Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua-Managua
A la Libertad por la Universidad !!

HIDROGEOLOGÍA

Ley de Darcy y Ecuaciones fundamentales flujo en medios porosos

Dr. Ingeniero Tupak Obando R., Geólogo
Doctorado en Geología y Gestión Ambiental
Celular: 84402511
Website: http://blogs.monografias.com/

Managua, Marzo -2010

Ley de Darcy

$$Q = -kAi$$

siendo:

Q = caudal de paso $[L^3T^{-1}]$
k = permeabilidad de Darcy $[LT^{-1}]$
A = área de paso $[L^2]$
i = gradiente piezométrico.

$$Q = kA\,\frac{h_A - h_B}{L}$$

Velocidad de Darcy y velocidad real

La velocidad v con la que el flujo atraviesa el medio permeable, puede ser fácilmente deducida combinando las leyes de Darcy y del gasto. Así se tendría:

$$Q = vA \quad ; \quad v = \frac{Q}{A}$$

siendo Q el caudal de paso y A la sección.

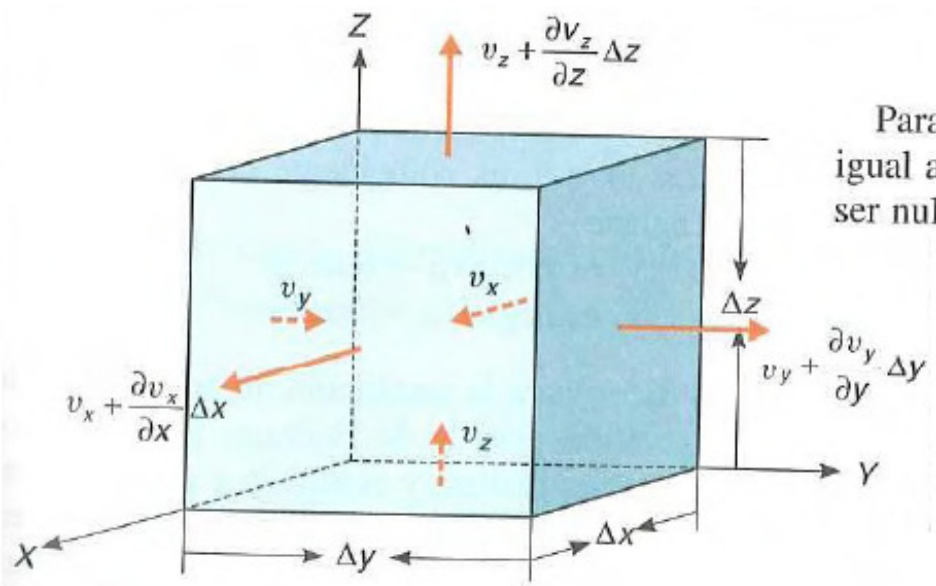
Dado que:

$$Q = -k \cdot A \cdot \frac{dh}{dx} \quad \Rightarrow \quad v = -k \cdot \frac{dh}{dx}$$

Ecuación de la continuidad para flujo estacionario

El concepto de flujo estacionario implica que el agua que entra en un recinto acotado sea igual a la que va a salir del mismo sin que varíe el agua almacenada en dicho recinto y que, por tanto, no existan variaciones del nivel piezométrico. Es decir, el nivel es independiente del tiempo y el agua entrante es igual al agua saliente.

La suma de caudales entrantes debe ser igual a la suma de caudales salientes.



Para respetar las condiciones de masa entrante igual a masa saliente, estas tres cantidades tienen que ser nulas. Por tanto:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

que es la ecuación de la continuidad en flujo estacionario.

Ecuación de Laplace

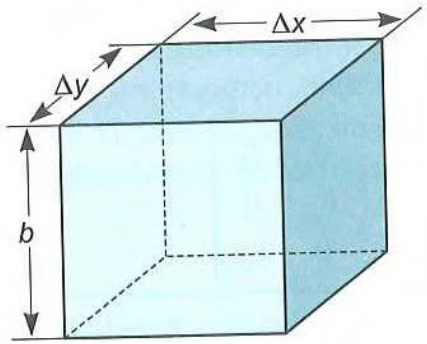
La ecuación de Laplace es la primera de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales que gobiernan el flujo en medios porosos (permeables en general, cuando el medio pueda ser asumido como poroso). Se refiere al flujo en condiciones de régimen permanente y en ausencia de fuentes y sumideros.

