

LIMITES

Para cualquier inquietud o consulta escribir a:

quintere@hotmail.com
quintere@gmail.com
quintere2006@yahoo.com

Erving Quintero Gil
Ing. Electromecánico
Bucaramanga – Colombia
2010

Problema 1

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{(y+1)^2}{y^2+1} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{y^2+2y+1}{y^2+1}$$

Dividiendo la expresión por el mayor exponente que es y^2

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\frac{y^2}{y^2} + \frac{2y}{y^2} + \frac{1}{y^2}}{\frac{y^2}{y^2} + \frac{1}{y^2}}$$

Simplificando términos semejantes

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{y} + \frac{1}{y^2}}{1 + \frac{1}{y^2}} = \frac{1+0+0}{1+0} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{(y+1)^2}{y^2+1} = 1$$

Problema 2

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1000x}{x^2-1}$$

Dividiendo la expresión por el mayor exponente que es x^2

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1000x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}}$$

Simplificando términos semejantes

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1000}{x}}{1 - \frac{1}{x^2}} = \frac{0}{1-0} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1000x}{x^2-1} = 0$$

Problema 3

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-5x+1}{3x+7}$$

Dividiendo la expresión por el mayor exponente que es x^2

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} - \frac{5x}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{\frac{3x}{x^2} + \frac{7}{x^2}}$$

Simplificando términos semejantes

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}}{\frac{3}{x} + \frac{7}{x^2}} = \frac{1 - 0 + 0}{0 + 0} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 5x + 1}{3x + 7} = \infty \text{ (No existe el límite)}$$

Problema 4

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x + 3}{x^3 - 8x + 5}$$

Dividiendo la expresión por el mayor exponente que es x^3

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2}{x^3} - \frac{x}{x^3} + \frac{3}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3} - \frac{8x}{x^3} + \frac{5}{x^3}}$$

Simplificando términos semejantes

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^3}}{1 - \frac{8}{x^2} + \frac{5}{x^3}} = \frac{0 + 0 + 0}{1 + 0 + 0} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x + 3}{x^3 - 8x + 5} = 0$$

Problema 5

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{(2x + 3)^3 (3x - 2)^2}{x^5 + 5}$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{(2x + 3)^3 (3x - 2)^2}{x^5 + 5} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\left[(2x)^3 + 3(2x)^2(3) + 3(2x)(3)^2 + (3)^3 \right] (3x - 2)^2}{x^5 + 5}$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\left[(8x^3) + 3(4x^2)(3) + 3(2x)9 + 27 \right] (3x-2)^2}{x^5 + 5} = \frac{\left[8x^3 - 36x^2 + 54x + 27 \right] (9x^2 - 12x + 4)}{x^5 + 5}$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} = \frac{\left[72x^5 + 324x^4 + 486x^3 + 243x^2 - 96x^4 - (36)(12)x^3 - 54(12)x^2 - 27(12)x \right]}{x^5 + 5}$$

Simplificando términos semejantes

$$\lim_{y \rightarrow \infty} = \frac{\left[72x^5 + 228x^4 + 86x^3 - 261x^2 - 108x + 108 \right]}{x^5 + 5}$$

Dividiendo la expresión por el mayor exponente que es x^5

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\frac{72x^5}{x^5} + \frac{228x^4}{x^5} + \frac{86x^3}{x^5} - \frac{261x^2}{x^5} - \frac{108x}{x^5} + \frac{108}{x^5}}{\frac{x^5}{x^5} + \frac{5}{x^5}}$$

Simplificando términos semejantes

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{72 + \frac{228}{x} + \frac{86}{x^2} - \frac{261}{x^3} - \frac{108}{x^4} + \frac{108}{x^5}}{1 + \frac{5}{x^5}} = \frac{72 + 0 + 0 - 0 + 0}{1 + 0} = \frac{72}{1} = 72$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{(2x+3)^3 (3x-2)^2}{x^5 + 5} = 72$$

Problema 6

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x - 4}{\sqrt{x^4 + 1}}$$

Dividiendo la expresión por el mayor exponente que es x^2

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2}{x^2} - \frac{3x}{x^2} - \frac{4}{x^2}}{\frac{\sqrt{x^4 + 1}}{x^2}} = \frac{\frac{2x^2}{x^2} - \frac{3x}{x^2} - \frac{4}{x^2}}{\sqrt{\frac{x^4 + 1}{x^4}}} = \frac{\frac{2x^2}{x^2} - \frac{3x}{x^2} - \frac{4}{x^2}}{\sqrt{\frac{x^4}{x^4} + \frac{1}{x^4}}}$$

