

EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

3.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo introducimos las herramientas básicas para la resolución de las ecuaciones diferenciales de Philip y de Vries. Estos conceptos básicos pueden ser profundizados en Zienkiewicz y Taylor (1989), y en Finlayson (1972).

Una manera clásica de estudiar un sistema continuo es dividirlo en partes o elementos, cuyo comportamiento pueda conocerse sin dificultad, y a continuación reconstruir el sistema original a partir de dichos componentes. Así, se han ido proponiendo a lo largo de los años diversos métodos de discretización, basados en aproximaciones tales que, al aumentar el número de elementos la solución se aproxime a la real.

Uno de los métodos mas utilizados en el problema que nos concierne es el de los elementos finitos. Entre las contribuciones claves en el desarrollo de los elementos finitos destacan las de Courant, quien en 1943 introduce el concepto de funciones continuas a tramos en regiones triangulares, generalizadas y utilizadas años después,

como funciones de interpolación. Turner, Clough, Martin y Toop, en 1956, utilizaron un método de discretización para analizar estructuras en aviones, y en 1965 Zienkiewicz y Cheung, presentaron una amplia interpretación del método. A partir de entonces empieza a formalizarse matemáticamente, utilizándolo en una extensa variedad de problemas, tanto en el campo de la ingeniería como de la física. Algunas de las principales aplicaciones fueron elaboradas en el estudio de la conducción de calor, mecánica de estructuras, matemáticas aplicadas al estudio de ecuaciones diferenciales no lineales, y recientemente en el campo de la mecánica de fluidos, ingeniería biomédica, ingeniería nuclear, electromagnetismo y física de suelos, entre otros.

El método de los elementos finitos, es un procedimiento general para la resolución numérica aproximada de problemas continuos, planteados por expresiones definidas matemáticamente por ecuaciones diferenciales con condiciones de contorno y condiciones iniciales, y basado en la discretización del dominio del problema en subdominios denominados ‘elementos’. En cada elemento, la solución se aproxima por un espacio finito de funciones. Debido al carácter de la solución del tipo de problemas que tratamos, el espacio más apropiado para expandir la solución, es el espacio de Sobolev.

En elementos finitos las ecuaciones que rigen el problema se plantean en forma integral, bien con ayuda de principios variacionales, con métodos de residuos ponderados o principios de trabajos virtuales. Las integrales se computan como contribuciones de las integrales en cada elemento. Al final de este proceso y tras el ensamble total del sistema, se obtiene un sistema de ecuaciones algebraicas que permite la solución del sistema global.

La solución aproximada será más exacta cuanto mayor sea la dimensión del espacio de Sobolev (número de componentes de la base de funciones), lo que implica mayor número de elementos.

En lo que a nosotros concierne, la aplicación fundamental será la resolución de las ecuaciones de Philip y de Vries (Tabla 1.5), sujetas a condiciones de contorno y condiciones iniciales.

En la primera sección de este capítulo, presentaremos las bases que permiten la resolución de problemas estacionarios, para incluir más adelante las reglas de recurrencia temporales apropiadas, para resolver problemas de propagación.

3.2 MODELO FÍSICO DIRECTO

Tanto en Ingeniería como en Física, existen problemas en medios continuos que generalmente vienen expresados por las adecuadas ecuaciones diferenciales y condiciones de contorno, que se imponen a la función o funciones incógnitas.

$$(\mathbf{F}) = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A}(\mathbf{u}) = \begin{Bmatrix} A_1(\mathbf{u}) \\ A_2(\mathbf{u}) \\ \cdot \\ \cdot \\ A_n(\mathbf{u}) \end{Bmatrix} = 0 \text{ en el dominio de problema } \Omega \\ \text{y con condiciones de contorno} \\ \mathbf{B}(\mathbf{u}) = \begin{Bmatrix} B_1(\mathbf{u}) \\ B_2(\mathbf{u}) \\ \cdot \\ \cdot \\ B_m(\mathbf{u}) \end{Bmatrix} = 0 \text{ en el contorno del problema } \Gamma \end{array} \right. \quad (3.1)$$

El problema expresado en la forma mas general se define como el modelo físico directo (\mathbf{F}) , y consiste en determinar la función desconocida \mathbf{u} (vectorial o escalar) que satisfaga un determinado sistema de ecuaciones diferenciales $\mathbf{A}(\mathbf{u})$, y condiciones de contorno $\mathbf{B}(\mathbf{u})$. Los métodos utilizados para resolver el sistema de ecuaciones, pueden ser analíticos exactos, como la separación de variables o transformadas de Laplace, entre otros, y métodos analíticos aproximados (Rayleigh-Ritz, Galerkin), generalmente numéricos. En la mayoría de los problemas reales no es posible obtener la solución analítica, recurriendo a métodos numéricos, entre los cuales cabe destacar el método de las diferencias finitas, el de los elementos finitos y volúmenes finitos.