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0$$

De hecho, es lógico que así sea. El flujo se estudia aceptando, de una parte, que la masa entrante debe ser igual a la saliente, y que ambas, dentro del medio poroso, están condicionadas por los planteamientos de Darcy. Así, se tiene:

Ecuación de Poisson

Laplace no integra en sus planteamientos la existencia de fuentes y sumideros. Sin embargo, y aún en problemas de régimen permanente, es preciso incluir



$$R(x, y) \cong \frac{Q}{\Delta x \cdot \Delta y}$$

b = Potencia del acuífero

$$T = kb$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = -\frac{R(x, y)}{T}$$

Todo lo dicho para la resolución de la ecuación de Laplace es válido para la de Poisson. Sin embargo, esta última es mas realista y completa y se ajusta mejor a la mayoría de los problemas reales que suelen presentarse. Establece de modo simplista que la suma de entradas y salidas de agua en un recinto acotado debe ser igual al bombeo o recarga que incida sobre tal recinto, siempre en condiciones de régimen perma-

Ecuación del flujo en régimen transitorio

Si un sistema está en equilibrio, para cambiar esta situación se requieren ciertas acciones sobre el sistema, tales como bombeos o recargas. El sistema evoluciona hasta alcanzar de nuevo la situación de equilibrio correspondiente; mientras esta nueva situación es alcanzada, se suceden un conjunto de situaciones a lo largo del tiempo, que es lo que se denomina régimen transitorio. Los niveles van variando y en consecuencia se va almacenando o desalmacenando agua en el recinto. En este caso, la ecuación de la continuidad, en régimen transitorio, se aplica al recinto según:

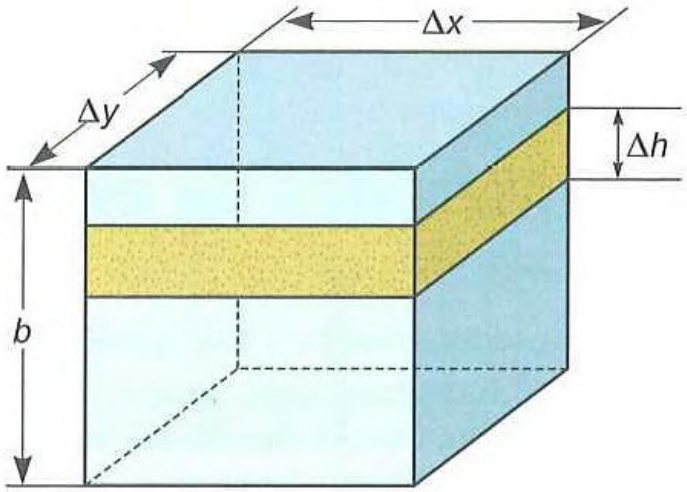
Volumen saliente = Volumen entrante − Volumen desalmacenado (en un intervalo de tiempo Δt)

Los términos de esta ecuación tienen el siguiente significado:

$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}$: suma de caudales entrantes por las caras laterales

$\frac{S}{T}\frac{\partial h}{\partial t}$: volúmenes desalmacenados en la unidad de tiempo

$\frac{R(x, y, t)}{T}$: bombeos o recargas en la unidad de tiempo.



GRACIAS POR SU ATENCIÓN

Métodos de evaluación de parámetros hidrogeológicos

La evaluación de parámetros hidrogeológicos como la permeabilidad, transmisividad, porosidad, coeficiente de almacenamiento, etc., es una de las tareas básicas en un estudio hidrogeológico. Estos parámetros son la base del cálculo de drenajes, filtraciones, caudales de bombeo, tiempo de tránsito de sustancias transportadas por el agua subterránea, etc. Debe perseguirse el rigor y la máxima fiabilidad posible en la determinación de estos parámetros, que son, en definitiva, los que definen las características de los acuíferos y su capacidad para almacenar y transmitir el agua subterránea.

Básicamente existen tres tipos de métodos: ensayos de bombeo, ensayos de inyección y trazadores. También se pueden utilizar métodos de laboratorio sobre muestras extraídas del acuífero, aunque suelen considerarse más fiables los primeros y, sobre todo, gozan de una mayor y significativa validez espacial.

Ensayos de bombeo

Los ensayos de bombeo son, sin lugar a dudas, el método más completo y fiable para el cálculo de los parámetros hidrogeológicos de un acuífero. Consisten en bombear un pozo, en principio a caudal constante, y analizar el descenso de los niveles piezométricos, tanto en el pozo de bombeo como en pozos o piezómetros circundantes.

Existen dos tipos básicos de métodos: ensayos de bombeo en régimen permanente y ensayos de bombeo en régimen transitorio o variable. En los primeros los niveles piezométricos no varían, y se interpretan los descensos producidos en el entorno del pozo como consecuencia de un bombeo constante en el mismo; en régimen variable lo que se analiza es la evolución de los niveles en el pozo de bombeo y pozos de observación a lo largo de la prueba.

ENSAYOS DE BOMBEO EN RÉGIMEN PERMANENTE.

