POLINOMIOS DE LEGENDRE - NOTAS

Carlos Enrique Núñez Rincón[1]

Los matemáticos, en lugar de simplemente utilizar un método que parece funcionar, quieren hallar una justificación para el método y una serie de condiciones que garanticen que el método funciona.

Glenn Ledder

Resumen:

El articulo que se expone, de corte divulgativo, tiene como propósito presentar de manera asequible las soluciones de las ecuaciones diferenciales de Legendre, así como un conjunto de propiedades de los polinomios de Legendre. La importancia del mismo radica en el hecho de que, los polinomios de Legendre configuran un significativo ejemplo de los polinomios ortogonales que son útiles, en el estudio de las ecuaciones de Kepler referidas al movimiento de los planetas, en el modelado en física mediante la utilización de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (EDDP) en coordenadas esférica, por ejemplo, en el estudio de los campos conservativos y no conservativos, en el estudio de la propagación de onda y propagación del calor, entre otros.

Palabras claves: Polinomio, Legendre, ecuación diferencial, solución, series de potencias, polinomio ortogonal, linealmente independiente, Función de Legendre, función generatriz, recurrencia, fórmula de Rodríguez, ortogonalidad, norma, simetría.

Abstract:

The current article, of divulging nature, has as objective to present affordable solutions of the Legendre differential equations as well as a set of properties of Legendre polynomials. Its importance stands in the fact that Legendre polynomials

---

[1] El autor del artículo es Licenciado en Matemática, egresado de la Universidad de los Andes – ULA-Venezuela. Asimismo, es Magíster y Doctor en Ciencias. Actualmente es Profesor en la Categoría de Titular, adscrito al Departamento de Matemática y Física de la Universidad Nacional Experimental del Táchira-UNET, Táchira-Venezuela. cnunezr@gmail.com

form a significant case of orthogonal polynomials useful in the study of Kepler's equations relating to the motion of the planets, in physics modeling using differential equations in partial derivatives in spherical coordinates, in the study of conservative and non-conservative fields, in the study of wave and heat propagation, among others.

Key words: Polynomial, Legendre, differential equation, solution, power series, orthogonal polynomial, linearly independent, Legendre function, generatrix function, recurrence, Rodríguez formula, orthogonality, norm, symmetry.

Los Polinomios de Legendre, llamadas así en honor al matemático francés Adrien-Marie Legendre[2] (1752-1833), son las soluciones de las Ecuaciones Diferenciales de Legendre, cuya forma canónica viene dada por

$$\left(1-x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+\lambda y=0 \quad (1) \quad \text{ó} \quad \frac{d}{dx}\left(\left(1-x^2\right)\frac{dy}{dx}\right)+\lambda y=0 \quad (1´)$$

donde su solución general es la combinación lineal de dos soluciones linealmente independientes, esto es

$$y(x)=Ay_1(x)+By_2(x)$$

Para el caso particular $\lambda=n(n+1)$, donde $n\in\mathbb{N}=\{0.1,2,\cdots\}$, su solución es un polinomio de orden *n*, luego su solución general es de la forma

$$y(x)=AP_n(x)+BQ_n(x)$$

Puesto que, este tipo de ecuación diferencial de segundo orden tienen una multiplicidad de aplicaciones en el campo de la ingeniería, la química y la física (por lo general aparecen en ciertos problemas que se resuelven en coordenadas polares y en coordenadas esférica), desarrollaremos un procedimiento para obtener sus soluciones.

[2] Su legado científico en: http://es.wikipedia.org/wiki/Adrien-Marie_Legendre

Para hallar la solución de la ecuación de Legendre, consideremos el caso particular $\lambda = n(n+1)$, donde $n \in \mathbb{N}$, entonces sustituyendo en (1), obtenemos

$$\left(1-x^2\right) y'' - 2xy' + n(n+1)\, y = 0 \qquad (2)$$

Ahora, utilizamos el método de series de potencia, específicamente una serie de potencias centrada en 0, esto es

$$y = f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \qquad (3)$$

así, obtenemos una familia de polinomios ortogonales, llamados Polinomios de Legendre, generados por las soluciones de la ecuación.

Derivando (3) y sustituyendo en (2), obtenemos

$$\left(1-x^2\right)\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} - 2x\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} + n(n+1)\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} - x^2\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} - 2x\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} + n(n+1)\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0 \qquad (4)$$

puesto que

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)a_{k+2} x^k \qquad (5)$$

$$-x^2\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} = -x^2\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^k x^{-2}$$

$$= -\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^k = -\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)a_k x^k \qquad (6)$$

$$-2x\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} = -2x\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^k x^{-1} = -2\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^k = -2\sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^k \qquad (7)$$

sustituyendo (5), (6) y (7) en (4), obtenemos

Polinomios de Legendre – Notas

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)a_{k+2}x^k-\sum_{k=0}^{\infty}k(k-1)a_kx^k-2\sum_{k=0}^{\infty}ka_kx^k+n(n+1)\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k=0$$

aplicando las propiedades de la sumatoria y factorizando, obtenemos

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left((k+2)(k+1)a_{k+2}-k(k-1)a_k-2ka_k+n(n+1)a_k\right)x^k=0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left((k+2)(k+1)a_{k+2}+\left(n(n+1)-k(k+1)\right)a_k\right)x^k=0 \qquad (8)$$

la ecuación (8) se verifica si los coeficientes de x^k son igual a 0, esto es

$$(k+2)(k+1)a_{k+2}+\left(n(n+1)-k(k+1)\right)a_k=0$$

Nótese que para $k=-2$, a_0 asume cualquier valor; de igual manera para $k=-1$, a_1 asume cualquier valor.

