UNA PARADOJA EN LOS CONJUNTOS DE PARTES Y FIN DE LA HIPÓTESIS DEL CONTINUO

(*Autor:* ***Dimas Herrera***)

1. Introducción

Si existe alguna teoría matemática que se pueda considerar como el fundamento de toda la matemática ésa no es otra que la teoría de conjuntos del gran ***Georg Cantor***. Sin embargo, es necesario corregir un pequeño detalle que conduce a contradicciones cuando se efectúan operaciones entre conjuntos. Ese detalle que se debe corregir es: ***la existencia de conjuntos de conjuntos y de conjuntos de partes***. Debido a esta pequeña incorrección en dicha teoría, el mismo Cantor cayó en un error al tratar de demostrar su teorema conocido como *Teorema de Cantor* sobre la cardinalidad de un conjunto A y su conjunto de partes, P(A), como veremos más adelante.

Expliquemos muy brevemente cómo se llegó a encontrar el error aludido en el párrafo anterior. En otros trabajos que meses atrás publiqué en esta misma página web, "*monografías.com*", con los títulos de "SUBSANANDO EL PARAISO DE CANTOR" y "EL TEOREMA DE CANTOR DEMUESTRA LA FALSEDAD DE LA HIPÓTESIS DEL CONTINUO", presenté unas demostraciones de las cuales: una está incompleta en el primero y otra es errónea en el segundo. Al tratar de corregir mi error, en el primer trabajo no hubo ninguna dificultad, y acá se presentará la forma correcta de demostración. Pero en el segundo encontré que, si corregía dicho error, la demostración daba lugar a una paradoja. Por lo tanto, me fui al teorema original de Cantor y ¡sorpresa! descubrí que éste también había caído en el mismo absurdo que aparecía en mi corrección. Por ello el trabajo que acá se presenta y donde comenzaremos definiendo lo que entenderemos por conjunto y las clases (o clasificación) de éstos. Se supone que el lector domina la teoría de conjuntos.

2. Definiciones Principales

En este trabajo llamaremos

Conjunto de primera especie (o de primer rango) a aquellos conjuntos cuyos elementos son *objetos perfectamente determinados* (*opd*). Como por ejemplo

$A = \{a, e, i, o\ u\}$; $B = \{1, 2, 3\}$; etc.

En estos conjuntos, A y B, los *opd* no son conjuntos. Por lo tanto, puede existir la unión de A y B ($A \cup B$), pero no puede existir la unión de un *opd* con otro *opd*, como por ejemplo, $a \cup e$, $2 \cup 3$, etc. Pues, si se diera esto, se tendría que en un conjunto, por ejemplo de estudiantes, $E = \{a, b, c\}$, si $a = b \cup c$, el estudiante *a* es igual a la unión de los estudiantes *b* y *c*. Es decir, la unión de dos estudiantes es un estudiante (¿?). También podría suceder que se cumpla: $a \cup b = b$, es decir, $a \subset b$, o, en otras palabras, el estudiante *a* está dentro del estudiante *b* (¿?). Esto mandaría a nuestra teoría de conjuntos al *retrete*. Tampoco se debe tener que 1, 2, etc., son conjuntos porque, de serlo, se presentan absurdos como se podrá apreciar más adelante.

Ahora bien, si $A = \{a, b\}$, es un conjunto de primer rango, entonces su conjunto de partes $P(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ es un conjunto de segundo rango. Luego, se puede inferir que

Un conjunto es de segunda especie (o segundo rango) cuando contiene como elementos conjuntos de primer rango. Ejemplo, $A = \{\{x\}, \{y\}\}$, P(B), etc., B de 1º rango.

Un conjunto es de tercera especie (o tercer rango) cuando contiene conjuntos de segundo rango. Ejemplo, $A = \{\{\{x\}\}, \{\{y\}\}\}$, P(P(B)), P(P(C)), etc., B y C de 1º rango.

Así, los *opd* no serán conjuntos y el conjunto vacío será el único de rango cero.

