Relaciones y Funciones

Vasquez Ayala, Rosita - *pilar_rosita92@hotmail.com*

1. **Introducción**
2. **Relaciones y funciones**
3. **Aplicaciones de las funciones reales**
4. **Bibliografía**

INTRODUCCIÓN

El estudio del tema de funciones es básico para lograr comprender muchos otros temas que se irán viendo más adelante en el curso de matemática, además es importante porque se le puede dar muchos usos en la "vida diaria" ya que generalmente se hace uso de las funciones reales, (aún cuando el ser humano no se da cuenta), en el manejo de cifras numéricas en correspondencia con otra, debido a que se está usando subconjuntos de los números reales. Las funciones son de mucho valor y utilidad para resolver problemas de la vida diaria, problemas de finanzas, de economía, de estadística, de ingeniería, de medicina, de química y física, de astronomía, de geología, y de cualquier área social donde haya que relacionar variables.

RELACIONES Y FUNCIONES

Para empezar a hablar de lo que son las relaciones y funciones es necesario empezar a hablar sobre el *Par Ordenado (PO)*, y ¿por qué la importancia de de saber la definición de para ordenado? La importancia del PO se desprende de la simplicidad (facilidad, claridad, comodidad) con que a partir de el se puede estructurar una red de definiciones con los principales elementos de la matemática clásica.

La fecunda utilización del PO se puede observar en la lista siguiente, que obvia todo comentario:

1.- Producto Cartesiano
2.- Relación
3.- Relación Unívoca
4.- Función
5.- Relación de Equivalencia
6.- Relación de Orden
7.- Número Natural
8.- Número Entero
9.- Número Fraccionario
10.- Estructura Métrica
11.- Número Real
12.- Numero Complejo
13.- Estructura Algebraicas
14.- Leyes de Composición
15.- Estructura Lineal (Vectorial)
16.- Coordenadas Cartesianas
17.- Grafos
18.- Etc.

A. PAR ORDENADO (PO)

Se llama Par Ordenado o dupla al conjunto cuyos elementos son a su vez otros dos conjuntos, su símbolo es (x y):

1.- el conjunto {x y} que es un par simple
2.- el conjunto {x} de un único elemento

Definición: (x y):= {{x y} {x}}
(x y): Par Ordenado (PO)
x: Primer elemento del PO (Primera componente del PO)
y: Segundo elemento del PO (Segunda componente del PO)

Obs 1: PO es un par de conjuntos (es un Conjunto de Conjuntos) donde {x y} $\in$ (x y)
Obs 2: La igualdad de PO es la de Conjuntos
Obs 3: Primer y segundo elemento es una forma de llamar a las componentes del PO, porque los números todavía no están definidos. Justamente el concepto de número se define a partir del PO.

B. TEOREMAS DE PO

T1.- (x y) = (a b) $\Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$

TCR T1.- (x y) ≠ (a b) $\Leftrightarrow$ ***x ≠ a*** $\vee$ ***y ≠ b***

T2.- (x y) = (y x) $\Leftrightarrow$ ***x ≡ y***

TCR T2.- (x y) ≠ (y x) $\Leftrightarrow$ ***x ≠ y***

T3.- Def PO $\Rightarrow$ ***(x x) = {{x}}***

C. TERNAS

La definición de Par Ordenado se puede generalizar para el caso de tres componentes (ternas) o más componentes, en general para ***n*** componentes (nuplas):
Definición: (x y z):= {{x y z} {x y} {x}}
(x y z): Terna
x: Primer elemento de la terna
y: Segundo elemento de la terna
z: Tercer elemento de la terna
Obs: Si se hubiera definido la terna por la proposición
(x y z):= ((x y) z) (definición no válida)
se habría tomado un conjunto de conjuntos de diferentes niveles
(x y z):= {{(x y) z}, {(x y)}}:= {{{{x y} {x}} z}, {{{x y} {x}}}}
lo cual es erróneo.

D. NUPLAS
Definición: (x1 x2 … xn) := { { x1 x2 … xn } ... { x1 x2 } { x1} }
(x1 x2… xn): Nupla
xi: i-enésimo componente de la nupla

Nupla De 1 Elemento
A fin de generalizar el concepto de nupla para todo valor de n ≥ 1 se define también para el caso de n = 1
Def: (x):= {{x}}
Obs: Nótese que del T3 resulta (x x):= {{x}}

RELACIÓN (R)

Se llama *Relación* en AxB a todo *Subconjunto no vacío del Producto Cartesiano AxB*

Def: R $\in$ Relación AxB: = R $\subset$ AxB, R $\neq \emptyset$

R (AxB):= S (AxB):= {(x y): (x y) $\in$ R}

R: Relación AxB:= R $\subset$ AxB, R $\neq \emptyset$

S (AxB): Gráfica de R (AxB)

A: Conjunto de Partida o Primer Conjunto del Producto Cartesiano
B: Conjunto de Llegada o Segundo Conjunto del Producto Cartesiano

