Titulo: ***MÁXIMOS Y MÍNIMOS DE UNA FUNCIÓN***

Año escolar: MATEMATICA 1
Autor: José Luis Albornoz Salazar
Ocupación: Ing Civil. Docente Universitario
País de residencia: Venezuela
Correo electrónico: martilloatomico@gmail.com

El autor de este trabajo solicita su valiosa colaboración en el sentido de enviar cualquier sugerencia y/o recomendación a la siguiente dirección :

martilloatomico@gmail.com

Igualmente puede enviar cualquier ejercicio o problema que considere pueda ser incluido en el mismo.

Si en sus horas de estudio o práctica se encuentra con un problema que no pueda resolver, envíelo a la anterior dirección y se le enviará resuelto a la suya.

MÁXIMOS Y MÍNIMOS DE UNA FUNCIÓN

Antes de abordar este aspecto, es bueno recordar cómo encontrar la recta tangente a una función con la utilización de la derivada primera y que significado gráfico tiene el signo de la pendiente de dicha recta.

Ejemplo 1 : Encuentre la recta tangente a la parábola $f(x) = X^2 - 4X + 5$ en el punto (3,2).

Solución: Inicialmente se calcula la derivada primera de la función $f(x) = X^2 - 4X + 5$

$$f'(x) = 2X - 4$$

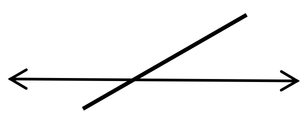
para calcular la pendiente de la recta tangente solo debemos introducir el valor de X del punto señalado en la ecuación de la derivada primera. Como X = 3 en dicho punto:

$f'(3) = 2(3) - 4$; $f'(3) = 6 - 4$; $f'(3) = 2$

Así, la recta tangente en (3,2) tiene **pendiente** 2. De la forma punto-pendiente de la ecuación de una recta, $y - y_1 = m(x - x_1)$, se obtiene :

$y - 2 = 2(x - 3)$: $y - 2 = 2x - 6$; $\mathbf{Y = 2X - 4}$

El hecho de que la pendiente de una recta tenga signo positivo (m>0) significa que está inclinada hacia arriba en sentido anti horario con respecto al eje horizontal (eje x) como se muestra en la figura siguiente:



La **FIGURA 1** presenta la parábola $f(x) = X^2 - 4X + 5$ y un segmento de la recta tangente en (3,2)

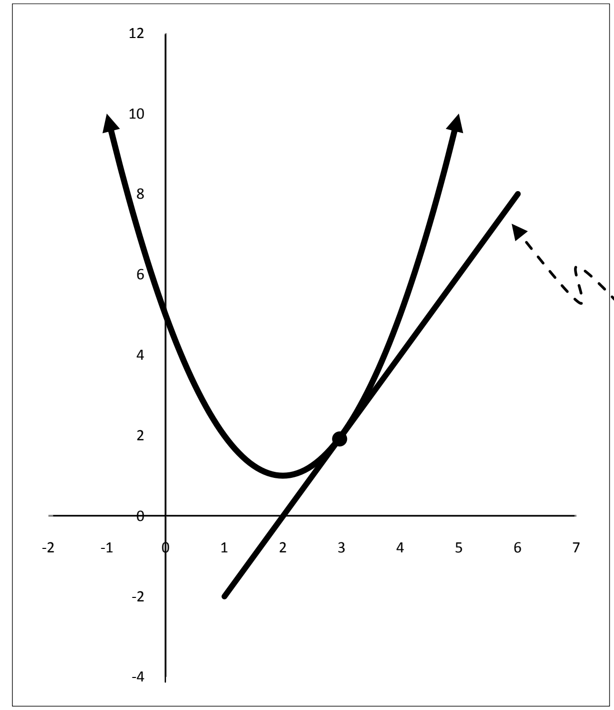


FIGURA 1

Ejemplo 2 : Encuentre la recta tangente a la parábola $f(x) = X^2 - 4X + 5$ en el punto (1,2).

Solución: Inicialmente se calcula la derivada primera de la función $f(x) = X^2 - 4X + 5$

$$f'(x) = 2X - 4$$

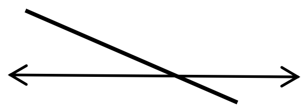
para calcular la pendiente de la recta tangente solo debemos introducir el valor de X del punto señalado en la ecuación de la derivada primera. Como X = 1 en dicho punto:

$f'(1) = 2(1) - 4$; $f'(1) = 2 - 4$; $f'(1) = -2$

Así, la recta tangente en (1,2) tiene **pendiente** -2. De la forma punto-pendiente de la ecuación de una recta, $y - y_1 = m(x - x_1)$, se obtiene :

$y - 2 = -2(x - 1)$: $y - 2 = -2x + 2$; $\mathbf{Y = -2X + 4}$

El hecho de que la pendiente de una recta tenga signo negativo ($m<0$) significa que está inclinada hacia arriba en sentido horario con respecto al eje horizontal (eje x) como se muestra en la figura siguiente:



La **FIGURA 2** presenta la parábola $f(x) = X^2 - 4X + 5$ y un segmento de la recta tangente en (1,2)

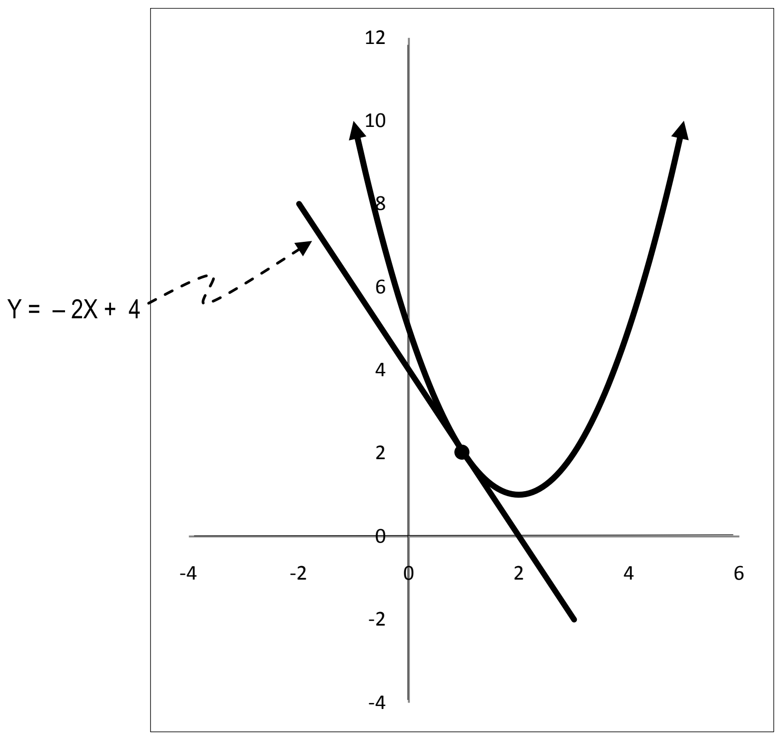


FIGURA 2

DEFINICIÓN DE NÚMERO CRÍTICO : ***Si "c" es un número del dominio de la función " f ", y si $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ no existe, entonces "c" es un número crítico de " f ".***

El hecho de que la pendiente de una recta sea igual a cero (m=0) significa que es paralela al eje horizontal (eje x).

Una recta tangente con pendiente igual a cero señala un "punto crítico" de la función estudiada.

Las consideraciones anteriores nos indican que para determinar uno o más puntos donde pudiera existir un máximo o un mínimo relativo de una función, es necesario calcular su primera derivada e igualarla a cero (así calculamos el valor de "x" en donde la pendiente de la recta tangente es igual a cero).

Ejemplo 3: Encuentre los "números críticos" de la parábola $X^2 - 4X + 5$.