El método de los elementos finitos requiere un tipo de formulación que veremos a continuación.

3.3 FORMULACIONES FUERTE Y DÉBIL

Como vimos en el apartado anterior, un problema continuo es tratado matemáticamente por un conjunto de ecuaciones diferenciales que caracteriza el comportamiento del campo, sujeto a condiciones de contorno e iniciales. Teniendo en cuenta el sistema de ecuaciones 3.1, podemos escribir:

$$\int_{\Omega} \mathbf{v}^t \cdot \mathbf{A}(\mathbf{u}) \, d\Omega = \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^n v_i \cdot A_i(\mathbf{u}) \right) \, d\Omega = 0 \quad (3.2)$$

$$\int_{\Gamma} \mathbf{w}^t \cdot \mathbf{B}(\mathbf{u}) \, d\Gamma = \int_{\Gamma} \left(\sum_{i=1}^m w_i \cdot B_i(\mathbf{u}) \right) \, d\Gamma = 0 \quad (3.3)$$

donde \mathbf{v} y \mathbf{w} son vectores arbitrarios de funciones, con el mismo número de funciones incógnitas que el sistema de ecuaciones, o que el número de componentes de \mathbf{u} .

La suma de las expresiones integrales anteriores se define como la formulación fuerte del problema:

$$(\mathbf{S}) \quad \left\{ \int_{\Omega} \mathbf{v}^t \cdot \mathbf{A}(\mathbf{u}) \, d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{w}^t \cdot \mathbf{B}(\mathbf{u}) \, d\Gamma = 0 \right\} \quad (3.4)$$

Por lo tanto, podremos decir que si la expresión anterior (\mathbf{S}) se cumple para cualquier par de vectores \mathbf{v} y \mathbf{w} , la formulación fuerte del problema es equivalente al modelo físico directo:

$$(\mathbf{F}) \Leftrightarrow (\mathbf{S})$$

En la discusión anterior hemos supuesto implícitamente que es posible calcular las integrales que aparecen en la ecuación (\mathbf{S}) . Esto limita la elección de las posibles familias a las que deben pertenecer las funciones \mathbf{v} , \mathbf{w} y \mathbf{u} .

Así, las funciones \mathbf{v} y \mathbf{w} han de ser funciones finitas unívocas. Si el mayor orden de derivación de las funciones \mathbf{u} que aparecen en las ecuaciones $\mathbf{A}(\mathbf{u})$ y $\mathbf{B}(\mathbf{u})$ es \mathbf{k} , como \mathbf{A}

y \mathbf{B} están integradas, \mathbf{u} y sus derivadas deben ser continuas hasta el orden $\mathbf{k}-1$. El valor $\mathbf{k}-1$ se conoce como orden variacional. Las ecuaciones que vamos a resolver son ecuación de difusión y transporte de humedad y temperatura –escalares pasivos-, que tienen un $\mathbf{k}_{\max} = 2$, por lo que \mathbf{u} y $\nabla\mathbf{u}$ han de ser continuas en el dominio del problema.

En el análisis matemático de problemas con valores de contorno, y por consiguiente en el análisis de elementos finitos, necesitamos introducir una clase de funciones que posean ciertas propiedades de integrabilidad y derivación. Los requerimientos generales que han de cumplir las funciones de prueba \mathbf{u} y de ponderación \mathbf{w} , nos llevan a trabajar en el espacio de funciones de Sobolev, que se define a continuación:

$$H^k = H^k(\Omega) = \left\{ w / w \in L_2; \nabla w \in L_2; \dots; \nabla^k w \in L_2 \right\} \quad (3.5)$$

donde

$$L_2 = L_2(\Omega) = \left\{ w / \int_{\Omega} w^2 d\Omega < \infty \right\} \quad (3.6)$$

El espacio de Sobolev de orden-k, está formado por funciones de cuadrado integrable L_2 , derivables hasta el orden k.