Cardinal de un conjunto. El cardinal de un conjunto cualquiera es el número de elementos que éste posee. Ejemplo, si $A = \{\{u\}, \{u, v\}\}$, entonces su cardinal es $\#A = 2$. Si $B = \{2, 4, 5\}$, entonces $\#B = 3$, etc.

3. Funciones Entre Conjuntos. ¿Cómo Deben Ser?

Antes de deducir cómo debe ser la aplicación de funciones entre conjuntos, debemos recordar que ninguna de las axiomáticas de la teoría de conjuntos, ya sea ZF, NBG, u otras, nos prohíbe que apliquemos una función a conjuntos de distinta especie o rango. Sin embargo, las funciones entre conjuntos se deben dar sólo entre aquellos conjuntos que son de igual rango, veamos una prueba de esto con algunos ejemplos.

Sean los conjuntos

$A = \{a, b\}$, $B = \{c, d, e, g\}$ y $P(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

Como B (de rango 1) y P(A) (de rango 2) son equipotentes (#B = 4 = #P(A)), entonces, por equipotencia de conjuntos, existe una biyección

$$f:B \to P(A).$$

Supongamos que esta biyección es tal que

$$f(c) = \varnothing,\ f(d) = \{a\},\ f(e) = \{b\} \text{ y } f(g) = \{a, b\}. \qquad (1)$$

Por (1) y usando las conocidas operaciones entre conjuntos, se tiene

$$f(g) = \{a, b\} = \{a\} \cup \{b\} = f(d) \cup f(e). \qquad (2)$$

Por (2) y sabiendo que existe la biyección inversa f^{-1}, se tiene

$$f^{-1}(f(g)) = f^{-1}(f(d) \cup f(e)) = f^{-1}(f(d)) \cup f^{-1}(f(e)). \qquad (3)$$

Pero por (3), se tiene el absurdo, o mejor dicho, la barbaridad

$$g = d \cup e. \qquad (4)$$

Como la barbaridad obtenida en (4) se dio por suponer funciones entre conjuntos de diferentes rangos, se concluye que esto debe ser execrado de nuestra teoría de conjuntos. En consecuencia, es necesario inferir que

"*Una función entre dos conjuntos, A y B, existe si, y sólo si, A y B son de igual rango*" (*Rg(A) = Rg(B)*).

Ahora, veamos que entre conjuntos de rango mayor que uno las operaciones entre ellos conducen a barbaridades parecidas a la encontrada anteriormente, si entre ellos existen funciones, en general. En efecto, sean

$$A = \{1, 2\},\quad B = \{3, 4\},\quad C = \{5\} \quad \text{y} \quad D = \{6, 7, 8\}$$

$$P(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\},\quad P(B) = \{\varnothing, \{3\}, \{4\}, \{3, 4\}\}.$$

$$P(C) = \{\varnothing, \{5\}\},\quad P(D) = \{\varnothing, \{6\}, \{7\}, \{8\}, \{6, 7\}, \{6, 8\}, \{7, 8\}, \{6, 7, 8\}\}.$$

$$E = P(A) \cup P(B) \cup P(C) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}\}$$

Como E y P(D) son equipotentes (#E = #P(D) = 8), entonces existe una biyección entre E y P(D), es decir

$$\exists f:E \to P(D) \text{ y } f \text{ es biyectiva.}$$

Ahora bien, excluyendo al $\varnothing$ (ya que podemos suponer que $f(\varnothing) = \varnothing$), el conjunto E posee cinco conjuntos unitarios, mientras que P(D) sólo posee tres. Esto significa que dos conjuntos unitarios de E tienen como imagen a conjuntos binarios (o al ternario) de P(D).

Aceptemos por un momento que

$f(\{1\}) = \{6\}$, $f(\{2\}) = \{7\}$, $f(\{3\}) = \{8\}$ y $f(\{4\}) = \{6, 7\}$. (1)

Entonces por (1) y usando propiedades ya conocidas se tiene

$f(\{4\}) = \{6, 7\} = \{6\} \cup \{7\} = f(\{1\}) \cup f(\{2\}) = f(\{1\} \cup \{2\}) = f(\{1, 2\})$. (2)

Por (2), los conjuntos $\{4\}$ y $\{1, 2\}$ tienen la misma imagen siendo *f* inyectiva. Por lo tanto, al aplicar la función inversa se tiene

$\{4\} = \{1, 2\}$. (3)

En (3) tenemos que un conjunto unitario es igual a un conjunto binario (¿?), donde se viola a toda la teoría de conjuntos. Para evitar esto debemos (es necesario) inferir que

1) *Las funciones entre conjuntos de especie (o rango) mayor que uno no son, en general, aplicables. Por lo tanto, si Rg(A) = Rg(B) = 1, siempre* $\exists f{:}A \to B$.