La ecuación general del flujo bidimensional bajo condiciones de acuífero confinado y régimen permanente viene dada por:

$$\frac{\partial h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0$$

siendo h el nivel piezométrico.

$$x = r\cos\alpha$$

$$y = r\,\mathrm{sen}\,\alpha$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial h}{\partial r} = 0$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dh}{dr}\right) = 0$$

$$\left(r\frac{dh}{dr}\right) = cte$$

$$Q = 2\pi r b k \frac{dh}{dr}$$

$$cte = r\frac{dh}{dr} = \frac{Q}{2\pi b k} = \frac{Q}{2\pi T}$$

$$dh = \frac{Q}{2\pi T}\frac{dr}{r}$$

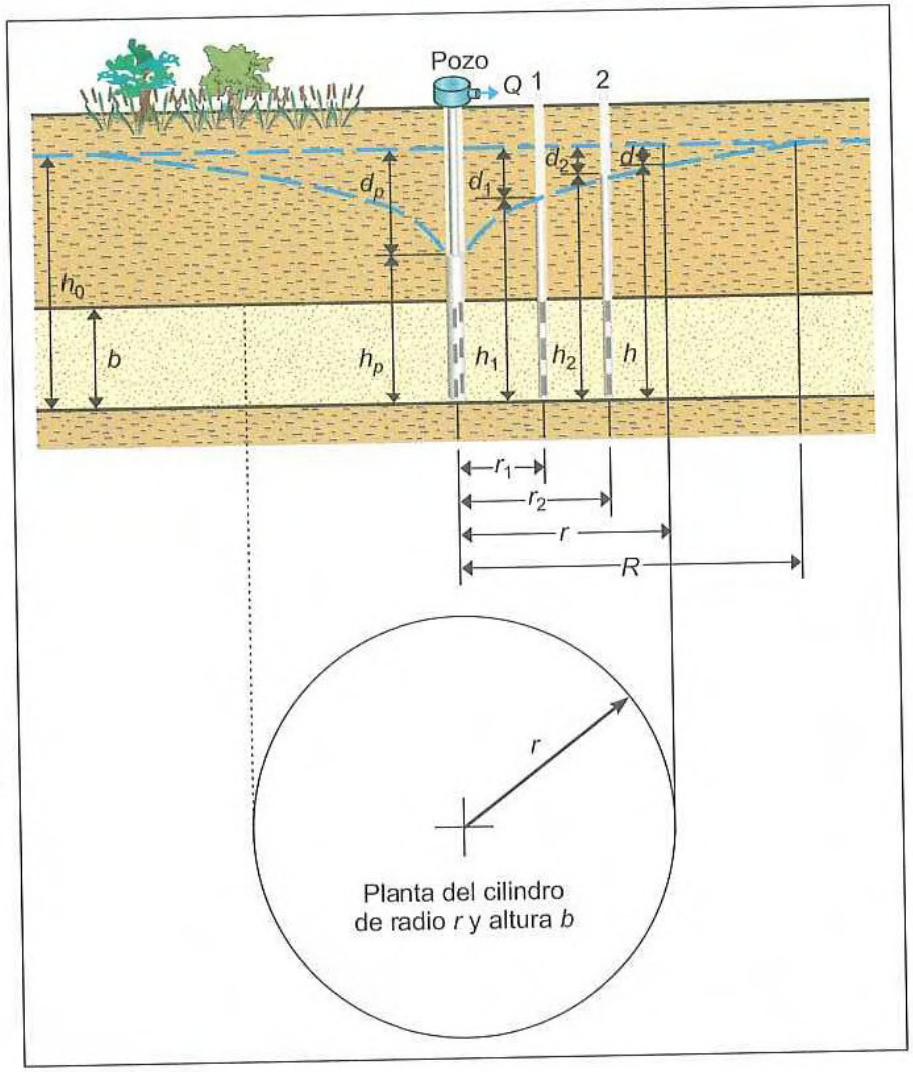
$$\int_h^{h_0} dh = \frac{Q}{2\pi T}\int_r^R \frac{dr}{r}$$

solución de Thiem (1906):

$$h_0 - h = \frac{Q}{2\pi T}\ln\frac{R}{r}$$

donde:

h_0 = nivel piezométrico inicial
h = nivel piezométrico a la distancia r
Q = caudal de bombeo
T = transmisividad
R = radio de influencia
r = distancia al eje del pozo.



$$Q = 2\pi r\, hk \frac{dh}{dr}$$

$$h\, dh = \frac{Q}{2\pi k} \frac{dr}{r}$$

$$\int_h^{h_0} h\, dh = \frac{Q}{2\pi k} \int_r^R \frac{dr}{r}$$

$$h_0^2 - h^2 = \frac{Q}{\pi k} \ln \frac{R}{r}$$

solución de Dupuit (1863).