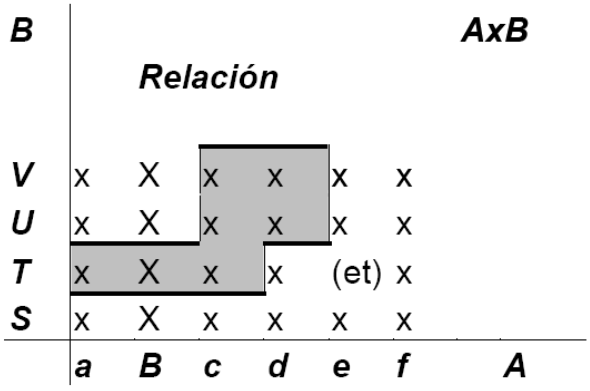
Se define además algunos elementos destacados de la ***Relación*** en ***AxB***

Def: D(R):= {x: x$\in$ A $\wedge$ $\exists$ (x y) $\in$ R}

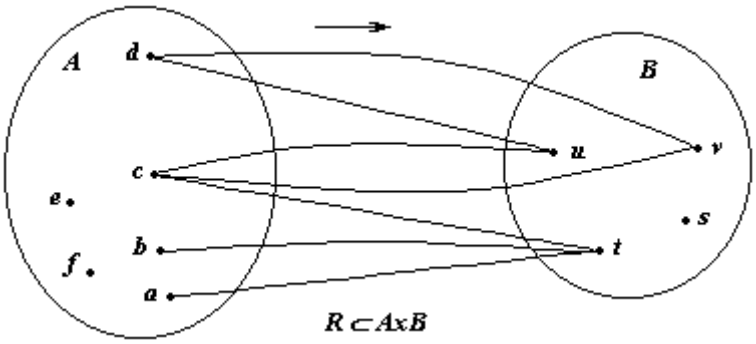
I(R):= {y: y$\in$ B $\wedge$ $\exists$ (x y) $\in$ R}

D(R): Dominio de R (AxB)
I(R): Imagen de R (AxB)}

Una representación de R (AxB) sobre el Producto Cartesiano es:



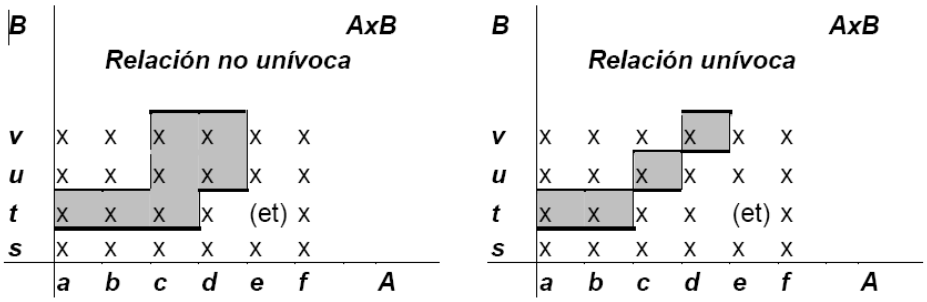
Otra representación de una relación R (AxB) es por Gráficas como las que se muestran a continuación:
Los Conjuntos Ay B y sus elementos se representan por Diagramas de Venn y los PO que componen la Relación por segmentos orientados (flechas).



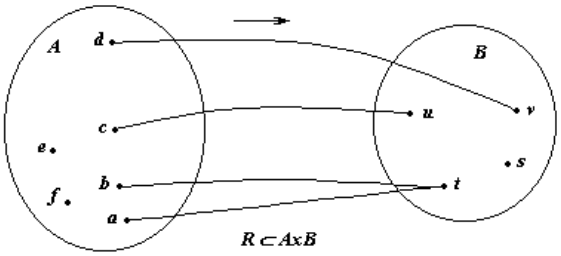
A = {a b c d e f}
B = { s t u v]
Gráfica (R) = {(a t) (b t) (c t) (c u) (c v) (d u) (d v)}
Dominio (R) = {a b c d}
Imagen (R) = {t u v}

RELACIÓN UNIVOCA (RU)

$$\textit{Def:} \qquad R \in \textit{Unívoca} := \left.\begin{matrix}(xy) \in R \\ (xz) \in R\end{matrix}\right\} \Rightarrow y \equiv z$$



En la representación de una relación univoca por segmentos orientados se caracteriza por la condición que de los elementos del dominio sale una flecha sola o ninguna.