Solución: Inicialmente se calcula la derivada primera de la función $f(x) = X^2 - 4X + 5$

$$f'(x) = 2X - 4$$

para calcular el valor de "x" donde la pendiente de la recta tangente es igual a cero (recta tangente horizontal) solo debemos igualar la ecuación de la derivada primera a cero :

$2X - 4 = 0$; $2X = 4$; $X = 4 / 2$; $\mathbf{X = 2}$

Conocido el valor de "x" de la parábola, lo sustituyo en la ecuación de ésta y calculo el valor de "y"

$Y = X^2 - 4X + 5$; $Y = (2)^2 - 4(2) + 5$; $Y = 4 - 8 + 5$; $\mathbf{Y = 1}$

Esto nos indica que por el punto **(2,1)** de la parábola $X^2 - 4X + 5$ pasa la recta tangente horizontal (pendiente igual a cero) y se encuentra ubicado un "número crítico" de dicha parábola.

La **FIGURA 3** presenta la parábola $f(x) = X^2 - 4X + 5$ y un segmento de la recta tangente horizontal en (2,1)

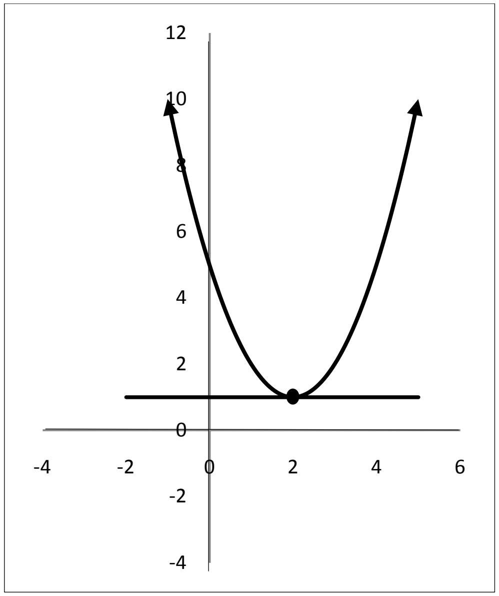


FIGURA 3

Ejemplo 4 : Determine los "números críticos" de la función $f(x) = X^2 - 4X + 5$. y confirme si constituyen un máximo o un mínimo relativo de la misma.

Solución: Inicialmente se calcula la derivada primera de la función f(x)

$$f'(x) = 2X - 4$$

Los números críticos son aquellos donde la derivada primera es igual a cero o no existe. En este caso en particular (ver ejercicio 3) el punto crítico es **(2,1)**

Por este punto pasa la recta tangente horizontal a la parábola estudiada (ver figura 3).

Para saber si este punto representa un máximo o un mínimo de la función se debe estudiar el signo de la pendiente de la recta tangente antes y después de dicho punto.

Como el punto crítico está ubicado en (2,1) puedo estudiar la pendiente antes (cuando x = 1) y después (cuando x = 3)

Para estudiar la pendiente de la recta tangente cuando x = 1, sustituyo este valor en la ecuación de la derivada primera $f'(x) = 2X - 4$

$$f'(1) = 2(1) - 4 \quad ; \quad f'(1) = 2 - 4 \quad ; \quad f'(1) = -2$$

Esto nos indica que antes del punto crítico la pendiente de la recta tangente es negativa (m<0).

Para estudiar la pendiente de la recta tangente cuando x = 3, sustituyo este valor en la ecuación de la derivada primera $f'(x) = 2X - 4$

$$f'(3) = 2(3) - 4 \quad ; \quad f'(1) = 6 - 4 \quad ; \quad f'(1) = 2$$

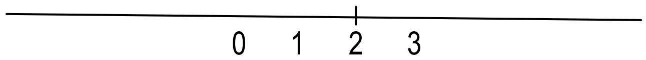
Esto nos indica que después del punto crítico la pendiente de la recta tangente es positiva (m>0).

Si **antes** del punto crítico el signo de la **pendiente** de la recta tangente **es negativo** y **después** del punto crítico la **pendiente** de la recta es **positiva** se concluye que es un **punto mínimo.**

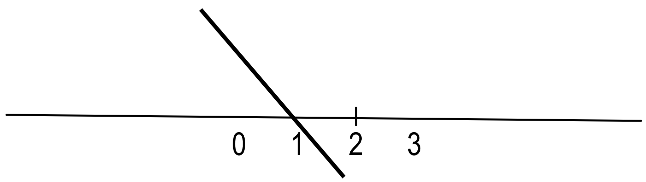
Bajo esta consideración se concluye que el punto (2,1) representa un **mínimo relativo** de la función estudiada $f(x) = X^2 - 4X + 5$. (ver.**FIGURA 3**)

Como una ayuda gráfica me permito recomendar el siguiente procedimiento:

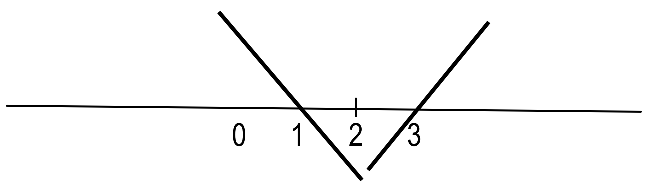
Dibujamos la recta real y marcamos el valor del número crítico.



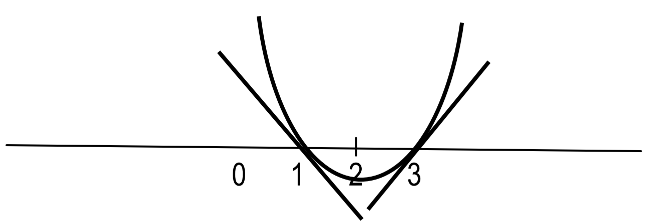
Calculamos la pendiente de la tangente antes del número crítico, puede ser en x = 1 en este caso y la graficamos sobre la recta anterior (como dió negativo " – 2 " debemos recordar lo enunciado en la pág. 2)



Posteriormente calculamos la pendiente de la tangente después del número crítico, puede ser en x = 3 en este caso y la graficamos sobre la recta anterior (como dió positivo "2" debemos recordar lo dicho en la pág.1)



Es fácil observar que entre estas dos rectas se puede colocar una curva que represente un mínimo de una función:



Ejemplo 5 : <u>Determine los "números críticos" de la función $f(x) = -\ X^2$. y confirme si constituyen un máximo o un mínimo relativo de la misma.</u>

Solución: Inicialmente se calcula la derivada primera de la función f(x)

$$f'(x) = -2X$$

Los números críticos son aquellos donde la derivada primera es igual a cero o no existe.

$$-2X = 0 \quad ; \quad X = 0 / -2 \quad ; \quad X = 0$$

Conocido el valor de "x" de la parábola, lo sustituyo en la ecuación de ésta y calculo el valor de "y"

$$f(x) = -\ X^2. \quad ; \quad f(0) = -\ 0^2. \quad ; \quad f(0) = 0.$$

Esto nos indica que por el punto **(0,0)** pasa la recta tangente horizontal (pendiente igual a cero) y se encuentra ubicado un "número crítico" de dicha parábola.

Para saber si este punto representa un máximo o un mínimo de la función se debe estudiar el signo de la pendiente de la recta tangente antes y después de dicho punto.

Como el punto crítico está ubicado en (0,0) puedo estudiar la pendiente antes (cuando x = – 1) y después (cuando x = 1)

Para estudiar la pendiente de la recta tangente cuando x = – 1 , sustituyo este valor en la ecuación de la derivada primera $f'(x) = -2X$

$$f'(-1) = -2(-1) \quad ; \quad f'(-1) = +2$$

Esto nos indica que antes del punto crítico la pendiente de la recta tangente es positiva (m>0).

