la predicción completa del movimiento futuro exacto del sistema.

Para describir el **estado** de un sistema en mecánica cuántica, postulamos la existencia de una función de las coordenadas de las partículas, llamada **función de onda o función de estado Ψ** .

Para un sistema unidimensional de una sola partícula tenemos $\Psi = \Psi(x, t)$.

Para encontrar el estado futuro de un sistema mecanocuántico conociendo el estado presente necesitamos una ecuación que nos diga cómo cambia la función de onda con el tiempo. **Para un sistema unidimensional de una sola partícula se postula que esta ecuación es.**

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} + V(x, t) \Psi(x, t). \quad (1.3)$$

Donde la constante \hbar (**h- barra**) se define como

$$\hbar \equiv \frac{h}{2\pi} \quad (1.4)$$

En el concepto de función de onda y la ecuación que proporciona la forma en la que dicha función cambia con el tiempo fueron descubiertos en 1926 por el físico austríaco Erwin Schrödinger (1887-1961). En esta ecuación, conocida como **ecuación de schrödinger dependiente del tiempo** (o **ecuación de onda de schrödinger**), $i = \sqrt{-1}$, m es la masa de la partícula, y $V(x, t)$ es la función de energía potencial del sistema.

La función de onda contiene toda la información que es posible conocer sobre el sistema. No podemos esperar que Ψ proporcione una especificación concreta de la posición, como hace el estado mecanoclásico del sistema. La respuesta concreta a esta pregunta la dio Max Born poco después de que Schrödinger descubriese su ecuación. *Born postulo que la cantidad*

$$|\Psi(x, t)|^2 dx \quad (1.5)$$

Da la *probabilidad* de encontrar a la partícula en el tiempo t en la región del eje x comprendida entre x y $x + dx$. La función $|\Psi(x,t)|^2$ es la ***densidad de probabilidad*** de encontrar a la partícula en cualquier lugar infinitesimal del eje x

Para establecer una relación precisa entre $|\Psi(x,t)|^2$ Y las medidas experimentales, tendríamos que tomar un gran número de sistemas idénticos no interaccionantes, en el mismo estado Ψ , y medir la posición de la partícula en cada uno de ellos. Si tenemos n sistemas y realizamos n medidas, y si dn_x es el número de medidas en las que encontramos a la partícula entre x y $x + dx$, entonces el cociente $\frac{dn_x}{n}$ da la probabilidad de encontrar la partícula en x y $x + dx$, de este modo,

$$\frac{dn_x}{n} = |\Psi(x,t)|^2 dx$$

La representación grafica $(1/n) dn_x / dx$ frente a x proporciona la densidad de probabilidad $|\Psi|^2$ en función de x .

La mecánica cuántica tiene una naturaleza básicamente *estadística*. Conociendo el estado del sistema, no podemos predecir el resultado de una medida de la posición con certeza. Solo podemos predecir las *probabilidades* de obtener los diferentes resultados posibles.

La mecánica cuántica no afirma que un electrón se encuentre repartido en una amplia región del espacio, como ocurre con una onda. Son las distribuciones de probabilidad (funciones de onda) que se utilizan para describir el movimiento del electrón, las que tienen un comportamiento ondulatorio y satisfacen una ecuación de ondas.

Aunque es algo extraño que se haya escrito la ecuación de schrödinger sin probarla. Estableciendo analogías entre óptica geométrica y mecánica clásica por un lado, y la óptica ondulatoria y la mecánica cuántica por otro lado, puede mostrarse la verosimilitud de la ecuación de schrödinger. La óptica geométrica es una aproximación a la óptica ondulatoria, valida cuando la longitud de onda de la luz es mucho más pequeña que el tamaño del aparato. Del mismo modo, la mecánica clásica es una aproximación a la mecánica cuántica, valida cuando la longitud de onda de la partícula es mucho más pequeña que el tamaño del aparato. Resulta plausible, por tanto, derivar una ecuación apropiada para la mecánica cuántica a partir de la mecánica clásica, basándonos en la relación existente entre las ecuaciones de la óptica geométrica y la ondulatoria².

² Ira N. Levine (Química Cuántica quinta edición. Pág. 7)

2.2. ALGUNAS TÉCNICAS DEL CÁLCULO DE VARIACIONES

2.2.1. PRINCIPIO DE LA INTEGRAL

Antes de demostrar que las ecuaciones de LaGrange se deducen del principio de mínima acción de Hamilton³, debemos hacer una digresión acerca de los métodos del cálculo de variaciones, ya que uno de los principales problemas de este cálculo es hallar la curva para la cual una integral curvilínea dada tenga un valor estacionario.

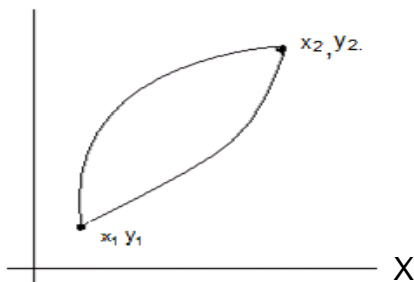
Consideramos esencialmente el problema en forma unidimensional: Consideremos primordialmente una función $f(y, \dot{y}, x)$ definida sobre una curva $y = y(x)$ entre dos valores x_1 y x_2 , donde $\dot{y} = \frac{dy}{dx}$.

Queremos encontrar una curva particular $y(x)$ tal que la integral curvilínea J de la función f entre x_1 y x_2 ,

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(y, \dot{y}, x) dx, \quad \dot{y} = \frac{dy}{dx} \quad (2)$$

tenga un valor estacionario relativo a las curvas que difieren infinitesimalmente de la función $y(x)$. La letra x desempeña el papel de parámetro o variable independiente, y solo consideramos curvas variadas para las cuales $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$

Y caminos variados en el problema de extremos unidimensionales.



Planteemos el problema en una forma que nos permita utilizar los métodos conocidos del cálculo diferencial para hallar los puntos estacionarios de una

³ La deducción se toma del libro Mecánica Clásica (GHOLDSTEIN) capítulo 2.

función. Como J debe tener un valor estacionario para la curva correcta (camino) relativa a toda curva próxima, la variación debe ser cero relativa a algún conjunto particular de curvas vecinas señaladas por un parámetro infinitesimal α . Tal conjunto de curvas podríamos representarlas por $y(x, \alpha)$, representado a $y(x, 0)$ al camino correcto.

Si tomamos como ejemplo la elección de una función cualquiera $\eta(x)$ que se anule en $x = x_1$ y $x = x_2$ un conjunto de posibles curvas variadas sería

$$y(x, \alpha) = y(x, 0) + \alpha \eta(x) \quad (2.1)$$

Por sencillez, supongamos que tanto la curva $y(x)$ como la función auxiliar $\eta(x)$ sean funciones continuas y sin singularidad entre x_1 y x_2 , con primera y segunda derivadas continuas en el mismo intervalo. Para cualquiera de tales familias de curvas paramétrica, la integral J será también función de α :

$$J(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f(y(x, \alpha), \dot{y}(x, \alpha), x) dx \quad (2.2)$$

Y, $\left(\frac{dJ}{d\alpha}\right)_{\alpha=0} = 0$ es la condición de obtención de un punto estacionario.

Por los métodos usuales de derivación bajo el signo de integración tenemos:

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{\partial \dot{y}}{\partial \alpha} \right\} dx \quad (2.3)$$

Considerando la segunda de esta integrales

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{\partial \dot{y}}{\partial \alpha} dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial \alpha} dx$$

E integrando por parte tenemos

$$u = \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \quad dv = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial y}{\partial \alpha} dx$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) dx \quad v = \int \frac{d}{dx} \frac{\partial y}{\partial \alpha} dx = \frac{\partial y}{\partial \alpha}$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \cdot \frac{\partial \dot{y}}{\partial \alpha} dx = \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial y}{\partial \alpha} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) dx$$

Las condiciones impuestas a todas las curvas variadas son las que pasan por los puntos (x_1, y_1) , (x_2, y_2) y por tanto en x_1 y x_2 se anulará la derivada parcial de y respecto a α . La ecuación anterior se reduce a

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{\partial \dot{y}}{\partial \alpha} dx = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \frac{\partial y}{\partial \alpha} dx$$

Por tanto la ecu. (2.3.) tendrá la forma

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \cdot \frac{\partial \dot{y}}{\partial \alpha} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right\} dx$$

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \frac{\partial y}{\partial \alpha} dx, \quad \text{aplicando la condición de valor estacionario}$$

$$\left(\frac{dJ}{d\alpha} \right)_{\alpha=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha} \right)_0 dx = 0 \quad (2.4)$$

Obtenemos una ecuación muy conocida en el cálculo de variaciones, podemos entonces aplicar a la ecu. (2.4.) el llamado «lema fundamental» del cálculo de variaciones que dice que si

$$\int_{x_1}^{x_2} M(x) \cdot \eta(x) dx = 0 \quad (2.5)$$

para todas las funciones arbitrarias $\eta(x)$ continuas hasta la segunda derivada, $M(x)$ deberá ser idénticamente nula en el intervalo (x_1, x_2) . La ecuación (2.5) puede entonces ser válida solamente si $M(x)$ se anula en un punto elegido arbitrariamente, la que demuestra que $M(x)$ debe ser nula en todo el intervalo

De la ecu. (2.4) y del lema fundamental se deduce por tanto, que J sólo puede tener un valor estacionario si

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) = 0 \quad (2.6)$$

La cantidad diferencial $(\frac{dy}{d\alpha})_0 d\alpha = \delta y$ (2.7)

representa el apartamiento infinitesimal de la curva variada respecto a la curva correcta $y(x)$ en el punto x y por tanto corresponde al desplazamiento virtual (de aquí la notación δy). Análogamente, la variación de J respecto al camino correcto puede designarse

$$(\frac{dJ}{d\alpha})_0 d\alpha = \delta J \quad (2.8)$$

La aseveración de que J es estacionaria para el camino correcto podrá, pues, escribirse de la forma

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right\} \delta y dx = 0$$

La ecuación anterior se puede escribir así exigiendo que $y(x)$ satisfaga la ecuación diferencial (2.6).

El problema fundamental del cálculo de variaciones se generaliza fácilmente al caso en que la función f sea función de varias variables independientes y_i y de sus derivadas \dot{y}_i , todas función de la variable paramétrica x . entonces una variación de la integral J ,

$$\delta J = \delta \int_1^2 f \{y_1(x), y_2(x), \dots, \dot{y}_1(x), \dot{y}_2(x), \dots, x\} dx \quad (2.9)$$

Como en el razonamiento anterior, considerando a J función de un parámetro α que rotula un posible conjunto de curvas $y_i(x, \alpha)$. Así, podemos introducir α haciendo

$$\begin{aligned} y_1(x, \alpha) &= y_1(x, 0) + \alpha \eta_1(x) \\ y_2(x, \alpha) &= y_2(x, 0) + \alpha \eta_2(x) \\ y_3(x, \alpha) &= y_3(x, 0) + \alpha \eta_3(x) \\ &\dots \\ &\dots \\ &\dots \\ y_i(x, \alpha) &= y_i(x, 0) + \alpha \eta_i(x) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Donde $y_1(x, 0), y_2(x, 0), \dots$, etc. Son soluciones del problema de extremos (a obtener) y η_1, η_2 , etc, son funciones de x independientes que se anulan en los puntos terminales y que son continuas hasta la segunda derivada, pero que por lo demás son completamente arbitraria.

El cálculo tiene lugar como antes, la variación de J se escribe

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} d\alpha = \int_1^2 \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \alpha} d\alpha \right) dx \quad (2.11)$$

Integrando por partes el segundo miembro de la sumatoria

$$u = \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i}, \quad dv = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} dx$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \right) dx, \quad v = \int \frac{d}{dx} \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} dx = \frac{\partial y_i}{\partial \alpha}$$

$$\int_1^2 \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \alpha} dx = \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} \right|_1^2 - \int_1^2 \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \alpha} \frac{dy}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} dx$$

La primera parte de la integral se anule debido a que todas las curvas pasan por los puntos terminales fijos. Sustituyendo en la ecuación (2.9) δJ queda

$$\delta J = \int_1^2 \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \right) \delta y_i dx,$$

Donde la variación δy_i es

$$\delta y_i = \left(\frac{\partial y_i}{\partial \alpha} \right)_0 d\alpha$$

Como las variables y son independientes, las variaciones δy_i también lo serán.

