

# Borrador sobre estudio de las propiedades de los cuerpos rígidos usando cinemática inversa

Oscar Guerrero-Miramontes<sup>1</sup>,

S. Flores-García<sup>2</sup>

<sup>1</sup> gumo\_99@hotmail.com

<sup>2</sup> sergiflo@hotmail.com

## Resumen

En este artículo mostramos elementos que determinan la configuración de ligas de cuerpos sólidos. Esta aproximación matemática puede ser predicha aplicando leyes de transformaciones ortogonales las cuales relacionen marcos de referencia de movimiento. A través del algoritmo de Newton-Raphson, resolvemos numéricamente las ecuaciones de movimiento como una función de los ángulos de nodo para un brazo robótico de 3 DOF (grados de libertad) en el plano. Además, se simuló usando una animación de Macromedia flash diferentes arreglos de poses el brazo robótico puede realizar, Se sugiere esta herramienta como una alternativa didáctica que pudiera considerarse para ayudar a que los estudiantes comprendieran mejor las propiedades de los cuerpos rígidos y conceptos introductorios de robótica.

**Palabras clave:** Cinemática inversa, Newton-Raphson, ángulos de nodo, cuerpos rígidos.

## I. Introducción.

Según un sitio web [1], el área de conocimiento llamada cinemática inversa es "el proceso de determinación de los parámetros de un objeto articulado flexible (una cadena) con el fin de alcanzar una posición deseada. Cinemática inversa es un tipo de planificación de movimiento. La Cinemática inversa también es relevante para la programación de juegos y Animación en 3D [2], donde un uso común es asegurarse de que los personajes del juego se conecten físicamente al mundo, como los pies firmemente en el terreno ". Un conjunto de parámetros matemáticos se articulan a través de varias representaciones matemáticas para desarrollar una colección física de segmentos rígidos

conectados por uniones [3]. Por lo tanto, un gran número de ángulos que varían pueden ser articulados para generar un número ilimitado de configuraciones.

Este tema es un buen ejemplo de cómo los conceptos sobre los cuerpos rígidos se pueden aplicar a los problemas de la vida real, la cinemática inversa. Por lo tanto podría considerarse como una propuesta didáctica para ayudar a los estudiantes en las clases de introducción a mecánica clásica para comprender los temas conceptuales relacionados con las propiedades de los cuerpos rígidos. En este artículo se muestra el procedimiento matemático general para resolver ecuaciones de movimiento en función de los ángulos articulares en dos dimensiones. La enseñanza-aprendizaje de los conceptos se considerará en un futuro artículo.

## II. Introducción matemática

Un cuerpo rígido puede ser considerado como una colección de pares de puntos en el espacio en el que la distancia entre dos de ellos se mantiene constante. Esa limitación es de una importancia relevante, ya que reduce el número de grados de libertad que son necesarios para expresar el movimiento de  $3N$ . En este caso,  $N$  es el número de puntos que describen el objeto sólido a seis solamente. De estos seis grados de libertad, tres de ellos definen la traslación y los restantes definen la rotación [4].

La rotación de un cuerpo rígido se expresa por los ángulos de Euler. Usando la convención **Z-X-Z** la rotación del cuerpo rígido dado por

$$\mathbf{R}(\theta, \beta, \alpha) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & \sin \beta \\ 0 & -\sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \dots \quad (2.1)$$

$$\begin{bmatrix} c_\alpha c_\gamma - c_\beta s_\alpha s_\gamma & c_\gamma s_\alpha + c_\alpha c_\beta s_\gamma & s_\beta s_\gamma \\ -c_\beta c_\gamma s_\alpha - c_\alpha s_\gamma & c_\alpha c_\beta c_\gamma - s_\alpha s_\gamma & c_\gamma s_\beta \\ s_\alpha s_\beta & -c_\alpha s_\beta & c_\beta \end{bmatrix}$$

En la EQ. 2.1, la matriz de la derecha representa la rotación  $\alpha$  alrededor del eje "z" del marco de referencia original. La matriz en el centro representa la rotación  $\beta$  alrededor de un eje intermedio 'x' eje que es la "línea de nodos". La matriz en el extremo izquierdo representa la rotación  $\theta$  alrededor del eje 'Z' del sistema de referencia final. En las matrices en la EQ. 2.1,  $C_\alpha$  representa  $\cos(\alpha)$ ,  $S_\beta$  representa el  $\sin(\beta)$ , y lo mismo para los otros subíndices.