Simplificando términos semejantes

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{3}{x} - \frac{4}{x^2}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}} = \frac{2-0-0}{\sqrt{1+0}} = \frac{2}{\sqrt{1}} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x - 4}{\sqrt{x^4 + 1}} = 2$$

Problema 7

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 3}{x + \sqrt[3]{x}}$$

Dividiendo la expresión por el mayor exponente que es x

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x}{x} + \frac{3}{x}}{\frac{x}{x} + \frac{\sqrt[3]{x}}{x}} = \frac{\cancel{2x} + \frac{3}{x}}{\cancel{x} + 3\sqrt[3]{\frac{x}{x^3}}}$$

Simplificando términos semejantes

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{x}}{1 + 3\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}}} = \frac{2 + 0}{1 + 3\sqrt[3]{0}} = \frac{2}{1+0} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 3}{x + \sqrt[3]{x}} = 2$$

Problema 8

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{10 + x\sqrt{x}}$$

Dividiendo la expresión por el mayor exponente que es x^2

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{10 + x\sqrt{x}}{x^2}} = \frac{\cancel{2x^2}}{\frac{10}{x^2} + \frac{x\sqrt{x}}{x^2}}$$

Simplificando términos semejantes

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{10}{x^2} + \frac{\sqrt{x}}{x}} = \frac{1}{\frac{10}{x^2} + \sqrt{\frac{x}{x^2}}} = \frac{1}{\frac{10}{x^2} + \sqrt{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{0 + \sqrt{0}} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{10 + x\sqrt{x}} = \infty \text{ (No existe el límite)}$$

Problema 9

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x+1}$$

Dividiendo la expresión por el mayor exponente que es x

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x}}{\frac{x+1}{x}} = \frac{\frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x}}{\frac{x}{x} + \frac{1}{x}} = \frac{\sqrt[3]{\frac{x^2+1}{x^3}}}{\frac{x}{x} + \frac{1}{x}} = \frac{\sqrt[3]{\frac{x}{x^3} + \frac{1}{x^3}}}{\frac{x}{x} + \frac{1}{x}}$$

Simplificando términos semejantes

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}}}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{\sqrt[3]{0+0}}{1+0} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x+1} = 0$$

Problema 10

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}$$

Elevando la expresión al cuadrado.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x})^2}{\left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}\right)^2} = \frac{x}{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$$

Dividiendo la expresión por el mayor exponente que es x

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{x}}{\frac{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}{x}} = \frac{\frac{x}{x}}{\frac{x}{x} + \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{x}} = \frac{\frac{x}{x}}{\frac{x}{x} + \sqrt{\frac{x + \sqrt{x}}{x^2}}} = \frac{\frac{x}{x}}{\frac{x}{x} + \sqrt{\frac{x}{x^2} + \frac{\sqrt{x}}{x^2}}} = \frac{\frac{x}{x}}{\frac{x}{x} + \sqrt{\frac{x}{x^2} + \frac{\sqrt{x}}{x^4}}}$$

Simplificando términos semejantes

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}}} = \frac{1}{1 + \sqrt{0 + \sqrt{0}}} = \frac{1}{1 + \sqrt{0+0}} = \frac{1}{1 + \sqrt{0}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} = 1$$

Problema 11

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1}$$

Reemplazando el valor de (-1)

$$= \frac{(-1)^3 + 1}{(-1)^2 + 1} = \frac{-1 + 1}{1 + 1} = \frac{0}{2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1} = 0$$

Problema 12

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 5x + 10}{x^2 - 25}$$

Reemplazando el valor de (5)

$$= \frac{(5)^2 - 5(5) + 10}{(5)^2 - 25} = \frac{25 - 25 + 10}{25 - 25} = \frac{10}{0} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 5x + 10}{x^2 - 25} = \infty \text{ (No existe el límite)}$$