Luego por una ampliación del lema fundamental ecu. (2.5), la condición que la variación de la integral J sea cero exige que se anulen los coeficientes por separados de las δy_i ,

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} = 0 \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (2.12)$$

Estas ecuaciones representan la generalización de (2.6) apropiada para varias variables y se conocen con el nombre de *ecuaciones diferenciales de Euler-LaGrange*. Sus soluciones son curvas para las cuales la variación de una integral de la forma dada en (2.9) se anula.

Para los fines de este trabajo, es suficiente lo que hemos deducido hasta aquí, y continuamos con enunciar un principio muy importante en mecánica clásica, y que deriva del principio variacional.

2.3. PRINCIPIO DE HAMILTON Y ECU. DE LAGRANGE

En este capítulo se deducirán las ecuaciones de LaGrange utilizando el principio de Hamilton. El principio de Hamilton es un principio integral⁴ que describe el movimiento de los sistemas mecánicos para los cuales todas las fuerzas pueden derivar de un potencial escalar generalizado que puede ser función de las coordenadas velocidad y del tiempo, y se enuncia de la siguiente manera.

El movimiento del sistema entre el tiempo t_1 y el tiempo t_2 es tal que la integral curvilínea es

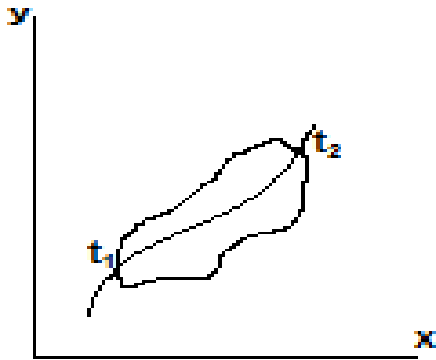
$$I = \int_{t_1}^{t_2} L dt \quad (2.3.1)$$

dónde $L = T - V$, tiene un valor estacionario para el camino correcto. En otras palabras, podemos decir que entre todos los caminos posibles por los cuales el punto representativo del sistema en el espacio de las configuraciones podría ir de su posición en el instante t_1 a su posición en el instante t_2 , recorrerá en la realidad el camino para el cual el valor de la integral (2.3.1) sea estacionario.

Esta definición es muy usual en dinámica clásica y se conoce con el nombre de propiedad fundamental ó integral de acción. Podemos resumir el principio de Hamilton diciendo que el movimiento es tal que la variación de la integral curvilínea I para t_1 y t_2 fijos, es nula:

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} L (q_1, q_2, \dots, q_n, \dots, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t) dt = 0 \quad (2.3.2)$$

⁴ Tomado del GHOLDSTEIN, pag. 44



Camino del punto representativo del sistema en el espacio de las configuraciones.

La que la integral del principio de Hamilton

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt$$

Tiene exactamente la forma estipulada en (2.9) con las transformaciones

$$x \rightarrow t$$

$$y_i \rightarrow q_i$$

$$f(y_i, \dot{y}_i, x) \rightarrow L(q_i, \dot{q}_i, t)$$

Y las ecuaciones de Euler- LaGrange correspondientes a la integral I se convierten entonces en las ecuaciones de LaGrange del movimiento,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad i= 1, 2, 3 \dots n \quad (2.3.3)$$

Y se han demostrado las ecuaciones del movimiento de LaGrange a partir del principio de Hamilton para sistemas mecánicos.

2.4. FUNCIÓN DE HAMILTON

En esta parte deduciremos el teorema de conservación que conlleva a la función constante del movimiento de Hamilton para sistemas mecánicos con fuerzas conservativas⁵.

Partiendo de la ecuación de Lagrange (2.3.3).

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial (T-U)}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial (T-U)}{\partial q_i} = 0 \quad (2.4.1)$$

Donde $U(q_i, \dot{q}_i, t)$ es la energía potencial y

$$Q_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial U}{\partial q_i}, \text{ son las fuerzas generalizadas en términos de } U.$$

El trabajo realizado por las fuerzas generalizadas para cambios infinitesimales de las coordenadas generalizadas es:

$$dW = \sum_i Q_i dq_i = \sum_i \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial U}{\partial q_i} \right) dq_i$$

La ecu (2.4.1) indica que para un desplazamiento infinitesimal se tiene que:

$$\sum_i \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial U}{\partial q_i} \right) dq_i = \sum_i \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right) dq_i \quad \circ$$

$$\sum_i \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial U}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial T}{\partial q_i} \right) dq_i = 0$$

$$\sum_i \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{\partial T}{\partial q_i} \right\} dq_i = 0$$

$$\sum_i \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i \right) = 0 \quad (2.4.2)$$

Donde $L = T - U$, es el lagrangiano del sistema y utilizando la relación.

⁵ Introducción a los principios de mecánica (Walter Hauser)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \frac{d\dot{q}_i}{dt} dt = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) dt - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i dt = d \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i$$

Se expresa la ecu. (2.4.2) así

$$\sum_i \left(d \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i \right) = 0$$

$$\sum_i \left[d \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt + \frac{\partial L}{\partial t} dt \right] = 0$$

$$\sum_i \left[d \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) - dL \right] + \frac{\partial L}{\partial t} dt = 0$$

$$d \left[\sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \right) \right] + \frac{\partial L}{\partial t} dt = 0$$

Ya que $dL(q_i, \dot{q}_i, t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt$. Ahora si el lagrangiano no contiene explícitamente el tiempo, significa que

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0, \quad \text{entonces} \quad (2.4.3)$$

$$d \left[\sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \right) \right] = 0 \quad (2.4.4)$$

Que da el teorema de conservación

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L = cte. \quad (2.4.5)$$

La derivada parcial del Lagrangiano con respecto a la velocidad generalizada es la cantidad de movimiento generalizado p_i , (llamado también cantidad de movimiento canónico); por tanto la ecu. (2.4.5) en función de las cantidades de movimiento generalizado expresa que siempre que se satisfaga la ecu. (2.4.3) la cantidad $\sum_i p_i \dot{q}_i - L$ es una cte. del movimiento.

Esto es siempre que el Lagrangiano no sea una función explícita del tiempo, la función.

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L \quad (2.4.6)$$

Denominada Hamiltoniano del sistema es una constante del movimiento.

2.5. ECUACIÓN DE HAMILTON DEL MOVIMIENTO

Con la función de Hamilton ya en nuestro conocimiento, el siguiente paso es deducir las ecuaciones dinámicas del movimiento de Hamilton.

La variación de la ecu. (2.4.6) es

$$dH = d(\sum_i p_i q_i - L) = \sum_i (p_i d\dot{q}_i + \dot{q}_i dp_i - dL) \quad (2.5.1)$$

$$dH = \sum_i \left(p_i d\dot{q}_i + \dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

$$dH = \sum_i \left(p_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) d\dot{q}_i + \sum_i \left(\dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (2.5.1a)$$

Para valores de q_i, \dot{q}_i, p_i que satisfacen

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (2.5.2)$$

Los términos $\sum_i \left(p_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) d\dot{q}_i$,

de la ecu. (2.5.1a) se anulan no quedando ningún término en $d\dot{q}_i$ en el segundo miembro lo que implica que;

$$\frac{\partial H}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (2.5.3)$$

Ya que se limito al empleo de aquellos valores de q_i, \dot{q}_i, p_i que satisfacen a (2.5.2). Por otro lado como el Hamiltoniano está en función de q_i, \dot{q}_i, p_i y t explícitamente, esto es $H(q, \dot{q}, p, t)$ implica entonces

$$dH = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt \quad (a)$$

Como $\frac{\partial H}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i = 0$ por (2.5.3) y comparando con la ecu. (2.5.1) tenemos entonces

$$dH = \sum_i \left(\dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (b)$$

Como la diferencial de (a) es igual a la de (b) entonces $dH = dH$

$$\sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt = \sum_i \left(\dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

Obteniéndose entonces

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i = - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i \quad \rightarrow \quad \frac{\partial H}{\partial q_i} = - \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (2.5.4)$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i = \dot{q}_i dp_i \quad \rightarrow \quad \frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \quad (2.5.5)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} dt = - \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad \rightarrow \quad \frac{\partial H}{\partial t} = - \frac{\partial L}{\partial t}, \quad t > 0 \quad (2.5.6)$$

La ecu. (2.5.3) demuestra lo que se quería demostrar y que para valores de q_i, \dot{q}_i, p_i que satisfacen la ecu. (2.5.2), la función Hamiltoniana puede considerarse función de q_i, \dot{q}_i, p_i y t . Empleando ahora las ecu. del movimiento de Lagrange, la ecu. (2.5.4), se escribe así.

$$\dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (2.5.7)$$

Que junto con la ecu. (2.5.5)

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

Constituyen las ecuaciones del movimiento de Hamilton.

2.6. PRINCIPIO DE FERMAT

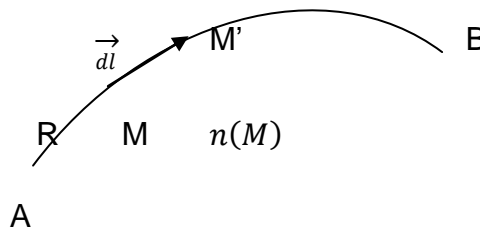
Otros de los principios importantes de la física, análogo al principio de Hamilton, es el muy mencionado “principio de Fermat” de la física óptica, y que también pertenece a la categoría de los llamados principios variacionales.

Para dilucidar el principio de Fermat, debemos definir primero lo que es el camino óptico.

La definición de este principio será enunciado en la unidad “APROXIMACIÓN GEOMÉTRICA Y ÓPTICA DE RAYOS” (Pág. 45).

2.6.1. CAMINO ÓPTICO.

En un medio homogéneo con cierto índice de refracción n . sean A y B, los extremos de un tramo R sobre un rayo de luz luminoso; sea $v(M)$ la velocidad de propagación de la onda en el punto M y dl la longitud elemental MM' del rayo.



El tiempo que tarda la onda en recorrer dl será,

$$dt = \frac{dl}{v(M)} = \frac{n(M)}{c} dl ,$$

Durante este tiempo la luz recorre en el vacío un camino

$$dL = c dt = c \frac{n(M)}{c} dl = n(M) dl$$

Recibe el nombre de camino óptico entre A Y B la longitud del tramo R dada por la integral

$$L = \int n(M) dl = \int c dt.$$

El principio de Fermat nos dice “entre todos los caminos posibles que puede tomar la luz para ir de un punto A, a otro punto B, esta recorre el camino más corto, ó el que le tome menos tiempo”⁶ (este principio se profundiza en la secc. 2.10.4)

De esta formulación se derivan las cinco leyes más fundamentales de la óptica geométrica que son:

- 1) La propagación rectilínea de la luz en medios homogéneos.
- 2) La ley de la reflexión.
- 3) La ley de la refracción.
- 4) La conservación del plano de incidencia.
- 5) La reversibilidad de las trayectorias luminosas.

Veremos cómo se aplica la condición del principio de Fermat para demostrar solo las tres primeras leyes, las otras dos restantes solo se enunciarán dado que no es de importancia para nosotros su demostración.

2.6.2. PROPAGACIÓN RECTILÍNEA DE LA LUZ EN MEDIOS HOMOGÉNEOS.

La condición de camino óptico mínimo establecido por el principio de Fermat exige que en medios homogéneos el camino recorrido por la luz cuando esta va de un punto A, a otro punto B, sea una recta, por ser esta la distancia más corta entre estos puntos.

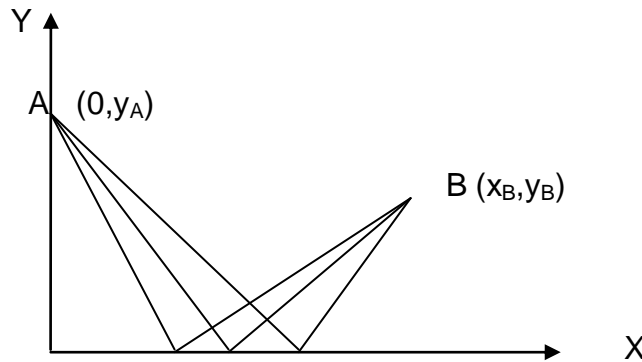


fig. (1)

Algunos caminos ópticos entre los punto A y B, después de reflejarse la luz en un espejo plano.