Para estudiar la pendiente de la recta tangente cuando x = 1 , sustituyo este valor en la ecuación de la derivada primera $f'(x) = -2X$

$$f'(1) = -2(1) \quad ; \quad f'(1) = -2$$

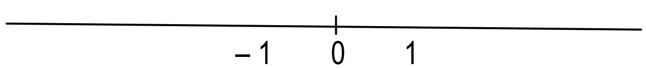
Esto nos indica que después del punto crítico la pendiente de la recta tangente es negativa (m<0).

Si **antes** del punto crítico el signo de la **pendiente** de la recta tangente **es positivo** y **después** del punto crítico la **pendiente** de la recta es **negativa** se concluye que es un **punto máximo.**

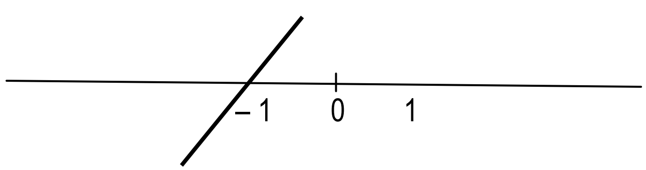
Bajo esta consideración se concluye que el punto (0,0) representa un **máximo relativo** de la función estudiada $f(x) = -X^2$.

Como una ayuda gráfica me permito recomendar el siguiente procedimiento:

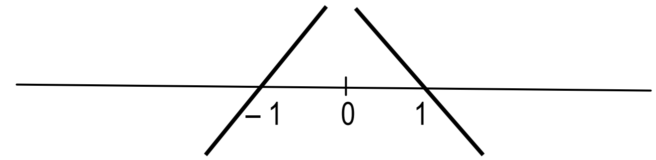
Dibujamos la recta real y marcamos el valor del número crítico.



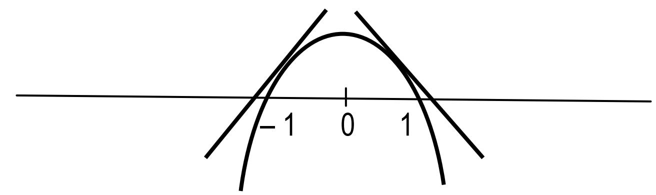
Calculamos la pendiente de la tangente antes del número crítico, puede ser en x = – 1 en este caso y la graficamos sobre la recta anterior (como dió positivo “2” debemos recordar lo enunciado en la pág.1)



Posteriormente calculamos la pendiente de la tangente después del número crítico, puede ser en x = 1 en este caso y la graficamos sobre la recta anterior (como dió negativo “ – 2 “ debemos recordar lo enunciado en la pág. 2)



Es fácil observar que entre estas dos rectas se puede colocar una curva que represente un máximo de una función:



La **FIGURA 4** muestra la gráfica de la función $f(x) = -X^2$.

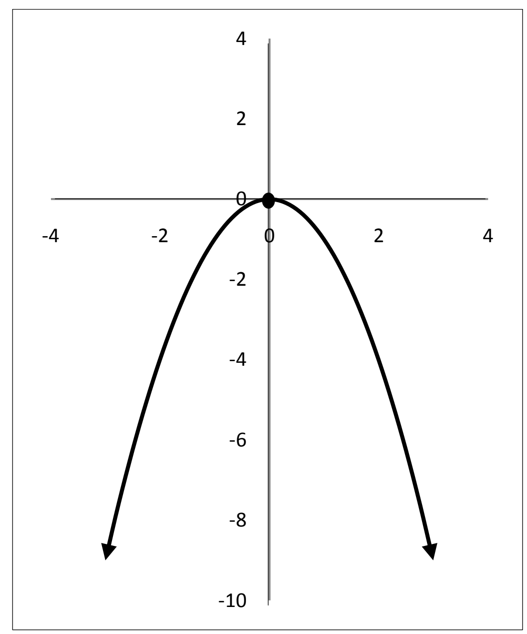


FIGURA 4

Ejemplo 6 : Determine los "números críticos" de la función $f(x) = X^3 - 3X$. y confirme si constituyen un máximo o un mínimo relativo de la misma.

Solución: Inicialmente se calcula la derivada primera de la función f(x)

$$f'(x) = 3X^2 - 3$$

Los números críticos son aquellos donde la derivada primera es igual a cero o no existe.

$$3X^2 - 3 = 0 \quad ; \quad 3X^2 = 3 \quad ; \quad X^2 = 3/3 \quad ; \quad X^2 = 1 \quad ; \quad X = \pm 1$$

Esto significa que existen dos números críticos, es decir cuando X=1 y cuando X = – 1

Estudiamos el punto donde X = – 1 :

Para calcular el punto de la función donde X = – 1, introduzco este valor en la ecuación de dicha función:

$$f(x) = X^3 - 3X \quad ; \quad f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) \quad ; \quad f(-1) = -1 + 3$$

$f(-1) = 2$ el punto crítico es **(– 1,2)**

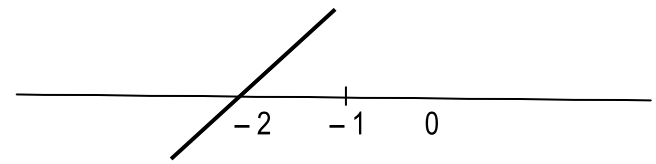
Para saber si este punto representa un máximo o un mínimo de la función se debe estudiar el signo de la pendiente de la recta tangente antes y después de dicho punto.

Como el punto crítico está ubicado en **(– 1,2)** puedo estudiar la pendiente antes (cuando x = – 2) y después (cuando x = 0)

Para estudiar la pendiente de la recta tangente cuando x = – 2 , sustituyo este valor en la ecuación de la derivada primera $f'(x) = 3X^2 - 3$

$$f'(-2) = 3(-2)^2 - 3 \quad ; \quad f'(-2) = 3(4) - 3 \quad ; \quad f'(-2) = 9$$

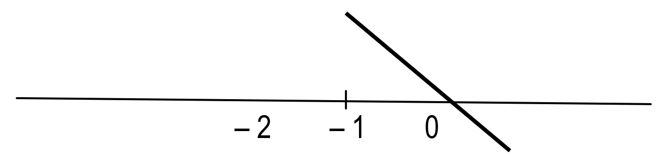
Esto nos indica que **antes** del punto crítico la pendiente de la recta tangente es positiva (m>0).



Para estudiar la pendiente de la recta tangente cuando x = 0 , sustituyo este valor en la ecuación de la derivada primera $f'(x) = 3X^2 - 3$

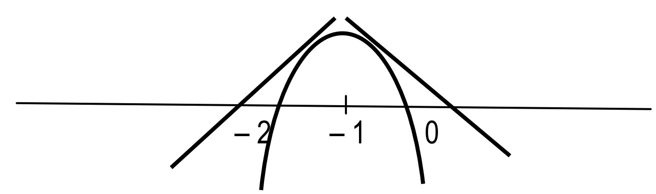
$$f'(0) = 3(0)^2 - 3 \quad ; \quad f'(0) = 3(0) - 3 \quad ; \quad f'(0) = -3$$

Esto nos indica que **después** del punto crítico la pendiente de la recta tangente es negativa (m<0).



Si **antes** del punto crítico el signo de la **pendiente** de la recta tangente **es positivo** y **después** del punto crítico la **pendiente** de la recta es **negativa** se concluye que es un **punto máximo.**

Es fácil observar que entre estas dos rectas se puede colocar una curva que represente un máximo de una función:



Estudiamos el punto donde X = 1 :

Para calcular el punto de la función donde X= 1, introduzco este valor en la ecuación de dicha función:

$f(x) = X^3 - 3X$; $f(1) = (1)^3 - 3(1)$; $f(1) = 1 - 3$

$f(1) = -2$ el segundo punto crítico es **(1, – 2)**

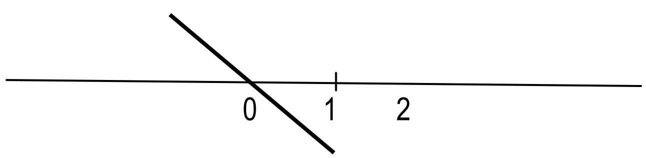
Para saber si este punto representa un máximo o un mínimo de la función se debe estudiar el signo de la pendiente de la recta tangente antes y después de dicho punto.