Ahora despejando a_{k+2}, obtenemos

$$a_{k+2}=-\frac{n(n+1)-k(k+1)}{(k+2)(k+1)}a_k \quad \therefore \quad k=0,1,2,3,\cdots \qquad (9)$$

En (9), hagamos las siguientes consideraciones:

i) Sean $a_0\neq 0$ y $a_1=0$ entonces

$$a_2=-\frac{n(n+1)}{2.1}a_0=-\frac{n(n+1)}{2!}a_0,$$

$$a_4=-\frac{n(n+1)-2.3}{4.3}a_2=\frac{n(n+1)\left(n(n+1)-2.3\right)}{4.3.2!}a_0=\frac{n(n+1)\left(n(n+1)-2.3\right)}{4!}a_0,$$

$$a_6=-\frac{n(n+1)-4.5}{6.5}a_4=-\frac{n(n+1)\left(n(n+1)-2.3\right)\left(n(n+1)-4.5\right)}{6!}a_0,\cdots$$

Nótese, que para *k* impar: $a_1=a_3=a_5=\cdots=0.$

Luego, (3) se transforma en

$$y_1 = f_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} x^{2k} = a_0 x^0 - \frac{n(n+1)}{2!} a_0 x^2 + \frac{n(n+1)\big(n(n+1)-2.3\big)}{4!} a_0 x^4 - \cdots$$

$$= \left(1 - \frac{n(n+1)}{2!} x^2 + \frac{n(n+1)\big(n(n+1)-2.3\big)}{4!} x^4 - \cdots\right) a_0$$

que es una solución *par* de la ecuación de Legendre.

ii) Ahora consideremos $a_0 = 0$ y $a_1 \neq 0$ entonces

$$a_3 = -\frac{n(n+1)-1.2}{3.2} a_1 = -\frac{n(n+1)-1.2}{3!} a_1$$

$$a_5 = -\frac{n(n+1)-3.4}{5.4} a_3 = \frac{\big(n(n+1)-1.2\big)\big(n(n+1)-3.4\big)}{5!} a_1$$

$$a_7 = -\frac{n(n+1)-5.6}{7.6} a_5 = -\frac{\big(n(n+1)-1.2\big)\big(n(n+1)-3.4\big)\big(n(n+1)-5.6\big)}{7!} a_1, \cdots$$

Nótese, que para k par: $a_0 = a_2 = a_4 = \cdots = 0$.

Luego, (3) se transforma en

$$y_2 = f_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} x^{2k+1}$$

$$= a_1 x - \frac{n(n+1)-1.2}{3!} a_1 x^3 + \frac{\big(n(n+1)-1.2\big)\big(n(n+1)-3.4\big)}{5!} a_1 x^5 - \cdots$$

$$= \left(x - \frac{n(n+1)-1.2}{3!} x^3 + \frac{\big(n(n+1)-1.2\big)\big(n(n+1)-3.4\big)}{5!} x^5 - \cdots\right) a_1$$

que es una solución *impar* de la ecuación de Legendre.

Ya que, estas dos soluciones son linealmente independientes, por intermedio de ellas obtenemos la solución general de la ecuación de Legendre

$$y(x) = A y_1(x) + B y_2(x).$$

Polinomios de Legendre – Notas

Las series y_1 y y_2, para $n \notin \mathbb{Z}$, convergen en $|x|<1$, pero divergen en $x=\pm 1$. Para $n \in \mathbb{N}$, una de estas series finaliza, es decir, es un polinomio y la otra converge en $|x|<1$, pero diverge en $x=\pm 1$.

Puesto que, por lo general $n=0,1,2,3,\cdots$, seguidamente consideramos algunas soluciones polinómicas:

$$1, \quad x, \quad 1-3x^2, \quad x-\frac{5}{3}x^3, \ \cdots$$

luego, una solución de la ecuación de Legendre es un polinomio de grado *n*.

Hallemos con precisión estas soluciones polinómicas, para ello consideremos la ecuación obtenida de (8), esto es

$$(k+2)(k+1)a_{k+2}+\big(n(n+1)-k(k+1)\big)a_k=0 \ \therefore \ n \in \mathbb{N}$$

haciendo *k*: $n-2, n-4, n-6, \cdots, n-2i \ \therefore \ i=1,2,3,\cdots$, obtenemos

$$\begin{aligned}
&n(n-1)a_n=-2(2n-1)a_{n-2}=-2.1(2n-1)a_{n-2}\\
&(n-2)(n-3)a_{n-2}=-4(2n-3)a_{n-4}=-2.2(2n-3)a_{n-4}\\
&(n-4)(n-5)a_{n-4}=-6(2n-5)a_{a-6}=-2.3(2n-5)a_{a-6}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&(n-2i+2)(n-2i+1)a_{n-2i+2}=-2.i(2n-2i+1)a_{n-2i}
\end{aligned}$$