Para el caso especial de la contracción de la rotación alrededor del plano xy en la E.Q. 2.1  $\alpha = \beta = 0$  y entonces la rotación alrededor del plano xy está dada por

$$\mathbf{R}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Para mayor comodidad, los componentes de la traslación y la rotación del movimiento se ponen juntas en una sola matriz:

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & t_x \\ -\sin \theta & \cos \theta & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{c|c} R(\theta) & \vec{t} \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right), \quad R(\theta) \in \mathbb{R}^2 \quad (2.3)$$

La representación mismo ocurre con el escenario 3D, pero en este artículo nos centramos en el escenario en el que se restringe el movimiento en el plano xy. En general el uso de la representación matricial para describir la rotación en 3D no es conveniente y se usa mejor la conversión de los ángulos de Euler en su forma representativa como un cuaternion [5]

Debido a las propiedades de cuerpo rígido (un cuerpo en el que la posición relativa de todos sus puntos es constante), la transformación (2.3) que funcionan en el punto representado por el vector "p" tiene que conservar la distancia entre el par de puntos como:

$$(R(\theta), \vec{t}): \vec{p} \mapsto R(\theta)\vec{p} + \vec{t} \quad (2.4)$$

Por lo tanto, una regla general para las sucesivas transformaciones se pueden derivar [6]:

$$(R(\theta_1), t_1)(R(\theta_2), t_2)\bar{p} = (R(\theta_1)R(\theta_2), R(\theta_1)t_2 + t_1)\bar{p} \quad (2.5)$$

Como hay un número infinito de ejes o rotaciones en el cuerpo rígido puede girar, la necesidad de encontrar una relación de traducir el eje a otro punto del espacio es de gran importancia. Deje que el punto en que la rotación se lleva a cabo en el plano se defina por "p". Entonces, la condición es que el punto "p" tiene que ser invariante bajo la transformación de rotación por tanto :

$$\left( \begin{array}{c|c} R(\theta) & \vec{t} \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} R(\theta) & \bar{p} - R(\theta)\bar{p} \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \vec{t} = (I - R(\theta))\bar{p} \quad (2.6)$$

De esta manera, nos encontramos con el valor de "t" necesario para mantener el invariante de la transformación para el punto "P".

### III. El manipulador en el plano

Un manipulador en el plano consiste en una colección de cuerpos rígidos conectados por articulaciones. Los tipos de uniones para este caso especial, son revolve kind. Usando el software de animación Adobe Flash [6], se elaboro un brazo robótico de 3 DOF. La figura 1 muestra la imagen de cómo es el manipulador

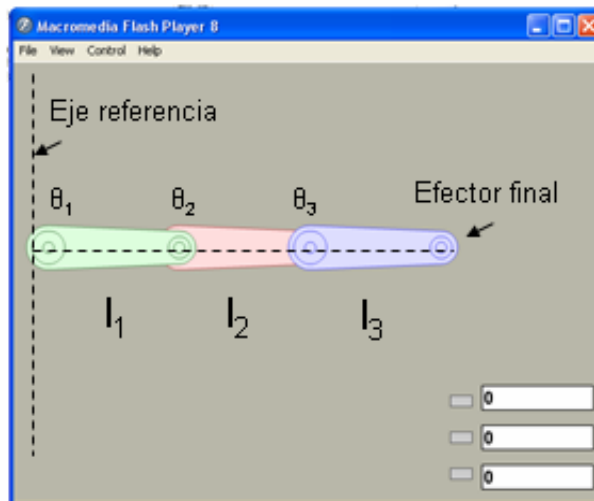


Figura 1. Imagen de un manipulador y su configuración inicial, la posición del efector final en  $(l_1 + l_2 + l_3, 0)$

