Límites y Continuidad.

Unidad III

Prof.Hendrik Sulbaran.

http://red-matematica.blogspot.com

hendrickjose17@hotmail.com

Febrero

Límites.

En el cálculo matemático y sus aplicaciones se analiza la forma en que varían ciertas cantidades y si éstas *tienden* a valores específicos bajo ciertas condiciones. Estas cantidades a menudo involucran los valores de algunas funciones. Para hacer este análisis se utilizan los conceptos de derivada o de integral definida.

La definición de derivada depende de la noción de *límite* de una *función*. Comenzaremos con una presentación informal de la definición de límite y en la sección posterior la definición formal.

Sea a un número real contenido en un intervalo abierto y sea f una función definida en todo el intervalo, excepto posiblemente en a mismo. A veces es de interés conocer los valores $f(x)$ de la función *para* x *muy cercano a* a*, pero no necesariamente igual a* a. De hecho, en muchos casos, el número a no se encuentra en el dominio de f, y por lo tanto $f(a)$ no está definido. Por lo tanto es natural preguntarse: ¿ Cuando x se acerca cada vez más a a (pero $x \neq a$), acaso $f(x)$ se acerca también a un número L?. Si al repuesta es *afirmativa*, se dice que $f(x)$ *tiende a* L *cuando* x *tiende a* a, o que *el límite de* $f(x)$ *cuando* x *tiende a* a *es* L*, y se escribe*

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

Definición Informal de Límite.

Definición

Sea a un número real contenido en un intervalo abierto y sea f una función definida en todo el intervalo, excepto posiblemente en a, y L un número real. Entonces

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

significa que $f(x)$ puede acercarse arbitrariamente a L si x se elige suficientemente cercano a a (pero $x \neq a$).

Ejemplo

Sea $f(x) = \dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3}$.

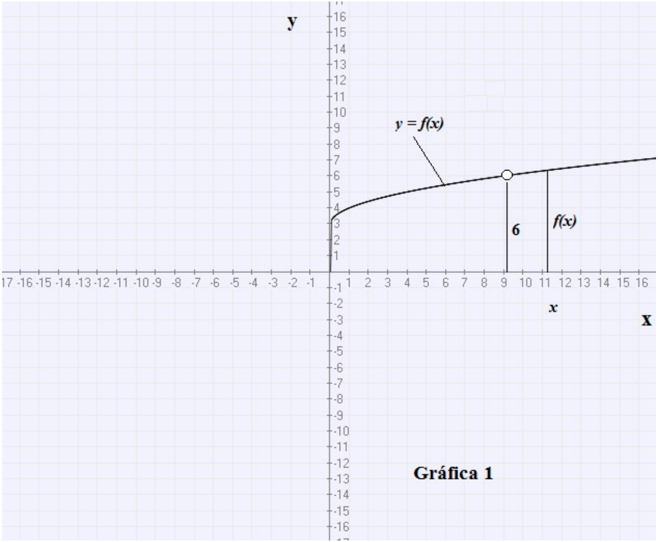
1. *Calcular el* $\lim\limits_{x \to 9} f(x)$.
2. *Trazar la gráfica de* f *y comprobar gráficamente el límite en 1.*

Solución

(1) Nótese que el número 9 no está en el dominio de f. Para evaluar el límite cambiamos la forma de $f(x)$ racionalizando el denominador como sigue:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 9} f(x) &= \lim_{x\to 9} \frac{x-9}{\sqrt{x}-3} \\ &= \lim_{x\to 9} \left(\frac{x-9}{\sqrt{x}-3} \cdot \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3} \right) \\ &= \lim_{x\to 9} \frac{(x-9)(\sqrt{x}+3)}{(x-9)} \\ &= \lim_{x\to 9} (\sqrt{x}+3) = \sqrt{9}+3 = 6 \end{aligned}$$

(2) por la parte anterior vemos que la gráfica de f es la misma de la ecuación $y = \sqrt{x} + 3$ excepto por el punto (9,6) ilustrado en la gráfica 1 con un pequeño círculo claro. Cuando x se acerca a 9, la ordenada $f(x)$ en la gráfica f se acerca a 6.


y
y = f(x)
6
f(x)
x
X
Gráfica 1

Utilice la simplificación algebráica como ayuda para evaluar el límite, si es que existe.