Problema 13

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x+2)(x+1)}$$

Simplificando términos semejantes

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-1)}{(x+2)}$$

Reemplazando el valor de (-1)

$$= \frac{((-1)-1)}{((-1)+2)} = \frac{-2}{1} = -2$$

$$x^2 - 1 = (x - 1) * (x + 1)$$

Factorización dos números sumados sea 3 y multiplicados sea 2

$$x^2 + 3x + 2 = (x + 2)(x + 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2} = -2$$

Problema 14

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 + x - 2)(x - 1)}{(x^3 + x^2 + x - 3)(x - 1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+2)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x^2 + 2x + 3)\cancel{(x-1)}}$$

Simplificando términos semejantes

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 2)}{(x^2 + 2x + 3)}$$

Reemplazando el valor de (1)

$$= \frac{(1+2)}{(1^2 + 2(1) + 3)} = \frac{3}{1+2+3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3} = \frac{1}{2}$$

$x^2 - 3x + 2 = (x^2 + x - 2)(x - 1)$
Factorización dos números sumados sea 1 y multiplicados sea -2

$$(x^2 + x - 2) = (x + 1)(x - 2)$$

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x + 2)(x - 1)$$

$$x^4 - 4x + 3 = (x^3 + x^2 + x - 3)(x - 1)$$

$$x^4 - 4x + 3 = (x^2 + 2x + 3)(x - 1)(x - 1)$$

Problema 15

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 4} = \frac{(x)(x-2)}{(x-2)(x-2)}$$

Simplificando términos semejantes

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x)}{(x-2)}$$

Reemplazando el valor de (2)

$$= \frac{2}{2-2} = \frac{2}{0} = \infty$$

$$x^2 - 2x = (x)(x - 2)$$

Factorización dos números sumados sea -4 y multiplicados sea +4

$$(x^2 - 4x + 4) = (x - 2)(x - 2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 4} = \infty \text{ (No existe el límite)}$$

Problema 16

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - (a+1)x + a}{x^3 - a^3}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - (a+1)x + a}{x^3 - a^3} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - ax - x + a}{x^3 - a^3}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-1)(x-a)}{(x^2 + ax + a^2)(x-a)}$$

Simplificando términos semejantes

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-1)}{(x^2 + ax + a^2)}$$

$$x^2 - ax - x + a$$

ordenando para factorizar

$$x^2 - x - ax + a = x(x-1) - a(x-1)$$

$$x^2 - x - ax + a = (x-1) - (x-a)$$

$$x^3 - a^3 = (x^2 + ax + a^2)(x-a)$$

Reemplazando el valor de (a)

$$= \frac{(a-1)}{(a^2 + a(a) + a^2)} = \frac{a-1}{a^2 + a^2 + a^2} = \frac{a-1}{3a^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - (a+1)x + a}{x^3 - a^3} = \frac{a-1}{3a^2}$$

Problema 17

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+3)(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

Simplificando términos semejantes

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+3)}{(x+1)}$$

Reemplazando el valor de (1)

$$= \frac{1+3}{1+1} = \frac{4}{2} = 2$$

$$x^2 - 1 = (x-1) * (x+1)$$

Factorización dos números sumados sea 2 y multiplicados sea -3

$$x^2 + 2x - 3 = (x+3) * (x-1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1} = 2$$

Problema 18

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - a^3}{x - a}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - a^3}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)(x^2 + ax + a^2)}{(x-a)}$$

Simplificando términos semejantes

$$\lim_{x \rightarrow a} = x^2 + ax + a^2$$

Reemplazando el valor de (1)

$$= a^2 + a(a) + a^2 = a^2 + a^2 + a^2 = 3a^2$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - a^3}{x - a} = 3a^2$$

Diferencia de cubos

$$x^3 - a^3 = (x - a) * (x^2 + ax + a^2)$$

Factorización dos números sumados sea 2 y multiplicados sea -3

$$x^2 + 2x - 3 = (x + 3) * (x - 1)$$

Problema 19

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{(1-x)(1+x+x^2)} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{(1+x+x^2) - 3}{(1-x)(1+x+x^2)} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1+x+x^2 - 3}{(1-x)(1+x+x^2)} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 + x - 2}{(1-x)(1+x+x^2)} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{(x+2)(x-1)}{(1-x)(1+x+x^2)} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{-(x+2)(1-x)}{(1-x)(1+x+x^2)} \right)$$