efectuando el producto, miembro a miembro, de estas igualdades, obtenemos

$$n(n-1).\cdots.(n-2i+1)a_n=(-1)^i\,2^i\,i!(2n-1)(2n-3).\cdots.(2n-2i+1)a_{n-2i} \quad (10)$$

utilizando la notación factorial y sus propiedades, tenemos

$$n(n-1).\cdots.(n-2i+1)=\frac{n(n+1).\cdots.(n-2i+1)(n-2i)!}{(n-2i)!}=\frac{n!}{(n-2i)!} \qquad (11)$$

$$(2n-1)(2n-3).\cdots.(2n-2i+1)=$$

$$=\frac{2n(2n-1).\cdots.(2n-2i+1)(2n-2)(2n-4).\cdots.(2n-2i+2)(2n-2i)!}{2n(2n-2)(2n-4).\cdots.(2n-2i+2)(2n-2i)!}$$

$$=\frac{(2n)!}{2^i n(n-1)(n-2).\cdots.(n-i+1)(2n-2i)!}=\frac{(2n)!(n-i)!}{2^i n!(2n-2i)!} \qquad (12)$$

sustituyendo (11) y (12) en (10), obtenemos

$$\frac{n!}{(n-2i)!}a_n=(-1)^i 2^i i!\frac{(2n)!(n-i)!}{2^i n!(2n-2i)!}a_{n-2i}$$

luego

$$a_{n-2i}=(-1)^i\frac{(n!)^2(2n-2i)!}{i!(2n)!(n-2i)!(n-i)!}a_n$$

sea $a_n=\dfrac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$, esto es posible, puesto que no hay alguna condición sobre a_n entonces

$$a_{n-2i}=(-1)^i\frac{(2n-2i)!}{2^n i!(n-2i)!(n-i)!}$$

Como se dijo anteriormente, si n es par ($n = 2j$), se obtiene una solución par, es decir un polinomio par y si n es impar ($n = 2j + 1$), se obtiene una solución impar, es decir un polinomio impar. En cualesquiera de las dos alternativas, la solución de la ecuación de Legendre se denomina polinomio de Legendre de grado n y viene dada por

$$y=P_n(x)=\sum_{i=0}^{j}(-1)^i\frac{(2n-2i)!}{2^n i!(n-2i)!(n-i)!}x^{n-2i}$$

Polinomios de Legendre – Notas

Desarrollando $P_n(x)$, utilizando las propiedades del factorial y factorizando obtenemos

$$P_n(x)=\sum_{i=0}^{j}(-1)^i\frac{(2n-2i)!}{2^n i!(n-2i)!(n-i)!}x^{n-2i}$$

$$=\frac{(2n)!}{2^0.0!n!n!}x^n-\frac{(2n-2)!}{2^1.1!(n-2)!(n-1)!}x^{n-2}+\frac{(2n-4)!}{2^2.2!(n-4)!(n-2)!}x^{n-4}$$

$$-\frac{(2n-6)!}{2^3.3!(n-6)!(n-3)!}x^{n-6}+\frac{(2n-8)!}{2^4.4!(n-8)!(n-4)!}x^{n-8}$$

$$-\cdots+(-1)^j\frac{(2n-2j)!}{2^n j!(n-2j)!(n-j)!}x^{n-2j}$$

$$P_n(x)=\frac{(2n)!}{2^0.0!(n!)^2}x^n-\frac{(2n)!n(n-1)}{2^1.1!.2(n!)^2(2n-1)}x^{n-2}+\frac{(2n)!n(n-1)(n-2)(n-3)}{2^2.2!.2^2(n!)^2(2n-1)(2n-3)}x^{n-4}$$

$$-\frac{(2n)!n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{2^3.3!.2^3(n!)^2(2n-1)(2n-3)(2n-5)}x^{n-6}$$

$$+\frac{(2n)!n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)}{2^4.4!.2^4(n!)^2(2n-1)(2n-3)(2n-5)(2n-7)}x^{n-8}-\cdots$$

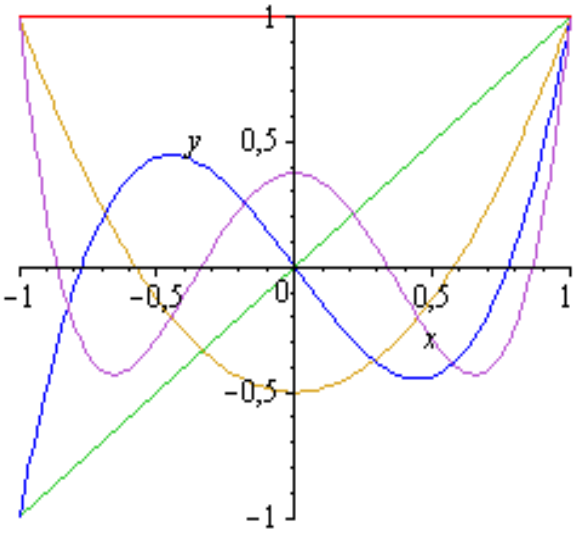
$$=\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}\left(x^n-\frac{n(n-1)}{2.1!(2n-1)}x^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2^2.2!(2n-1)(2n-3)}x^{n-4}\right.$$

$$-\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{2^3.3!(2n-1)(2n-3)(2n-5)}x^{n-6}$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)}{2^4.4!(2n-1)(2n-3)(2n-5)(2n-7)}x^{n-8}-\cdots\Bigg).$$