FUNCIÓN

Una **función** es una **relación** que cumple 2 condiciones:
1.- Estar **definida para todo elemento del Conjunto de Partida A**. Es decir que el Dominio de la Relación f es el Conjunto de Partida: **A = D**
2.- Ser **Unívoca**

$$\textit{Def:} \quad \begin{matrix} f : A \to B \\ x \to y \end{matrix} \quad := \quad \begin{cases} \forall x \in A \quad \exists (xy) \in f \\ f \in \textit{Unívoca} \quad := \left.\begin{matrix}(xy) \in f \\ (xz) \in f\end{matrix}\right\} \Rightarrow y \equiv z \end{cases}$$

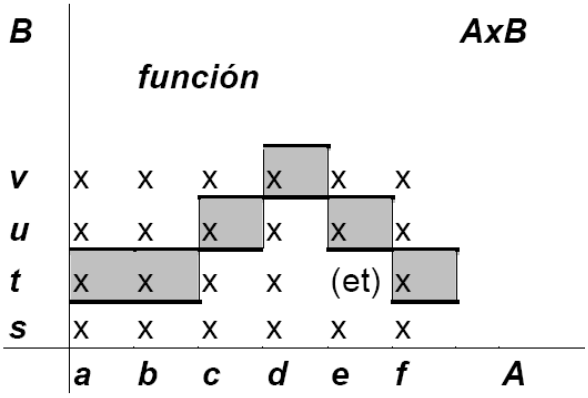
$$D(f) := \{x: \ x \in A \wedge \exists (x\,y) \in f\} = A$$
$$I(f) := \{y: \ y \in B \wedge \exists (x\,y) \in f\}$$
$$f(AxB) := \{(x\,y) : \ (x\,y) \in f\}$$

f: función
A: Conjunto de Partida o Primer Conjunto del Producto Cartesiano ó Dominio de la función
B: Conjunto de Llegada o Segundo Conjunto del Producto Cartesiano ó Codominio de la función
f (AxB): Gráfica de la función
I (f): Imagen de f (AxB)

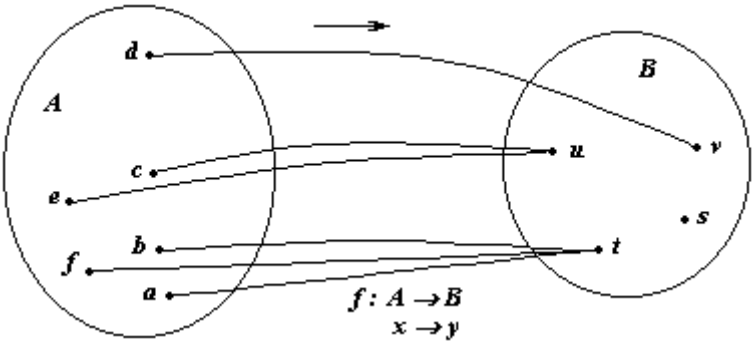
Obs 1: Nótese que el símbolo ***[A→B]*** representa al Producto Cartesiano ***AxB*** y el símbolo ***[x→y]*** representa al PO ***(x y).*** Es decir que las dos flechas tienen significado diferente, y es por ello que la flecha que señala al PO a veces se la indica con una colita [x +→ y] para diferenciarla de la flecha que señala el PC. Esto se obvia si no hay confusión posible.

$$\begin{matrix} f : A \to B \\ x \to y \end{matrix} \quad := \quad \begin{matrix} f : AxB \\ (xy) \end{matrix}$$

Una primera forma de representar una función es con un gráfico Cartesiano donde puede observarse las 2 proposiciones que hacen a la definición de función:
1.- El estar ***definida para todo elemento del Dominio A = D***.
2.- Ser ***Relación Unívoca.***



La representación de una función por diagramas de Venn es:

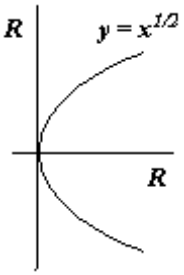


A = {a b c d e f}
B = { s t u v]
Gráfica (f) = {(a t) (b t) (c u) (d v) (e u) (f t)}
Dominio (f) = {a b c d e f} = A
Imagen (f) = {t u v}

Obs 1: En una función de cada elemento del Conjunto de partida A sale una flecha y solo una {1}. Con respecto al Conjunto de Llegada B no existen restricciones.

Obs 2: En la definición de función existen 4 elementos, el primero de los cuales es su nombre, y los otros 3 elementos son 3 conjuntos el Dominio, el Codominio y la Gráfica, de las cuales depende la función. Cambiando cualquiera de estos 3 Conjuntos cambia la función.

Ejemplo: Sea el Conjunto de pares ordenados ***G:= {(x y): y = x1/2}***
1.- Este Conjunto G carece de sentido si no se aclara que son x e y. Pueden ser elementos de cualquier conjunto genérico (que significaría y = x1/2?), o números reales o complejos etc. Esto muestra que debe definirse el PC AxB sobre el cual se quiere trabajar. Suponiendo que AxB = RxR entonces G sería la Gráfica siguiente:



2.- Si se toma A = R no existe función pues

2.1.- La relación no es unívoca

2.2.- La relación no está definida para todo elemento de R. Es decir D = A ≠ R

3.- Si se restringe a A = R+ ∪ {0} no existe función pues

3.1.- La relación no es unívoca

4.- Si se restringe a A = R + ∪ {0} y a B = R+ ∪ {0} si existe función, que se llamará arbitrariamente RaízCuad:

RaízCuad: R+ ∪ {0} → B = R+ ∪ {0}

x → y = x1/2

5.- Pero también se podría haber elegido arbitrariamente a A = [0 2] y los siguientes subconjuntos de G:

x ∈ [0 1[y = + x1/2

x ∈ [1 2] y = – x1/2

lo cual permite definir otra función que se llamará f2 diferente por supuesto de la anterior RaízCuad:

$$f_2:\ [\,0\ 2\,] \rightarrow R^{+} \cup \{0\}$$

$$x \rightarrow \begin{cases} y = +x^{1/2} & x \in [\,0\ \ 1\,[\\ y = -x^{1/2} & x \in [\,1\ \ 2\,] \end{cases}$$

todo este análisis muestra como una función depende no solamente de su Gráfica, sino también de sus Conjuntos de Partida y de Llegada.

EJERCICIOS DE RELACIONES Y FUNCIONES

Ejercicio 1:

Sean A, B y C conjuntos no vacíos. Demostrar que:

a) (A ∩ B) × C = (A × C) ∩ (B × C)

b) (A − B) × C = (A × C) − (B × C)

Demostración

a) Sea (x, y) ∈ [(A ∩ B) × C] ⇔ x ∈ (A ∩ B) ∧ y ∈ C

⇔ (x ∈ A ∧ x ∈ B) ∧ y ∈ C

⇔ (x ∈ A ∧ y ∈ C) ∧ (x ∈ B ∧ y ∈ C)

⇔ (x, y) ∈ (A × C) ∧ (x, y) ∈ (B × C)

⇔ (x, y) ∈ [(A × C) ∩ (B × C)]

Luego (A ∩ B) × C = (A × C) ∩ (B × C)

i) Sea (x, y) ∈ [(A − B) × C] ⇔ x ∈ (A ∩ Bc) ∧ y ∈ C

⇔ (x ∈ A ∧ x /∈ B) ∧ y ∈ C

⇔ (x ∈ A ∧ y ∈ C) ∧ x /∈ B

⇒ (x, y) ∈ (A × C) ∧ (x, y) /∈ (B × C)

$\Rightarrow (x, y) \in [(A \times C) - (B \times C)]$

Luego se demostró que $(A - B) \times C \Rightarrow (A \times C) - (B \times C)$ (1)

ii) $(x, y) \in (A \times C) - (B \times C) \Leftrightarrow (x, y) \in (A \times C) \wedge (x, y) \not\in (B \times C)$
$\Rightarrow (x \in A \wedge y \in C) \wedge (x \not\in B \vee y \not\in C)$
$\Rightarrow (x \in A \wedge y \in C \wedge x \not\in B) \vee (x \in A \wedge y \in C \wedge y \not\in C)$
$\Rightarrow (x \in (A - B) \wedge y \in C) \vee (x \in A \wedge F)$
$\Rightarrow (x, y) \in [(A - B) \times C]$ (2)
Luego por (1) y (2) se tiene que: $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$

Ejercicio 2:
Sean S, T relaciones de X → Y, pruebe que:
a) $(S^{-1})^{-1} = S$
b) $(S \cap T)^{-1} = S^{-1} \cap T^{-1}$
Prueba

a) $(x, y) \in (S^{-1})^{-1} \Leftrightarrow (y, x) \in S^{-1} \Leftrightarrow (x, y) \in S$

b) $(x, y) \in (S \cap T)^{-1} \Leftrightarrow (y, x) \in (S \cap T)$

$\Leftrightarrow (y, x) \in S \wedge (y, x) \in T$

$\Leftrightarrow (x, y) \in S^{-1} \wedge (x, y) \in T^{-1} \Leftrightarrow (x, y) \in (S^{-1} \cap T^{-1})$

Luego $(S \cap T)^{-1} = S^{-1} \cap T^{-1}$

Ejercicio 3:
Sea R una relación de equivalencia de A en A. Demuestre que R−1 también Es una relación de equivalencia.
Demostración:

i) Refleja: $\forall x \in A, (x, x) \in R \Leftrightarrow (x, x) \in R^{-1}$

Luego R^{-1} es refleja

ii) Simétrica: $(x, y) \in R^{-1} \Leftrightarrow (y, x) \in R \Leftrightarrow (x, y) \in R$

Por ser R simétrica, como $(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R^{-1}$

Luego R^{-1} es simétrica.

iii) Transitiva: $(x, y) \in R^{-1} \wedge (y, z) \in R^{-1} \Leftrightarrow (y, x) \in R \wedge (z, y) \in R$ de

Aquí $(z, x) \in R \Rightarrow (x, z) \in R^{-1}$ esto prueba que R^{-1} es transitiva.