2.6.3. LEY DE LA REFLEXIÓN.

Supongamos que muchos rayos de luz salen del punto A, e inciden sobre una superficie plana, que en este caso será un espejo plano, y se propagan hasta el punto B. fig. (1). Se quiere determinar, de todos los

⁶ Tomado de “óptica, curso de ciencias física”(R. Annequin y J. Boutigny)

caminos ópticos posibles, el que seguirá la luz para ir de A hasta B previa reflexión en el espejo.

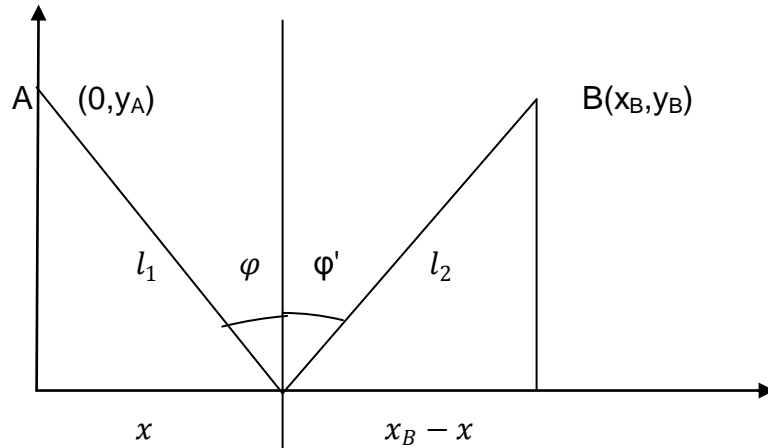


fig. (2)

La función camino óptico será:

$$L = nl_1 + nl_2 = n(l_1 + l_2) , \quad \text{donde}$$

$$l_1 = \sqrt{x^2 + y_A^2} \quad \text{Y} \quad l_2 = \sqrt{(x_B - x)^2 + y_B^2}$$

$$L = n(\sqrt{x^2 + y_A^2} + \sqrt{(x_B - x)^2 + y_B^2})$$

El principio de Fermat requiere que se cumpla la condición

$$\frac{dL}{dx} = 0$$

Así derivando la función camino óptico e igualando a cero tenemos:

$$\frac{dL}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y_A^2}} - \frac{(x_B - x)}{\sqrt{(x_B - x)^2 + y_B^2}} = 0$$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + y_A^2}} = \frac{(x_B - x)}{\sqrt{(x_B - x)^2 + y_B^2}} \quad (a)$$

De la figura (2) se observa que:

$$\sin \varphi = \frac{x}{l_1} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y_A^2}} \quad \text{y} \quad \sin \varphi' = \frac{(x_B - x)}{l_2} = \frac{(x_B - x)}{\sqrt{(x_B - x)^2 + y_B^2}}$$

De manera que la ecu. (a), puede expresarse como

$$\sin \varphi = \sin \varphi'$$

Lo que establece la ley de la reflexión, es decir $\varphi = \varphi'$.

2.6.4. LEY DE LA REFRACCIÓN.

La siguiente figura indica los posibles caminos que podría seguir la luz al propagarse de A. a B. previa refracción en un dioptrio plano que separa dos medios de índices n y n' , con $n < n'$.

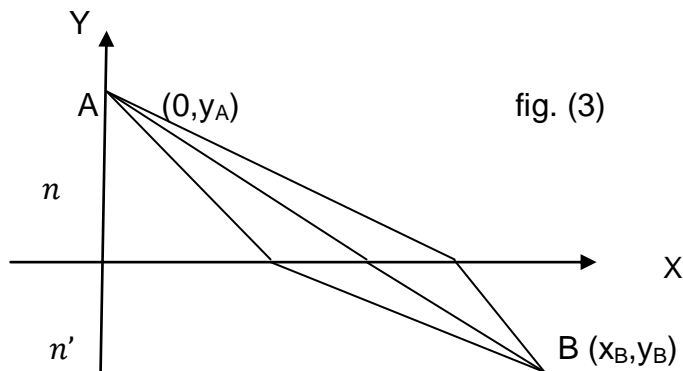


fig. (3)

Tomaremos uno de los posibles caminos que podría seguir la luz, asignando coordenadas cartesianas a los puntos A y B de la figura tenemos.

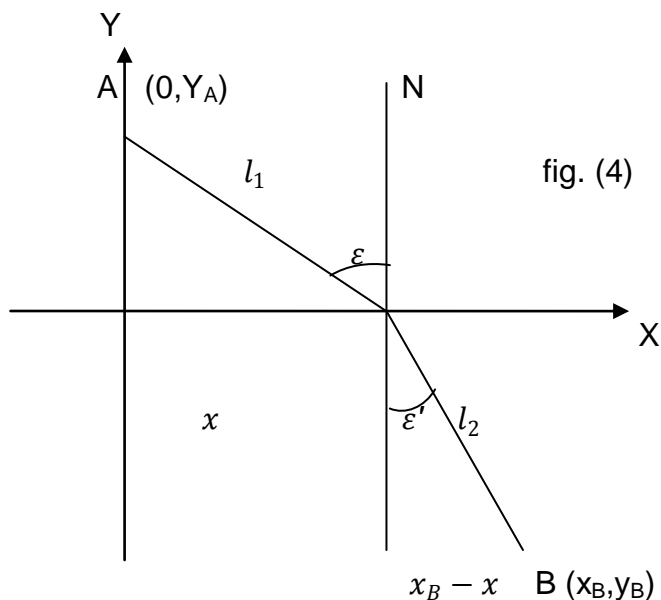


fig. (4)

Realizando como en caso de la reflexión la función camino óptico será:

$$L = nl_1 + n'l_2 = n\sqrt{x^2 + y^2} + n'\sqrt{(x_B - x)^2 + y_B^2}$$

Derivando e igualando a cero como lo exige la condición de mínimo camino óptico ;

$$\frac{dy}{dx} = \frac{nx}{\sqrt{x^2 + y_A^2}} - \frac{n'(x_B - x)}{\sqrt{(x_B - x)^2 + y_B^2}} = 0, \text{ donde } \frac{nx}{\sqrt{x^2 + y_A^2}} = \frac{n'(x_B - x)}{\sqrt{(x_B - x)^2 + y_B^2}}.$$

en la fig. (4) se puede observar que;

$$\sin \varepsilon = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y_A^2}} \quad \text{Y} \quad \sin \varepsilon' = \frac{(x_B - x)}{\sqrt{(x_B - x)^2 + y_B^2}}$$

Sustituyendo estos valores en la última ecuación tenemos $n \sin \varepsilon = n' \sin \varepsilon'$, que es la famosa ley de la refracción.

2.6.5. CONSERVACIÓN DEL PLANO DE INCIDENCIA.

La conservación del plano de incidencia es consecuencia inmediata de la condición de mínimo del principio de Fermat.

Si entre dos puntos A y B trazamos todas las trayectorias posibles que inciden sobre la superficie de separación, el principio de Fermat obliga que la más corta este contenida en el plano de incidencia.

Para cualquier otra trayectoria que no esté contenida en el plano de incidencia, siempre es posible encontrar una proyección sobre él, más corta que la considerada inicialmente, tanto para el caso de la reflexión fig. (5), como de la refracción fig. (6).

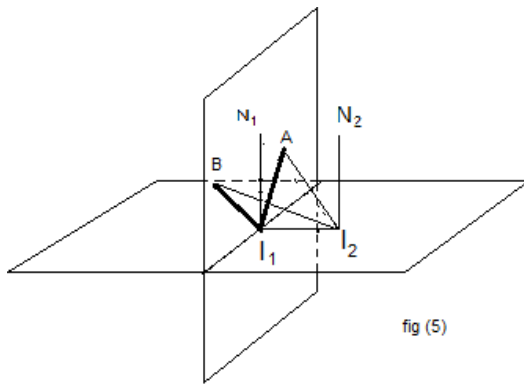


fig (5)

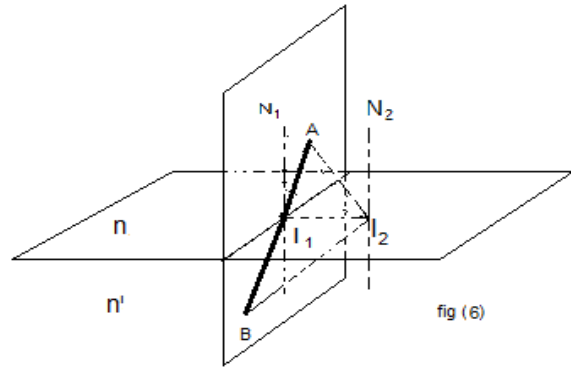


fig (6)

2.6.6. REVERSIBILIDAD DE LAS TRAYECTORIAS LUMINOSAS.

Otra consecuencia del principio de Fermat es la reversibilidad de las trayectorias luminosas, ya que si la trayectoria en una dirección determinada es mínima, la trayectoria en sentido opuesto también lo será.

2.7. COORDENADAS CÍCLICAS

En la teoría clásica de Hamilton⁷, las coordenadas cíclicas son aquellas que no intervienen explícitamente en el Lagrangiano; y según las ecuaciones de LaGrange, su momento conjugado p_j será constante si p_j se anula, y $\frac{\partial H}{\partial q_j}$ también se anulara, por tantos, las coordenadas cíclicas tampoco figuran en la hamiltoniana. Recíprocamente, si una coordenada no aparece en la H , su momento conjugado es constante. Sin embargo, cuando alguna coordenada (p.ej. q_n) es cíclica, la lagrangiana como función de q y \dot{q} es

$$L = L (q_1, q_2, \dots, q_{n-1}, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t)$$

En ella siguen apareciendo todas las velocidades generalizadas que en general, serán funciones del tiempo.

El problema, que es necesario resolver sigue teniendo $2n+1$ grados de libertad aun cuando un grado de libertad corresponde a una coordenada cíclica.

Por otra parte, en la formulación Hamilton una coordenada cíclica merece verdaderamente la designación de << ignoradle >> pues en la misma situación p_n es cierta constante α , y H tiene la forma

$$H = H (q_1, q_2, \dots, q_{n-1}, p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, \alpha, t)$$

La hamiltoniana describe ahora un problema con $n-1$ grados de libertad, que puede resolverse completamente prescindiendo de la coordenada cíclica excepto en que se manifiesta en la constante de integración α , la cual se determina a partir de las condiciones iniciales

El comportamiento de la coordenada cíclica con el tiempo se obtiene integrando la ecuación del movimiento

$$\dot{q}_n = \frac{\partial H}{\partial \alpha_i}$$

⁷ GHOLDSTEIN capitulo 8.

2.7.1. TRANSFORMACIONES CANONÍCAS

Consideramos el caso en que H sea una constante del movimiento y todas las q_i cíclicas. En tal supuesto los momentos conjugados p_i serán todos constantes

$$p_i = \alpha_i$$

Cuando H no sea función explícita del tiempo, ni las coordenadas cíclicas, tendremos que:

$$H = H(\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

En consecuencia, las ecuaciones de Hamilton para las \dot{q}_i se reducen a

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial \alpha_i} = \omega_i \quad (2.7.1)$$

Donde ω_i son funciones solo de las α_i y, por tanto, también constante en el tiempo. Las ecu. (2.7.1) admiten las soluciones inmediatas

$$q_i = \omega_i + \beta_i \quad (2.7.2)$$

Donde β_i son constantes de integración, determinadas por las condiciones iniciales.

En las transformaciones se considera el paso de un conjunto de coordenadas q_i a otro nuevo Q_i mediante ecuaciones de transformaciones de la forma.

$$Q_i = Q(q_i, t) \quad (2.7.3)$$

Así, por ejemplo, las ecuaciones de una transformación ortogonal, o el paso de coordenadas cartesianas a polares, también de la forma general (2.7.3) denominada transformaciones puntuales.

Ampliando el concepto de transformación de coordenadas para la transformación simultánea de las coordenadas y momentos independientes, q_i, p_i a otro nuevo conjunto Q_i, P_i con ecuaciones de transformaciones

$$Q_i = Q(q_i, p_i, t) \quad P_i = P(q_i, p_i, t) \quad (2.7.4)$$

Así, las nuevas coordenadas quedaran definidas no solo en función de las primitivas, sino también de los antiguos momentos.