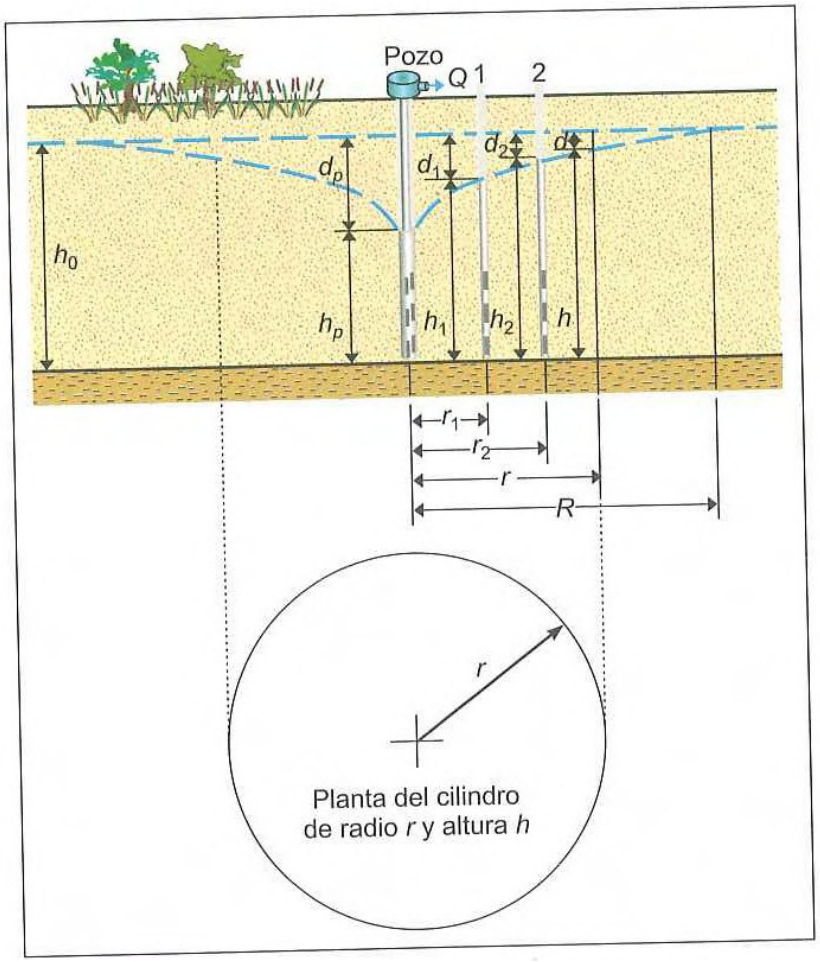
Según la ley de Darcy, puede establecerse que el caudal que atraviesa la superficie cilíndrica porosa será igual al producto de la permeabilidad del acuífero por el área de paso y por el gradiente hidráulico que existe entre uno y otro lado de la superficie cilíndrica considerada. Es decir:

$$Q = kAi$$

donde $A = 2\pi rb$ es el área de paso, $i = dh/dr$ es el gradiente:

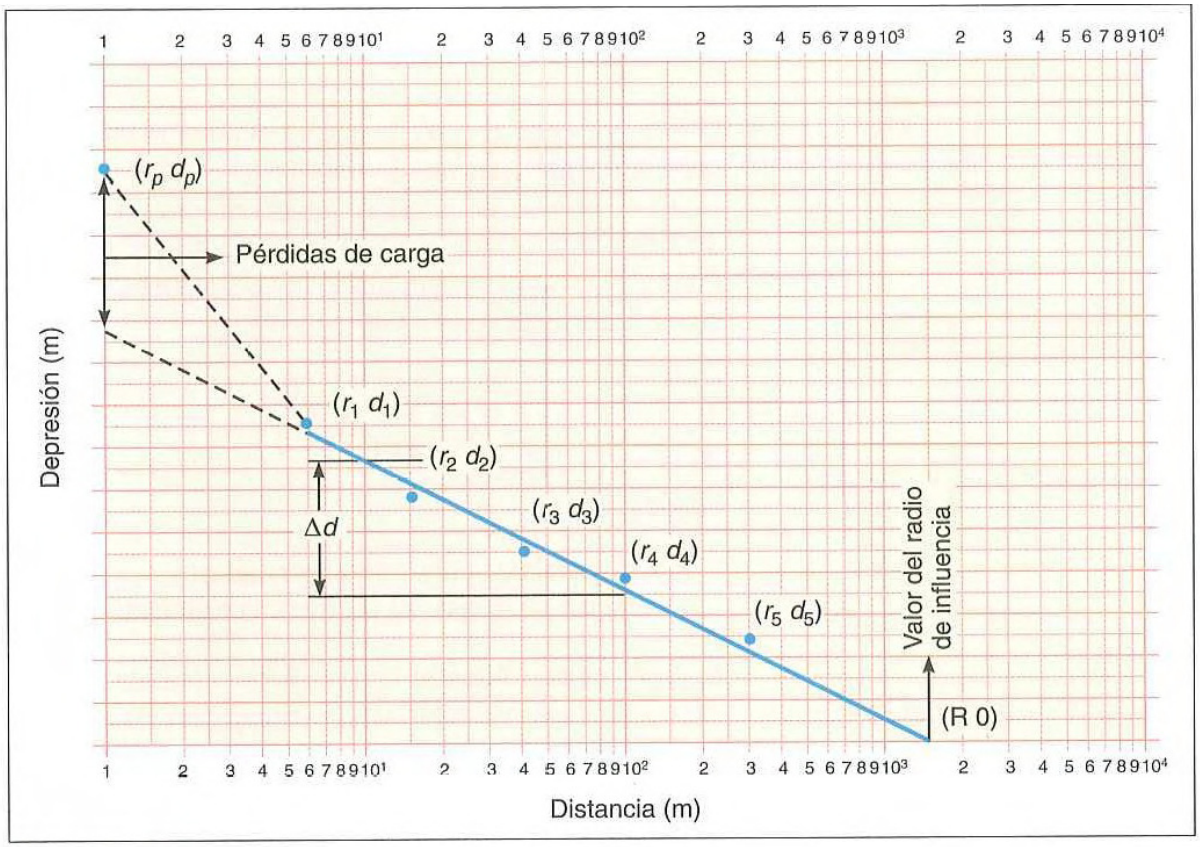
$$Q = k2\pi rb \frac{dh}{dr} \qquad kb = T$$