Como el punto crítico está ubicado en **(1, – 2)** puedo estudiar la pendiente antes (cuando x = 0) y después (cuando x = 2)

Para estudiar la pendiente de la recta tangente cuando x = 0 , sustituyo este valor en la ecuación de la derivada primera $f'(x) = 3X^2 - 3$

$f'(0) = 3(0)^2 - 3$; $f'(0) = 3(0) - 3$; $f'(0) = -3$

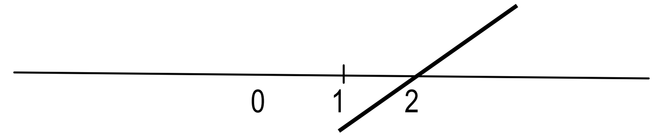
Esto nos indica que **antes** del punto crítico la pendiente de la recta tangente es negativa (m<0).



Para estudiar la pendiente de la recta tangente cuando x = 2, sustituyo este valor en la ecuación de la derivada primera $f'(x) = 3X^2 - 3$

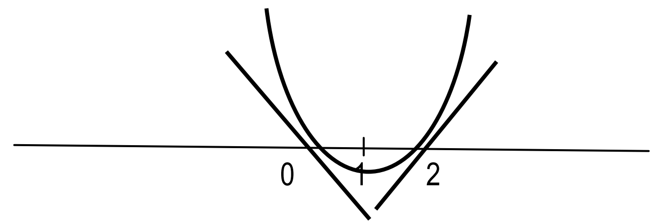
$f'(2) = 3(2)^2 - 3$; $f'(2) = 3(4) - 3$; $f'(2) = 9$

Esto nos indica que **después** del punto crítico la pendiente de la recta tangente es positiva (m>0).



Si **antes** del punto crítico el signo de la **pendiente** de la recta tangente **es negativo** y **después** del punto crítico la **pendiente** de la recta es **positiva** se concluye que es un **punto mínimo.**

Es fácil observar que entre estas dos rectas se puede colocar una curva que represente un mínimo de una función:



La **FIGURA 5** muestra la gráfica de la función $f(x) = X^3 - 3X$ con sus dos rectas tangentes horizontales.

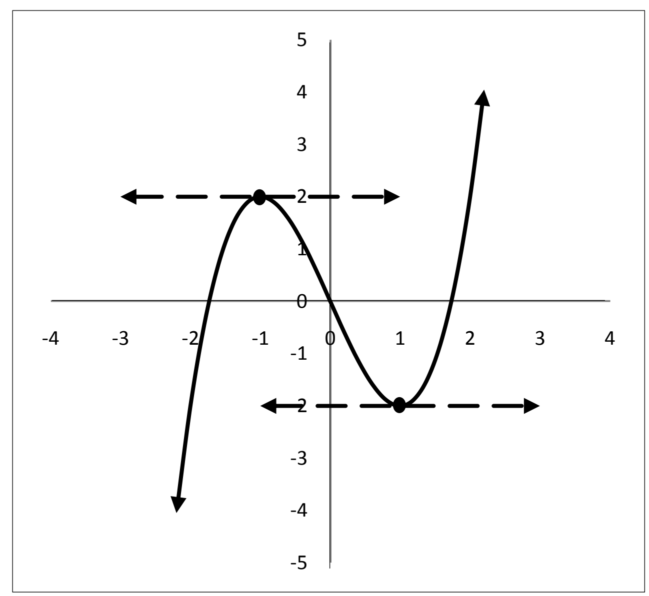


FIGURA 5

NOTA IMPORTANTE SOBRE EL MÉTODO GRÁFICO RECOMENDADO :

El método recomendado en las páginas anteriores puede generar algunas dudas cuando se escogen los valores a estudiar antes y después del punto crítico.

Esto puede suceder cuando los números críticos están ubicados muy cerca uno del otro y al querer estudiar un número antes o después del mismo nos ubiquemos en uno que también es un número crítico.

A continuación vamos a resolver un ejercicio donde se presenta una situación de este tipo para fijar mejor la idea:

Ejemplo 7 : Determine los "números críticos" de la función

$$f(x) = X^4 + \frac{4}{3}X^3 - 4X^2$$

y confirme si constituyen un máximo o un mínimo relativo de la misma.

Solución: Inicialmente se calcula la derivada primera de la función f(x)

$$f'(x) = 4X^3 + 4X^2 - 8X$$

Los números críticos son aquellos donde la derivada primera es igual a cero o no existe.

Al igualar la derivada primera a cero se obtiene que :

$$4X^3 + 4X^2 - 8X = 0 \quad ; \quad 4X(X^2 + X - 2) = 0 \quad ; \quad 4X(X + 2)(X - 1) = 0$$

De donde se desprenden tres valores de X, es decir

$$\mathbf{X = 0 \quad ; \quad X = 1 \quad ; \quad X = -2}$$

Esto significa que existen tres números críticos, es decir cuando X = 0, cuando X = 1 y cuando X = – 2

Note que hay dos números críticos cercanos, es decir, 0 y 1; es posible que cuando vaya a analizar un valor después de cero (0) escoja a uno (1) o cuando vaya a estudiar un valor antes de uno (1) escoja a cero (0).

Para evitar cualquier error al realizar el análisis respectivo se recomienda que en estos casos se estudie un número decimal antes o después del número crítico que esté más cercano.

Estudiamos el punto donde X = 0 :

Para calcular el punto de la función donde X = 0 , introduzco este valor en la ecuación de dicha función: $f(x) = X^4 + \frac{4}{3}X^3 - 4X^2$

$$f(0) = (0)^4 + \frac{4}{3}(0)^3 - 4(0)^2 \quad ; \quad f(0) = 0$$

el primer punto crítico es **(0,0)**

Para saber si este punto representa un máximo o un mínimo de la función se debe estudiar el signo de la pendiente de la recta tangente antes y después de dicho punto.

Como el punto crítico está ubicado en **(0,0)** pudiera estudiar la pendiente antes (cuando x = – 1) y después (cuando x = 1)

Pero como en X = 1 hay otro punto crítico NO LO DEBO ESCOGER porqué allí la pendiente de la recta tangente es igual a cero. Cuando se presente esta situación puedo escoger un número decimal que esté después del cero (0) y antes del uno (1)

Se puede estudiar entonces cuando X = – 1 y cuando X = 0,5

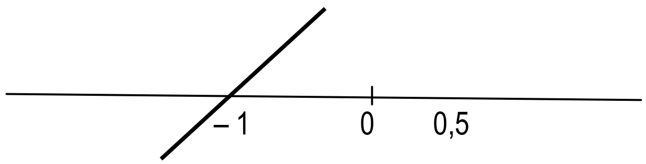
Para estudiar la pendiente de la recta tangente cuando x = – 1 , sustituyo este valor en la ecuación de la derivada primera

$$f'(x) = 4X^3 + 4X^2 - 8X$$

$$f'(-1) = 4(-1)^3 + 4(-1)^2 - 8(-1) \quad ; \quad f'(-1) = 4(-1) + 4(1) - 8(-1)$$

$$f'(-1) = -4 + 4 + 8 \quad ; \quad f'(-1) = 8$$

Esto nos indica que **antes** del punto crítico la pendiente de la recta tangente es positiva (m>0).