2) *Al aplicar funciones entre conjuntos de partes, a conjuntos n-arios corresponden como imágenes conjuntos n-arios. Es decir, la imagen de un conjunto unitario es, obligatoriamente, un conjunto unitario, la de un binario, es un binario, etc.*

3) *De las partes 1) y 2) se tiene que para aplicar una función entre conjuntos de partes, éstos deben ser equipotentes. Es decir, si* $\exists f{:}P(A) \to P(B)$, *entonces, P(A) y P(B) son equipotentes (#P(A) = #P(B)).*

4) *La equipotencia se debe dar sólo entre conjuntos de primera especie y entre conjuntos de partes. Es decir si A y B son equipotentes, Rg(A) = Rg(B) = 1. Así se tendrá que: #P(A) = #P(B), #P(P(A)) = #P(P(B)), etc.*

De esta tercera sección, se concluye que los axiomas de la teoría de conjuntos deben sufrir algunas modificaciones, pues, como están hasta el momento, conducen a muchos disparates. Otra inferencia que se desprende de esta sección es que los conjuntos de conjuntos no son de mucha ayuda a la matemática; ni siquiera para generar a los números naturales. En efecto, algunos autores nos dicen que los naturales se pueden generar de la siguiente manera

A es un conjunto y s(A) es el sucesor de A tal que $s(A) = A \cup \{A\}$. Si $0 = \varnothing$, entonces

$0 = \varnothing$.

$1 = s(0) = \varnothing \cup \{\varnothing\} = \{\varnothing\} = \{0\}$.

$2 = s(1) = 1 \cup \{1\} = \{0\} \cup \{1\} = \{0, 1\}$.

De lo anterior se tiene que cada natural es un conjunto y las siguientes formas son

$3 = \{0, 1, 2\}$; $4 = \{0, 1, 2, 3\}$; etc.

Sea ahora A = $\{a, b\}$ el conjunto de dos estudiantes cuyas notas, del 1 al 5, están en el conjunto B = $\{2, 3\}$. Como A y B son equipotentes, existe una biyección entre A y B. supongamos que

$$f\text{:A}\to\text{B} \;/\; f(a) = 2 \text{ y } f(b) = 3. \qquad (1)$$

Como estamos conjeturando que los naturales son conjuntos, podemos formar la unión de 2 y 3, es decir

$$f(a) \cup f(b) = 2 \cup 3. \qquad (2)$$

Pero $2 \cup 3 = \{0, 1\} \cup \{0, 1, 2\} = \{0, 1, 2\} = 3 = f(b)$. Luego, por (2)

$$f(a) \cup f(b) = f(b). \qquad (3)$$

Como f es biyectiva, existe la función inversa y, al aplicarla en (3) se obtiene

$$a \cup b = b \text{ (un estudiante es subconjunto del otro).} \quad (4)$$

Pero, más aún. Sea N el conjunto de los naturales y supongamos que

$$\forall \text{X} \in \text{P(N)}, f(\text{X}) = \min(\text{X}). \qquad (1)$$

Entonces, por (1)

$$f(\{1, 2\}) = 1; f(\{1\}) = 1; f(\{2\}) = 2. \qquad (2)$$

Por (2)

$$f(\{1, 2\}) = f(\{1\} \cup \{2\}) = f(\{1\}) \cup f(\{2\}). \qquad (3)$$

Ahora, por (3) y (2) tenemos

$$1 = 1 \cup 2. \qquad (4)$$

La igualdad (4), además de ser un absurdo, viola el hecho de ser $2 = \{0, 1\}$ y $1 = \{0\}$.