Simplificando términos semejantes

Diferencia de cubos

$$1 - x^3 = (1 - x) * (1 + x + x^2)$$

Factorización dos números sumados sea 1 y multiplicados sea -2

$$x^2 + x - 2 = (x + 2) (x - 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{-(x+2)}{(1+x+x^2)} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{-x-2}{1+x+x^2} \right)$$

Reemplazando el valor de (1)

$$= \left(\frac{-1-2}{1+1+(1)^2} \right) = \frac{-3}{3} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right) = -1$$

Problema 20

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 4x^2 + 4x}{(x+2)(x-3)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 4x^2 + 4x}{(x+2)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x(x^2 + 4x + 4)}{(x+2)(x-3)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x(x+2)(x+2)}{(x+2)(x-3)}$$

Simplificando términos semejantes

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x(x+2)}{(x-3)}$$

Reemplazando el valor de (1)

$$= \frac{-2(-2+2)}{(-2-3)} = \frac{-2(0)}{-5} = \frac{2(0)}{5} = \frac{0}{5} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 4x^2 + 4x}{(x+2)(x-3)} = 0$$

$$x^3 + 4x^2 + 4x = (x) * (x^2 + 4x + 4)$$

Factorización dos números sumados sea 4 y multiplicados sea 4

$$x^2 + 4x + 4 = (x+2) * (x+2)$$

$$x^3 + 4x^2 + 4x = (x) * (x+2) * (x+2)$$

Problema 21

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$$

conjugado

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{(x - 1)}}{\cancel{(x - 1)}(\sqrt{x} + 1)}$$

Simplificando términos semejantes

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(\sqrt{x} + 1)}$$

Reemplazando el valor de (1)

$$= \frac{1}{(\sqrt{1} + 1)} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \frac{1}{2}$$

Problema 22

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{4 - x}$$

Conjugado

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}{(4 - x)(\sqrt{x} + 2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x - 4)}{(4 - x)(\sqrt{x} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-\cancel{(4 - x)}}{\cancel{(4 - x)}(\sqrt{x} + 2)}$$

Simplificando términos semejantes

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{-1}{(\sqrt{x} + 2)}$$

Reemplazando el valor de (4)

$$= \frac{-1}{(\sqrt{4} + 2)} = \frac{-1}{2 + 2} = \frac{-1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{4 - x} = -\frac{1}{4}$$

Problema 23

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{x^2-x-12}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)}{x^2-x-12} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\cancel{(x-4)}}{\cancel{(x-4)}(x+3)}$$

Factorización de los números sumados sea -1
y multiplicados sea -12
 $x^2 - x - 12 = (x - 4) * (x + 3)$

Simplificando términos semejantes

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{(x+3)}$$

Reemplazando el valor de (4)

$$= \frac{1}{4+3} = \frac{1}{7}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{x^2-x-12} = \frac{1}{7}$$

Problema 24

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3-27}{x^2-9}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3-3^3}{x^2-3^2} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\cancel{(x-3)}(x^2+3x+9)}{\cancel{(x-3)}(x+3)}$$

Diferencia de cubos

$$x^3 - 3^3 = (x - 3) * (x^2 + 3x + 9)$$

Diferencia de cuadrados

$$x^2 - 3^2 = (x - 3) * (x + 3)$$

Simplificando términos semejantes

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2+3x+9)}{(x+3)}$$

Reemplazando el valor de (3)

$$= \frac{(3)^2 + (3)(3) + 9}{(3+3)} = \frac{9+9+9}{6} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3-27}{x^2-9} = \frac{9}{2}$$

Problema 25

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x^2} + 2xh + h^2 - \cancel{x^2}}{h}$$

Simplificando términos semejantes

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{h}(2x + h)}{\cancel{h}}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} 2x + h$$

Reemplazando el valor de (0)

$$= 2x + 0 = 2x$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = 2x$$

Problema 26

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - x^2}{3 - \sqrt{x^2 + 5}}$$

Conjugado al denominador

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - x^2}{3 - \sqrt{x^2 + 5}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(4 - x^2)(3 + \sqrt{x^2 + 5})}{(3 - \sqrt{x^2 + 5})(3 + \sqrt{x^2 + 5})}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(4 - x^2)(3 + \sqrt{x^2 + 5})}{9 - (x^2 + 5)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(4 - x^2)(3 + \sqrt{x^2 + 5})}{9 - x^2 - 5} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{(4 - x^2)}(3 + \sqrt{x^2 + 5})}{\cancel{(4 - x^2)}}$$