Teniendo en cuenta las restricciones impuestas a las funciones \mathbf{v} , \mathbf{w} y \mathbf{u} , caracterizaremos dos clases de funciones. La primera está compuesta por la solución propuesta \mathbf{u} , que ha de cumplir las condiciones de contorno, y pertenecer al espacio de funciones de Sobolev H^1 . De esta forma, la función \mathbf{u} pertenecerá a un subespacio $S \subset H^1$:

$$S = \left\{ u / u \in H^1; B(u) = 0 \right\} \quad (3.7)$$

donde $\mathbf{B}(\mathbf{u})$ corresponde a las ecuaciones de contorno.

La segunda clase de funciones está compuesta por las llamadas funciones de ponderación. Son similares a las anteriores, pero se les exige que se anulen en el contorno donde están impuestas las condiciones de contorno forzadas:

$$V = \{v / v \in H^1; v(\Gamma) = 0\} \quad (3.8)$$

Γ es la parte del contorno donde \mathbf{u} , $\nabla \mathbf{u}$, o una combinación de ambos, están impuestos.

En muchas ocasiones es posible efectuar una integración por partes de la ecuación (S), y sustituirla por una expresión alternativa de la forma:

$$(\mathbf{W}) \quad \left\{ \int_{\Omega} \mathbf{C}(\mathbf{v})^t \mathbf{D}(\mathbf{u}) \, d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{D}(\mathbf{w})^t \cdot \mathbf{F}(\mathbf{u}) \, d\Gamma = \mathbf{0} \right\} \quad (3.9)$$

Ahora, las derivadas que aparecen en los operadores \mathbf{C} , \mathbf{D} , \mathbf{E} y \mathbf{F} son de menor orden que las que aparecen en \mathbf{A} y \mathbf{B} . En este caso se necesita una continuidad de menor orden al elegir las funciones de prueba \mathbf{u} , pero de mayor orden en \mathbf{v} y \mathbf{w} .

Las expresiones integrales 3.4 (S) y 3.9 (W) son la base de las soluciones aproximadas por elementos finitos.

3.4 MÉTODO DE LOS RESÍDUOS PONDERADOS

Para expresar la solución \mathbf{u} tomamos una expresión aproximada de la forma:

$$u \approx \bar{u} = \sum_{i=1}^r N_i a_i = \mathbf{N} \mathbf{a} \quad (3.10)$$

donde N_i y a_i son las funciones de forma y los valores de la función incógnita, en cada uno de los nodos de la malla.

Así pues, las ecuaciones integrales en sus formas fuerte o débil, proporcionan un sistema de ecuaciones ordinarias de las que pueden calcularse los parámetros a_i :

$$(S) \quad \int_{\Omega} \mathbf{v}_j^t \cdot \mathbf{A}(\mathbf{Na}) \, d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{w}_j^t \cdot \mathbf{B}(\mathbf{Na}) \, d\Gamma = 0 \quad (j=1-n) \quad (3.11)$$

o bien

$$(W) \quad \int_{\Omega} \mathbf{C}(\mathbf{v}_j)^t \mathbf{D}(\mathbf{Na}) \, d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{D}(\mathbf{w}_j)^t \cdot \mathbf{F}(\mathbf{u}) \, d\Gamma = 0 \quad (j=1-n) \quad (3.12)$$

Si tenemos en cuenta que $\mathbf{A}(\mathbf{Na})$ representa el residuo o error que se obtiene al sustituir la solución aproximada en la ecuación diferencial, y $\mathbf{B}(\mathbf{Na})$ el residuo al hacer esta sustitución en las condiciones de contorno, la expresiones anteriores son las integrales ponderadas de tales residuos. Por eso este procedimiento de aproximación recibe el nombre de *método de los residuos ponderados*. Evidentemente se puede utilizar cualquier conjunto de funciones de ponderación, siempre que pertenezcan al subconjunto $V \subset H^1$.

Dependiendo del tipo de función de ponderación, el método utilizado recibe un nombre diferente:

3.4.1 Colocación por puntos

$\mathbf{w}_j = \delta_j$ donde δ_j es tal que para $x \neq x_j$; $y \neq y_j$, $\mathbf{w}_j = 0$ pero $\int_{\Omega} \mathbf{w}_j \, d\Omega = I$ (matriz unidad)

Este procedimiento equivale simplemente a hacer nulo el residuo en n puntos dentro del dominio.