De lo anterior se tiene que al aceptar que los números naturales son conjuntos, se obtienen barbaridades como las dadas en las igualdades (4). Por lo tanto, si los conjuntos de conjuntos no nos sirven ni siquiera para generar a los naturales, entonces no es mucho lo que aportan a la matemática. Sin embargo, ellos existen y, por el momento (ya los descartaremos), permiten establecer los conjuntos con un número infinito de elementos.

4. Razón para Descartar a los Conjuntos de Partes

Veamos de inmediato el motivo incuestionable por el cual los conjuntos de partes deben ser descartados de nuestra teoría de conjuntos. Supongamos que A y B son dos conjuntos infinitos cualesquiera tales que A es subconjunto propio de B. Sea $\lambda \in B$ y $\lambda \notin A$. Entonces en P(B) existen conjuntos binarios, ternarios, etc., que contienen a λ, mientras que en A ningún conjunto contiene a dicho elemento. Por lo tanto, podemos probar el siguiente

Teorema

Sean A y B dos conjuntos infinitos tales que A es subconjunto propio de B. Entonces, $\forall f{:}P(A) \to P(B)$, f no es sobreyectiva.

Demostración

Supongamos, por un momento, que f es sobreyectiva. Es decir

$$A \subset B,\ B \not\subset A,\ f{:}P(A) \to P(B) \wedge f \text{ sobreyectiva.} \qquad (1)$$

Sabemos que $\exists\lambda \in B$ y $\lambda \notin A$, por lo que

$$\forall\{x, \lambda\} \in P(B),\ \exists\{x, y\} \in P(A) \,/\, f(\{x, y\}) = \{x, \lambda\}. \qquad (2)$$

Por (2), existen muchos $H \in P(A)$ y $H \not\subset f(H)$. Luego, podemos hacer

$$C = \bigcup_{H \in P(A)} H \,/\, H \not\subset f(H) \text{ y } C \in P(B). \qquad (3)$$

Por (1) y (3)

$$\exists D \in P(A) \,/\, f(D) = C. \qquad (4)$$

Ahora, parodiando a Cantor, probaremos que $D \subset C$ y $D \not\subset C$. En efecto

$$D \subset C \wedge f(D) = C \to D \subset f(D) \wedge C = \bigcup_{H \in P(A)} H \,/\, H \not\subset f(H) \to D \not\subset C. \qquad (5)$$

$$D \not\subset C \wedge f(D) = C \to D \not\subset f(D) \wedge C = \bigcup_{H \in P(A)} H \,/\, H \not\subset f(H) \to D \subset C. \qquad (6)$$

Como (5) y (6) son contradicciones que se generan al suponer que f es sobreyectiva, se concluye que esto es falso y, por tanto

$$\forall f{:}P(A) \to P(B) \,/\, A \subset B \text{ y } B \not\subset A,\ f \text{ no es sobreyectiva.}$$ ♦

Analice el lector al teorema anterior y notará que, por los cuatro puntos cardinales, dicho teorema es inobjetable. Sin embargo, veamos lo que sucede si la demostración anterior se la aplicamos al conjunto P(A) en sí mismo con A = {1, 2} y la función

$$f(x) = \begin{Bmatrix} x + 1, & si\ x = 1 \\ x - 1, & si\ x = 2 \end{Bmatrix}.$$

Con la función anterior y el conjunto A = {1, 2}, se tiene

$$f: P(A) \rightarrow P(A) \text{ y } f(x) = \begin{cases} x+1, & si\ x = 1 \\ x-1, & si\ x = 2 \end{cases}. \tag{1}$$

Por (1), f es una biyección y como $f(\{1\}) = \{f(1)\} = \{2\}$, se tiene

$$P(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}, f(\{1\}) = \{2\} \text{ y } f(\{2\}) = \{1\}. \tag{2}$$

Por (2)

$$\{1\} \not\subset f(\{1\}); \{2\} \not\subset f(\{2\}); \{1, 2\} = \{1\} \cup \{2\}. \tag{3}$$