Simplificando términos semejantes

$$\lim_{x \rightarrow 2} 3 + \sqrt{x^2 + 5}$$

Reemplazando el valor de (0)

$$= 3 + \sqrt{2^2 + 5} = 3 + \sqrt{4 + 5} = 3 + \sqrt{9} = 3 + 3 = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - x^2}{3 - \sqrt{x^2 + 5}} = 6$$

Problema 27

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{(x - 1)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{(x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 2)\cancel{(x - 1)}}{\cancel{(x - 1)}(x - 1)}$$

Factorización dos números sumados sea 1 y multiplicados sea 2

$$x^2 + x - 2 = (x + 2) * (x - 1)$$

$$(x - 1)^2 = (x - 1) * (x - 1)$$

Simplificando términos semejantes

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+2)}{(x-1)}$$

Reemplazando el valor de (1)

$$= \frac{1+2}{1-1} = \frac{3}{0} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{(x-1)^2} = \infty \text{ (No existe el límite)}$$

Problema 28

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 4x$$

Reemplazando el valor de (1)

$$= (2)^2 - 4(x) = 4 - 8 = -4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 4x = -4$$

Problema 29

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x^3 + 2x^2 - 3x - 4)$$

Reemplazando el valor de (-1)

$$= (-1)^3 + 2(-1)^2 - 3(-1) - 4 = -1 - 8 = -1 + 2 + 3 - 4 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x^3 + 2x^2 - 3x - 4) = 0$$

Problema 30

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(3x-1)^2}{(x+1)^3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(3x-1)^2}{(x+1)^3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(3x-1)(3x-1)}{(x+1)^3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{9x^2 - 3x - 3x + 1}{(x+1)^3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{9x^2 - 6x + 1}{(x+1)^3}$$

Formando un cuadrado perfecto (séptimo caso de factorización)
se **multiplica toda la expresión por 9** y luego se **divide por 9**

$$9x^2 - 6x + 1 = \frac{9(9x^2) - 9(6x) + 9(1)}{9} = \frac{(9x)^2 - 6(9x) + 9}{9}$$

Dos números que sumados sean -6 y multiplicados sea 9

$$(9x)^2 - 6x + 9 = (9x - 3)(9x - 3)$$

$$9x^2 - 6x + 9 = \frac{(9x - 3)(9x - 3)}{9} = \frac{(9x - 3)(9x - 3)}{3 \cdot 3} = \frac{\cancel{3}(3x - 1) \cdot \cancel{3}(3x - 1)}{\cancel{3} \cdot \cancel{3}}$$

Simplificando términos semejantes

$$9x^2 - 6x + 9 = (3x - 1) \cdot (3x - 1)$$

Reemplazando

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{9x^2 - 6x + 9}{(x + 1)^3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(3x - 1) \cdot (3x - 1)}{(x + 1)^3}$$

Reemplazando el valor de (1)

$$= \frac{[3(1) - 1] \cdot [3(1) - 1]}{(1 + 1)^3} = \frac{[2] \cdot [2]}{(2)^3} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(3x - 1)^2}{(x + 1)^3} = \frac{1}{2}$$

Problema 31

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - \frac{1}{3^x}}{3^x + \frac{1}{3^x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{(3^x)(3^x) - 1}{3^x}}{\frac{(3^x)(3^x) + 1}{3^x}}$$

Simplificando términos semejantes

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{2x} - 1}{3^{2x} + 1}$$

Reemplazando el valor de (1)

$$= \frac{3^{2(0)} - 1}{3^{2(0)} + 1} = \frac{3^0 - 1}{3^0 + 1} = \frac{1 - 1}{1 + 1} = \frac{0}{2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}} = 0$$

Diferencia de cubos
 $x^3 - a^3 = (x - a) \cdot (x^2 + ax + a^2)$

Factorización dos números sumados sea 2 y multiplicados sea -3
 $x^2 + 2x - 3 = (x + 3) \cdot (x - 1)$

Problema 32

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-1}{x^2-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-1}{\cancel{(x-1)}(x+1)}$$