3.4.2 Colocación por subdominios

$\mathbf{w}_j = I$ en Ω_j y cero en cualquier otro punto. Esencialmente esto hace que la integral del error sobre el subdominio especificado del dominio sea nula.

3.4.3 Método de Galerkin o de Bubnov-Galerkin

$w_j = N_j$. Consiste simplemente en elegir como funciones de ponderación, las funciones de forma originales.

3.5 DESCRIPCIÓN GENERAL DEL MÉTODO

En el dominio del problema la variable es continua. Se dice que posee un número infinito de grados de libertad. En el método de los elementos finitos, el dominio es considerado como la unión de un número finito de subdominios, llamados elementos finitos, conectados entre si por puntos definidos como nodos o puntos nodales. Los nodos de un elemento se encuentran en sus contornos o dentro del mismo. Puesto que la variación del campo dentro del medio continuo no es conocida, aproximaremos la solución dentro de cada elemento con polinomios, cuyo grado depende del mayor orden de derivación de la función en la ecuación diferencial. Haciendo un mapeo conforme, pondremos los coeficientes del polinomio en función de los valores nodales de la incógnita en cada elemento, que estarán multiplicados por funciones de interpolación, definidas como funciones de forma. Tras aplicar el método de los residuos ponderados a cada elemento, obtendremos un sistema de ecuaciones acopladas, que una vez ensambladas para todos los elementos, nos dará un sistema de ecuaciones algebraicas cuyo número será igual al número de incógnitas o grados de libertad (variables en cada uno de los nodos que conforman el dominio). La solución de este sistema será la solución del problema en los nodos, y por tanto en todo el dominio del problema.

A continuación se expondrán los pasos que este método requiere para la resolución numérica de problemas reales:

3.5.1 Discretización del dominio

Hemos de discretizar el dominio en elementos, cuyo número, tipo tamaño y densidad, dependen del problema en cuestión.

Las formas básicas de los elementos, dependiendo de la dimensión del problema que estudiemos, suelen ser rectas en una dimensión, triángulos, rectángulos, cuadriláteros y paralelogramos en dos dimensiones, y tetraedros, prismas rectangulares y hexaedros en tres dimensiones.

La solución será tanto mas precisa, cuanto mayor sea el número de elementos que utilicemos para discretizar el dominio, pero es preferible hacer más densas en elementos aquellas zonas donde se esperen variaciones bruscas del campo, ya que el ahorro computacional será mayor.

Otro punto importante que hemos de considerar es la numeración de los nodos en la malla (por malla entenderemos el dominio del problema, una vez discretizado). Dependiendo de la numeración, la matriz de rigidez global, estará más o menos dispersa. A la hora de resolver el problema, esto se traducirá en un mayor o menor ahorro computacional.

3.5.2 Selección de las funciones de interpolación apropiadas

Dentro de cada elemento se propone una solución. Generalmente, por motivos de continuidad, estabilidad y ahorro computacional, se proponen bases polinómicas. En cada elemento la incógnita se expande en una base ortonormal de funciones en un

subespacio de Sobolev, donde los coeficientes son los valores nodales de la función incógnita en el subdominio o elemento.

3.5.3 Cálculo de las matrices elementales y de los vectores de carga

A partir de la forma débil de las ecuaciones que rigen el problema, y haciendo uso de métodos integrales de minimización, como el método de los residuos ponderados, el método de trabajos virtuales, o métodos variacionales, encontraremos ecuaciones matriciales para cada elemento de la forma: $[K^e]\Phi^e = P^e$ donde $[K^e]$ es la matriz elemental, conocida, P^e es el vector de carga y Φ^e es el vector de las variables incógnitas en los nodos del elemento.

3.5.4 Ensamble de las ecuaciones elementales y solución del sistema

Puesto que las ecuaciones se obtienen para cada elemento, hemos de ensamblarlas apropiadamente para obtener un sistema global de ecuaciones del dominio completo, que será de la forma: $[K]\Phi = P$, donde $[K]$ es la matriz de rigidez del sistema total, Φ el vector de desplazamientos nodales, y P es el vector de carga del sistema total. Al final hemos de modificar el sistema de ecuaciones anterior para incluir las condiciones de contorno.