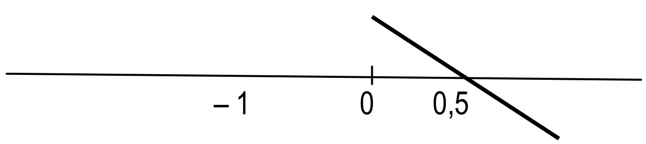
Para estudiar la pendiente de la recta tangente cuando x = 0,5 , sustituyo este valor en la ecuación de la derivada primera

$$f'(x) = 4X^3 + 4X^2 - 8X$$

$$f'(0{,}5) = 4(0{,}5)^3 + 4(0{,}5)^2 - 8(0{,}5) \quad ; \quad f'(0{,}5) = 4(0{,}125) + 4(0{,}25) - 8(0{,}5)$$

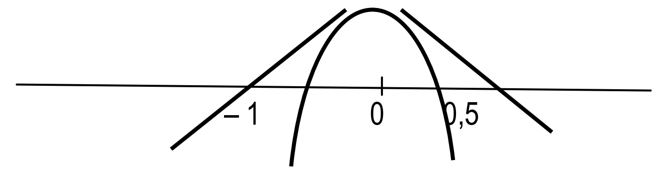
$$f'(0{,}5) = 0{,}5 + 1 - 4 \quad ; \quad f'(0{,}5) = -2{,}5$$

Esto nos indica que **después** del punto crítico la pendiente de la recta tangente es negativa (m<0).



Si **antes** del punto crítico el signo de la **pendiente** de la recta tangente **es positivo** y **después** del punto crítico la **pendiente** de la recta es **negativa** se concluye que es un **punto máximo.**

Es fácil observar que entre estas dos rectas se puede colocar una curva que represente un máximo de una función:



<u>Estudiamos el punto donde X = 1 :</u>

Para calcular el punto de la función donde X = 1 , introduzco este valor en la ecuación de dicha función: $f(x) = X^4 + \frac{4}{3}X^3 - 4X^2$

$$f(1) = (1)^4 + \frac{4}{3}(1)^3 - 4(1)^2 \quad ; \quad f(1) = -\frac{5}{3}$$

el segundo punto crítico es $\mathbf{(1, -\frac{5}{3})}$

Para saber si este punto representa un máximo o un mínimo de la función se debe estudiar el signo de la pendiente de la recta tangente antes y después de dicho punto.

Como el punto crítico está ubicado en $\mathbf{(1, -\frac{5}{3})}$ pudiera estudiar la pendiente antes (cuando x = 0) y después (cuando x = 2)

Pero como en X = 0 hay otro punto crítico NO LO DEBO ESCOGER porqué allí la pendiente de la recta tangente es igual a cero. Cuando se presente esta situación puedo escoger un número decimal que esté antes del uno (1) y después del cero (0).

Se puede estudiar entonces cuando X = 0,5 y cuando X = 2

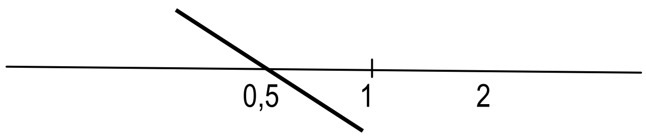
Para estudiar la pendiente de la recta tangente cuando x = 0,5 , sustituyo este valor en la ecuación de la derivada primera

$$f'(x) = 4X^3 + 4X^2 - 8X$$

$$f'(0,5) = 4(0,5)^3 + 4(0,5)^2 - 8(0,5) \quad ; \quad f'(0,5) = 4(0,125) + 4(0,25) - 8(0,5)$$

$$f'(0,5) = 0,5 + 1 - 4 \quad ; \quad f'(0,5) = -2,5$$

Esto nos indica que **antes** del punto crítico la pendiente de la recta tangente es negativa (m<0).



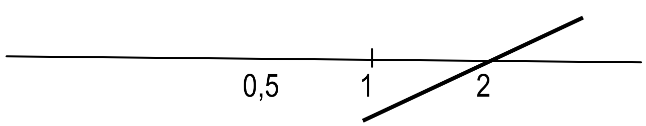
Para estudiar la pendiente de la recta tangente cuando x = 2 , sustituyo este valor en la ecuación de la derivada primera

$$f'(x) = 4X^3 + 4X^2 - 8X$$

$$f'(2) = 4(2)^3 + 4(2)^2 - 8(2) \quad ; \quad f'(2) = 4(8) + 4(4) - 8(2)$$

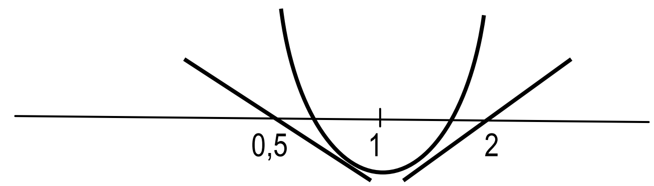
$$f'(2) = 32 + 16 - 16 \quad ; \quad f'(2) = 32$$

Esto nos indica que **después** del punto crítico la pendiente de la recta tangente es positiva (m>0).



Si **antes** del punto crítico el signo de la **pendiente** de la recta tangente **es negativo** y **después** del punto crítico la **pendiente** de la recta es **positiva** se concluye que es un **punto mínimo.**

Es fácil observar que entre estas dos rectas se puede colocar una curva que represente un mínimo de una función:



<u>Estudiamos el punto donde X = – 2 :</u>

Para calcular el punto de la función donde X = – 2 , introduzco este valor en la ecuación de dicha función: $f(x) = X^4 + \frac{4}{3}X^3 - 4X^2$

$$f(-2) = (-2)^4 + \frac{4}{3}(-2)^3 - 4(-2)^2 \quad ; \quad f(1) = -\frac{32}{3}$$

el tercer punto crítico es $\left(\mathbf{-2\,,\,-\frac{32}{3}}\right)$

Para saber si este punto representa un máximo o un mínimo de la función se debe estudiar el signo de la pendiente de la recta tangente antes y después de dicho punto.

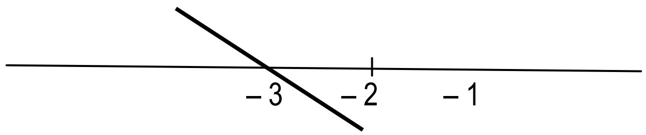
Como el punto crítico está ubicado en $\left(\mathbf{-2\,,\,-\frac{32}{3}}\right)$ puedo estudiar la pendiente antes (cuando x = – 3) y después (cuando x = – 1)

Para estudiar la pendiente de la recta tangente cuando x = – 3 , sustituyo este valor en la ecuación de la derivada primera

$$f'(x) = 4X^3 + 4X^2 - 8X$$

$$f'(-3) = 4(-3)^3 + 4(-3)^2 - 8(-3) \quad ; \quad f'(-3) = -96$$

Esto nos indica que **antes** del punto crítico la pendiente de la recta tangente es negativa (m<0).

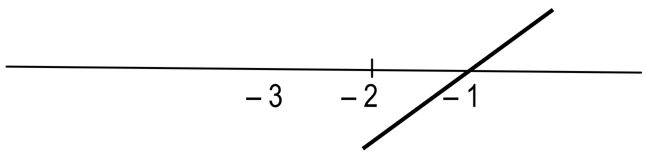


Para estudiar la pendiente de la recta tangente cuando x = – 1 , sustituyo este valor en la ecuación de la derivada primera

$$f'(x) = 4X^3 + 4X^2 - 8X$$

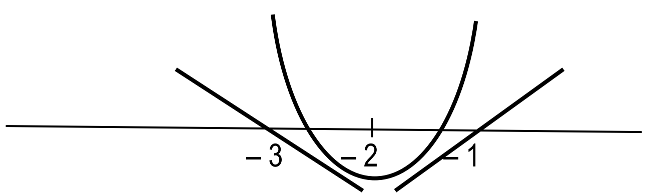
$$f'(-1) = 4(-1)^3 + 4(-1)^2 - 8(-1) \quad ; \quad f'(-1) = 8$$

Esto nos indica que **después** del punto crítico la pendiente de la recta tangente es positiva (m>0).