Simplificando términos semejantes

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x+1)}$$

Reemplazando el valor de (2)

$$= \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1}{3}$$

Diferencia de cuadrados

$$x^2 - 1^2 = (x - 1) * (x + 1)$$

Problema 33

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$$

Conjugado

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{(x)(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x) - (1-x)}{(x)(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-1+x+x}{(x)(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{2x}}{\cancel{x}(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}$$

Simplificando términos semejantes

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}$$

Reemplazando el valor de (4)

$$= \frac{2}{(\sqrt{1+0} + \sqrt{1-0})} = \frac{2}{\sqrt{1} + \sqrt{1}} = \frac{2}{1+1} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = 1$$

Problema 34

$$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49}$$

Conjugado

$$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{(2 - \sqrt{x-3})(2 + \sqrt{x-3})}{(x^2 - 7^2)(2 + \sqrt{x-3})} = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{4 - (x-3)}{(x^2 - 7^2)(2 + \sqrt{x-3})}$$

$$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{4 - x + 3}{(x^2 - 7^2)(2 + \sqrt{x-3})} = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{7 - x}{(x-7)(x+7)(2 + \sqrt{x-3})} = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{-\cancel{(x-7)}}{\cancel{(x-7)}(x+7)(2 + \sqrt{x-3})}$$

Simplificando términos semejantes

$$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{-1}{(x+7)(2 + \sqrt{x-3})}$$

Reemplazando el valor de (7)

$$= \frac{-1}{(7+7)(2 + \sqrt{7-3})} = \frac{-1}{(14) * (2 + \sqrt{4})} = \frac{-1}{14(4)} = \frac{-1}{56}$$

$$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49} = \frac{-1}{56}$$

Problema 35

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\sqrt{t^6} - 1}{\sqrt[3]{t^6} - 1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^3 - 1}{t^2 - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{(t-1)}(t + t^2 + 1)}{\cancel{(t-1)}(t+1)}$$

Simplificando términos semejantes

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(t + t^2 + 1)}{(t+1)}$$

Reemplazando el valor de (1)

$$= \frac{1 + (1)^2 + 1}{1 + 1} = \frac{3}{2}$$

Se utiliza un cambio de variable

$$\begin{aligned} x &= t^6 \\ x \rightarrow 1 & \\ t &\rightarrow 1 \end{aligned}$$

Diferencia de cubos

$$t^3 - 1^3 = (t - 1) * (t + t^2 + 1)$$

Diferencia de cuadrados

$$t^2 - 1^2 = (t - 1) * (t + 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1} = \frac{3}{2}$$

Problema 36

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{5+x}}{1 - \sqrt{5-x}}$$

Conjugado

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(3 - \sqrt{5+x})(3 + \sqrt{5+x})(1 + \sqrt{5-x})}{(1 - \sqrt{5-x})(3 + \sqrt{5+x})(1 + \sqrt{5-x})} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{[9 - (5+x)](1 + \sqrt{5-x})}{[1 - (5-x)](3 + \sqrt{5+x})}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(9 - 5 - x)(1 + \sqrt{5-x})}{(1 - 5 + x)(3 + \sqrt{5+x})} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(4 - x)(1 + \sqrt{5-x})}{(x - 4)(3 + \sqrt{5+x})}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{-\cancel{(x-4)}(1 + \sqrt{5-x})}{\cancel{(x-4)}(3 + \sqrt{5+x})}$$

Simplificando términos semejantes

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{-(1 + \sqrt{5-x})}{(3 + \sqrt{5+x})}$$

Reemplazando el valor de (4)

$$= \frac{-(1 + \sqrt{5-4})}{(3 + \sqrt{5+4})} = \frac{-(1 + \sqrt{1})}{(3 + \sqrt{9})} = \frac{-(2)}{3+3} = \frac{-2}{6} = \frac{-1}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{5+x}}{1 - \sqrt{5-x}} = \frac{-1}{3}$$

Problema 37

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} + x - 1}{x}$$

Conjugado

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x+x^2}) + (x-1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[(\sqrt{1+x+x^2}) + (x-1) \right] \left[(\sqrt{1+x+x^2}) - (x-1) \right]}{x \left[(\sqrt{1+x+x^2}) - (x-1) \right]}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x+x^2)-(x-1)^2}{x\left[\left(\sqrt{1+x+x^2}\right)-(x-1)\right]} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x+x^2)-(x^2-2x+1)}{x\left[\left(\sqrt{1+x+x^2}\right)-(x-1)\right]} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{1+x+x^2} - \cancel{x^2} + 2x - \cancel{1}}{x\left[\left(\sqrt{1+x+x^2}\right)-(x-1)\right]}$$