Hagamos B = $\bigcup_{H_i \in P(A)} H_i$ / $H_i \not\subset f(H_i)$. Por (3), $H_1 = \{1\}$, $H_2 = \{2\}$, $H_3 = \{1, 2\}$. Así, B = {1, 2} = H_3 y $H_3 \subset f(H_3)$, ya que $f(\{1, 2\} = f(\{1\} \cup \{2\}) = f(\{1\}) \cup f(\{2\}) = \{2, 1\}$, luego

$$H_3 \subset f(H_3) \wedge B = \bigcup_{H_i \in P(A)} H_i \ / \ H_i \not\subset f(H_i) \rightarrow H_3 \not\subset B = H_3. \tag{a}$$

Ahora en (a) tenemos una contradicción. Pero esta contradicción ha surgido de un encadenamiento que está bien sustentado y no es reversible (no surgió de suponer algo falso siendo verdad). Veamos lo que tenemos acá. B es la unión de todos aquellos $H_i \in P(A)$ que no están incluidos en su imagen. H_3 sí está incluido en su imagen, por tanto, H_3 no puede estar en B. Pero B = H_3 y, entonces, $H_3 \not\subset B = H_3$. Ahora bien, si $H_3 \not\subset f(H_3) = H_3 = B$, entonces, por definición de B, se tiene que $H_3 \subset B = H_3$. En consecuencia, esto no es una contradicción reversible sino una ***paradoja,*** exactamente igual a la paradoja de ***B. Russel***, que surge por la existencia de los conjuntos de partes al aplicarles una función. Por lo tanto, dichos conjuntos deben ser ***descartados*** del paraíso de Cantor.

4.1 Una Posible Corrección a la Axiomática de la Teoría de Conjuntos

De todo lo visto con anterioridad, se desprende que será bastante difícil que se pueda dar una axiomática a la teoría de conjuntos la cual involucre a los conjuntos de primera especie (Rg = 1) y descarte a los conjuntos de partes, o conjuntos de conjuntos (Rg >1). Acá, con mucha modestia, se presenta una posible solución a dicho conflicto, la cual consiste en suprimir los conjuntos de conjuntos y, para NBG por ejemplo, incluir los siguientes postulados:

1) *Los objetos perfectamente determinados (opd) no son conjuntos.*
2) *Un conjunto es una colección de objetos (opd).*
3) *La cantidad de elementos (opd) que posee un conjunto puede ser: finita, infinita o*

transfinita.

Así, el axioma de elección tal vez no sea necesario. Por otra parte, cualquier colección de conjuntos podrá tener un nombre estipulado, pero no el calificativo de *conjunto*. Además, con los tres postulados anteriores, los axiomas de NBG, sin el de infinitud, son válidos excepto el de ***la unión*** que se puede cambiar por el siguiente

$$(\forall XY,\exists Z) \,/\, \forall xy(x\in X\wedge y\in Y \rightarrow x,y\in Z).$$

Todo lo anterior no es más que la humilde sugerencia de un inexperto en axiomáticas.

5. El Error de Cantor y Fin de la Hipótesis del Continuo

De acuerdo a lo visto en la sección anterior, Cantor cometió un error al demostrar su teorema llamado teorema de Cantor. Pues, en éste, supuso una función entre un conjunto A, de primera especie, y su conjunto de partes P(A), de segunda especie, cosa que no debe existir, y demostró que dicha función no era sobreyectiva. Ahora bien, en dicha demostración están inmersos los absurdos encontrados anteriormente, por lo que esta demostración no es correcta en nuestra teoría de conjuntos. Sin embargo, si las funciones entre conjuntos de segunda especie, o de rango dos, pudiesen existir, entonces Cantor debió proceder de la siguiente manera

Sea $A = \{x \,/\, x\in A\}$ un conjunto de primera especie con infinitos elementos.

Sea $B = \{\{x\} \,/\, x\in A\}$ un conjunto de segunda especie donde sus elementos son los conjuntos unitarios cuya unión infinita es A. Así se tiene que $\#A = \#B$.

Si existiera una sobreyección de B hacia P(A), entonces un conjunto binario cualquiera de P(A) sería generado por un unitario de B.