Si **antes** del punto crítico el signo de la **pendiente** de la recta tangente **es negativo** y **después** del punto crítico la **pendiente** de la recta es **positiva** se concluye que es un **punto mínimo.**

Es fácil observar que entre estas dos rectas se puede colocar una curva que represente un mínimo de una función:



La **FIGURA 6** muestra la gráfica de la función $f(x) = X^4 + 4/3\ X^3 - 4\ X^2$

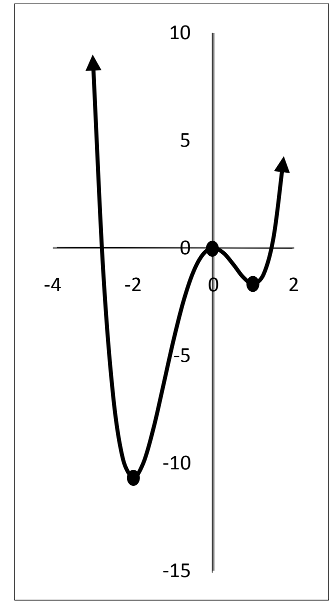


FIGURA 6

PUNTO DE INFLEXIÓN DE UNA FUNCIÓN

Los números críticos de una función no solo señalan la presencia de un máximo o un mínimo de ella, en algunas oportunidades pueden señalar la presencia de un punto de inflexión.

En este caso, el punto de inflexión de dicha función es aquel por donde pasa una recta tangente horizontal a ella (pendiente igual a cero) pero que no representa un valor extremo de dicha función.

Cuando estudiamos los valores extremos de la función (máximos y mínimos) notamos que la pendiente de las rectas tangentes antes y después del "número crítico" cambiaban de signo. Cuando el número crítico señala la presencia de un punto de inflexión notaremos que la pendiente de la recta tangente antes y después de dicho número crítico **NO CAMBIA** de signo.

Para fijar bien la idea anterior resolveremos el ejercicio siguiente:

Ejemplo 8 : Determine los "números críticos" de la función $f(x) = (X - 1)^3 + 2$. y confirme si constituyen un máximo o un mínimo relativo de la misma.

Solución: Inicialmente se calcula la derivada primera de la función f(x)

$$f'(x) = 3(X - 1)^2$$

Los números críticos son aquellos donde la derivada primera es igual a cero o no existe.

$$3(X - 1)^2 = 0 \quad ; \quad X - 1 = 0 \quad ; \quad X = 1$$

Esto significa que existe un número crítico, es decir $X = 1$

Para calcular el punto de la función donde X = 1, introduzco este valor en la ecuación de dicha función:

$$f(1) = (1 - 1)^3 + 2 \quad ; \quad f(1) = (0)^3 + 2 \quad ; \quad f(1) = 2$$

el punto crítico es **(1, 2)**

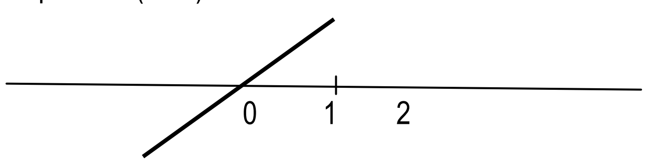
Para saber si este punto representa un máximo o un mínimo de la función se debe estudiar el signo de la pendiente de la recta tangente antes y después de dicho punto.

Como el punto crítico está ubicado en **(1,2)** puedo estudiar la pendiente antes (cuando x = 0) y después (cuando x = 2)

Para estudiar la pendiente de la recta tangente cuando x = 0 , sustituyo este valor en la ecuación de la derivada primera $f'(x) = 3(X - 1)^2$

$$f'(0) = 3(0 - 1)^2 \quad ; \quad f'(0) = 3(-1)^2 \quad ; \quad f'(0) = 3(1) \quad ; \quad f'(0) = 3$$

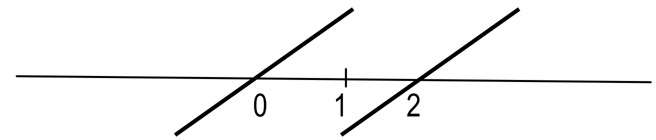
Esto nos indica que **antes** del punto crítico la pendiente de la recta tangente es positiva (m>0).



Para estudiar la pendiente de la recta tangente cuando x = 2 , sustituyo este valor en la ecuación de la derivada primera $f'(x) = 3(X - 1)^2$

$$f'(2) = 3(2 - 1)^2 \quad ; \quad f'(2) = 3(1)^2 \quad ; \quad f'(2) = 3(1) \quad ; \quad f'(2) = 3$$

Esto nos indica que **después** del punto crítico la pendiente de la recta tangente es positiva (m>0).



Es fácil observar que entre estas dos rectas no se puede colocar curva alguna que represente un máximo o un mínimo de una función:

Si **antes** y **después** del punto crítico la **pendiente** de la recta tangente **no cambia de signo** se concluye que estamos en presencia de un **punto de inflexión**.

La **FIGURA 7** muestra la gráfica de la función $f(x) = (X - 1)^3 + 2$

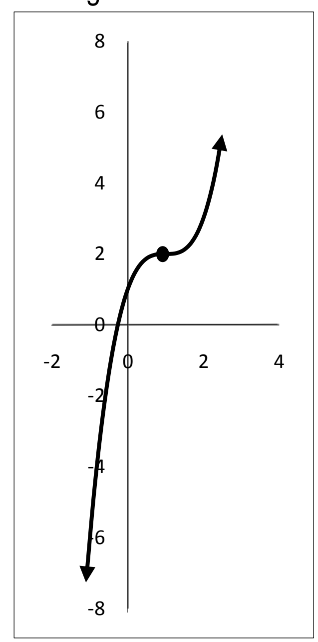


FIGURA 7

Los puntos de inflexión no solo se localizan en donde está ubicado un número crítico (FIGURA 10), generalmente lo encontraremos por donde pasan rectas tangentes con pendientes distintas de cero (FIGURAS 8 y 9).

Si existe un punto en la gráfica de una función en que el sentido de la concavidad cambia, y la función tiene una recta tangente en este punto, entonces la gráfica cruza su recta tangente en ese punto, como se muestra en las figuras 8, 9 y 10. A dicho punto se le llama PUNTO DE INFLEXIÓN.

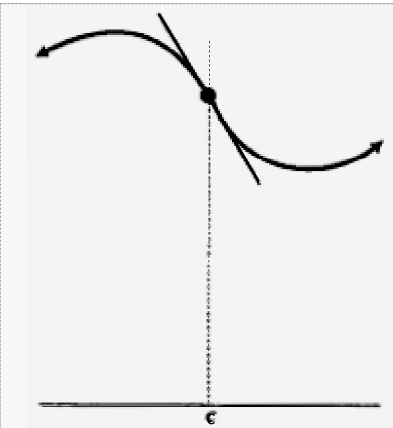


FIGURA 8

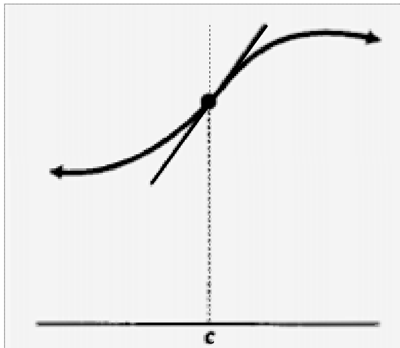


FIGURA 9

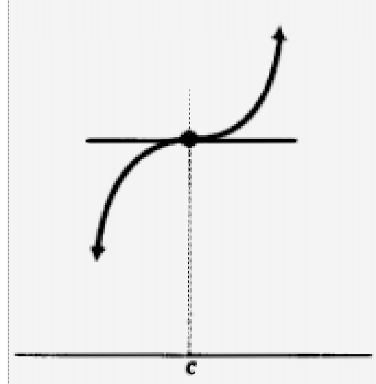


FIGURA 10

Aunque no es la condición única y suficiente, la mejor forma de determinar la ***ubicación de un punto de inflexión*** consiste en igualar la derivada segunda (o segunda derivada) a cero.