Simplificando términos semejantes

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{3x}}{x\left[\left(\sqrt{1+x+x^2}\right)-(x-1)\right]}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{\left[\left(\sqrt{1+x+x^2}\right)-(x-1)\right]}$$

Reemplazando el valor de (0)

$$= \frac{3}{\left(\sqrt{1+0+(0)^2}\right)-(0-1)} = \frac{3}{(\sqrt{1})+1} = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} + x - 1}{x} = \frac{3}{2}$$

Problema 38

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$$

Conjugado

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{(x+1)-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{x+1-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x}(\sqrt{x+1}+1)}{\cancel{x}}$$

Simplificando términos semejantes

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x+1} + 1$$

Reemplazando el valor de (0)

$$= \sqrt{0+1} + 1 = \sqrt{1} + 1 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} = 2$$

Problema 39

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{\sqrt{x+5} - \sqrt{5}}$$

Conjugado

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+2} - \sqrt{2})(\sqrt{x+2} + \sqrt{2})(\sqrt{x+5} + \sqrt{5})}{(\sqrt{x+5} - \sqrt{5})(\sqrt{x+2} + \sqrt{2})(\sqrt{x+5} + \sqrt{5})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[(x+2-2)(\sqrt{x+5} + \sqrt{5})]}{[(x+5-5)(\sqrt{x+2} + \sqrt{2})]}$$

Simplificando términos semejantes

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x}(\sqrt{x+5} + \sqrt{5})}{\cancel{x}(\sqrt{x+2} + \sqrt{2})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+5} + \sqrt{5})}{(\sqrt{x+2} + \sqrt{2})}$$

Reemplazando el valor de (0)

$$= \frac{(\sqrt{0+5} + \sqrt{5})}{(\sqrt{0+2} + \sqrt{2})} = \frac{-(2\sqrt{5})}{(2\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{5}{2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{\sqrt{x+5} - \sqrt{5}} = \sqrt{\frac{5}{2}}$$

Problema 40

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - 2}{x}$$

Conjugado

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{4+x} - 2)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[(\sqrt{4+x} - 2)][(\sqrt{4+x} + 2)]}{x[\sqrt{4+x} + 2]}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(4+x-4)}{x(\sqrt{4+x} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(\sqrt{4+x} + 2)}$$

Simplificando términos semejantes

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(\sqrt{4+x} + 2)}$$

Reemplazando el valor de (0)

$$= \frac{1}{(\sqrt{4+0} + 2)} = \frac{1}{(\sqrt{4} + 2)} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - 2}{x} = \frac{1}{4}$$

Problema 41

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{3-\sqrt{18-x^2}}$$

Conjugado

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(3+\sqrt{18-x^2})}{(3-\sqrt{18-x^2})(3+\sqrt{18-x^2})} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)\left[3+\sqrt{18-x^2}\right]}{9-(18-x^2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(3+\sqrt{18-x^2})}{9-18+x^2} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(3+\sqrt{18-x^2})}{x^2-9}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\cancel{(x-3)}(3+\sqrt{18-x^2})}{\cancel{(x-3)}(x+3)}$$

Diferencia de cuadrados

$$x^2 - 3^2 = (x-3) * (x+3)$$

Simplificando términos semejantes

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(3+\sqrt{18-x^2})}{(x+3)}$$

Reemplazando el valor de (3)

$$= \frac{3+\sqrt{18-(3)^2}}{3+3} = \frac{3+\sqrt{18-9}}{6} = \frac{3+\sqrt{9}}{6} = \frac{3+3}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{3-\sqrt{18-x^2}} = 1$$

Problema 42

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x-a}{a\sqrt{x}-\sqrt{a}}$$

Reemplazando el valor de (a)

$$= \frac{a-a}{a\sqrt{a}-\sqrt{a}} = \frac{0}{a\sqrt{a}-\sqrt{a}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x - a}{a\sqrt{x} - \sqrt{a}} = 0$$