Una vez obtenido el sistema global de ecuaciones, los métodos numéricos utilizados dependen del tipo de matriz obtenida. Así, por ejemplo, la modelación de las ecuaciones que rigen el comportamiento dinámico de una partícula fluida (ecuaciones de Navier-Stokes) lleva a matrices muy dispersas, en las que es conveniente un adecuado almacenamiento tipo Sky-Line, y una descomposición LU para resolver el sistema. En problemas de transporte y difusión de temperatura en fluidos, las matrices suelen ser

diagonales y la solución se obtiene mediante iteraciones sobre una matriz diagonal modificada o matriz *Lumped*.

Para los problemas no lineales y acoplados, las matrices son dispersas, y funciones de las propias incógnitas. El método que utilizaremos para resolver este problema modificado, será un GMRES, comentado en el capítulo 4.

Para concluir, podemos señalar que la resolución de la parte no lineal es uno de los pasos más delicados, en el que hemos de conciliar los principios físico-matemáticos, con las técnicas computacionales adecuadas para cada problema particular.

3.6 FUNCIONES DE FORMA

Para representar la solución en cada elemento, las funciones utilizadas son funciones de interpolación. Las más utilizadas son las formas polinomiales, debido a su fácil implementación numérica. Además, si aumentamos el orden del polinomio, la solución será más precisa (un polinomio de grado infinito correspondería a la solución exacta).

La función dentro del elemento la expandimos como $u = \eta^t \alpha$, donde η es el vector de coordenadas espaciales del elemento y α es el vector de coeficientes del polinomio de interpolación, también conocido como coordenadas generalizadas. Los vectores pueden ser expresados con respecto a un sistema de coordenadas global único para un dominio dado, o bien respecto a un sistema de coordenadas locales situado en o dentro de cada elemento (centro geométrico, coordenadas isoparamétricas etc.). Al utilizar coordenadas isoparamétricas, podemos estandarizar de manera única todos los parámetros que

constituyen un elemento finito, como son las funciones de forma, el dominio, los nodos y grados de libertad.

En dos dimensiones y para un polinomio de grado N , trabajando con coordenadas globales:

$$\boldsymbol{\eta}^t(x, y) = (1, x, y, x^2, y^2, xy, \dots, y^n), \quad \boldsymbol{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n) \quad (3.13)$$

Pero nos interesa expresar el polinomio en términos de los valores nodales de la función incógnita

$$\vec{u}^e = \begin{pmatrix} u_{nodo1} \\ u_{nodo2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{nodo n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_{nodo1}^t \\ \eta_{nodo2}^t \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \eta_{nodo n}^t \end{pmatrix} \cdot \vec{\alpha} = \tilde{\eta} \cdot \vec{\alpha} \Rightarrow \vec{\alpha} = \tilde{\eta}^{-1} \cdot \vec{u}^e \Rightarrow \vec{u} = \tilde{N} \cdot \vec{u}^e \quad (3.14)$$

donde $\tilde{N} = \eta^t \cdot \tilde{\eta}^{-1}$ es la matriz de las funciones de forma.

Para el caso de un elemento lineal en una dimensión y una interpolación Lagrangiana, las funciones de forma vienen dadas por las expresiones:

$$N_1 = \frac{(z_j - z)}{(z_j - z_i)} \quad N_2 = \frac{(z - z_i)}{(z_j - z_i)} \quad (3.15)$$

En la Figura 3.1, podemos observar estas funciones y comprobar la continuidad entre elementos.

Funciones de forma para elementos lineales

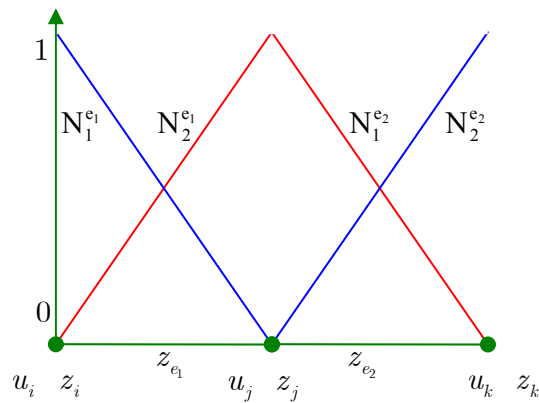


Figura 3.1 Elementos lineales isoparamétricos.