Ahora, si podemos dar con precisión las soluciones polinómicas de la ecuación de Legendre, así como el trazado de sus gráficas

Ecuación de Legendre	*Solución polinómica*
$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0$	$P_n(x)=\sum_{i=0}^{j}(-1)^i\frac{(2n-2i)!}{2^n i!(n-2i)!(n-i)!}x^{n-2i}$
Para $n=0$: $(1-x^2)y''-2xy'=0$	$P_0(x)=1$
Para $n=1$: $(1-x^2)y''-2xy'+2y=0$	$P_1(x)=x$
Para $n=2$: $(1-x^2)y''-2xy'+6y=0$	$P_2(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}$
Para $n=3$: $(1-x^2)y''-2xy'+12y=0$	$P_3(x)=\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x$
Para $n=4$: $(1-x^2)y''-2xy'+20y=0$	$P_4(x)=\frac{35}{8}x^4-\frac{15}{4}x^2+\frac{3}{8}$



Generada con Maple 12

Polinomios de Legendre – Notas

Para obtener $Q_n(x)$, consideremos la ecuación diferencial de Legendre

$$\left(1-x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+n(n+1)\,y=0 \qquad (12)$$

en esta ecuación hacemos $s=\dfrac{1}{x}$, luego $x=\dfrac{1}{s}$, entonces

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{ds}\frac{ds}{dx}=-x^{-2}\frac{dy}{ds}=-s^2\frac{dy}{ds}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{ds}\left(-s^2\frac{dy}{ds}\right)\frac{ds}{dx}=\left(-2s\frac{dy}{ds}-s^2\frac{d^2y}{ds^2}\right)\left(-s^2\right)=s^4\frac{d^2y}{ds^2}+2s^3\frac{dy}{ds}$$

sustituyendo estas expresiones en 12, obtenemos

$$\left(1-\frac{1}{s^2}\right)\left(s^4\frac{d^2y}{ds^2}+2s^3\frac{dy}{ds}\right)-2\frac{1}{s}\left(-s^2\frac{dy}{ds}\right)+n(n+1)\,y=0$$

$$\Rightarrow s^4\frac{d^2y}{ds^2}+2s^3\frac{dy}{ds}-s^2\frac{d^2y}{ds^2}-2s\frac{dy}{ds}+2s\frac{dy}{ds}+n(n+1)\,y=0$$

$$\Rightarrow s^4\frac{d^2y}{ds^2}-s^2\frac{d^2y}{ds^2}+2s^3\frac{dy}{ds}+n(n+1)\,y=0 \qquad (13)$$

$$\Rightarrow \left(s^2-1\right)\frac{d^2y}{ds^2}+2s\frac{dy}{ds}+\frac{n(n+1)}{s^2}\,y=0 \qquad (14)$$

Ahora consideremos la serie de potencias

$$y=Q_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k s^{k+p} \quad (a_0\neq 0) \qquad (15)$$

derivado y sustituyendo en (13), obtenemos

$$s^4\sum_{k=0}^{\infty}a_k(k+p)(k+p-1)s^{k+p-2}-s^2\sum_{k=0}^{\infty}a_k(k+p)(k+p-1)s^{k+p-2}$$

$$+2s^3\sum_{k=0}^{\infty}a_k\left(k+p\right)s^{k+p-1}+n\left(n+1\right)\sum_{k=0}^{\infty}a_k s^{k+p}=0$$

$$\Rightarrow\sum_{k=0}^{\infty}a_k\left(k+p\right)\left(k+p-1\right)s^{k+p+2}-\sum_{k=0}^{\infty}a_k\left(k+p\right)\left(k+p-1\right)s^{k+p}$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}2a_k\left(k+p\right)s^{k+p+2}+n\left(n+1\right)\sum_{k=0}^{\infty}a_k s^{k+p}=0$$

por lo tanto

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k\left(k+p\right)\left(k+p+1\right)s^{k+p+2}-\sum_{k=0}^{\infty}a_k\left(\left(k+p\right)\left(k+p-1\right)-n\left(n+1\right)\right)s^{k+p}=0 \qquad (16)$$

de (16) obtenemos

$$a_0\left(p\left(p-1\right)-n\left(n+1\right)\right)=0 \qquad (17)$$

$$a_1\left(p\left(p+1\right)-n\left(n+1\right)\right)=0 \qquad (18)$$

$$a_k\left(k+p\right)\left(k+p+1\right)=a_{k+2}\left(\left(k+p+2\right)\left(k+p+1\right)-n\left(n+1\right)\right) \qquad (19)$$

puesto que $a_0\neq 0,$ de (17) obtenemos

$$p\left(p-1\right)-n\left(n+1\right)=0\Rightarrow\left(p-\left(n+1\right)\right)\left(p+n\right)=0$$