Se dice que una gráfica tiene ***concavidad positiva*** (figura 11) cuando el valor de la segunda derivada en el punto evaluado es positivo.

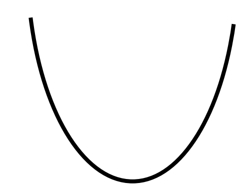


FIGURA 11

Se dice que una gráfica tiene ***concavidad negativa*** (figura 12) cuando el valor de la segunda derivada en el punto evaluado es negativo.

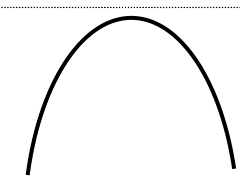


FIGURA 12

Ejemplo 9 : Determine la ubicación del "punto de inflexión" de la función $f(x) = X^3 - 3X$ y confírmelo estudiando el sentido de la concavidad antes y después de él.

Solución: Inicialmente se calcula la derivada segunda de la función f(x)

$$f'(x) = 3X^2 - 3 \quad : \quad \mathbf{f''(x) = 6X}$$

Al igualar la segunda derivada a cero :

$$6X = 0 \quad ; \quad X = 0$$

Esto significa que el punto de inflexión puede estar ubicado cuando X = 0 ; para determinar el valor de Y, introduzco éste valor en la función.

$$f(0) = (0)^3 - 3(0) \quad ; \quad f(0) = 0 \quad \text{es decir en} \quad \mathbf{(0,0)}$$

La **FIGURA 13** muestra la gráfica de la función $f(x) = X^3 - 3X$ y podemos observar que en el punto (0,0) cambia el sentido de la concavidad (de negativa a positiva). De hecho cambia en forma similar a lo mostrado en la **FIGURA 8.**

Primero estudio si por ese punto pasa una recta tangente a la función, para lo cual introduzco el valor de X = 0 en la primera derivada:

$$f'(x) = 3X^2 - 3 \quad ; \quad f'(0) = 3(0) - 3 \quad ; \quad f'(0) = -3$$

Con este valor se confirma que por el punto (0,0) pasa una recta tangente a la función $f(x) = X^3 - 3X$ y tiene una pendiente $m = -3$

Para estudiar el sentido de la concavidad se escoge un valor de X antes y un valor después de X = 0 (podemos escoger -1 y 1).

Para estudiar la concavidad cuando X = – 1 ; introduzco este valor en la segunda derivada:

$$f''(-1) = 6(-1) \quad ; \quad f''(-1) = -6$$

Se dice que una gráfica tiene concavidad negativa (figura 12) cuando el valor de la segunda derivada en el punto evaluado es negativo.

Para estudiar la concavidad cuando X = 1 ; introduzco este valor en la segunda derivada:

$$f''(1) = 6(1) \quad ; \quad f''(1) = 6$$

Se dice que una gráfica tiene concavidad positiva (figura 11) cuando el valor de la segunda derivada en el punto evaluado es positivo.

*Si existe un punto en la gráfica de una función en que el sentido de la concavidad cambia, y la función tiene una recta tangente en este punto, entonces la gráfica cruza su recta tangente en ese punto. A dicho punto se le llama **PUNTO DE INFLEXIÓN.***

La **FIGURA 13** muestra la gráfica de la función $f(x) = X^3 - 3X$ con un segmento de la recta tangente que pasa por el punto de inflexión (0,0).

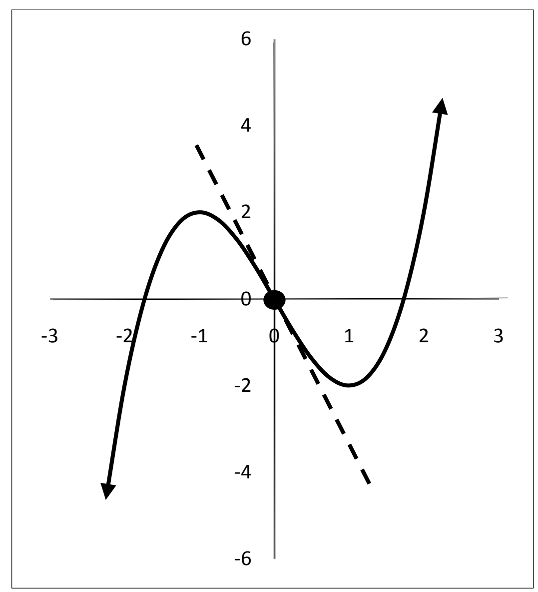


FIGURA 13

OTROS DOS MÉTODOS PARA LOCALIZAR E IDENTIFICAR LOS VALORES MÁXIMOS Y MÍNIMOS DE UNA FUNCIÓN:

PRIMER MÉTODO : Estudiando los valores que toma la función antes y después de los números críticos :

Ejemplo 10 : Localice e identifique los valores máximos y mínimos relativos de la función $f(x) = X^3 - 3X$

1er paso : Se calcula la derivada primera de la función $f(x) = X^3 - 3X$:

$$\mathbf{f'(x) = 3X^2 - 3}$$

2do paso : Se iguala la derivada primera a cero para identificar los números críticos :

$$3X^2 - 3 = 0 \quad ; \quad 3X^2 = 3 \quad ; \quad X^2 = 3/3 \quad ; \quad X^2 = 1 \quad ; \quad X = \pm 1$$

Esto significa que existen dos números críticos, es decir cuando X=1 y cuando X = – 1

3er paso : Se introducen los números críticos en la ecuación inicial y se determina el valor de la función en cada número crítico :

Para X = 1 :

$$f(x) = X^3 - 3X \quad ; \quad f(1) = (1)^3 - 3(1) \quad ; \quad f(1) = 1 - 3$$

$$\mathbf{f(1) = -2 \quad ; \quad (1, -2)}$$

Para X = – 1 :

$$f(x) = X^3 - 3X \quad ; \quad f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) \quad ; \quad f(-1) = -1 + 3$$

$$\mathbf{f(-1) = 2 \quad ; \quad (-1, 2)}$$

4to paso : Conocidos los valores de la función en los puntos críticos, se procede a estudiar el valor de la misma en un punto antes y en un punto después de cada número crítico.

Analizando el número crítico X = 1 (en donde la función adquiere un valor de f(1) = – 2), es decir el **punto crítico (1,– 2)** :

Se estudia el valor de la función cuando X=0 y cuando X=2 (antes y después del número crítico X=1)

Para X = 0 :

$$f(x) = X^3 - 3X \quad ; \quad f(0) = (0)^3 - 3(0) \quad ; \quad f(0) = 0 - 0$$

$$\mathbf{f(0) = 0 \quad ; \quad (0, 0)}$$

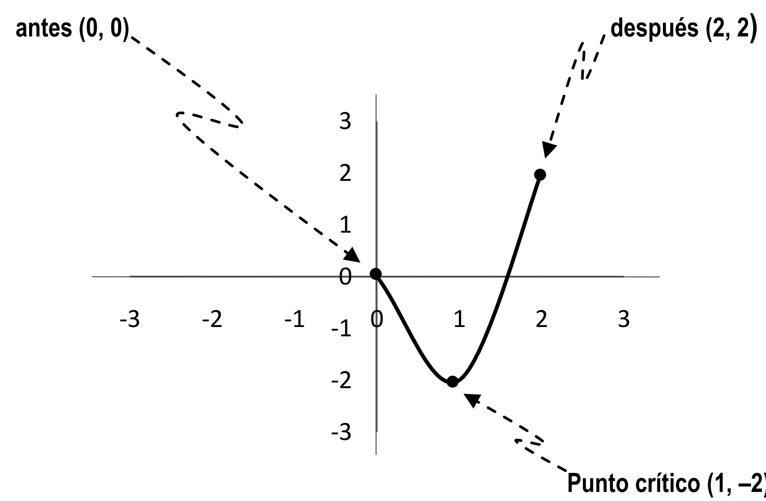
Para X = 2 :

$$f(x) = X^3 - 3X \quad ; \quad f(2) = (2)^3 - 3(2) \quad ; \quad f(2) = 8 - 6$$

$$\mathbf{f(2) = 2 \quad ; \quad (2, 2)}$$

Si los valores de la función antes y despues del número crítico son mayores al valor de la función en el punto crítico [f(0) > f(1) y f(2) > f(1)], estamos en presencia de un valor mínimo de la función.