En el desarrollo de la mecánica Hamiltoniana solo nos interesan aquellas transformaciones para las cuales las nuevas Q y P sean coordenadas canónicas y se verificaran estas condiciones siempre que exista cierta función $K(Q, P, t)$ tal

que las ecuaciones del movimiento en el nuevo sistema tengan la forma hamiltoniana.

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial p_i}, \quad P_i = \frac{\partial K}{\partial q_i} \quad (2.7.5)$$

Las transformaciones para las que se verifica (2.7.5) se llaman canónicas, y la función K desempeña el papel de Hamiltoniana en el nuevo conjunto y las Q_i y P_i deben ser coordenadas canónicas, que habrán de satisfacer un principio de Hamilton multiplicando, de la forma:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (\sum_i P_i \dot{Q}_i - K(Q, P, t)) dt = 0 \quad (2.7.6)$$

Al propio tiempo, las coordenadas antiguas satisfacen un principio análogo:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (\sum_i p_i \dot{q}_i - H(q, p, t)) dt = 0 \quad (2.7.7)$$

La validez simultánea (2.7.6) y (2.7.7) no significa que ambos integrando sean iguales, sino que a lo sumo diferirán en la derivada total de una función arbitraria F . La integral entre los dos extremos del término en cuestión es entonces

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{dF}{dt} dt = F(2) - F(1)$$

Y la variación de esta integral será automáticamente nula para cualquier función F , pues la variación se anula en los extremos. La función arbitraria F se llama función generatriz de la transformación, y una vez conocida las ecuaciones de transformación quedan determinadas por completo.

Un ejemplo de ecuaciones de transformación. Suponga que se tiene una función generatriz $F(q, Q, t)$, los integrando de las ecuaciones (2.7.6) y (2.7.7) están ligados por la relación

$$\sum p_i \dot{q}_i = \sum P_i \dot{Q}_i - K + \frac{d}{dt} F(q, p, t) \quad (2.7.8)$$

Donde
$$\frac{dF}{dt} = \sum \frac{dF}{dq_i} \dot{q}_i + \sum \frac{\partial F}{\partial Q_i} \dot{Q}_i + \frac{\partial F}{\partial t}$$

Entonces nos queda que

$$\begin{aligned} \sum p_i \dot{q}_i - H &= \sum P_i \dot{Q}_i - K + \sum \frac{dF}{dq_i} \dot{q}_i + \sum \frac{\partial F}{\partial Q_i} \dot{Q}_i + \frac{\partial F}{\partial t} \\ (\sum (p_i - \frac{\partial F}{\partial q_i}) \dot{q}_i) + (-\sum (P_i - \frac{\partial F}{\partial Q_i}) \dot{Q}_i) - H &= -K + \frac{\partial F}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.7.9)$$

Considerando las q_i y Q_i independientes, (2.7.8) solo se verificará idénticamente si se anulan por separados los coeficientes de las \dot{q}_i y \dot{Q}_i en (2.7.8); entonces

$$\sum (p_i - \frac{\partial F}{\partial q_i}) = 0 \rightarrow p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i} \quad (2.7.9a)$$

$$\sum (P_i - \frac{\partial F}{\partial Q_i}) \dot{Q}_i = 0 \rightarrow P_i = -\frac{\partial F}{\partial Q_i} \quad (2.7.9b)$$

$$-H + K - \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \rightarrow K = H + \frac{\partial F}{\partial t} \quad (2.7.9c)$$

Las n ecuaciones (2.7.9a) son n relaciones entre p_i, q_i, Q_i, t , que podrán resolverse para las n Q_i , en función de p_i, q_i, t , con ello se obtiene la primera mitad de la ecuación de transformación (2.7.4). Una vez establecida la relación entre Q_i y (q_i, p_i) , la ecuación (2.7.9b), proporcionan la mitad restante de las ecuaciones de transformaciones, donde P_i en función de (q_i, p_i) , para completar la ecuación (2.7.9c) que nos da la nueva relación entre la nueva hamiltoniana K y la antigua H .

Se utiliza el mismo proceso para otras transformaciones generatrices como

$$F = (q, P, t), \quad F(q, Q, t), \quad F(p, P, t)$$

2.8. TEORÍA DE HAMILTON-JACOBI

Las transformaciones canónicas pueden emplearse de manera general en la resolución de los problemas de la mecánica; Si se conserva la Hamiltoniana se obtiene una solución pasando a nuevas coordenadas canónicas que son todas cíclicas, y al integral de esta nueva ecuación resulta casi inmediata

Otro método consiste en buscar una transformación canónica que haga pasar de las coordenadas y momentos q y p en un instante t , a un nuevo conjunto de magnitudes constantes, por ejemplo, los $2n$ valores iniciales q_0 y p_0 para $t = 0$, en tal transformación las ecuaciones que relacionan las variables antiguas y las nuevas resuelven el problema:

$$q = q(q_0, p_0, t)$$

$$p = p(q_0, p_0, t)$$

Que proporcionan las coordenadas y los momentos en función de sus valores iniciales y del tiempo.

2.8.1. ECUACIONES DE HAMILTON-JACOBI, PARA LA FUNCIÓN PRINCIPAL DE HAMILTON

Se puede asegurar automáticamente que las nuevas variables son constantes en el tiempo en la hamiltoniana transformadas, K , es idénticamente nula ó una constante, las ecuaciones del movimiento son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial P_i} &= \dot{Q}_i \\ -\frac{\partial k}{\partial Q_i} &= \dot{P}_i \end{aligned} \quad (2.8.1)$$

Donde K se relaciona con la antigua hamiltoniana y con la función generatriz, mediante la ecuación

$$K = H + \frac{\partial F}{\partial t}$$

Por tanto, será nula si F , satisface la relación

$$H(q, p, t) + \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \quad (2.8.2)$$

Por conveniencia se elige F de modo que sea función de las antiguas coordenadas q_i , de los nuevos momentos constantes P_i y del tiempo; la función generatriz será $F(q, P, t)$.

Para escribir la Hamiltoniana de (2.8.2), en función de las mismas variables emplearemos las ecuaciones de transformadas:

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i}$$

Con lo que (2.8.2) se convierte en

$$H\left(q_1, \dots, q_n, \dots, \frac{\partial F}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial q_n}, t\right) + \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \quad (2.8.3)$$

$$H\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}, t\right) = -\frac{\partial S}{\partial t}$$

Esta es la ecuación clave y fundamenta para el trabajo que se pretende desarrollar.

Esta ecuación con derivadas parciales, con $n + 1$ variables q_1, \dots, q_n, t , constituyen la llamada **ecuación diferencial de Hamilton-Jacobi**.

La solución de esta ecuación se acostumbra a designarse por “ S ” y se denomina **función principal de Hamilton**

Por consiguiente una solución completa, ha de tener $n + 1$ constantes de integración independientes $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$. por tanto una solución completa de (2.8.3) será de la forma

$$S = S(q_1, \dots, q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n, t) \quad (2.8.4)$$

Donde ninguna de las n constante es puramente aditiva. Se tiene libertad para hacer que las n constantes de integración sean los nuevos momentos (constantes)

$$p_i = \alpha_i \quad (2.8.5)$$

Tal ecuación no contradice la afirmación hecha, de que los nuevos momentos están relacionados con los valores iniciales de q y p en el instante t_0 .

Las n ecuaciones de transformación se escriben ahora en la forma

$$P_i = \frac{\partial s(q_i, \alpha_i, t)}{\partial q_i} \quad (2.8.6)$$

En el instante t_0 , estas constituyen n ecuaciones que relacionan las n α_i con los valores iniciales de q y p , permitiendo calcular las constantes de integración en función, de las condiciones iniciales.

La otra mitad de las ecuaciones de transformaciones de las que se deducen las nuevas coordenadas constantes, adoptan la forman

$$Q_i = \beta_i = \frac{\partial s(q_i, \alpha_i, t)}{\partial \alpha_i} \quad (2.8.7)$$

Donde las constante β se obtienen de modo análoga a partir de las condiciones iniciales, sin más que calcular el segundo miembro de la ecu. (2.8.7), para $t = t_0$ con los valores iniciales conocidos q_i entonces se pueden resolverse las ecuaciones (2.8.7) con el fin de obtener q en función de α_i, β_i, t

$$q = q(\alpha_i, \beta_i, t) \quad (2.8.8)$$

Lo que resuelve el problema, ya que se conocen las coordenadas en función del tiempo y las condiciones iniciales.

La función principal de Hamilton es así la generatriz de una transformación de contacto que permite el paso a coordenadas y momentos constantes; al resolver la ecuación de Hamilton-Jacobi se ha obtenido al mismo tiempo una solución del problema mecánico

El examen de la derivada total ds respecto del tiempo sirve para profundizar en el significado físico de esta función.

Dicha derivada puede calcularse a partir de la fórmula

$$\frac{dS}{dt} = \sum_i \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial t} \quad (2.8.9)$$

Pues las P_i no depende del tiempo, según (2.8.6) y (2.8.3), esta relación se expresa también en la forma

$$\frac{dS}{dt} = \sum_i p_i \dot{q}_i - H = L \quad (2.8.10)$$

Por lo que la función principal de Hamilton difiere a lo sumo en una constante de la integral indefinida de lagrangiana.

$$S = \int L dt + cte \quad (2.8.11)$$

Ahora bien; el principio de Hamilton se refiere a la integral definida de L , y a partir de ella se resuelve el problema mediante las ecuaciones de Lagrange.

Como aclaración de la técnica de Hamilton-Jacobi para la resolución de problemas mecánicos, se considera con detalles el problema del oscilador armónico lineal.

La hamiltoniana del sistema en forma general es:

$$H = \frac{p^2}{2m} + v(q)$$

Para el caso que queremos tratar, la hamiltoniana será:

$$H = \frac{p^2}{2m} + K \frac{q^2}{2}$$

Donde K es la constante del resorte, la ecuación de Hamilton-jacobi para este, se obtiene igualando

$$p = \frac{\partial s}{\partial q}$$

Y sustituyendo en la hamiltoniana, la condición de que se anule, la nueva hamiltoniana se convierte en

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial q} \right)^2 + \frac{Kq^2}{2} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (2.8.12)$$

Como la dependencia explícita de S respecto de t , aparece solo en último término, podrá ayarse una solución de (2.8.12) de la forma

$$S(q, \alpha, t) = W(q, \alpha) - \alpha t \quad (2.8.13)$$

Donde α es una constante de integración.

Aplicando las respectivas derivadas y remplazando en (2.8.12)

$$\frac{\partial S}{\partial q} = \frac{\partial W}{\partial q} \quad \text{y} \quad \frac{\partial S}{\partial t} = -\alpha$$

$$\text{Queda} \quad \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W}{\partial q} \right)^2 + \frac{Kq^2}{2} - \alpha = 0,$$

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W}{\partial q} \right)^2 + \frac{Kq^2}{2} = \alpha \quad (2.8.14)$$

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W}{\partial q} \right)^2 = \alpha - \frac{Kq^2}{2}$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial q} \right)^2 = m(2\alpha - Kq^2)$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial q} \right)^2 = mK \left(\frac{2\alpha}{K} - q^2 \right)$$

$$\frac{\partial W}{\partial q} = \sqrt{mK} \sqrt{\frac{2\alpha}{K} - q^2} \quad \text{Integrando tenemos}$$

$$W = \sqrt{mK} \int \sqrt{\frac{2\alpha}{K} - q^2} dq$$

$$S = \sqrt{mK} \int \sqrt{\frac{2\alpha}{K} - q^2} dq - \alpha t \quad (2.8.15)$$

La integral que resulta en (2.8.15) en realidad resulta innecesaria, ya que no es S lo que se busca sino sus derivadas parciales.

La solución para q se obtiene a partir de las ecuaciones de transformación (2.8.7),

$$\beta = \frac{\partial s}{\partial \alpha} = \sqrt{mK} \int dq \left[\frac{1}{2} \left(\frac{2\alpha}{K} - q^2 \right)^{-1/2} \right] \frac{2}{K} - t$$

$$\beta = \frac{\partial s}{\partial \alpha} = \frac{\sqrt{mK}}{K} \int \frac{dq}{\sqrt{\frac{2\alpha}{K} - q^2}} - t$$

$$\beta = \frac{\partial s}{\partial \alpha} = \sqrt{\frac{m}{K}} \int \frac{dq}{\sqrt{\frac{2\alpha}{K} - q^2}} - t, \quad \text{y que al integrar nos queda que}$$

$$t + \beta = \sqrt{\frac{m}{K}} \operatorname{arccoseno} \left(\sqrt{\frac{K}{2\alpha}} q \right) \quad (2.8.16)$$

Poniendo $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$, podemos invertir (2.8.16), con lo que obtendremos q en función de t y α , β (cte. de integración)

$$q = \sqrt{\frac{2\alpha}{K}} \cos(\omega(t + \beta)), \quad \omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

Que es la solución conocida del oscilador armónico. Supóngase ahora que para $t = 0$ la partícula está inicialmente fija ($p_0 = 0$), pero desplazada de la posición de equilibrio una distancia q_0 .