Supongamos por un momento que

$\exists\, f\colon B\rightarrow P(A) \wedge f$ es sobreyectiva. Sea

$$f(\{x\}) = \{y, z\}\in P(A). \qquad (1)$$

Por (1)

$$f(\{x\}) = \{y\} \cup \{z\}\ (\{y\}, \{z\}\in P(A)). \qquad (2)$$

Como f es sobreyectiva, existen $\{u\}, \{v\}\in B$ tales que

$$f(\{u\}) = \{y\} \text{ y } f(\{v\}) = \{z\}. \qquad (3)$$

Por (3) y (2) se tiene que

$$f(\{x\}) = f(\{u\}) \cup f(\{v\}) = f(\{u\} \cup \{v\}) = f(\{u, v\}). \quad (4)$$

Por (4) y definición de la imagen de un conjunto X cualquiera, $f(X)$

$$\{f(x)\} = \{f(u), f(v)\}. \quad (5)$$

Y por (5), un conjunto unitario es igual a uno binario, lo que es un absurdo. Como este absurdo provino de suponer a f sobreyectiva, se concluye que no existe ninguna sobreyección entre B y P(A). Como #A = #B, entonces $\#A = \#B < \#P(A) = 2^{\#A}$. Veamos, a continuación, el fin de la hipótesis del continuo; donde A y B serán de primera especie.

5.1. Teorema 1 (equipotencia e inyecciones)

Si #A = #B y f:A→B es inyectiva, entonces f es sobreyectiva.

Demostración

Por hipótesis

$$f{:}A \to B \wedge f \text{ inyectiva}. \quad (1)$$

Como #A = #B, entonces, existe una biyección de A en B. Es decir

$$\exists g{:}A \to B \ / \ g(A) = B \wedge g \text{ inyectiva}. \quad (2)$$

Ahora, denotaremos por x_g a los elementos de A para aplicarles g, y por x_f para aplicarles f. Como $f(A) \subseteq g(A) = B$, entonces

$$\forall x_f \in A \wedge f(x_f) = x_B \in B, \exists x_g \in A \wedge g(x_g) = x_B. \quad (3)$$

Por (3) se tiene que

$$g(x_g) = f(x_f),\ g(y_g) = f(y_f),\ g(z_g) = f(z_f), \text{ etc.} \quad (4)$$

Sea h la función de A en sí mismo que a cada x_g lo convierte en un x_f, es decir

$$h{:}A \to A \ / \ h(x_g) = x_f \Leftrightarrow g(x_g) = f(x_f). \quad (5)$$

Esta h es biyectiva y se le puede llamar ***función vinculante de f y g***. Veamos

Sobreyectividad

$$\forall x_f \in A \wedge f(x_f) = x_B \in B, \exists x_g \in A \wedge g(x_g) = x_B \to g(x_g) = f(x_f)$$
$$\to h(x_g) = x_f \text{ (por (5)). } (6)$$

Inyectividad

$$\forall x_g, y_g \in A \wedge h(x_g) = h(y_g) \to x_f = y_f \text{ (por (5))}$$
$$\to f(x_f) = f(y_f) \text{ (porque } f \text{ es función)}$$
$$\to g(x_g) = g(y_g) \text{ (por (5))}$$

$\rightarrow x_g = y_g$ (porque g es inyectiva). (7)

Por (6) y (7), h es biyectiva. Por (5) se tiene

$$h(x_g) = x_f,\ \forall x_g,\ x_f \in A \wedge g(x_g) = f(x_f). \qquad (8)$$

Aplicando f a ambos miembros de (8), se tiene

$$f(h(x_g)) = f(x_f) = g(x_g),\ \forall x_g,\ x_f \in A. \qquad (9)$$

Por (9), ser $f_o h$:A→B y g:A→B, se tiene

$$g(x_g) = f_o h(x_g),\ \forall x_g \in A. \qquad (10)$$

Como g(A) = B y h(A) = A, entonces por (10)

$$B = g(A) = f(h(A)) = f(A). \qquad (11)$$

Por (11) y ser f:A→B

f es sobreyectiva. ♦

Observe que en esta demostración, h es la biyección que vincula a las funciones f y g en la forma $g = f_o h$ y $f = g_o h^{-1}$. Así, si f = g, h(x) = I(x) = x.