Ejercicio 4:
Sean S: A → B y R: B → C dos relaciones demostrar que:
$(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$
Demostración:

$\forall (x, y) \in (R \circ S)^{-1} \Leftrightarrow (y, x) \in (R \circ S) \Leftrightarrow \exists z \in B: (y, z) \in R \wedge (z, x) \in S$

$\Leftrightarrow (z, y) \in R^{-1} \wedge (x, z) \in S^{-1}$

$\Leftrightarrow \exists z \in B: (x, z) \in S^{-1} \wedge (z, y) \in R^{-1} \Leftrightarrow (x, y) \in S^{-1} \wedge (z, y) \in R^{-1} \Leftrightarrow$

$(X, y) \in (S^{-1} \circ R^{-1})$

Luego $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$

Ejercicio 5:
Sea R: N2 → N2 definida por (a, b) R (c, d) ⇔ a + d = b + c
Pruebe que R es una relación de equivalencia ($N2 = N \times N$) y determine la clase del elemento (1, 2)
Prueba

Refleja: $\forall (a, b) \in N \times N \Leftrightarrow a + b = b + a \Leftrightarrow (a, b) R(a, b)$

ii) Simétrica: $(a, b) R(c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c \Leftrightarrow c + b = d + a \Leftrightarrow (c, d) R(a, b)$

iii) Transitiva:$(a, b) R(c, d) \wedge (c, d) R (e, f) \Leftrightarrow a + d = b + c \wedge c + f = d + e$

Sumando miembro a miembro resulta $a + d + c + f = b + c + d + e$ de donde

$a + f = b + e \Leftrightarrow (a, b) R (e, f)$

$C (1,2) = \{(n, m)/ (1, 2) R(n, m); n, m \in N\}$

$C (1,2) = \{(n, m)/1 + m = 2 + n\} = \{(n, m)/m - n = 1\}$

Ejercicio 6:

Sea R: N → N una relación definida por:

$R = \{(n, m)/n + 3m = 12; n, m \in N\}$

a) Exprese R como un conjunto de pares ordenados
b) Hallar Dom R y el Rec R
c) Determine R^{-1}

Solución

a) $R = \{(9, 1), (6, 2), (3, 3)\}$
b) Dom R = {3, 6, 9}, Rec R = {1, 2, 3}
c) $R^{-1} = \{(1, 9), (2, 6), (3, 3)\}$ o bien $R^{-1} = \{(n, m)/m + 3n = 12, n, m \in N\}$

Ejercicio 7:

Sea R una relación de equivalencia en A = {a, b, c, d, e} demuestre que si:

$(a, c), (b, d)$ y $(b, c) \in R \Rightarrow (d, a) \in R$

Demostración

Por hipótesis R es refleja, simétrica y transitiva.

Por ser simétrica: $(b, d) \in R \Rightarrow (d, b) \in R \wedge (a, c) \in R \Rightarrow (c, a) \in R$

Por ser transitiva: $(d, b) \in R \wedge (b, c) \in R \Rightarrow (d, c) \in R$

Entonces $(d, c) \in R \wedge (c, a) \in R \Rightarrow (d, a) \in R$

Ejercicio 8:

Sean R y S dos relaciones dadas por

R = {(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 2), (b, 3), (c, 3)}
S = {1, x), (2, x), (3, y)}
Determine: $S \circ R$, $R^{-1} \circ S^{-1}$ y $S^{-1} \circ R^{-1}$

Solución:

Nótese que Dom R = {a, b, c} = A, Rec R = {1, 2, 3} = B
Dom S = B y Rec S = {x, y} = C
Así: $R: A \to B$ y $S: B \to C$, $S \circ R: A \to C$

$S \circ R = \{(u, v) \in A \times C: \exists y \in B/ (u, y) \in R \wedge (y, v) \in S\}$

Luego $S \circ R = \{(a, x), (a, y), (b, x), (b, y), (c, y)\}$ análogamente como $R^{-1} = \{(1, a), (2, a), (3, a), (2, b), (3, b), (3, c)\}$ y
$S^{-1} = \{(x, 1), (x, 2), (y, 3)\}$ se tiene que $R^{-1} \circ S^{-1} = \{(x, a), (x, b), (y, a), (y, b), (y, c)\}$
Note que $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$

$S^{-1} \circ R^{-1}$ es vacía pues si $(x, y) \in S^{-1} \circ R^{-1}$ con $R^{-1}: B \to A \wedge S^{-1}: C \to B$

Y A 6= C.

Ejercicio 9:

Si R: A → A es transitiva demuestre que R−1 también es transitiva.

Demostración:

Por demostrar que si:

$(x, y) \in R^{-1} \wedge (y, z) \in R^{-1} \Rightarrow (x, z) \in R^{-1}$

$(x, y) \in R^{-1} \wedge (y, z) \in R^{-1} \Leftrightarrow (y, x) \in R \wedge (z, y) \in R \Leftrightarrow (z, y) \in R \wedge (y, x) \in R \Rightarrow (z, x) \in R \to (x, z) \in R^{-1}$ Como se quería

Ejercicio 10:

Sea R: Z → Z definida por

$(k, p) \in R \Leftrightarrow \exists m \in Z+: k = mp$

Demuestre que R es una relación de orden parcial.