El procedimiento directo para hallar α consiste en calcular (2.8.12) para $t = 0$:

$$\left(\frac{\partial s}{\partial q} \right)_0 = P_0 = \sqrt{2m} \sqrt{\alpha - \frac{Kq_0^2}{2}}$$

$$0 = \alpha - \frac{Kq_0^2}{2}, \quad \alpha = \frac{Kq_0^2}{2} = \frac{m\omega^2 q_0^2}{2} \quad (2.8.18)$$

La constante α es por tanto la energía total del sistema.

En realidad, se podría haber deducido directamente la identidad de α con la energía total, a partir de (2.8.13) y de la relación, $\frac{\partial S}{\partial t} + H = 0$ que da

$$H = \alpha = E.$$

Poniendo α en función de q_0 , la solución para q (ecu. (2.8.17)) se reduce a

$$q = \sqrt{\frac{2\left(\frac{Kq_0^2}{2}\right)}{K}} \cos \omega(t + \beta),$$

$$q = \sqrt{q_0^2} \cos \omega(t + \beta),$$

$$q = q_0 \cos \omega(t + \beta),$$

Que demuestra que $\beta = 0$ en las condiciones iniciales dadas.

En función de (2.8.18) la función principal de Hamilton puede escribirse.

$$S = m\omega \int \sqrt{q_0^2 - q^2} dq - \frac{m\omega^2 q_0^2 t}{2}$$

O sustituyendo en (2.8.17)

$$S = m\omega^2 q^2 \int (\text{sen}^2 \omega t - \frac{1}{2}) dt$$

Ahora bien la lagrangiana es

$$L = \frac{m\dot{q}^2}{2} - \frac{m\omega^2 q^2}{2}$$

$$L = \frac{m\omega^2 q^2}{2} (\text{sen}^2 \omega t - \text{cos}^2 \omega t)$$

$$L = m\omega^2 q^2 \left(\text{sen}^2 \omega t - \frac{1}{2} \right)$$

Por lo que S es la integral respecto a t de L , de acuerdo con la relación general (2.8.11)

2.9. CORCHETES DE LAGRANGE Y POISSON.

La siguiente deducción no es un tanto trivial por tanto en su mayoría serán enunciados que asumiremos ya demostrados⁸, el objetivo es representar las ecuaciones de movimiento en términos de los corchetes de Poisson, este formalismo matemático para representar las ecuaciones de movimiento fue introducido en la tercera década del siglo diecinueve por el físico-matemático francés Siméon Denis Poisson.

La condición de invariancia de la suma de jacobianos

$$\sum_i \frac{\partial(q_i, p_i)}{\partial(u, v)} = \sum_k \frac{\partial(Q_k, P_k)}{\partial(u, v)} \text{ puede escribirse:}$$

$$\sum_i \left(\frac{\partial q_i}{\partial u} \frac{\partial p_i}{\partial v} - \frac{\partial p_i}{\partial u} \frac{\partial q_i}{\partial v} \right) = \sum_i \left(\frac{\partial Q_i}{\partial u} \frac{\partial P_i}{\partial v} - \frac{\partial P_i}{\partial u} \frac{\partial Q_i}{\partial v} \right) \quad (2.9.1)$$

donde cada uno tiene la forma de corchete de Lagrange de u, v , que se define por la igualdad.

$$\{u, v\}_{q,p} = \sum_i \left(\frac{\partial q_i}{\partial u} \frac{\partial p_i}{\partial v} - \frac{\partial p_i}{\partial u} \frac{\partial q_i}{\partial v} \right)$$

La ecu. (2.9.1) expresa que los corchetes de Lagrange son invariantes respecto a las transformaciones de contacto.

Tomando como relación general y omitiendo los subíndices q y p ; la forma

$$\{u, v\} = -\{v, u\} \quad (2.9.2)$$

Y u, v , son coordenadas de una región bidimensional del espacio de fases, se puede tomar como tal región el plano q_i, p_j . Al calcular el correspondiente corchete de Lagrange de $\{q_i, q_j\}$, puede usarse cualquier conjunto de coordenadas canónicas.

Cabe así desarrollar el corchete de Lagrange en la forma

$$\{q_i, q_j\} = \sum_k \left(\frac{\partial q_k}{\partial q_i} \frac{\partial p_k}{\partial q_j} - \frac{\partial p_k}{\partial q_i} \frac{\partial q_k}{\partial q_j} \right)$$

Como las coordenadas q y p , son independientes se deduce que

⁸ Para una mejor profundización, consultar GHOLDSTEIN mecánica clásica capítulo 8.

$$\frac{\partial p_k}{\partial q_i} = 0 = \frac{\partial p_k}{\partial q_j}, \quad (2.9.3)$$

De donde se deduce que $\{q_i, q_j\} = 0$

Y análogamente también ocurrirá que $\{p_i, p_j\} = 0$

Ahora si tomamos a, $u = q_i$, y $v = p_j$ el corchete de lagrange será

$$\{q_i, p_j\} = \sum_k \left(\frac{\partial q_k}{\partial q_i} \frac{\partial p_k}{\partial p_j} - \frac{\partial q_k}{\partial p_j} \frac{\partial p_k}{\partial q_i} \right)$$

El segundo miembro del paréntesis es nulo, por la ecu. (2.9.3). las derivadas parciales que figuran en este término, tiene los valores:

$$\frac{\partial p_k}{\partial p_j} = \delta_{Kj}, \quad \frac{\partial q_k}{\partial q_i} = \delta_{Ki}$$

El corchete de Lagrange se reduce a

$$\{q_i, p_j\} = \sum_k \left(\frac{\partial q_k}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial p_k}{\partial p_j} \right) = \sum_k (\delta_{Kj} \delta_{Ki}) = \delta_{ij} \quad (2.9.4)$$

Las ecu. (2.9.4) son validas evidentemente para todos los conjuntos de variables cónicas y suelen denominarse corchetes de Lagrange fundamentales.

2.9.1. CORCHETES DE POISSON

No detendremos nuestra atención en la deducción de los corchetes de Poisson dado que intensifica un poco más la labor desviándonos de nuestro trabajo, por lo que asumimos ya su demostración y procedemos a enunciarlos.

Se definen por

$$[u, v]_{q,p} = \sum_k \left(\frac{\partial u}{\partial q_k} \frac{\partial v}{\partial p_k} - \frac{\partial u}{\partial p_k} \frac{\partial v}{\partial q_k} \right) \quad (2.9.5)$$

Junto con la identidad

$$[u, v] = -[v, u] \quad (2.9.6)$$

Existe una estrecha relación entre los corchetes de lagrange y de Poisson.

Si se consideran únicamente como expresiones matemáticas, prescindiendo de cualquier significado físico puede enunciarse el siguiente teorema, el cual solo será enunciado puesto que su demostración requiere de mucha rigurosidad matemática.

Si u_l , $l = 1, 2, \dots, 2n$, es un conjunto de $2n$ funciones independientes, tales que cada u es función de las $2n$ coordenadas $q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n$ se tiene que

$$\sum_{L=1}^{2n} \{u_l, u_i\} [u_l, u_i] = \delta_{ij} = \frac{\partial u_j}{\partial u_i} \quad (2.9.7)$$

Así la ecu. (2.9.7) es invariante respecto a todas las transformaciones de coordenadas sean o no canónicas.

Como funciones u_l elegiremos el conjunto de $2n$ funciones $q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n$ y además haremos que las u_i sean las q_i y las u_j las p_j .

Como u_i es coordenada y u_j es momento, las dos funciones no podrán ser idénticas para ningún valor de i o j . y (2.9.7) se convierte en

$$\sum_L^n \{p_l, q_i\} [p_l, p_j] + \sum_L^n \{q_l, q_i\} [q_l, p_j] = 0$$

Como $\{p_l, q_i\} = -\delta_{il}$ y $\{q_l, q_i\} = 0$

Para todas las coordenadas canónicas, se deduce que

$$[p_i, p_j] = 0 \quad (2.9.8)$$

Análogamente, se anulará también el corchete de Poisson de q_i y q_j

$$[q_i, q_j] = 0 \quad (2.9.9)$$

Finalmente si $u_i=q_i$ y $u_j=q_j$ la suma de la ecu. (2.9.7) toma la forma

$$\sum_L^n \{q_l, q_i\} [q_l, q_j] + \sum_L^n \{p_l, q_i\} [p_l, q_j] = \delta_{ij}$$

Que se reduce a

$$-\sum_L^n \delta_{il} [p_l, q_j] = \delta_{ij} \quad \text{ó} \quad [q_i, p_j] = \delta_{ij} \quad (2.9.10)$$

2.9.2. PROPIEDADES ALGEBRAICAS FUNDAMENTALES DE LOS CORCHETES DE POISSON

A partir de su definición, el corchete de Poisson de una función consigo misma es nulo.

$$[u, u] = 0 \quad (2.9.11)$$

$$C, \text{ no depende de } p, q. \quad [u, C] = 0 \quad (2.9.12)$$

$$[u + v, w] = [u, w] + [v, w] \quad (2.9.13)$$

$$[u, vw] = [u, v] w + v [u, w] \quad (2.9.14)$$

“El corchete de Poisson de la mecánica clásica le corresponde en mecánica cuántica a $\frac{2\pi}{i\hbar}$ multiplicado por el conmutador de las dos 2 magnitudes

$$[u, v] \rightarrow \frac{2\pi}{i\hbar} (\hat{u}\hat{v} - \hat{v}\hat{u})”$$

2.9.3. ECUACIONES DEL MOVIMIENTO EN FUNCIÓN DE LOS CORCHETES DE POISSON

Si la función H es la hamiltoniana, tendremos que

$$[q_i, H] = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \quad (2.9.15)$$

$$[p_i, H] = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i \quad (2.9.16)$$

Son las dos relaciones que constituyen las ecuaciones del movimiento en función de los corchetes de Poisson.

También es posible cuantizar las ecuaciones (2.9.11)-(2.9.14) para obtener los conmutadores cuánticos y cumplen con la misma algebra, pero este formalismo se sale de los propósitos de este trabajo.

2.10. APROXIMACIÓN GEOMÉTRICA Y ÓPTICA DE RAYOS

Ya se ha dilucidado una parte de la mecánica clásica de Hamilton, lo suficiente como para comenzar a darle raíz a la deducción de nuestro objetivo general. Lo siguiente es mostrar la similitud que tiene la óptica con la mecánica, para esto necesitamos recordar algunos tratados de sobre ondas planas y los mas importante para nosotros que sería el *eikonal*⁹ o vector de rayo para frentes de ondas que se propagan en medios donde el índice de refracción varia muy lentamente.

2.10.1. ONDAS LOCALMENTE PLANA.

La onda plana tiene la propiedad fundamental de que tanto la dirección en que se propaga como su amplitud son las mismas en todo punto del espacio y en todo instante. En el caso de una onda real que se puede considerar plana solo aproximadamente, en general la amplitud es función de las coordenadas y el tiempo, y la fase no tiene una forma tan simple como en la onda plana¹⁰.

– *onda monocromatica plana*

$$V(\vec{r}, t) = ae^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t+\alpha)} \quad (2.10.1)$$

– *onda no plana*

$$V(\vec{r}, t) = a(\vec{r}, t)e^{ig(\vec{r}, t)}$$

Donde $V(\vec{r}, t)$ es una magnitud cualquiera que describe el campo de la onda (campos \vec{E} o \vec{B}).

2.10.2. EIKONAL Y VECTOR RAYO

La aproximación geométrica implica tomar la onda no plana como localmente plana, es decir, plana en pequeña región del espacio que se considere. Para ello es necesario que la magnitud $a(\vec{r}, t)$ varíe muy poco a lo largo de una distancia del orden de la magnitud (*límite* $\lambda \rightarrow 0$) desempeñando el papel de una “amplitud”, en tanto que la magnitud $g(\vec{r}, t)$ llamada eikonal, debe ser una magnitud grande que varíe en 2π en una distancia muy pequeña como es λ , y desempeña el papel de “fase”.