5.2. Teorema 2 (equipotencia y sobreyecciones)

Si #A = #B y f:A→B es sobreyectiva, entonces f es inyectiva.

Demostración

Como #A = #B, entonces, por equipotencia de conjuntos

$$\exists g:A\rightarrow B \ /\ g(A) = B \wedge g \text{ es inyectiva}. \qquad (1)$$

Supongamos, como ***hipótesis temporal,*** que f no es inyectiva. Es decir

$$\#A = \#B,\ f:A\rightarrow B,\ f(A) = B \wedge \boldsymbol{f} \textbf{ no es inyectiva}. \qquad (2)$$

Como f no es inyectiva, el conjunto A se puede descomponer en dos subconjuntos, A’ y C, tales que f es inyectiva en A’, y C contiene todos los elementos de A que generan la misma imagen que algún elemento de A’. Es decir, si existen pares, tríadas, tétradas, etc., de elementos de A que generan la misma imagen $x_B \in B$, entonces dejamos uno de ellos en A’ y los otros en C. Así se tiene que $f(C) \subset f(A')$. Luego

$$A = A' \cup C. \qquad (3)$$

Por (3)

$$g(A) = g(A' \cup C) = g(A') \cup g(C) = B. \qquad (4)$$

Como g(C) no es vacío (f se supone no inyectiva) y $g(C) \subset B$, entonces, por (4)

$$g(A') = B - g(C) \neq B. \qquad (5)$$

Por otra parte, al aplicar f en (3), se tiene

$$f(A) = f(A') \cup f(C) = B. \qquad (6)$$

Como $f(C) \subset f(A')$, entonces, $f(A') \cup f(C) = f(A')$. Luego, por (6)

$$f(A) = f(A') = B. \qquad (7)$$

Ahora, al aplicar f:A'→B y usando (7), se tiene (ahora no hay dos elementos en A' que siendo distintos generen la misma imagen)

$$f:A' \to B,\ f(A') = B \text{ y } f \text{ es inyectiva.} \qquad (8)$$

Por (8), A' y B son equipotentes y, por tanto, al aplicar g:A'→B se tiene

$$\#A' = \#B,\ g:A' \to B \text{ y g es inyectiva.} \qquad (9)$$

Ahora, (9) y el teorema 1.1 nos dicen que g:A'→B es sobreyectiva. Es decir

$$g(A') = B. \qquad (10)$$

Como (10) y (5) son contradictorias y dicha contradicción se generó por la hipótesis temporal (2) donde se supone a f no inyectiva, se concluye que esto es falso y, por tanto

f es inyectiva. ♦

Nótese que, por los teoremas 1.1 y 1.2, se puede inferir que para dos conjuntos equipotentes, A y B, f:A→B es inyectiva si, y sólo si, es sobreyectiva. Ya esto nos permite sospechar que la hipótesis del continuo tiene que ser falsa.

5.3. Teorema 3 (de los cardinales diferentes)

Si A y B son dos conjuntos cualesquiera tales que $\# A < \# B$ y f: A → B es una función cualquiera, entonces $f(A) \neq B$.

Demostración

Por definición de función y de f(A) se tiene

$$\# f(A) \leq \# A. \qquad (1)$$

Y por hipótesis

$$\# A < \# B. \qquad (2)$$

Por (1) y (2), no puede ser: $f(A) = B$ porque sería $\#f(A) = \#B$ y se tendría

$$\#B = \# f(A) \leq \#A < \# B. \qquad (3)$$

Como (3) es absurdo, entonces

f (A) ≠ B. ♦

5.4. Teorema 4 (de las sobreyecciones no inyectivas)

Sean A y B dos conjuntos cualesquiera. Si existe una función f:A→B la cual es sobreyectiva, es decir, f(A) = B, y f es **no inyectiva**, entonces # A > # B.

Demostración:

Sea f:A→B / f (A) = B y f es **no inyectiva**.

La cardinalidad de A puede ser:

i) # A = # B; ii) # A < # B ó iii) # A > # B.