$$Q = 2\pi Tr \frac{dh}{dr} \qquad dh = \frac{Q}{2\pi T} \cdot \frac{dr}{r}$$

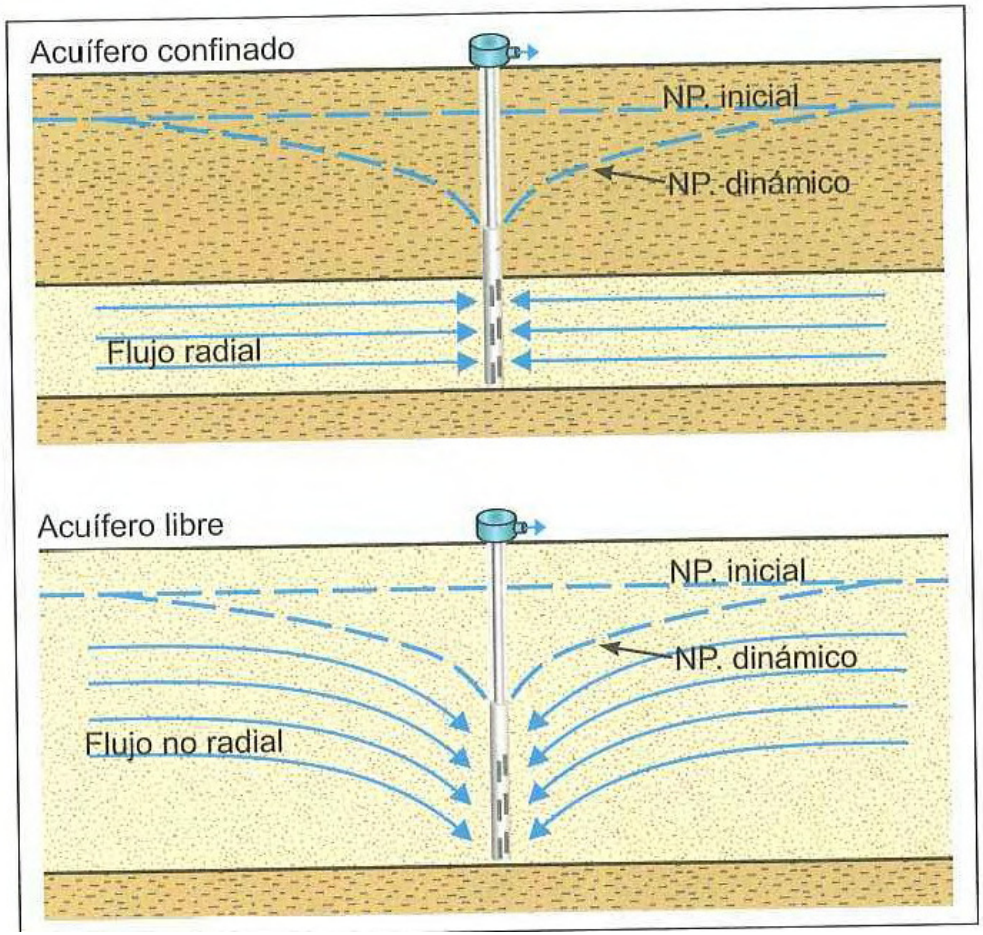


MÉTODO DE THIEM. ACUÍFERO CONFINADO EN RÉGIMEN PERMANENTE

$$T = 0{,}366\,\frac{Q}{\Delta d}$$



MÉTODO DE DUPUIT. ACUÍFERO LIBRE EN RÉGIMEN PERMANENTE



$$h_0^2 - h^2 = \frac{Q}{\pi k} \ln \frac{R}{r}$$

$$d - \frac{d^2}{2h_0} = \frac{Q}{2\pi T} \ln \frac{R}{r}$$

— descenso observado $= d$

— descenso corregido $= d - (d^2/2h_0)$, siendo h_0 el espesor saturado inicial.