Demostración

Debemos demostrar que R es: refleja, transitiva y antisimétrica.
Refleja:

$\forall z \in Z, \exists 1 \in Z+: 1z = z \Leftrightarrow (z, z) \in R$

Transitiva:

$(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \Leftrightarrow \exists m1,m2 \in Z+/a = m1b \wedge b = m2c \Leftrightarrow$

$a = m1m2c$, sea $m1m2 = m$; $m \in Z+ \Leftrightarrow a = mc \Leftrightarrow (a, c) \in R$

Antisimétrica:

$(a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \Leftrightarrow \exists m1,m2 \in Z+/a = m1b \wedge b = m2a \Leftrightarrow$

$\exists m1,m2 \in Z+/a = m1m2a$, ahora:

Si a 6= 0 $\Rightarrow m1m2 = 1$ como $m1 \wedge m2 \in Z+ \Rightarrow m1 = m2 = 1$ en cuyo caso

$a = b$.

Si $a = 0 \Leftrightarrow b = 0$, $\forall m1,m2 \in Z+$ así también $a = b$

III. APLICACIONES DE LAS FUNCIONES REALES

Generalmente se hace uso de las funciones reales, (aún cuando el ser humano no se da cuenta), en el manejo de cifras numéricas en correspondencia con otra, debido a que se está usando subconjuntos de los números reales. Las funciones son de mucho valor y utilidad para resolver problemas de la vida diaria, problemas de finanzas, de economía, de estadística, de ingeniería, de medicina, de química y física, de astronomía, de geología, y de cualquier área social donde haya que relacionar variables.

Cuando se va al mercado o a cualquier centro comercial, siempre se relaciona un conjunto de determinados objetos o productos alimenticios, con el costo en pesos para así saber cuánto podemos comprar; si lo llevamos al plano, podemos escribir esta correspondencia en una ecuación de función "x" como el precio y la cantidad de producto como "y".

Se puede aplicar en muchas situaciones, por ejemplo en economía (uso de la oferta y la demanda) los ecónomos se basan en la linealidad de esta función y las leyes de la oferta y la demanda son dos de las relaciones fundamentales en cualquier análisis económico. Por ejemplo, si un consumidor desea adquirir cualquier producto, este depende del precio en que el artículo esté disponible. Una relación que especifique la cantidad de un artículo determinado que los consumidores estén dispuestos a comprar, a varios niveles de precios, se denomina ley de demanda. La ley más simple es una relación del tipo $P= mx + b$, donde P es el precio por unidad del artículo y m y b son constantes.

Muchas son las aplicaciones de la función lineal en el caso de la medicina. Ciertas situaciones requieren del uso de ecuaciones lineales para el entendimiento de ciertos fenómenos. Un ejemplo es el resultado del experimento psicológico de Stenberg, sobre recuperación de información.

Esta dada por la formula $y=mx+b$ donde m y b son números reales llamados pendiente y ordenada al origen respectivamente. Su gráfica es una recta.

Dada la ecuación $y=mx+b$:Si $m=0$, entonces $y=b$. Es decir, se obtiene la función constante, cuya gráfica es una recta paralela al eje x que pasa por el punto (0,b).
Si $b=0$, entonces $y=mx$. Esta ecuación tiene por gráfica una recta que pasa por el origen de coordenadas (0,0).

Función Cuadrática.

El estudio de las funciones cuadráticas resulta de interés no sólo en matemática sino también en física y en otras áreas del conocimiento como por ejemplo: la trayectoria de una pelota lanzada al aire, la trayectoria que describe un río al caer desde lo alto de una montaña, la forma que toma una cuerda floja sobre la cual se desplaza un equilibrista, el recorrido desde el origen, con respecto al tiempo transcurrido, cuando una partícula es lanzada con una velocidad inicial.

Puede ser aplicada en la ingeniería civil, para resolver problemas específicos tomando como punto de apoyo la ecuación de segundo grado, en la construcción de puentes colgantes que se encuentran suspendidos en uno de los cables amarrados a dos torres.

Los biólogos utilizan las funciones cuadráticas para estudiar los efectos nutricionales de los organismos.

Existen fenómenos físicos que el hombre a través de la historia ha tratado de explicarse. Muchos hombres de ciencias han utilizado como herramienta principal para realizar sus cálculos la ecuación cuadrática. Como ejemplo palpable, podemos mencionar que la altura S de una partícula lanzada verticalmente hacia arriba desde el suelo está dada por S= V0t - ½ gt2, donde S es la altura, V0 es la velocidad inicial de la partícula, g es la constante de gravedad y t es el tiempo.
La función cuadrática responde a la formula: y= a x2 + b x + c con a =/ 0. Su gráfica es una curva llamada parábola cuyas características son:
Si a es mayor a 0 es cóncava y admite un mínimo. Si a es menor a 0 es convexa y admite un máximo.

Vértice: Puntos de la curva donde la función alcanza el máximo o el mínimo.
Eje de simetría: x = xv. intersección con el eje y.