⁹ Eikonal (del alemán “eikonal” del griego εἰκών, imagen)

¹⁰ Tomado del libro “Óptica Electromagnética” capitulo 11. vol. 1.

En estas condiciones se pueden introducir las superficies de onda, como aquellas en las cuales todos los puntos están en fase en un instante dado es decir $g(\vec{r}, t) = cte$ para $t = cte$. Si la onda es aproximación plana en cada pequeña región del espacio, al igual que ocurre en una onda plana, la dirección en que se propaga es perpendicular a la superficie de onda $g(\vec{r}, t) = cte$.

Por tanto, la dirección de propagación es la del gradiente $\vec{\nabla}g$ que define la perpendicular a la superficie. Al mismo tiempo se puede introducir el concepto de rayo como la línea cuya tangente en cada punto coincide con la dirección de propagación de la onda, la de $\vec{\nabla}g$. Así el vector rayo queda definido como $\vec{s} = \nabla g / |\nabla g|$, vector unitario en la dirección de propagación de la luz. Las consideraciones anteriores se concretan analíticamente como sigue: la "fase" $g(\vec{r}, t)$ de la onda localmente plana se desarrolla en serie de pequeño incrementos espacio-temporales. Para ello se toma los orígenes de coordenadas y de tiempo local, es decir, en el punto considerado de modo que \vec{r}_0 y t_0 sean cero, y despreciando los términos de orden superior. Tomando la aproximación lineal, entonces se puede escribir:

$$g(\vec{r}, t) = g_0(\vec{\nabla}g)_0 \cdot \vec{r} + \left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)_0 t \quad (2.10.2)$$

Si comparamos esta expresión con la fase de la onda plana dada en (2.10.1) que es,

$$g_{plana}(\vec{r}, t) = \alpha + \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t \quad (2.10.3)$$

La condición $g(\vec{r}, t) = g_{plana}$, suponiendo que las derivadas se toman en el origen local implica:

$$\vec{K}(\vec{r}) = \vec{\nabla}g(\vec{r}, t); \quad \omega(t) = \frac{\partial g(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (2.10.4)$$

Donde se apuesto de manifiesto el hecho de que el vector de onda $\vec{K}(\vec{r})$ varia de unos puntos a otros del espacio (aunque en forma suave), y la frecuencia $\omega(t)$ hace otro tanto respecto al tiempo. Estas dos relaciones son ecuaciones básicas que permiten tratar una onda localmente plana como una onda aproximadamente plana.

En el caso importante de una onda localmente plana monocromática, el eikonal (2.10.2) se puede escribir separando las variables de espacio y tiempo así:

$$g(\vec{r}, t) = K_0 L(\vec{r}) - \omega t \quad (2.10.5)$$

$k = \omega/c$, y el eikonal o fase está determinado por la longitud $L(\vec{r})$ que tiene dimensiones de longitud suele recibir el nombre de camino óptico. En este caso, la primera de las (2.10.4) toma la forma:

$$\vec{\nabla} g(\vec{r}) = \frac{\vec{K}(\vec{r})}{K_0} = \frac{\vec{\nabla} S}{K_0}. \quad (2.10.6)$$

2.10.3. ECUACIONES FUNDAMENTALES

En general las relaciones (2.10.4) deben satisfacer la condición $K^2 = \omega^2/v^2$, característica de toda onda plana, que en este caso se expresa:

$$[\vec{\nabla} g(\vec{r}, t)]^2 = \frac{\left[\frac{\partial g(\vec{r}, t)}{\partial t}\right]^2}{[v(\vec{r}, t)]^2} \quad (2.10.7)$$

Este es una ecuación en derivadas parciales de primer orden llamadas ecuaciones eikonal o también llamadas ecuación fundamental de la óptica geométrica.

En el caso de una onda monocromática localmente plana, la (2.10.7) queda:

$$(\nabla L)^2 = \frac{[\omega/v(\vec{r})]^2}{k^2} = \frac{c^2}{[v(\vec{r})]^2} = [n(\vec{r})]^2 \quad (2.10.8).$$

Donde n es el índice de refracción, que en un medio inhomogéneo, es una función del punto \vec{r} del medio. Haciendo explícita esta ecuación, se tiene.

$$\left[\frac{\partial L(\vec{r})}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial L(\vec{r})}{\partial y}\right]^2 + \left[\frac{\partial L(\vec{r})}{\partial z}\right]^2 = [n(\vec{r})]^2 \quad (2.10.9)$$

Esta es por tanto la ecuación del eikonal para una onda monocromática, que determina la fase o el camino óptico $L(\vec{r})$ en función del índice de refracción $n(\vec{r})$.

Según (2.10.8) $|\nabla L| = n$, la (2.10.6) también se puede escribir como;

$$\nabla L(\vec{r}) = \frac{\vec{K}(\vec{r})}{K_0} = n(\vec{r})\vec{S}(\vec{r}) = n(\vec{r}) \frac{d\vec{r}}{dl} \quad (2.10.10)$$

Siendo $\vec{S}(\vec{r}) = d\vec{r}/dl$ el vector unitario paralelo a $\vec{K}(\vec{r})$, el vector rayo (fig. 1)

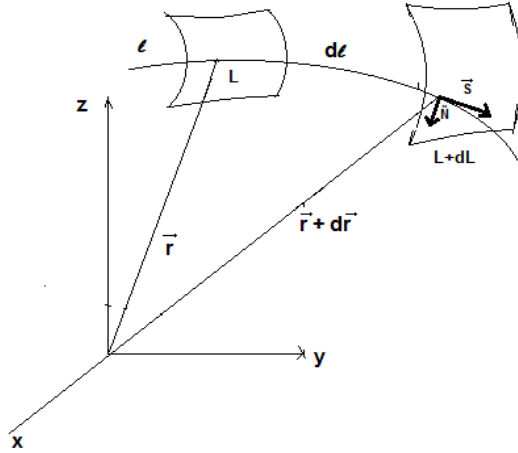


fig.1

Esta ecuación recibe el nombre de ecuación diferencial de los rayos; y usándola se puede obtener una expresión de la variación de la magnitud $L(\vec{r})$ a lo largo de la trayectoria (curva en general) de un rayo.

La derivada de $L(\vec{r})$ respecto al arco vendrá dada por;

$$\frac{dL(\vec{r})}{dl} = \vec{\nabla}L \cdot \frac{d\vec{r}}{dl} = n\vec{S} \cdot \vec{S} = n \quad (2.10.11)$$

Y por tanto,

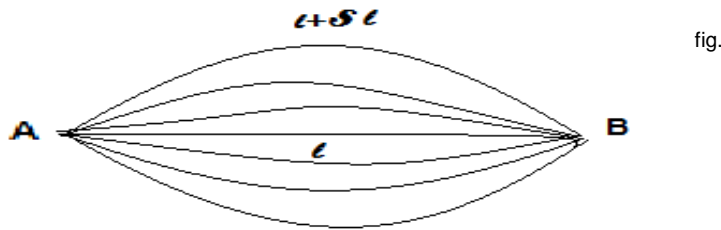
$$dL = n dl = \frac{c}{v} dl = cte \quad (2.10.12)$$

Es decir, dL es el producto del índice de refracción por el camino recorrido por la luz en el medio; o bien, la distancia que la luz recorrería en el vacío durante el mismo tiempo dt que ha empleado en el medio material. Por esta razón, la magnitud L se denomina normalmente camino óptico.

2.10.4. EL PRINCIPIO DE FERMAT

Históricamente, la óptica geométrica se desarrolló a partir de un principio variacional, el principio de Fermat como postulado único a partir del cual se obtienen todas las propiedades de los rayos de luz, en particular las ecuaciones fundamentales que hemos visto.

El principio de Fermat afirma *que la trayectoria l que sigue la luz para viajar de un punto A hasta otro B (fig. 2), es aquella para la cual el camino óptico asociado es el mínimo de entre todas las posibles trayectorias próximas a ella.*



En particular, si se pasa de la trayectoria l a la $l + \delta l$ por variaciones infinitesimales de primer orden, el camino óptico se mantendrá estacionario;

Es decir;

$$\delta L = \delta \int_A^B n(\vec{r}) \frac{dl}{dt} dt = \delta \int_A^B n v dt = \delta \int_A^B c dt = 0 \quad (2.10.13)$$

(Para rayos de luz)

También recibe el nombre de principio del camino óptico mínimo o del tiempo mínimo por ser $ndl = cte$.

El paralelismo formal entre óptica geométrica y mecánica clásica es un tanto gigantesco; Dado que la variable de la fase $dg = K_0 dL - \omega dt$ le corresponde la variable de acción $dS = \mathcal{L} dt$ (donde \mathcal{L} es Lagrangiano de la partícula); a la ecuación de los rayos le corresponde las ecuaciones de Lagrange; a las ecuaciones de onda localmente plana le corresponden las ecuaciones de Hamilton-jacobi, y en definitiva, a los rayos de luz le corresponde las trayectorias de las partículas.

Óptica geométrica

$$dg = K_0 dL - \omega dt$$

$$\vec{K} = \vec{\nabla}g$$

$$\omega = - \frac{\partial g}{\partial t}$$

$$K = \frac{\omega}{c}$$

Mecánica Clásica

$$dS = \mathcal{L}dt$$

$$\vec{p} = \vec{\nabla}s$$

$$H = - \frac{\partial S}{\partial t}$$

$$P = \frac{H}{c}$$

2.11. MECÁNICA Y ÓPTICA GEOMÉTRICA.

Existe una interesante analogía entre la trayectoria de una partícula sometida a una fuerza conservativa y la trayectoria de seguida por un rayo de luz en una región del espacio en que el índice de refracción es una función de posición que varía muy lentamente. Esto es, el índice de refracción no varía apreciablemente en una distancia igual a la longitud de onda de la luz en el medio. En esta circunstancia, la naturaleza ondulatoria de la luz no es manifestada por la onda luminosa, y su propagación por el medio es exactamente descrita por la propagación de los puntos de sus frentes de onda a lo largo de las trayectorias de los rayos normales a dichos frentes.

Cuando un rayo de luz pasa de un medio con determinado índice de refracción a otro de diferente índice, lo hace de acuerdo con la ley de Snell. Esta ley establece

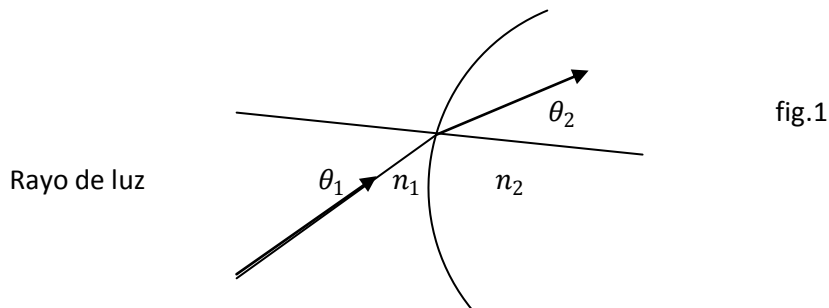


fig.1

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

Que la cantidad $n \sin \theta$ permanece constante, siendo θ el ángulo que forma la trayectoria del rayo con la normal a la superficie que separa los dos medios y n el índice de refracción del primer medio considerado (figura 1).