- $\displaystyle \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$
- $\displaystyle \lim_{x\to 3} \frac{2x^3-6x^2+x-3}{x-3}$

En la sección anterior se definió informalmente $\lim_{x \to a} f(x) = L$ diciendo que $f(x)$ puede *acercarse arbitrariamente a* L escogiendo a x *suficientemente próximo a* a (con $x \neq a$).

Esto es una buena descripción de límite, pero le falta precisión matemática.

La clave para llegar a una definición sastisfactoria está en observar que se debe poder hacer $|f(x) - L|$ tan pequeo como se quiera eligiendo a x tal que $|x - a|$ sea suficientemente pequeño (y $x - a \neq 0$)

Definición Formal de Límite.

Definición

Sea a un punto de un intervalo abierto, sea f una función definida en todo el intervalo, excepto posiblemente en a, y sea L un número real. Entonces

$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = L$$

significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Ejemplo

Comprobar que $\lim_{x \to 4} \frac{1}{2}(3x-1) = \frac{11}{2}$.

Solución

Sea $f(x) = \frac{1}{2}(3x - 1),\ a = 4,$ y $L = \frac{11}{2}$. De acuerdo con la definición anterior debemos demostrar que para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - 4| < \delta, \text{ entonces } \left|\frac{1}{2}(3x - 1) - \frac{11}{2}\right| < \varepsilon.$$

Para poder elegir δ debemos estudiar la desigualdad donde interviene ε.

La siguente es una lista de desigualdades equivalentes;

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{1}{2}(3x-1)-\frac{11}{2}\right| &< \varepsilon \\
\frac{1}{2}\left|(3x-1)-11\right| &< \varepsilon \\
|3x-1-11| &< 2\varepsilon \\
|3x-12| &< 2\varepsilon \\
3|x-4| &< 2\varepsilon \\
|x-4| &< \frac{2}{3}\varepsilon
\end{aligned}
$$

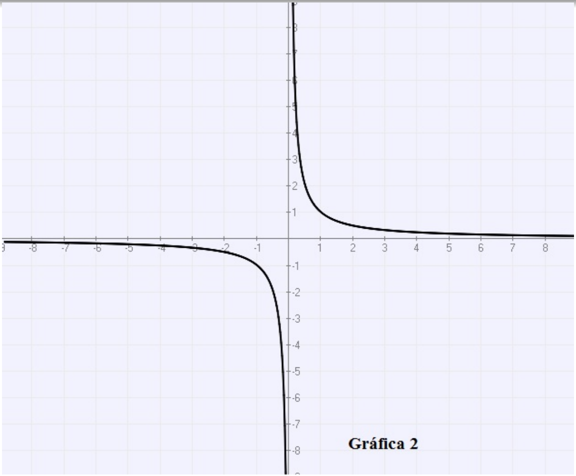
Tomando $\delta = \frac{2}{3}\varepsilon$, si $0 < |x-4| < \delta$, entonces se satisface la última desigualdad de la lista y como todas ellas son equivalentes, la primera también se satisface, y por lo tanto $\lim\limits_{x \to 4} \frac{1}{2}(3x-1) = \frac{11}{2}$.

Demuestre que el límite existe usando la definición formal de límite.

- $\lim\limits_{x \to 2} (5x - 3) = 7$
- $\lim\limits_{x \to -6} (10 - 9x) = 64$

Límites Unilaterales

La función definida $f(x) = \frac{1}{x}$ proporciona un ejemplo en el que el límite no existe cuando x tiende a 0. Al observar la gráfica 2 vemos que al dar valores a x cercanos a 0, $|f(x)|$ no está acotado; es decir crece sin fronteras.



A continuación estudiaremos los límites unilaterales, para determinar la exixtencia del límite de una función.

Definición de Límite por la Izquierda.

Definición

Sea f una función en un intervalo abierto (c, a).

Entonces

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L_1,$$

Significa que $f(x)$ puede acercarse arbitrariamente a L_1 escogiendo x suficientemente cerca de a, con $x < a$

Definición de Límite por la Derecha.

Definición

Sea f una función en un intervalo abierto (a, c).

Entonces

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L_2,$$

Significa que $f(x)$ puede acercarse arbitrariamente a L_2 escogiendo x suficientemente cerca de a, con $x > a$