El procedimiento para encontrar la posición del efector final en función de los ángulos de articulación es el siguiente:

$$K(\theta) = \prod_{i=1}^3 A_i(\theta_i) = A_1(\theta_1)A_2(\theta_2)A_3(\theta_3) \quad (3.1)$$

$$A_1(\theta_1) = \left( \begin{array}{c|c} R(\theta_1) & t_1 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & t_{1x} \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & t_{1y} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

el valor de  $\vec{t}_1$  es dado por la relación  $\vec{t}_1 = (I - R(\theta_1))\vec{p}$  si  $\vec{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{t}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$A_2(\theta_2) = \left( \begin{array}{c|c} R(\theta_2) & t_2 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & t_{2x} \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & t_{2y} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

el valor de  $\vec{t}_2$  es dado por la relación  $\vec{t}_2 = (I - R(\theta_2))\vec{p}$  si  $\vec{p} = \begin{pmatrix} l_1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{t}_2 = \begin{pmatrix} l_1(1 - \cos\theta_2) \\ -l_1\sin\theta_2 \end{pmatrix}$

$$A_3(\theta_3) = \left( \begin{array}{c|c} R(\theta_3) & t_3 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & t_{3x} \\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & t_{3y} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

el valor de  $\vec{t}_3$  es dado por la relación  $\vec{t}_3 = (I - R(\theta_3))\vec{p}$  si  $\vec{p} = \begin{pmatrix} l_1 + l_2 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \dots$

$$\vec{t}_3 = \begin{pmatrix} (l_1 + l_2)(1 - \cos\theta_3) \\ -(l_1 + l_2)\sin\theta_3 \end{pmatrix}$$

Aquí las matrices  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$  definen la rotación alrededor de una articulación definida por el parámetro  $\vec{p}$ . Para  $A_1$ ,  $\vec{p} = (0, 0)$ , para  $A_2$ ,  $\vec{p} = (l_1, 0)$ , y finalmente para  $A_3$ ,  $\vec{p} = (l_1 + l_2, 0)$  en donde  $l_1$ ,  $l_2$  y  $l_3$  son las longitudes de los enlaces del manipulador.

Después de desarrollar el producto  $A_1(\theta_1)A_2(\theta_2)A_3(\theta_3)$ , la matriz  $K(\Theta_i)$  es el siguiente

$$K(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & -\sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & t'_x \\ \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & t'_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

donde  $t'_x, t'_y$  es:

$$\begin{aligned} t'_x &= l_1 C \theta_1 + l_2 C(\theta_1 + \theta_2) - (l_1 + l_2) C(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ t'_y &= l_1 S \theta_1 + l_2 S(\theta_1 + \theta_2) - (l_1 + l_2) S(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \end{aligned} \quad (3.3)$$

#### IV. Algoritmo cinemática inversa

Encontrando  $K$ , podemos describir el movimiento del brazo robótico

$$K(\theta_i): \vec{v} \rightarrow \vec{v}' \quad (4.1)$$

En otras palabras, si sabemos los ángulos de las articulaciones y aplicamos  $K$  a la posición del efector final  $V$ , podemos moverlo a una nueva posición  $v'$ . La cinemática inversa utiliza otro método: Nosotros definimos la posición  $v' = (X_e, Y_e)$  y debemos encontrar los valores de los ángulos de las articulaciones que pueden mover el efector final a la posición deseada

$$K(\theta_i): \vec{v} \rightarrow \vec{v}' \quad (4.2)$$

Un algoritmo clásico para encontrar los ángulos de articulación es el método de Newton-Rhaphson [7]

$$\theta^{(n+1)} = \theta^{(n)} - J^{-1}(\theta^{(n)})f(\theta^{(n)})$$

Y por tanto tenemos un sistema de  $n$  ecuaciones que se debe igualar a cero para encontrar las raíces

$$K(\theta_i)v = v' \leftrightarrow K(\theta_i)v - v' = 0 \quad (4.4)$$

La aplicación de la definición a nuestro manipulador matriz  $K$  (3.2), e igualando