Si sucede i, entonces, como f(A) = B, por el teorema 1.2, f es inyectiva; lo que contradice a la hipótesis. Luego, no puede suceder i. Si sucede ii, el teorema 1.3 nos asegura que, para toda función f de A en B, f(A) ≠ B; y esto también contradice a la hipótesis. Por lo tanto, no puede suceder ii. Como únicamente queda la posibilidad iii, se concluye entonces que # A > # B. ♦

5.5. Teorema 5 (#Z > #N)

El cardinal de Z es mayor que el de N

Demostración:

Sea la función f:Z→N definida por:

$$f(n) = \begin{Bmatrix} n, si\ n \geq 0 \\ -n, si\ n < 0 \end{Bmatrix}.$$

En esta función se tiene que f(Z) = N, por tanto, es una función sobreyectiva y, como f (n) = f(-n) siendo n ≠ -n, ∀ n ≠ 0, dicha función es no inyectiva. Por el teorema anterior se tiene que # Z > # N. ♦

5.6. Teorema 6 (#R > #Z)

El cardinal de R es mayor que el de Z

Demostración:

Sea la función f: R → Z, definida por

$$f(x) = \begin{Bmatrix} x, si\ x\ es\ entero \\ [x], si\ x\ no\ es\ entero \end{Bmatrix}$$

Donde $[x]$ es la parte entera de x.

Acá f (R) = Z y f es no inyectiva. Luego, por el teorema 1.4, # R > # Z. ♦

Así, de una manera sencilla, se ha demostrado que la hipótesis del continuo es falsa, pues, hemos probado que # N < # Z < # R, sólo usando cardinalidad y la teoría de Cantor.

6. Conclusiones

Apreciado lector, tal vez usted sea uno de esos buenos matemáticos que ama y siente a la matemática. Por lo tanto, todo esto le parecerá que es una pesadilla de la cual despertará una vez concluya su lectura. Pero, lamentablemente no es así, pues es imposible tapar el sol con un dedo. Sin embargo, un verdadero sabio (y ustedes los matemáticos lo son) nunca debe perder su modestia y su humildad (si las tiene), pues, de perderlas, habrá perdido los adornos más hermosos de un ser humano. Por lo tanto, es necesario aceptar que hubo un fallo de nuestros matemáticos del pasado (y del presente también) siendo vuestra responsabilidad corregirlo. Ahora bien, ¿por qué sucedió todo esto y no fue posible notarlo con anterioridad? La respuesta se dará en tres partes o razones.

1) El no objetar nada de lo que un experto y distinguido matemático presenta si su demostración parece indiscutible.
2) El nefasto término denominado ***infinito*** y el dejar que éste, por obra y gracia del Espíritu Santo, arregle las cosas por allá en lo infinito (o en lo transfinito).
3) El viajar por el mundo de la matemática, una vez que se es un experto matemático (Phd), en un hermoso avión sólo disfrutando de las ramas de este hermoso árbol y escribiendo matemática muy sofisticada, pero, como me lo hizo saber un amigo cierta vez, sin detenerse a escudriñar en el suelo y debajo de las hojas donde se suelen ocultar los pequeños reptiles.

Estas son las tres razones por la cual nuestra teoría de conjuntos permaneció tanto tiempo con estos errores ocultos. Quiera Dios que esto sirva para que, en lo adelante, los matemáticos se preocupen un poquito más de esos pequeños detalles que les parecen fútiles, pero que le pueden dar albergue a grandes errores.

Para finalizar, quiero invitarles a estar pendiente de la próxima publicación, Dios mediante, de mi libro que he titulado “ELCÁLCULO MODERNO”. En éste se podrá conocer cómo, una vez superada la camisa de fuerza que significaba la hipótesis del continuo, se llega a la demostración de que el conjunto R de números reales es una progresión aritmética de razón $\frac{1}{2^{\omega}} \neq 0$, donde ω representa al último de los números naturales, por lo que todos los reales son racionales (aunque a usted le parezca imposible). También en este libro podrá disfrutar el lector cómo es posible demostrar, con mucha elegancia, los teoremas de la función inversa y otros, cuya demostración en la forma tradicional es sumamente complicada.

San Carlos, Cojedes, Venezuela. Marzo de 2011.