$$\Rightarrow p=n+1 \quad \text{ó} \quad p=-n$$

sustituyendo $p=n+1$ en (18) y (19), obtenemos

$$a_1\left(\left(n+1\right)\left(p+2\right)-n\left(n+1\right)\right)=0$$

$$\Rightarrow a_1\left(2n+n\right)=0\Rightarrow a_1=0 \quad \therefore \quad n\in\mathbb{Z}^+$$

$$a_k\left(k+n+2\right)\left(k+n+1\right)=a_{k+2}\left(\left(k+n+3\right)\left(k+n+2\right)-n\left(n+1\right)\right)$$

$$=a_{k+2}\left(k+2\right)\left(k+2n+3\right)$$

luego

$$a_{k+2} = \frac{(k+n+2)(k+n+1)}{(k+2)(k+2n+3)} a_k \qquad \therefore \quad k \in \mathbb{N} \qquad (20)$$

puesto que $a_0 \neq 0$ y $a_1 = 0$, de (20) deducimos que

$$a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = 0$$

Procediendo como en el caso anterior obtenemos los coeficientes de a_{2j}, $j \in \mathbb{N}$

$$a_{2j} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3).\cdots.(n+2j)}{2.4.\cdots.2j(2n+3)(2n+5).\cdots.(2n+2j+1)} a_0$$

haciendo $a_0 = \dfrac{n!}{1.3.\cdots.(2n+1)}$, tenemos

$$a_{2j} = \frac{(n+1)(n+2).\cdots.(n+2j)n!}{2.4.\cdots.(2j).1.3.5.\cdots.(2n+2j+1)} = \frac{2^n (n+2j)!(n+j)!}{j!(2n+2j+1)!} \qquad (21)$$

sustituyendo $p = n+1$ y la expresión (21) en (15) obtenemos la solución de la ecuación (14), esto es

$$y = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^n (n+2j)!(n+j)!}{j!(2n+2j+1)!} s^{2j+n+1} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^n (n+2j)!(n+j)!}{j!(2n+2j+1)!} \frac{1}{x^{n+1}} \frac{1}{x^{2j}} = Q_n(x).$$

Estas soluciones, en conjunto, se denominan, usualmente, Funciones de Legendre. En particular, $P_n(x)$ se denomina Función de Legendre de primera clase y $Q_n(x)$ Función de Legendre de segunda clase.

Finalmente, tenemos la solución general de la Ecuación de Legendre, esto es

$$y(x) = AP_n(x) + BQ_n(x)$$

Puesto que, los polinomios de Legendre configuran un significativo ejemplo de los polinomios ortogonales que son útiles por ejemplo en el estudio de las

ecuaciones de Kepler referidas al movimiento de los planetas, en el modelado en física con ecuaciones diferenciales parciales en coordenadas esférica, por ejemplo en el estudio de los campos conservativos y no conservativos, en el estudio de la propagación de onda y propagación del calor, entre otros; a continuación presentaremos algunas propiedades de los polinomios de Legendre.

i) ***Función generatriz para los polinomios de Legendre***

$$\frac{1}{\sqrt{1-2sx+s^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)s^n \qquad (22)$$

Con frecuencia se definen los polinomios de Legendre con esta fórmula.

Demostración

Desarrollando el lado izquierdo de (22) de manera binomial, obtenemos

$$\frac{1}{\sqrt{1-2sx+s^2}}=\left(1-2s\left(x-\frac{s}{2}\right)\right)^{-1/2}$$

$$=\sum_{h=0}^{\infty}\frac{(-1/2)(-1/2-1)(-1/2-2).\cdots.(-1/2-h+1)}{h!}2^h(-1)^h s^h\left(x-\frac{s}{2}\right)^h \qquad (23)$$

puesto que

$$\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right).\cdots.\left(-\frac{1}{2}-h+1\right)=\frac{(-1)^h(2h)!}{2^{2h}h!}$$

$$\left(x-\frac{s}{2}\right)^h=\sum_{i=0}^{h}\frac{h!}{i!(h-i)!}x^{h-i}\left(-\frac{s}{2}\right)^i$$

sustituyendo en (23), obtenemos

$$\frac{1}{\sqrt{1-2sx+s^2}}=\sum_{h=0}^{\infty}\frac{\frac{(-1)^h(2h)!}{2^{2h}h!}}{h!}2^h(-1)^h s^h\sum_{i=0}^{h}\frac{h!}{i!(h-i)!}x^{h-i}\left(-\frac{s}{2}\right)^i$$

$$=\sum_{h=0}^{\infty}\frac{(2h)!}{2^h h!}s^h\sum_{i=0}^{h}\frac{x^{h-i}}{i!(h-i)!}\left(-\frac{s}{2}\right)^i=\sum_{h=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{h}\left(-\frac{1}{2}\right)^i\frac{(2h)!}{2^h h!}\frac{x^{h-i}}{i!(h-i)!}s^{h+i}$$

haciendo $h=n-i$ y puesto que $0\le i\le h$ entonces, $0\le i\le n/2 \;\therefore\; n=0,1,2,\cdots$

$$\frac{1}{\sqrt{1-2sx+s^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n/2}\left(-\frac{1}{2}\right)^i\frac{(2n-2i)!}{2^{n-i}i!(n-2i)!(n-i)!}x^{n-2i}\right)s^n$$

$$\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{1-2sx+s^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n/2}(-1)^i\frac{(2n-2i)!}{2^n i!(n-2i)!(n-i)!}x^{n-2i}\right)s^n=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)s^n.$$

c.q.q.d.