En la Figura 3.1 se representan dos elementos contiguos, con coordenadas z_i, z_j y z_k . Las funciones de forma N_1^{e1}, N_2^{e1} pertenecen al primer elemento z_{e1} , y las funciones de forma N_1^{e2}, N_2^{e2} pertenecen al segundo z_{e2} . La continuidad entre las funciones N_1^{e1} y N_2^{e2} , y las funciones N_2^{e1} y N_1^{e2} , asegura la continuidad de las variables en el nodo común entre dos elementos, como puede observarse en la figura. Dentro de cada elemento, la variable \mathbf{u} se interpola de la forma: $u^e(z_e) = u_i^e N_1 + u_j^e N_2$.

3.6.1 Criterios de convergencia

Las funciones de forma han de cumplir ciertos requisitos, si queremos acercarnos a la solución exacta. Las condiciones básicas que se han de cumplir son las siguientes:

- C1- Tienen que ser funciones continuas en el interior de cada elemento, Ω^e .
- C2- Las funciones de forma tienen que ser continuas en los contornos Γ^e de cada elemento, hasta el orden variacional exigido.
- C3- Las funciones de forma tienen que formar polinomios completos.

Para que se cumpla la condición C3, las funciones de interpolación en cada elemento, han de ser capaces de representar exactamente un valor constante dentro del elemento cuando asignemos valores constantes a la variable en los nodos del mismo.

3.7 INTEGRACIÓN NUMÉRICA

Para encontrar numéricamente el valor de la integral de una función de una variable, pueden utilizarse varios procedimientos.

3.7.1 Cuadratura de Newton-Cotes

En este procedimiento, los puntos en los que se precisa el valor de la función se determinan *a priori*, generalmente separados por intervalos iguales, haciendo pasar un polinomio por los valores de la función en esos puntos, y procediendo a su integración exacta.

Como n valores de la función definen un polinomio de grado $n-1$, el error cometido será del orden $O(h^n)$, donde h es el tamaño del elemento. Esto conduce a la fórmula de cuadratura de Newton-Cotes:

$$I = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_1^n H_i f(\xi_i) \quad (3.16)$$

Las reglas del trapecio y del tercio o de Simpson, son casos particulares, para $n=2$ y $n=3$ respectivamente. En la Tabla 3.1, se muestran los casos para $n = \{2, 3, 4\}$.

Tabla 3.1 Formulas de Integración de Newton-Cotes

$n = 2$	$I = f(-1) + f(1)$
$n = 3$	$I = \frac{1}{3} [f(-1) + 4f(0) + f(1)]$
$n = 4$	$I = \frac{1}{4} \left[f(-1) + 3f\left(-\frac{1}{3}\right) + 3f\left(\frac{1}{3}\right) + f(1) \right]$

3.7.2 Cuadratura de Gauss-Legendre.

Si en lugar de especificar *a priori* la posición de los puntos en los que se precisa el valor de la función, hacemos que estos se encuentran en puntos que se determinan de manera que se alcance la mayor precisión posible, para un número de puntos dado pueden conseguirse resultados más exactos. De hecho, si consideramos de nuevo que:

$$I = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_1^n H_i f(H_i, \xi_i) \quad (3.17)$$

y volvemos a suponer una expresión polinómica, se puede construir un polinomio de grado $2n-1$ y buscar las coordenadas de integración n para obtener su integral exacta.

En la Tabla 3.2, mostramos el valor de los coeficientes para los tres primeros puntos, que utilizamos en la cuadratura de Gauss para integrar en una dimensión las ecuaciones en el capítulo 4. Este método requiere un número mínimo de evaluaciones, con un error del orden $O(h^{2n})$, menor que en la regla de *Newton-Cotes*.

Tabla 3.2 Abcisas y coeficientes de peso de la fórmula de la cuadratura de Gauss
$$I = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_1^n H_i f(\xi_i)$$

$\pm \xi$		H
	$n = 1$	
0.0000000000000000		2
	$n = 2$	
0.577350269189626		1
	$n = 3$	
0.774596669241483		0.555555555555556
0.0000000000000000		0.888888888888889

3.8 CONCLUSIONES

En este capítulo hemos introducido los conceptos básicos del método de los elementos finitos. Las cuestiones acerca de la estabilidad y convergencia del método, y los esquemas espacial y temporal utilizados, se tratarán en el capítulo 4.