Esta ley nos permite determinar gráficamente la trayectoria de un rayo de luz a través de un medio cualquiera. Subdividiendo si es posible, la región por la que se propaga el rayo en cierto número de superficies de índices de refracción constante, determinado por

$$n_m(x, y, z) = n_0(x, y, z) + m \Delta n, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

(Figura 2a), donde $n_0(x, y, z)$ es la superficie de índice constante que pasa por la posición inicial del rayo y Δn es un cambio infinitesimal del índice;

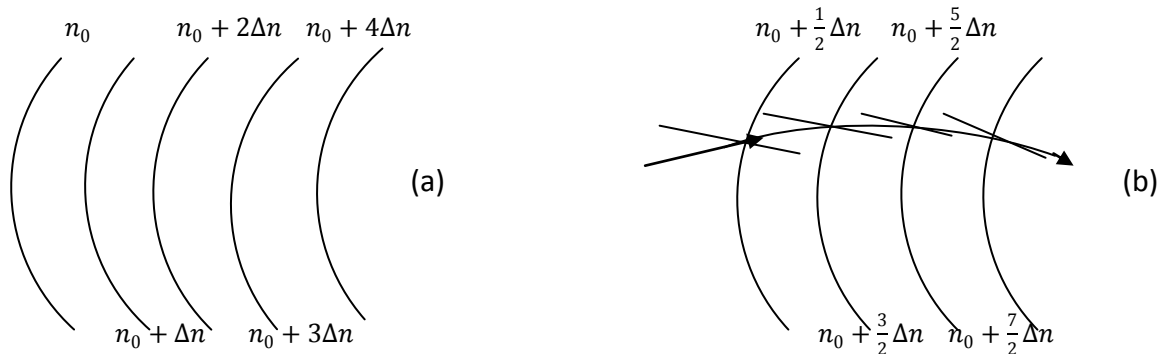
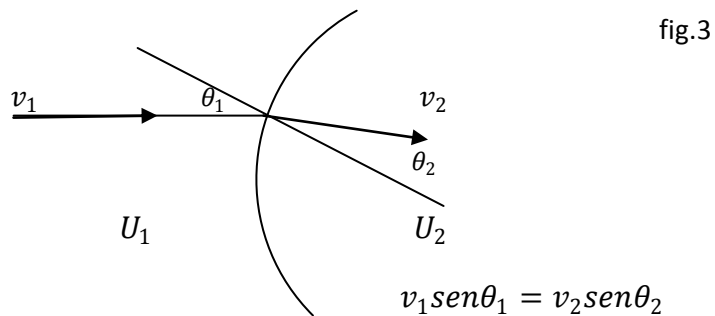


fig. 2. Método grafico para determinar trayectorias de rayos.

Podemos valorar aproximadamente el índice de cada región por su valor medio en toda la región (figura(2b)). Entonces, el paso del rayo por el medio, se determina aproximadamente por la trayectoria discontinua que seguiría el rayo en la región discontinua de la figura (2b). esta trayectoria se determina aplicando la ley de Snell en cada frontera de discontinuidad.

Por el movimiento de una partícula en un campo de fuerzas conservativas, vemos que hay una formula análoga a la ley de Snell. Consideremos una partícula que se mueve de una región a otra en la que la energía potencial cambia discontinuamente de U_1 a U_2 a medida que la partícula atraviesa la frontera entre las dos regiones (figura(3)).



Un cambio de la energía potencial de la partícula provoca un cambio en su velocidad, producido por la variación de la componente de la velocidad normal a la superficie en que la energía potencial cambia discontinuamente. El efecto de la discontinuidad en la función de energía potencial es equivalente al impulso de energía $Fv\Delta t$ en la dirección normal a la

superficie de discontinuidad. Este impulso hace que se modifique la energía cinética de la partícula en la cantidad $\Delta T = Fv\Delta t = U_1 - U_2$, lo que origina una variación en la componente de la velocidad normal a la superficie de discontinuidad. Pero la componente tangencial permanece invariable, de modo que

$$v_1 \text{sen}\theta_1 = v_2 \text{sen}\theta_2$$

Donde θ_1 y θ_2 son los ángulos que forman los vectores velocidad de las dos regiones con la normal a la superficie (figura 3).

$$n_1 < n_2 < n_3 < n_4$$

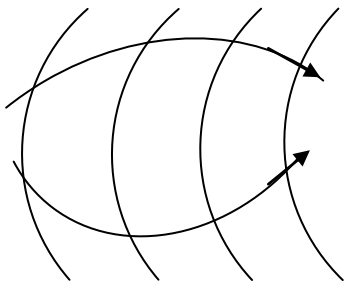


fig.4. Medio convergente.

$$U_1 > U_2 > U_3 > U_4$$

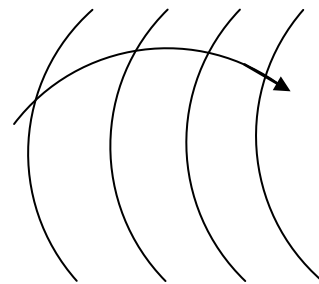


fig.5. Región convergente.

La magnitud del vector velocidad en los dos regiones se halla utilizando el principio de conservación de la energía, que nos dará la ecuación

$$\sqrt{E - U_1} \text{sen}\theta_1 = \sqrt{E - U_2} \text{sen}\theta_2$$

Se debe entender claramente que, en los problemas en que el índice de refracción, $n(x,y,z)$ y la función $\sqrt{E - U(x,y,z)}$ tienen la misma dependencia funcional de la posición, la trayectoria de un rayo de luz cuya posición inicial y cuya dirección de propagación coinciden con las de una partícula de energía total E será la misma que la trayectoria de la partícula.

Cualitativamente, por ejemplo, encontramos que los rayos de luz de un frente de onda que se propagan en una región en que las superficies de índice constante son curvas, y varían como se indica en la figura(4), se curvaran uno hacia el otro.

Un medio de este tipo recibe el nombre de medio convergente.

Análogamente en una región en que las superficies de energía potencial constante varían como se muestra en la figura(5), las trayectorias próximas seguidas por partículas que salen de un punto dado con la misma velocidad, se curvarán, también una hacia la otra.

3. PROPUESTA DE HAMILTON- JACOBI.

Se encuentra una ecuación en derivadas parciales, la cual surge de la necesidad de buscar una transformación canónica que lleve de las coordenadas y cantidades de movimiento (q, p) en un instante t , a un nuevo sistema de cantidades constantes que pueden ser las $2n$ constantes de movimiento o constantes iniciales (q_0, p_0) en $t = 0$.

$$H\left(q_i, \frac{\partial F}{\partial q_i}, t\right) + \frac{\partial F}{\partial t} = 0, \quad p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i} = \alpha_i \quad (3.1)$$

Donde se ha dicho que H es el Hamiltoniano del sistema y F es una función llamada Generatriz de Transformación (ECUACIONES DE HAMILTON-JACOBI, PARA LA FUNCION PRINCIPAL DE HAMILTON. Ecu. (2.8.3)).

Cuando se resuelve (1) se tiene:

$$F = S(q_i; \alpha_i; t) , \quad \text{con } i = 1, 2, 3, 4 \dots n$$

Donde las α_i son las constantes de integración las cuales se les asocian con nuevas cantidades de movimiento constante $\alpha_i = P_i$ de la transformación buscada. La solución S se la conoce como “función principal de Hamilton”. Teniendo la solución S estamos resolviendo el problema mecánico. Para sistemas en los cuales la Hamiltoniana sea una constante de movimiento y se identifica con la energía total. La función principal se puede presentar como:

$$S(q, \alpha, t) = W(q, \alpha) - E t \quad (3.2)$$

Entonces la ecuación de Hamilton-Jacobi (1) se transforma a:

$$H\left(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i}\right) = E \quad (3.3)$$

Siendo E la energía del sistema y H la Hamiltoniana.

3.1. APROXIMACIÓN ÓPTICA

La función $S(q, \alpha, t)$ puede presentarse como un frente de onda ya que la superficie avanzaría desde $S(0) = S_0$ hasta $S_0 + E dt$ en un tiempo dt .

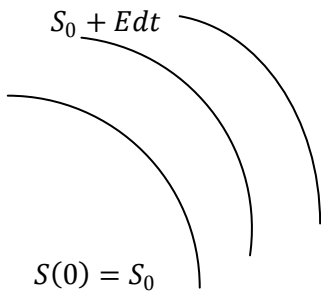


fig.1

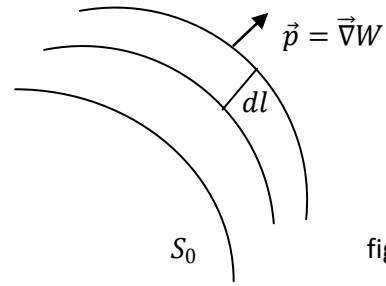


fig.2

El movimiento de la superficie es análogo al movimiento de una onda. Podemos considerar que las superficies de S constante son frentes de onda que se propagan en el espacio de las configuraciones (q_1, q_2, \dots, q_n) . Es posible calcular el valor de la velocidad de este frente de onda. Tomemos el caso sencillo de una sola partícula, donde el espacio de configuraciones es el tridimensional ordinario.

Este frente se desplaza una distancia dl (fig. 2) perpendicular al frente de onda, en un tiempo dt .

Entonces $\mu = \frac{dl}{dt}$, es la velocidad del frente de onda en un punto definido, para un frente de onda constante:

$$dW = E dt, \text{ de otro lado, } dW = \vec{\nabla}W \cdot d\vec{l} = |\nabla W| dl, \text{ donde}$$

$\vec{\nabla}W$ es perpendicular al frente de onda, y la velocidad es entonces;

$$dW = E dt \qquad \mu = \frac{dl}{dt} = \frac{dl}{\frac{|\nabla W| dl}{E}} = \frac{E}{|\nabla W|}$$

$$|\nabla W| dl = E dt$$

$$\frac{|\nabla W| dl}{E} = dt \qquad \mu = \frac{E}{|\nabla W|}$$

Es la velocidad del frente onda causado por el movimiento de la partícula. Puesto que:

$p = \frac{\partial S}{\partial q} = \frac{\partial W}{\partial q} = |\nabla W|$, $E = \frac{p^2}{2m} + V(q)$ energía total del sistema
 entonces $\vec{p} = \vec{\nabla}W$ es perpendicular a la superficie S, y de

$$E = \frac{p^2}{2m} + V(q)$$

$$\frac{p^2}{2m} = E - V(q)$$

$p = \sqrt{2m(E - V(q))}$, Implica entonces que $p^2 = |\nabla W|^2 = 2m(E - V(q))$

$|\nabla W| = \sqrt{2m(E - V(q))}$ y la velocidad de la onda es:

$$\mu = \frac{E}{|\nabla W|} = \frac{E}{\sqrt{2m(E - V(q))}} = \frac{E}{\sqrt{2mT}}$$
 , siendo T energía cinética, ahora como

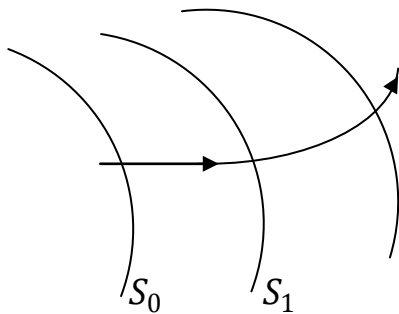
$$T = \frac{1}{2}mv^2$$

$$2mT = m^2v^2 = p^2, \text{ Tenemos que } \mu = \frac{E}{\sqrt{2mT}} = \frac{E}{p} ,$$

$$\mu = \frac{E}{p}$$

Ósea que podemos expresar la velocidad de la onda en términos de la cantidad de movimiento.

Un frente de onda de una partícula tiene una velocidad $\vec{\mu}$ y la partícula tiene un momento $\vec{p} = m\vec{v}$ perpendicular al frente de onda, ósea que desde la perspectiva de Hamilton hay frentes de ondas asociadas al movimiento de la partícula y las partículas avanzan perpendicular a estos frentes, como si fueran rayos ópticos.



Las superficies S de acción se han caracterizado como frentes de onda por que se propagan por el espacio de configuraciones de igual manera que las superficies de onda de fase constante en el espacio físico.

3.2. ONDAS DESDE EL FORMALISMO CLÁSICO DE HAMILTON-JACOBI.

Consideremos la función de acción $S(q, \alpha, t) = W(q, \alpha) - Et$ con la que se determinará una fase $\phi(q, \alpha, t) = \frac{S(q, \alpha, t)}{J}$, con J una constante con unidades de acción¹¹, entonces;

$$\phi(q, \alpha, t) = \frac{S(q, \alpha, t)}{J} = \frac{1}{J}(W(q, \alpha) - Et) \quad (3.4)$$

Supongamos que la onda propagada es de la forma convencional conocida en óptica (el eikonal en óptica) :

$$\psi(q, \alpha, t) = Ae^{i\phi(q, \alpha, t)} = Ae^{i\frac{S(q, \alpha, t)}{J}} = Ae^{\frac{i}{J}(W(q, \alpha) - Et)} \quad (3.5)$$

Esta sería la onda de propagación de frentes de acción cuando se mueve una partícula clásica, en el sentido como se interpreta en el siglo 19 año 1836.