MÉTODO DE DE GLEE. ACUÍFERO SEMICONFINADO EN RÉGIMEN PERMANENTE

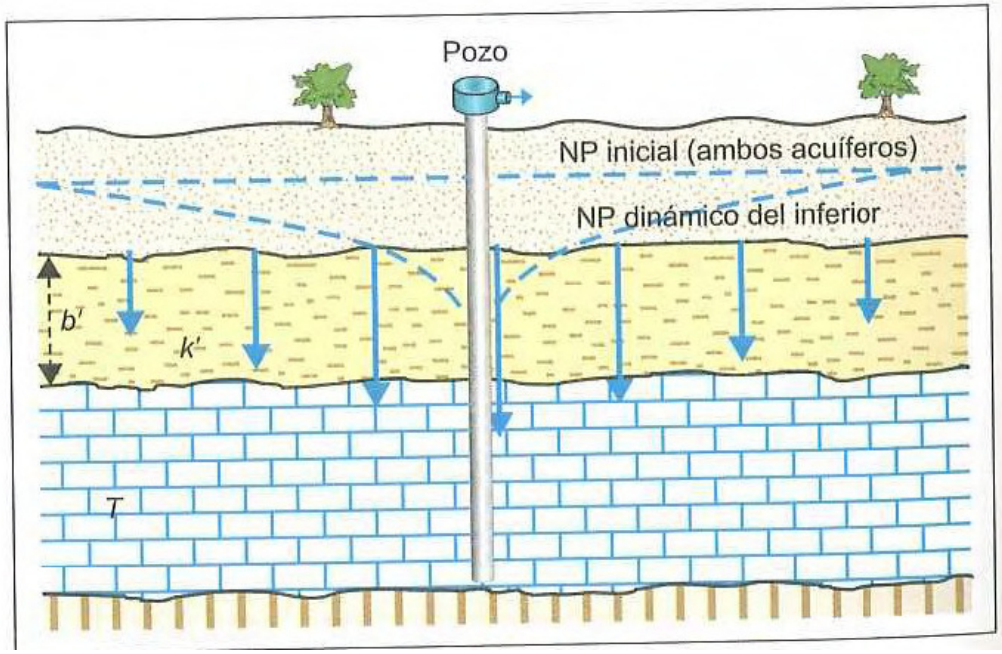
$$d = \frac{Q}{2\pi T} K_0 \left(\frac{r}{B}\right)$$

donde:

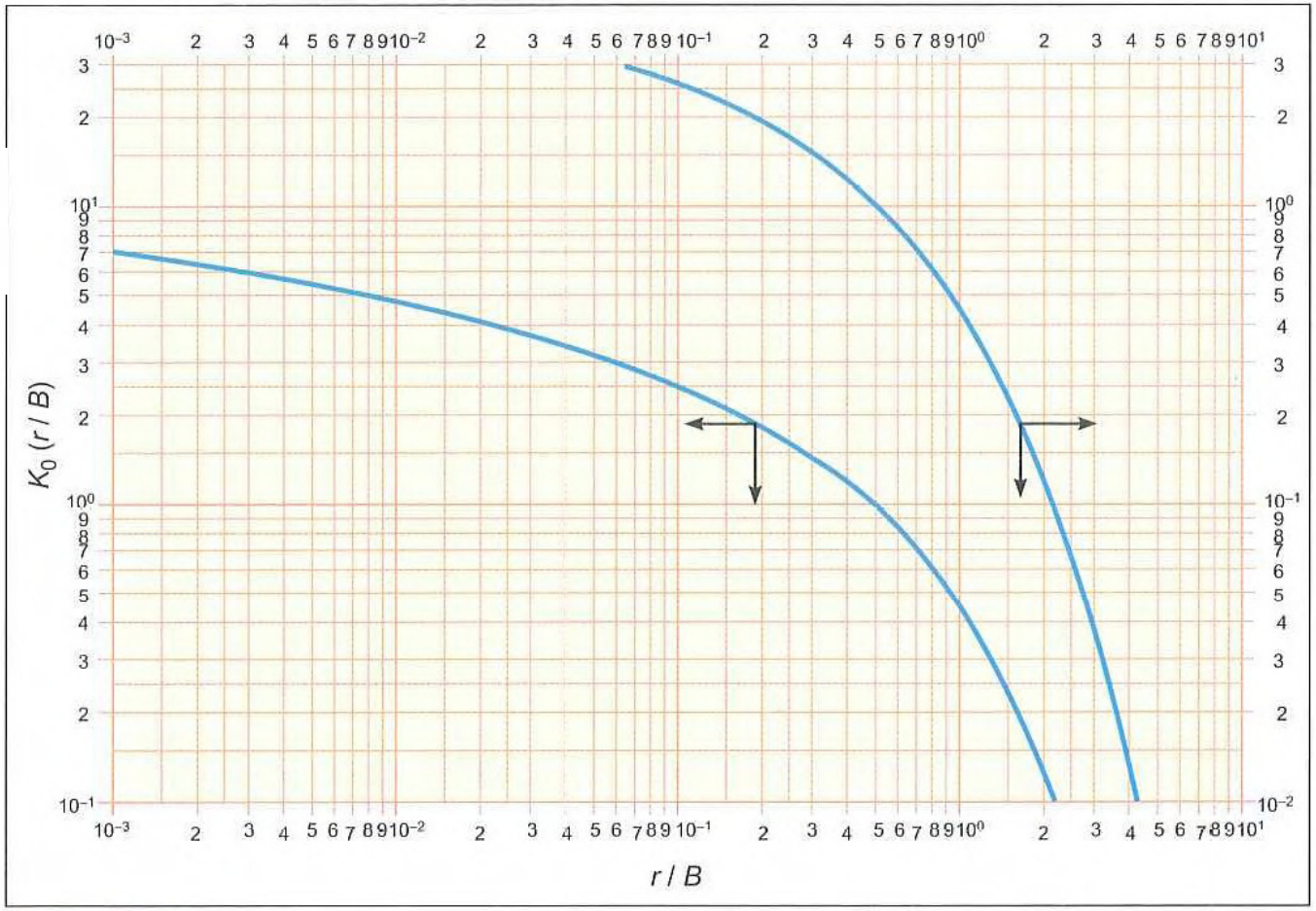
r = distancia al punto de observación
B = factor de goteo (se define a continuación)