Observación. Recordemos que en las series de potencias dobles, con respecto a (x,s), su convergencia absoluta es condición suficiente. Por otra parte, haciendo la definición $P_n(x)=0$ para $n\in\mathbb{Z}^-$, es posible obtener de manera conveniente

$$\frac{1}{\sqrt{1-2sx+s^2}}=\sum P_n(x)s^n \;\therefore\; -\infty<n<\infty$$

ii) ***Fórmula de recurrencia para los polinomios de Legendre***

$$P_{n+1}(x)=\frac{2n+1}{n+1}xP_n(x)-\frac{n}{n+1}P_{n-1}(x)$$

Demostración

Para hacer esta demostración, consideremos la función generatriz

$$\frac{1}{\sqrt{1-2sx+s^2}}=\sum P_n(x)s^n \qquad (24)$$

derivando con respecto a s manteniendo x constante, obtenemos

$$-\frac{1}{2}\frac{(-2x+2s)}{\left(1-2sx+s^2\right)^{3/2}}=\frac{x-s}{\left(1-2sx+s^2\right)^{3/2}}=\sum nP_n(x)s^{n-1} \qquad (25)$$

Multiplicando ambos lados de (25) por $\left(1-2sx+s^2\right)$, tenemos

$$(x-s)\frac{1}{\sqrt{1-2sx+s^2}}=\left(1-2sx+s^2\right)\sum nP_n(x)s^{n-1} \qquad (26)$$

sustituyendo (24) en (26), obtenemos

$$(x-s)\sum P_n(x)s^n=\left(1-2sx+s^2\right)\sum nP_n(x)s^{n-1}$$

$$\Rightarrow x\sum P_n(x)s^n-s\sum P_n(x)s^n=\sum nP_n(x)s^{n-1}-2sx\sum nP_n(x)s^{n-1}+s^2\sum nP_n(x)s^{n-1}$$

$$\Rightarrow \sum xP_n(x)s^n-\sum P_n(x)s^{n+1}=\sum nP_n(x)s^{n-1}-\sum 2nxP_n(x)s^n+\sum nP_n(x)s^{n+1}$$

$$\Rightarrow \sum\left(xP_n(x)s^n-P_n(x)s^{n+1}\right)=\sum\left(nP_n(x)s^{n-1}-2nxP_n(x)s^n+nP_n(x)s^{n+1}\right)$$

$$\Rightarrow \sum\left(xP_n(x)-P_{n-1}(x)\right)s^n$$
$$=\sum\left((n+1)P_{n+1}(x)-2nxP_n(x)+(n-1)P_{n-1}(x)\right)s^n$$

igualamos los coeficientes de s^n, obtenemos

$$xP_n(x)-P_{n-1}(x)=(n+1)P_{n+1}(x)-2nxP_n(x)+(n-1)P_{n-1}(x)$$

$$\Rightarrow (n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP(x)_n - nP_{n-1}(x)$$

$$\Rightarrow P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1}xP_n(x) - \frac{n}{n+1}P_{n-1}(x)$$

c.q.q.d.

iii) ***Fórmula de Olindo Rodríguez para los polinomios de Legendre***

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n$$

Demostración

Aplicando el desarrollo del Binomio de Newton a la expresión $\left(x^2-1\right)^n$, obtenemos

$$\left(x^2-1\right)^n = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \frac{n!}{i!(n-i)!}\left(x^2\right)^{n-i}$$

luego

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n = \frac{d^n}{dx^n}\left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \frac{n!}{i!(n-i)!}x^{2n-2i}\right) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \frac{n!}{i!(n-i)!}\frac{d^n}{dx^n}x^{2n-2i}$$

puesto que

$$\frac{d^n}{dx^n}x^{2n-2i} = (2n-2i)(2n-2i-1)(2n-2i-2).\cdots$$

$$.(2n-2i-n+1)x^{2n-2i-n} = \frac{(2n-2i)!}{(n-2i)!}x^{n-2i}, \quad \therefore \quad n \geq 2i$$

por lo tanto

$$\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n=\frac{1}{2^n n!}\sum_{i=0}^{n/2}(-1)^i\frac{n!}{i!(n-i)!}\frac{(2n-2i)!}{(n-2i)!}x^{n-2i}$$

$$=\sum_{i=0}^{n/2}(-1)^i\frac{(2n-2i)!}{2^n i!(n-2i)!(n-i)}x^{n-2i}=P_n(x).$$

c.q.q.d.

Ejercicio. Demostrar la fórmula de recurrencia, demostrada en (*ii*), utilizando la fórmula de Olindo Rodríguez.