En la gráfica siguiente podemos observar la ubicación de los tres puntos estudiados y se verifica facilmente lo expresado en el párrafo anterior.



Analizando el número crítico $X = -1$ (en donde la función adquiere un valor de $f(-1) = 2$) , es decir el **punto crítico (– 1, 2)** :

Se estudia el valor de la función cuando $X = -2$ y cuando $X=0$ (antes y después del número crítico $X = -1$)

Para $X = -2$:

$f(x) = X^3 - 3X$; $f(-2) = (-2)^3 - 3(-2)$; $f(-2) = -8 + 6$

$$\mathbf{f(-2) = -2 \quad ; \quad (-2, -2)}$$

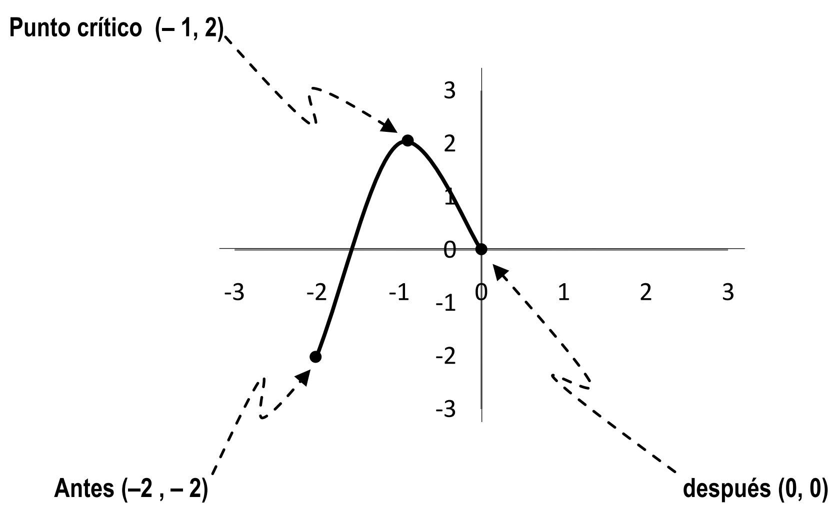
Para $X = 0$:

$f(x) = X^3 - 3X$; $f(0) = (0)^3 - 3(0)$; $f(0) = 0 - 0$

$$\mathbf{f(0) = 0 \quad ; \quad (0, 0)}$$

Si los valores de la función antes y despues del número crítico son menores al valor de la función en el punto crítico, estamos en presencia de un valor máximo de la función [$f(-2) < f(-1)$ y $f(0) < f(-1)$].

En la gráfica siguiente podemos observar la ubicación de los tres puntos estudiados y se verifica facilmente lo expresado en el párrafo anterior.



SEGUNDO MÉTODO : "CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA" Estudiando el signo de la "concavidad" de la función en los números críticos :

Ejemplo 11 : Localice e identifique los valores máximos y mínimos relativos de la función $f(x) = X^3 - 3X$

1er paso : Se calcula la derivada primera de la función $f(x) = X^3 - 3X$:

$$\mathbf{f'(x) = 3X^2 - 3}$$

2do paso : Se iguala la derivada primera a cero para identificar los números críticos :

$3X^2 - 3 = 0$; $3X^2 = 3$; $X^2 = 3/3$; $X^2 = 1$; $X = \pm 1$

Esto significa que existen dos números críticos, es decir cuando $X=1$ y cuando $X = -1$

3er paso : Se calcula la segunda derivada de la función $f(x) = X^3 - 3X$:

$$\mathbf{f'(x) = 3X^2 - 3 \quad ; \quad f''(x) = 6X}$$

4to paso : Se estudia el signo de la concavidad de la función en cada uno de los puntos críticos.

En este paso es bueno recordar que el punto crítico señala el extremo superior o inferior de una concavidad (recta tangente horizontal).

Se dice que una gráfica tiene ***concavidad positiva*** (figura 11) cuando el valor de la segunda derivada en el punto evaluado es positivo.

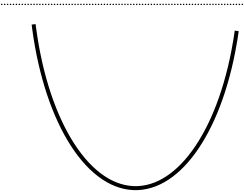


FIGURA 11

Se dice que una gráfica tiene ***concavidad negativa*** (figura 12) cuando el valor de la segunda derivada en el punto evaluado es negativo.

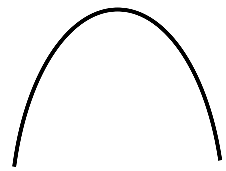


FIGURA 12

Analizando el número crítico X = – 1 :

Introduzco este valor en la derivada segunda:

$$f''(x) = 6X \quad ; \quad f''(-1) = 6(-1) \quad ; \quad f''(-1) = -6$$

Observamos que el valor de la segunda derivada cuando X = – 1 tiene signo negativo **[$f''(-1) = -6$]** lo que indica que la **concavidad es negativa** y representa un valor **máximo relativo** de la función (ver figura 12).

Para determinar ese valor máximo, introduzco el número crítico en la ecuación inicial

Para X = – 1 :

$$f(x) = X^3 - 3X \quad ; \quad f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) \quad ; \quad f(-1) = -1 + 3$$

$$\mathbf{f(-1) = 2 \quad ; \quad (-1, 2)}$$

Analizando el número crítico X = 1 :

Introduzco este valor en la derivada segunda:

$$f''(x) = 6X \quad ; \quad f''(1) = 6(1) \quad ; \quad f''(1) = 6$$

Observamos que el valor de la segunda derivada cuando X = 1 tiene signo positivo **[$f''(1) = 6$]** lo que indica que la **concavidad es positiva** y representa un valor **mínimo relativo** de la función (ver figura 11).

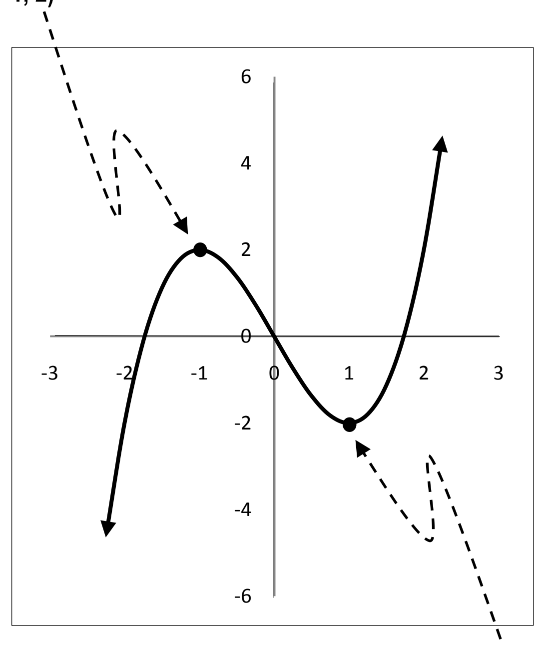
Para determinar ese valor mínimo, introduzco el número crítico en la ecuación inicial

Para X = 1 :

$$f(x) = X^3 - 3X \quad ; \quad f(1) = (1)^3 - 3(1) \quad ; \quad f(1) = 1 - 3$$

$$\mathbf{f(1) = -2 \quad ; \quad (1, -2)}$$

Punto crítico (– 1, 2)



Punto crítico (1, –2)