Ahora con un poco de matemáticas averigüemos cual es la ecuación diferencial de movimiento que cumple $\psi(q, \alpha, t)$ compatible con las ecuaciones de Hamilton-Jacobi (3.1) y (3.3).

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + V(q) \quad ; \quad p = \frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial q} \quad \text{La ecuación es}$$

$$H\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad , \quad \text{entonces} \quad \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + V(q) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (3.6)$$

el objetivo es calcular las derivadas de S respecto al tiempo y a la posición, con la idea de llegar a una ecuación diferencial en derivadas parciales y en términos de la función $\psi(q, \alpha, t)$.

Derivando la función definida en (3.5) respecto a la coordenada tenemos:

$$\frac{\partial \psi}{\partial q} = A \frac{\partial}{\partial q} \left[e^{\frac{iS}{J}} \right] = A \frac{i}{J} e^{\frac{iS}{J}} \frac{\partial S}{\partial q}$$

¹¹Artículo: R. Carrillo, H. Paz, J. Pacheco (REVISTA COLOMBIA DE FÍSICA, VOL., 38 N₀.04, 2006)

$$\frac{\partial \psi}{\partial q} = \frac{i}{J} \psi \frac{\partial S}{\partial q}$$

Aplicando la segunda derivada y despejando el término $\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2$

$$\frac{\partial}{\partial q} \left[\frac{\partial \psi}{\partial q} \right] = \frac{\partial^2 S}{\partial q^2} = \frac{i}{J} \frac{\partial}{\partial q} \left[\psi \frac{\partial S}{\partial q} \right]$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial q^2} = \frac{i}{J} \left[\psi \frac{\partial^2 S}{\partial q^2} + \frac{\partial S}{\partial q} \frac{\partial \psi}{\partial q} \right]$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial q^2} = \frac{i}{J} \psi \frac{\partial^2 S}{\partial q^2} + \frac{i}{J} \frac{\partial S}{\partial q} \left(\frac{i}{J} \psi \frac{\partial S}{\partial q} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial q^2} = \frac{i}{J} \psi \frac{\partial^2 S}{\partial q^2} - \frac{\psi}{J^2} \left(\frac{\partial S}{\partial q} \right)^2, \quad i^2 = -1$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial q^2} - \frac{i\psi}{J} \frac{\partial^2 S}{\partial q^2} = -\frac{\psi}{J^2} \left(\frac{\partial S}{\partial q} \right)^2$$

$$-\frac{J^2}{\psi} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial q^2} - \frac{i\psi}{J} \frac{\partial^2 S}{\partial q^2} \right) = \left(\frac{\partial S}{\partial q} \right)^2$$

$$-\frac{J^2}{\psi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial q^2} + \frac{J^2 i\psi}{\psi J} \frac{\partial^2 S}{\partial q^2} = \left(\frac{\partial S}{\partial q} \right)^2$$

$$-\frac{J^2}{\psi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial q^2} + Ji \frac{\partial^2 S}{\partial q^2} = \left(\frac{\partial S}{\partial q} \right)^2 \quad (3.7)$$

Y la derivada de la función (3.5) respecto al tiempo es

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = Ae^{iS} \frac{i}{J} \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{i}{J} \psi \frac{\partial S}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{i\psi}{J} \frac{\partial S}{\partial t}$$

Despejando la derivada de S con respecto al tiempo

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{J}{i\psi} \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (3.8)$$

Remplazando (3.7) y (3.8) en (3.6) tendremos la ecuación diferencial de frente de onda como sigue:

$$\frac{1}{2m} \left(-\frac{J^2}{\psi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial q^2} + iJ \frac{\partial^2 S}{\partial q^2} \right) + V(q) + \frac{J}{i\psi} \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{J^2}{2m\psi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial q^2} + \frac{Ji}{2m} \frac{\partial^2 S}{\partial q^2} + V(q) + \frac{J}{i\psi} \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0 \\
& -\frac{J^2}{2m\psi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial q^2} + V(q) = -\frac{J}{i\psi} \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{Ji}{2m} \frac{\partial^2 S}{\partial q^2} \\
& -\frac{J^2}{2m\psi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial q^2} + V(q) = \frac{Ji}{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{Ji}{2m} \frac{\partial^2 S}{\partial q^2} \\
& -\frac{J^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial q^2} + V(q)\psi = iJ \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{Ji\psi}{2m} \frac{\partial^2 S}{\partial q^2} \tag{3.9}
\end{aligned}$$

La ecuación definida en (3.9) es muy parecida a la ecuación ondulatoria de schrödinger pero no es una ecuación cuántica, sigue siendo clásica en los conceptos, puesto que tanto “ p ” como “ q ” varían explícitamente con el tiempo esto es que se pueden encontrar trayectorias de partículas en todo el imaginario físico del siglo diecinueve, año 1834. Esta ecuación espera 90 años hasta 1925 y de pronto evoluciona a una ecuación cuántica debido a dos hechos solidarios: existen experimentalmente los electrones y la difracción de ellos que muestran un comportamiento ondulatorio de las partículas y el otro hecho es un rompimiento conceptual: *las coordenadas “ p ” y “ q ” no varían explícitamente con el tiempo*, esto es que no existe el concepto de trayectorias de partículas como los electrones y por tanto

$$\frac{\partial p}{\partial q} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial q}{\partial t} = 0$$

En términos matemáticos lo que significa es que las coordenadas p y q son ínteramente independientes, y que no están en función de un parámetro t .

En consecuencia el término

$$-\frac{iJ}{2m} \frac{\partial^2 S}{\partial q^2} = -\frac{Ji\psi}{2m} \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\partial S}{\partial q} \right) = -\frac{Ji\psi}{2m} \frac{\partial}{\partial q} (p) = -\frac{Ji\psi}{2m} \frac{\partial p}{\partial q} = 0$$

Se hace igual a cero en la ecuación (3.9) y llegamos finalmente a una ecuación de la forma;

$$-\frac{J^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(q, \alpha, t)}{\partial q^2} + V(q)\psi(q, \alpha, t) = iJ \frac{\partial \psi(q, \alpha, t)}{\partial t} \tag{3.10}$$

Y con estas ideas caemos a la ecuación (3.10) que ahora es una ecuación cuántica, donde a J la podemos asimilar con la constante de Plank \hbar , que ya era conocida en 1925.

Se ha llegado a una ecuación cuántica muy importante a partir de los principios clásicos de Hamilton y Jacobi, pero la curiosidad histórica no termina aquí. Pues desde la teoría de Hamilton-Jacobi de 1834 pueden deducirse los operadores cuánticos modernos, como son el operador de energía y de momento lineal.

En mecánica cuántica se postula que la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo que establece la variación temporal de la función de estado, tiene la forma dada por la ecuación

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\psi, \text{ donde se tiene que}$$

$\hat{H} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$, es el operador de energía del sistema que toma ψ como función propia.

Esto puede intuirse del formalismo de Hamilton si tomamos una función parecida a la que se define en (3.5)

$$\psi(q, p, t) = A(q)e^{-i\frac{S}{\hbar}} \quad (3.11)$$

Despejando S en esta ecuación se tiene que

$$\ln\psi = \ln\left(Ae^{-i\frac{S}{\hbar}}\right) = \ln A + \left(-i\frac{S}{\hbar}\right) = -i\frac{S}{\hbar} + c, \text{ donde } c = \ln A = \text{cte.}$$

$$S = i\hbar(\ln\psi - c) \quad (3.12)$$

La cual es la función principal de Hamilton.

Para la ecuación diferencial de Hamilton definida en (3.6)

$H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) = \frac{\partial S}{\partial t}$, calculando la derivada de S (ecu.(3.12)) con respecto al tiempo se tiene,

$$\frac{\partial}{\partial t}(S) = \frac{\partial}{\partial t}[i\hbar(\ln\psi - c)] = i\hbar \frac{1}{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

$\frac{\partial S}{\partial t} = iJ \frac{1}{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial t}$ y reemplazando este valor en la ecuación diferencial de Hamilton tenemos;

$$H = \frac{iJ}{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (3.13)$$

multiplicando la ecu. (3.13) por la derecha por la función ψ

$$H\psi = \frac{iJ}{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial t} \psi, \text{ como la función } \psi \text{ es una magnitud diferente de cero } (\psi \neq 0)$$

Si se asimila con la forma del operador de energía \hat{H} .

$$\hat{H}\psi = iJ \frac{\partial}{\partial t} \{\psi\}, \text{ donde } \hat{H} \rightarrow iJ \frac{\partial}{\partial t} \quad (3.14)$$

Y así se afirma que desde Hamilton-Jacobi se puede representar también a \hat{H} como el operador de energía.

En el caso de que ψ sea una función de fase separable como por ejemplo:

$$\psi = A(q)e^{i(kq - \omega t)} \quad (3.15)$$

Aplicando el operador de energía ecu.(3.14) a la función (3.15)

$$\hat{H}\psi = iJ \frac{\partial}{\partial t} (\psi) = iJ \frac{\partial}{\partial t} (Ae^{i(kq - \omega t)}) = -i^2 \omega J \psi$$

$$\hat{H}\psi = \omega J \psi, \text{ donde } \sqrt{-1} = i.$$

Claramente se puede observar que ωJ es un valor propio del operador \hat{H} y se identifica con la energía E del sistema mediante $E = \omega J$, ósea que

$$\hat{H}\psi = E\psi \quad (3.16)$$

que coincide con la moderna ecuación cuántica de estado estacionario.

Para la representación del operador cantidad de movimiento lineal tomamos los momentos canónicos provenientes de la formulación Hamiltoniana que son

$$p = \frac{\partial S}{\partial q} \quad (3.17)$$

Donde S es la función principal de Hamilton ecu.(3.12) con $c = 0$.

Aplicando la respectiva derivada espacial a la función S.

$\frac{\partial}{\partial q} (iJ \ln \psi) = iJ \frac{1}{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial q}$, reemplazando este resultado en la ecuación (3.17), el momento queda entonces

$p = \frac{iJ}{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial q}$, si multiplicamos esta ecuación a la derecha por la función ψ tenemos

$p\psi = \frac{iJ}{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial q} \psi$, aplicando el mismo tratado para la energía con $\psi \neq 0$, y asimilando a p con el operador de momento lineal \hat{p} tenemos entonces que:

$\hat{p}\psi = iJ \frac{\partial \psi}{\partial q}$, donde sale el operador buscado $\hat{p} \rightarrow iJ \frac{\partial}{\partial q}$.

Obsérvese que esta semblanza de coincide con el operador cuántico moderno de momento de la teoría de operadores y mecánica cuántica que es

$$\hat{p} = i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

en la dirección del eje de las x .

4. CONCLUSIÓN

Desde una mirada histórica se puede considerar la opción en la cual, **la ecuación ondulatoria de Schrödinger** no es un principio en si como se muestra en algunos de los textos, si no que desde mucho antes **Hamilton y Jacobi** habían trazado un camino conceptual y matemático para que ésta ecuación se diera. Hemos mostrado en esta monografía un camino teórico que comienza desde la ecuación de **Hamilton-Jacobi** y los conceptos envolventes, y concluye con una semejanza de la ecuación de Schrödinger.

Creemos que este pudo ser el camino que siguieron los teóricos para llegar a la ecuación cuántica y no un principio para justificar los experimentos modernos del siglo veinte. Esperamos que sea de gran ayuda para los estudiantes a los cual va dirigido este trabajo.

Como una sugerencia de esta conclusión, se pueden trabajar las ecuaciones dinámicas (2.9) descritas en términos de los corchetes de Poisson para obtener las ecuaciones en términos de los corchetes cuánticos ó conmutadores.

5. REFERENTES BIBLIOGRÁFICOS.

- Antonio Fernández Rañada, DINÁMICA CLÁSICA
- Levine, Ira N. QUÍMICA CUÁNTICA, 5^{ta} Edición. PEARSON EDUCACIÓN S.A. Madrid, 2001
- Walter Hauser, INTRODUCCION A LOS PRINCIPIOS DE MECANICA
- Gholdstein, MECÁNICA CLÁSICA, AGUILAR S.A., De Ediciones 1963
- José Manuel Cabrera, Fernando J. López Y Fernando A., ÓPTICA ELECTROMAGNÉTICA, 2^{da} vol. I Fundamentos
- R. Carrillo, H. Paz, J Pacheco REVISTA COLOMBIANA DE FÍSICA, VOL. 38, No. 4, 2006