$v = (l_1 + l_2 + l_3, 0, 1)$ , se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
-x_e + l_1 C \theta_1 + l_2 C(\theta_1 + \theta_2) + l_3 C(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) &= 0 \\
-y_e + l_1 S \theta_1 + l_2 S(\theta_1 + \theta_2) + l_3 S(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) &= 0 \\
\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 - \arctan(y_e/x_e) &= 0
\end{aligned}
\tag{4.5}$$

La ecuación  $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 - \arctan(y_e/x_e) = 0$  es introducir a tener la serie completa de "n" ecuaciones y variables "n" para resolver el sistema (4.5). Mediante la observación y conceptos básicos de trigonometría, se puede encontrar que el Angulo formado por el eje de un sistema de referencia horizontal y la posición del efector final (Ye, Xe) viene dada por la suma de los ángulos individuales de cada unión:

el sistema de ecuaciones se puede resolver usando el software Mathematica usando la función FindRoot [8]. Las soluciones correspondientes se muestran en la figura 2

```

f1 = -1.5 + Cos[θ1] + Cos[θ1 + θ2] + Cos[θ1 + θ2 + θ3];
f2 = Sin[θ1] + Sin[θ1 + θ2] + Sin[θ1 + θ2 + θ3];
f3 = θ1 + θ2 + θ3 - ArcTan[ye / xe];

FindRoot[{f1, f2, f3}, {{θ1, π/3}, {θ2, π/6}, {θ3, π/6}}]

{θ1 → -7.6013, θ2 → 15.2026, θ3 → -7.6013}

```

Figura 2. Solución obtenida usando el software Mathematica.

Mathematica proporciona los valores de los ángulos  $\theta_1, \theta_2$  y  $\theta_3$  (en radianes) para mover el efector final al punto  $v'=(1.5,0)$ . Desafortunadamente Mathematica falta dar los ángulos en el término de menos  $2\pi$  radianes, pero uno puede fácilmente hacer la conversión a valores inferiores a  $2\pi$ . Los valores de las longitudes se utilizan  $l_1 = l_2 = l_3 = 1$ . Al repetir el mismo algoritmo para diferentes posiciones del efector final  $v'$ , es posible crear una trayectoria que se puede seguir por nuestro manipulador. Por lo tanto, podemos observar su movimiento real. La Figura 3 muestra una imagen con las disposiciones de las posiciones de los enlaces 'necesaria para la posición del efector final sea igual a  $v'=(1.5,0)$ .

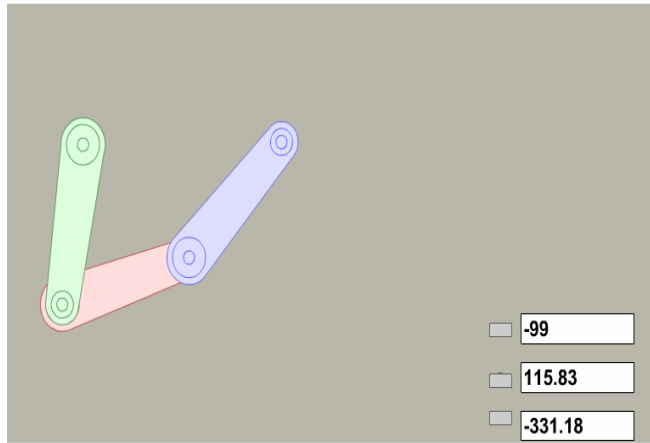


Figura 3. Cconfiguración de los enlaces  
 Para que la posición del efector  
 Final sea  $v' = (1.5, 0)$ .

| Union              | Valor angular (en grados) |
|--------------------|---------------------------|
| Union 1 $\Theta_1$ | $-99^\circ$               |
| Union 2 $\Theta_2$ | $115.83^\circ$            |
| Union 3 $\Theta_3$ | $-331.18^\circ$           |

La Figura 4 muestra otra posible solución y otra disposición de los enlaces para que el efector final se encuentre en  $v' = (1.5, 0)$ .