Intersecciones con el eje x: se obtiene resolviendo la ecuación de segundo grado.

Función Logarítmica
La geología como ciencia requiere del planteamiento de ecuaciones logarítmicas para el cálculo de la intensidad de un evento, tal como es el caso de un sismo. La magnitud R de un terremoto está definida como R= Log (A/A0) en la escala de Richter, donde A es la intensidad y A0 es una constante. (A es la amplitud de un sismógrafo estándar, que está a 100 kilómetros del epicentro del terremoto).
Los astrónomos para determinar una magnitud estelar de una estrella o planeta utilizan ciertos cálculos de carácter logarítmico. La ecuación logarítmica les permite determinar la brillantez y la magnitud.

En la física la función logarítmica tiene muchas aplicaciones entre las cuales se puede mencionar el cálculo del volumen "L" en decibeles de un sólido, para el cual se emplea la siguiente ecuación L= 10 . Log (I/I0) , donde I es la intensidad del sonido(la energía cayendo en una unidad de área por segundo), I0 es la intensidad de sonido más baja que el oído humano puede oír (llamado umbral auditivo). Una conversación en voz alta tiene un ruido de fondo de 65 decibeles.

El logaritmo en base b de un número a es igual a N, si la base b elevada a N da como resultado

Logb a = N si b N = a

Notación logarítmica

$\log_2 8 = 3$

Notación exponencial $2^3 = 8$

Hallar las funciones inversas de:

1

$$f(x) = 2x + 1$$

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}$$

2

$$f(x) = \frac{2x - 3}{4}$$

$$y = \frac{2x - 3}{4} \qquad 4y = 2x - 3$$

$$x = \frac{4y - 3}{2} \qquad f^{-1}(x) = \frac{4x - 3}{2}$$

3

$$f(x) = \frac{x + 3}{x - 2}$$

$$y = \frac{x + 3}{x - 2} \qquad y(x - 2) = x + 3$$

$$yx - 2y = x + 3 \qquad x(y - 1) = 2y + 3$$

$$x = \frac{2y + 3}{y - 1} \qquad f^{-1}(x) = \frac{2x + 3}{x - 1}$$

4

$$f(x) = x^2$$

$$y = x^2 \qquad x = \pm\sqrt{y}$$

$$f^{-1}(x) = \pm\sqrt{x}$$ No es una función

5

$$f(x) = \sqrt{-x^2 - 4x - 4}$$

$$-(x + 2)^2 \geq 0 \qquad D = \varnothing$$

6

$$f(x) = \sqrt{x^3 - 4x^2 + 3x}$$

$$x(x^2 - 4x + 3) \geq 0 \qquad x(x - 1)(x - 3) \geq 0$$

$$D = [0,1] \cup [3,\infty)$$

7 $f(x)=\dfrac{x-5}{\sqrt{x-2}}$

$x-2>0$ $\quad D=(2,\infty)$

8 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-2}}{x-5}$

$\begin{cases} x-5\neq 0 & D=\mathbb{R}-\{5\} \\ x-2\geq 0 & D=[2,\infty) \end{cases}$ $\quad D=[2,5)\cup(5,\infty)$

9 $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{3x+2}{x+1}}$

$D=\mathbb{R}-\{-1\}$

10 $f(x)=\sqrt{x^2+x+4}$

$x^2+x+4\geq 0$ $\quad D=\mathbb{R}$

$f(x)=\sqrt{-x^2-4x-4}$

$-(x+2)^2\geq 0$ $\quad D=\varnothing$

11 $f(x)=\sqrt{x^3-4x^2+3x}$

$x(x^2-4x+3)\geq 0$ $\quad x(x-1)(x-3)\geq 0$

$D=[0,1]\cup[3,\infty)$

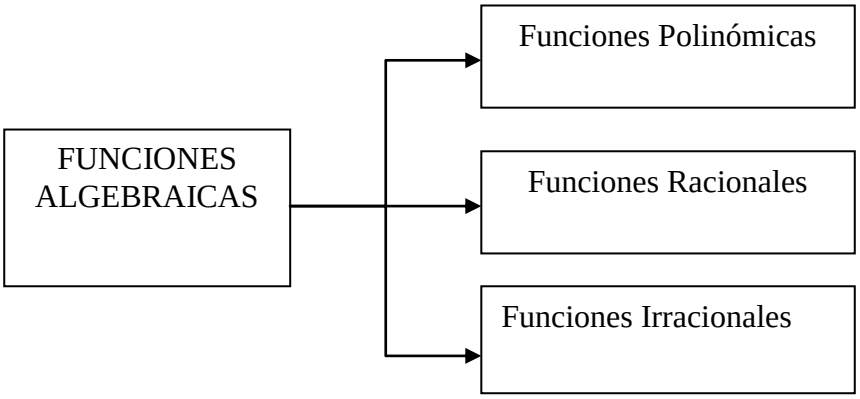
12 $f(x)=\dfrac{x-5}{\sqrt{x-2}}$

$x-2>0$ $\quad D=(2,\infty)$

IV. FUNCIONES ALGEBRAICAS

Las funciones algebraicas son aquellas en que las variables están enlazadas con las constantes, solo por adición, sustracción, etc., sin entrar en ellas líneas trigonométricas, logaritmos, etc.; pues cuando entran estas cantidades se les llama funciones trascendentes.