Ejercicio. Aplicar la fórmula de recurrencia y la fórmula de Rodríguez para obtener los polinomios $P_0(x),P_1(x),P_2(x),P_3(x),P_4(x),\cdots$

iv) ***Ortogonalidad de los polinomios de Legendre***

Esta es una valiosa propiedad, ya que configuran un sistema ortogonal sobre el intervalo $-1\le x\le 1$ con respecto al núcleo $p(x)=1$. Esto es, son ortogonales con respecto al producto escalar definido en L^2 en este intervalo.

$$\int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)\,dx=\frac{2}{2n+1}\delta_{mn}\ \therefore\ \delta_{mn}=\begin{cases}0, & si\ \ m\neq n\\ 1, & si\ \ m=n\end{cases}$$

(δ_{mn} la delta de Kronecker).

Consideremos $n\neq m$

$$P_m(x)\bullet P_n(x)=\int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)\,dx=0$$

Demostración

Para demostrar esta propiedad, utilizamos (1´) y puesto que $P_n(x)$ es una solución de la ecuación diferencial de Legendre, tenemos

$$\frac{d}{dx}\left(\left(1-x^2\right)\frac{d}{dx}P_n(x)\right)+n(n+1)P_n(x)=0 \qquad (27)$$

de manera análoga para $P_m(x)$

$$\frac{d}{dx}\left(\left(1-x^2\right)\frac{d}{dx}P_m(x)\right)+m(m+1)P_m(x)=0 \qquad (28)$$

multiplicando la expresión (27) por $P_m(x)$ y la expresión (28) por $-P_n(x)$, obtenemos

$$\frac{d}{dx}\left(\left(1-x^2\right)P_n'(x)\right)P_m(x)+n(n+1)P_n(x)P_m(x)=0$$

$$-\frac{d}{dx}\left(\left(1-x^2\right)P_m'(x)\right)P_n(x)-m(m+1)P_m(x)P_n(x)=0$$

sumando y sacando factor común, tenemos

$$\frac{d}{dx}\left(\left(1-x^2\right)P_m(x)P_n'(x)\right)-\frac{d}{dx}\left(\left(1-x^2\right)P_n(x)P_m'(x)\right)$$

$$+n(n+1)P_n(x)P_m(x)-m(m+1)P_m(x)P_n(x)=0$$

$$\frac{d}{dx}\left(\left(1-x^2\right)\left(P_m(x)P_n'(x)-P_n(x)P_m'(x)\right)\right)+\left(n(n+1)-m(m+1)\right)P_n(x)P_m(x)=0$$

integrando la expresión anterior en el intervalo $[-1,1]$, obtenemos

$$\int_{-1}^{1}\frac{d}{dx}\left(\left(1-x^2\right)\left(P_m(x)P_n'(x)-P_n(x)P_m'(x)\right)\right)dx$$

$$+\left(n(n+1)-m(m+1)\right)\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)dx=0$$

puesto que

$$\int_{-1}^{1}\frac{d}{dx}\left(\left(1-x^2\right)\left(P_m(x)P_n'(x)-P_n(x)P_m'(x)\right)\right)dx$$

$$=\left[\left(1-x^2\right)\left(P_m(x)P_n'(x)-P_n(x)P_m'(x)\right)\right]_{-1}^{1}=0$$

luego

$$\left(n(n+1)-m(m+1)\right)\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)dx=0$$

como $n\neq m$ entonces, $\left(n(n+1)-m(m+1)\right)\neq 0$

por lo tanto

$$\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)dx=0.$$

c.q.q.d.

v) ***Si consideremos*** $n=m$, ***la norma del polinomio viene dada por***

$$P_n(x)\bullet P_n(x)=\left\|P_n(x)\right\|^2=\int_{-1}^{1}P_n^2(x)dx=\frac{2}{2n+1}$$

Demostración

Como es posible observar a lo largo del tema tratado, existe multiplicidad de formas para abordar las demostraciones. Al demostrar esta propiedad, por ejemplo, podemos utilizar la fórmula de Rodríguez o la función generatriz, entre otras.

Utilizando la fórmula de Rodríguez, tenemos

$$\int_{-1}^{1}P_n^2(x)dx=\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n\right)^2dx$$

$$=\frac{1}{\left(2^n n!\right)^2}\int_{-1}^{1}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n dx$$

integrando por partes n veces, obtenemos

$$\int u^{(n)}vdx=u^{(n-1)}v-\int u^{(n-1)}v'dx=u^{(n-1)}v-u^{(n-2)}v'+\int u^{(n-2)}v''dx$$

$$=u^{(n-1)}v-u^{(n-2)}v'+u^{(n-3)}v''-u^{(n-4)}v^{(3)}+\cdots+(-1)^{n-2}u'v^{(n-2)}$$

$$+(-1)^{n-1}uv^{(n-1)}+(-1)^n\int uv^{(n)}dx$$

luego

Polinomios de Legendre – Notas

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\,dx = \frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\left(\left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(x^2-1\right)^n \frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n\right]_{-1}^{1}\right.$$

$$\left.-\int_{-1}^{1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(x^2-1\right)^n \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left(x^2-1\right)^n dx\right) = -\frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(x^2-1\right)^n \frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n dx$$