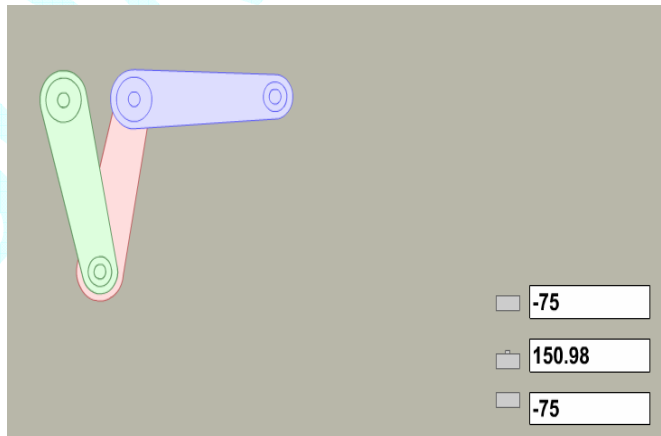


Figura 4. Cconfiguración de los enlaces  
 Para que la posición del efector  
 Final sea  $v' = (1.5, 0)$



| Union              | Valor angular (en grados) |
|--------------------|---------------------------|
| Union 1 $\Theta_1$ | $-75^\circ$               |
| Union 2 $\Theta_2$ | $150.98^\circ$            |
| Union 3 $\Theta_3$ | $-75^\circ$               |

Es importante mencionar la solución que se encuentran utilizando el algoritmo de la newton- Rhapsion no es única. En otras palabras, puede haber más de una configuración de articulaciones para mover el efector final hasta el punto final deseado. A pesar de que se redujo los grado de liberatar (DOF) del manipulador, fijando el efector final  $v'$ , dada por  $(X_e, Y_e)$  todavía dejamos el parámetro angular que describen la rotación del sistema como una variable libre. .

### V.Conclusiones

El método de Newton-Rhapsion es útil para resolver el problema de la cinemática inversa, pero tienen algunos límites, ya que se requiere dar un valor inicial de los ángulos, también el cálculo de la inversa del Jacobiano se puede considerar como una de operación que gasta muchos recursos de computadora. Este tipo de técnica matemática puede ser utilizado en varios campos de investigación como la robótica, la física moderna, el diseño de las prótesis médicas, animaciones gráficas y sistemas de producción. Por último, vamos a aplicar estas observaciones como una propuesta didáctica en los estudiantes para aprender los conceptos físicos en cursos avanzados de mecánica de laboratorio.

### Referencias

<sup>1</sup> Keith Grochow, Steven L. Martin, Aaron Hertzmann, Zoran Popović,  
 “Style-based inverse kinematics”, ACM Transactions on Graphics (TOG)  
 23, 3 (Aug.), 522–531, 2004

<sup>2</sup> S. Flores, J. E. Chávez, J. Luna, M. D. González, M. V. González and A. A. Hernández,  
 “El aprendizaje de la física y las matemáticas en contexto”, CULCyT, **24**, 19-24 (2008).

<sup>3</sup> H. Goldstein, “Classical mechanics”, (Addison Wesley, San Francisco, 2002), p. 150,

<sup>4</sup> J. Angeles, “Fundamentals of robotic mechanical systems”, (Springer, New York, 2003), p. 48

<sup>5</sup> [http://en.wikipedia.org/wiki/Conversion\\_between\\_quaternions\\_and\\_Euler\\_angles](http://en.wikipedia.org/wiki/Conversion_between_quaternions_and_Euler_angles)

<sup>6</sup> K.Peters, “Foundation ActionScript animation”, (Friends of ED, Calif, 2006), p. 283.

<sup>7</sup> K. F. Riley, “Mathematical methods for physics and engineering”, (Cambridge University Press, Cambridge, 2006), p. 985.

<sup>8</sup> S. Hassani, “Mathematical Methods Using *Mathematica*”, (Springer, Verlag, 2003), p. 15.