El factor de goteo, viene dado por:

$$B = \sqrt{\frac{T \cdot b'}{k'}}$$



$$d = \frac{Q}{2\pi T} \ln \frac{1{,}12B}{r}$$



ENSAYOS EN RÉGIMEN TRANSITORIO. PLANTEAMIENTO DE LA DEDUCCIÓN DE LAS ECUACIONES

La ecuación general del flujo bidimensional, bajo condiciones de acuífero confinado y régimen transitorio, viene dada por:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \frac{S}{T} \cdot \frac{\partial h}{\partial t}$$

$$d = \frac{Q}{4\pi T} \ln \frac{2{,}25Tt}{r^2 S}$$

o bien

$$d = 0{,}183 \frac{Q}{T} \log \frac{2{,}25Tt}{r^2 S} \quad \text{(Jacob)}$$

METODO DE THEIS. ACUÍFERO CONFINADO EN RÉGIMEN VARIABLE

$$d = \frac{Q}{4\pi T} \int_u^{\infty} \frac{e^{-u}}{u}\, du$$

donde:

d = descenso en un pozo situado a la distancia r
$u = (r^2S)/(4Tt)$
S = coeficiente de almacenamiento
t = tiempo a partir del comienzo del bombeo, consideradas condiciones de reposo.

$$d = \frac{Q}{4\pi T} W(u) \quad (1) \qquad T = \frac{QW(u)}{4\pi d} \quad (3)$$

$$u = \frac{r^2S}{4Tt} \quad (2) \qquad S = \frac{4Tt}{r^2 \cdot 1/u} \quad (4)$$

$\frac{Q}{4\pi T}$ y $\frac{r^2S}{4T}$ (en representación doble logarítmica)

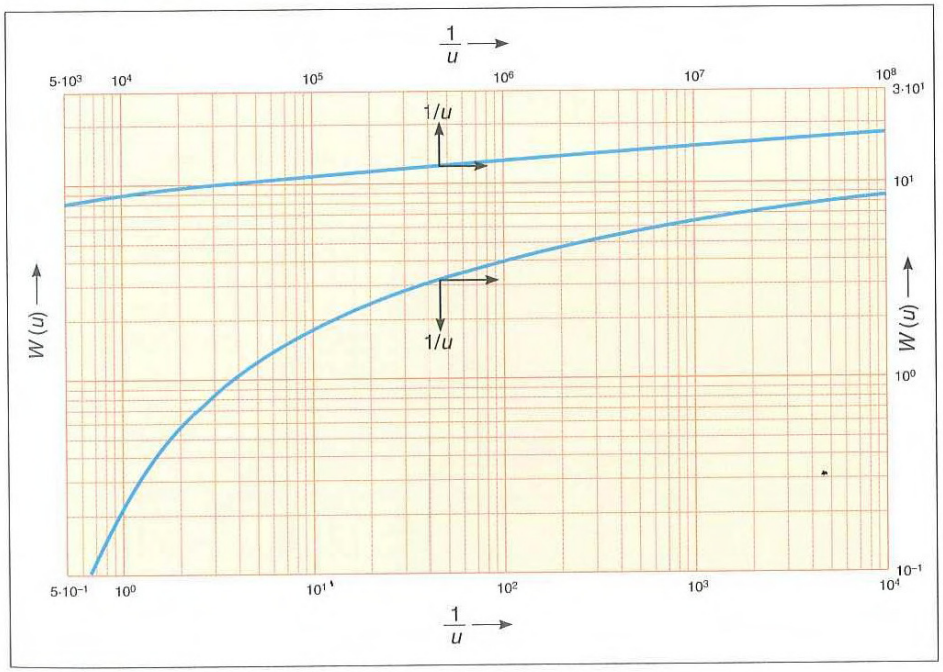
Los datos de campo del ensayo se representan en gráficos del tipo:

$$d - \log t \quad ; \quad d - \log r^2/t \quad ; \quad d - \log r^2$$

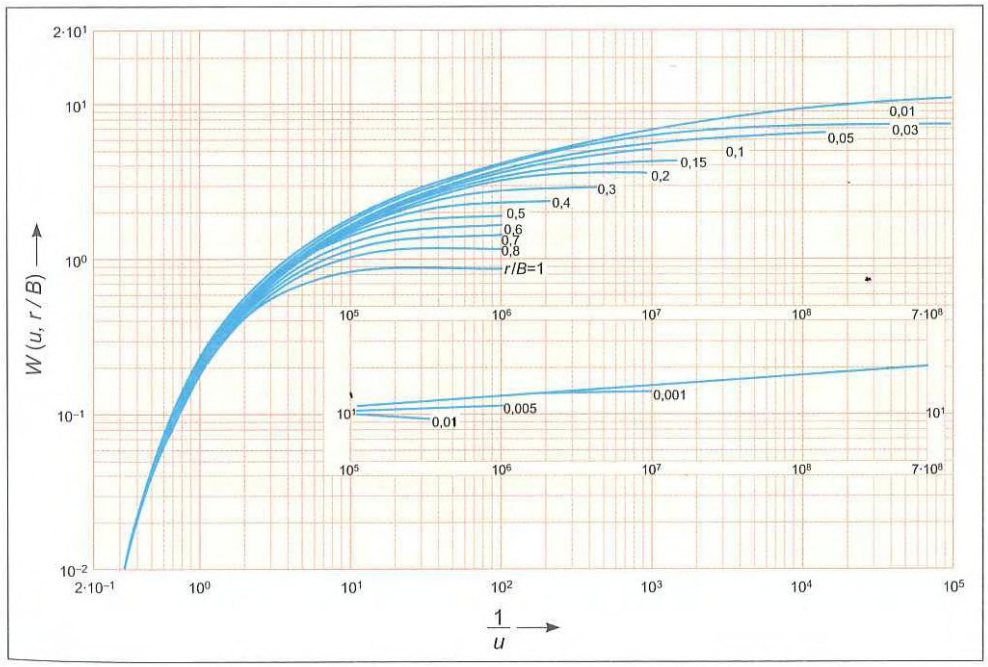
El más sencillo y usado suele ser el primero, que se comenta a continuación. Se toman logaritmos en las ecuaciones (1) y (2):

$$\log d = \log \frac{Q}{4\pi T} + \log W(u)$$

$$\log t = \log \frac{r^2S}{4T} + \log \frac{1}{u}$$



MÉTODO DE JACOB. ACUÍFERO CONFINADO EN RÉGIMEN VARIABLE



$$d = 0{,}183\,\frac{Q}{T}\,\log\,\frac{2{,}25Tt}{r^2S}$$

Si se toma:

$$\frac{r^2S}{2{,}25T} = t_0$$

se obtiene:

$$d = 0{,}183\,\frac{Q}{T}\,\log\,\frac{t}{t_0}$$

$$d = 0{,}183\,\frac{Q}{T}\,\log\,t - 0{,}183\,\frac{Q}{T}\,\log\,t_0$$

$$T = 0{,}183\,\frac{Q}{m} \quad \text{o bien} \quad T = 0{,}183\,\frac{Q}{\Delta d}$$

$$t_0 = \frac{r^2S}{2{,}25T} \quad \text{y} \quad S = \frac{2{,}25Tt_0}{r^2}$$

MÉTODO DE JACOB-COOPER. CORRECCIÓN DE ESPESOR SATURADO. ACUÍFEROS LIBRES EN RÉGIMEN TRANSITORIO

Cuando se trata de acuíferos libres es válido usar los métodos de Theis y Jacob, siempre y cuando la depresión sea poco importante con respecto al espesor saturado del acuífero; en caso contrario, se debe hacer la corrección de sustituir el valor del descenso observado, d, por $(d - d^2/2h_0)$.

En realidad el problema es más complicado, pero puede admitirse la corrección indicada con una aceptable aproximación.

MÉTODO DE HANTUSH. ACUÍFERO SEMICONFINADO EN RÉGIMEN VARIABLE

En el caso de los acuíferos semiconfinados, y cuyo esquema de recarga vertical se ha comentado ya en los ensayos en régimen permanente, la solución de la ecuación general del flujo es la fórmula de Hantush:

$$d = \frac{Q}{4\pi T} W\left(u, \frac{r}{B}\right)$$

donde la función $W(u, r/B)$ también está tabulada. En la Figura 5.29 se representa la función:

$$\left[W\left(u, \frac{r}{B}\right), \frac{1}{u}\right]$$

GRACIAS POR SU ATENCIÓN