$$= -\frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\left(\left[\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\left(x^2-1\right)^n \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left(x^2-1\right)^n\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\left(x^2-1\right)^n \frac{d^{n+2}}{dx^{n+2}}\left(x^2-1\right)^n dx\right)$$

$$= \frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\left(x^2-1\right)^n \frac{d^{n+2}}{dx^{n+2}}\left(x^2-1\right)^n dx = -\cdots$$

$$+\frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}\frac{d^{n-n}}{dx^{n-n}}\left(x^2-1\right)^n \frac{d^{n+n}}{dx^{n+n}}\left(x^2-1\right)^n dx = \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}\left(x^2-1\right)^n \frac{d^{2n}}{dx^{2n}}\left(x^2-1\right)^n dx$$

puesto que

$$\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}\left(x^2-1\right)^n = \frac{d^{2n}}{dx^{2n}}\left(x^{2n} - nx^{2n-2} + \cdots\right) = (2n)!$$

$$(-1)^n\int_{-1}^{1}\left(x^2-1\right)^n dx = \int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^n dx = 2\int_{0}^{1}\left(1-x^2\right)^n dx$$

haciendo $x = sen\theta$, entonces $dx = \cos\theta d\theta$ y $0 \le \theta \le \pi/2$

$$2\int_0^{\pi/2}\left(1-sen^2\theta\right)^n \cos\theta d\theta = 2\int_0^{\pi/2}\left(\cos^2\theta\right)^n \cos\theta d\theta$$

aplicando la fórmula de Wallis

$$2\int_0^{\pi/2}\cos^{2n+1}\theta d\theta = 2\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{4}{5}\right).\cdots.\left(\frac{2n}{2n+1}\right) = 2\frac{2^n(1.2.3.\cdots.n)}{(2n+1)(2n-1).\cdots.5.3.1}$$

$$= 2\frac{2^n.n!}{(2n+1)(2n-1).\cdots.5.3.1} = 2\frac{2^n.2^n.n!.n!}{(2n+1)!} = 2\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)(2n)!}$$

por lo tanto

$$\left\|P_n(x)\right\|^2=\int_{-1}^{1}P_n^2(x)\,dx=\frac{1}{2^{2n}(n!)^2}2\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)(2n)!}(2n)!=\frac{2}{(2n+1)}$$

c.q.q.d.

vi) $P_n(1)=1,\qquad P_n(-1)=(-1)^n$

Demostración

Para demostrar esta propiedad, consideremos la fórmula de derivación de Leibniz, esto es, si $y=f(x)g(x)$, entonces $y^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x)$

sustituyendo esta fórmula en la formula de Rodríguez, obtenemos

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left((x+1)(x-1)\right)^n=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left((x+1)^n(x-1)^n\right)$$

$$=\frac{1}{2^n n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}(x+1)^n\frac{d^k}{dx^k}(x-1)^n$$

puesto que

$$\frac{d^k}{dx^k}(x-1)^n=n(n-1).\cdots.(n-k+1)(x-1)^{n-k}=\begin{cases}0, & si\ n\neq k\\ n!, & si\ n=k\end{cases}$$

por lo tanto

$$P_n(1)=\frac{1}{2^n n!}n!(1+1)^n=\frac{1}{2^n n!}n!2^n=1$$

c.q.q.d.

De manera análoga

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left((-1)\left(1-x^2\right)\right)^n=\frac{1}{2^n n!}(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}\left((1+x)^n(1-x)^n\right)$$

$$=(-1)^n\frac{1}{2^n n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}(1-x)^n\frac{d^k}{dx^k}(1+x)^n$$

puesto que

$$\frac{d^k}{dx^k}(x+1)^n = n(n-1).\cdots.(n-k+1)(1+x)^{n-k} = \begin{cases} 0, & si\ n \neq k \\ n!, & si\ n = k \end{cases}$$

por lo tanto

$$P_n(-1) = (-1)^n \frac{1}{2^n n!} n!(1-(-1))^n = (-1)^n \frac{1}{2^n n!} n! 2^n = (-1)^n$$

c.q.q.d.

Bibliografía

Ledder, G. (2006). **Differential equations: a modeling approach.** New York: McGraw-Hill, Inc.

MAPLE 12 De Waterloo. (2008). **The Maple Handbook**. USA: Maple 12 Software. Inc.

Núñez R., C. (2008). **"**Ecuaciones diferenciales en el contexto del MatLab**". Aleph Sub – Cero, Serie de Divulgación**. 2008-II(II), 20–58. Venezuela.

Núñez R., C. (2004). "Sucesiones y series en el contexto del MatLab". **Aleph Sub – Cero, Serie de Divulgación**. 2004-I(I), 21–40. Venezuela.

Simmons G. y Krantz, S. (2007). **Ecuaciones diferenciales.** México: McGraw-Hill, Interamericana.

Spiegel, M., (1994). **Ecuaciones diferenciales aplicadas**. 3ra. ed. México: Prentice Hall.

Takeuchi, Y. et al. (1978). **Ecuaciones diferenciales.** México: Limusa.

Wikipedia La enciclopedia libre. "**Adrien-Marie Legendre**". Marzo 2010. Disponible: http://es.wikipedia.org/wiki/Adrien-Marie_Legendre. [consulta: 2010, Mayo 16].