El conjunto de funciones algebraicas es ilimitado.



1. **<u>Funciones Polinómicas:</u>**

Son las funciones que vienen definidas por un polinomio, su dominio es los R.

$$f(x) = a0x^0 + a1x + a2x^2 + a3x^3 + \ldots + anx^n$$

1.1 Función Constante:

Es la función que toma el mismo valor.

$f(x) = k$

K: es la constante, y viene dado por cualquier R

1.2 Función Lineal:

La función lineal es la función polinómica de primer grado. $a \neq 0$

$f(x) = ax + b$

1.3 Función Cuadrática:

Es la función que se manifiesta mediante un polinomio de segundo grado. $a \neq 0$

$f(x) = ax^2 + bx + c$

1.4 Función Cúbica:

La función cúbica es de la forma, $a \neq 0$

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

2. Funciones Racionales:

2.1 Función Explícita:

Una función es explícita cuando la ecuación actúa como regla de correspondencia, se tiene despejada la variable y los términos de la variable.

$f(x) = 3x^2 + 2x + 1$

La ecuación permite calcular directamente para cualquier valor de “x”.

2.2 Función Implícita:

Una función implícita se caracteriza porque en la ecuación que actúa como regla de correspondencia, la variable dependiente no se encuentra despejada

Esta definida de la forma:

$f(x, y) = 0$

Una ecuación implícita podría ser:

Ejercicios resueltos:

1. Demostrar que A X (B∩C)= (AXB) ∩ (AXC)

Resolución:

Sea (x, y) Є A X (B ∩ C)

→ X Є A Λ y Є (B ∩ C)

→ X Є A Λ [y Є B Λ y Є C]

De donde:

→(x Є A Λ y Є B) Λ (X Є A Λ y Є C)

→(x, y) Є AXB Λ (x, y) Є AXC

→(x, y) Є (AXB) ∩ (AXC)

→AX (BXC) C (AXB) ∩ (AXC)

2. SI AXB = {(1,3), (1,5), (2,3), (2.5))}

BXC = {(3,2), (3,3) , (3,5) , (5,2) , (5,3) ,(5,5)}

Halle el conjunto (AUB)-C

Resolución:

Por definición:

AXB = {todos (a, b)/a Є A Λ b Є B}

Luego de AXB = {(1,3), (1,5), (2,3), (2,5)} se tiene:

A = {1,2}, B= {3,5}

De BXC = {(3,2), (3,3), (3,5), (5,2), (5,3), (5,5)} se tiene:

C= {2, 3,5}

Se busca (AUB)-C

Definición: (AUB)-C= {x Є A V x Є B Λ x ¢ C}

→AUB= {1, 2, 3,5}, C= {2, 3,5}

→ (AUB)-C= {1}

→ (AUB)-C = {1}

3. DEMOSTAR:
(AUB) ∩ C = (A∩C) U (B∩C)
Solución por doble inclusión:
Sea x Є (AUB) ∩ C
→ X Є (AUB) Λ x Є C
→ (X Є A V x Є B) Λ x Є C
→(x Є A Λ x Є C) V (x Є B Λ x Є C)
→x Є (A ∩ C) V x Є (B∩C)
→x Є (A ∩ C) U (B∩C)
→ (AUB) ∩ C c (A∩C) U (B∩C)

4. DEMOSTRAR:
Sea x Є (A∩ C) U (B∩C)
→x Є (A∩C) V x Є (B ∩C)
→(X Є A Λ x Є C) V (X є B Λ x Є C)
→(x Є A V x Є B) Λ x Є C
→x Є (AUB) ∩ C
→ (A∩C) U (B∩C) c (AUB) ∩C

V. TIPOS DE FUNCIONES

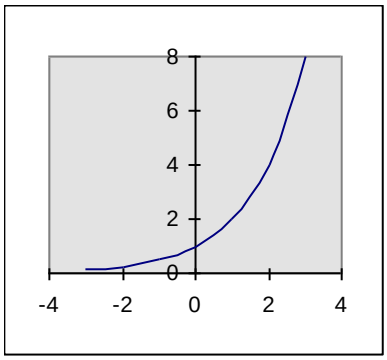
➢ FUNCIONES EXPONENCIALES

Si: $f(x) = x^2$ y $g(x) = 2^x$, Las funciones f y g no son iguales.
La función $f(x) = x^2$ es una función que tiene una variable elevada a un exponente constante.
La función $g(x) = 2^x$ es una función con una base constante elevada a una variable. Esta es un nuevo tipo de función llamada **función exponencial**.

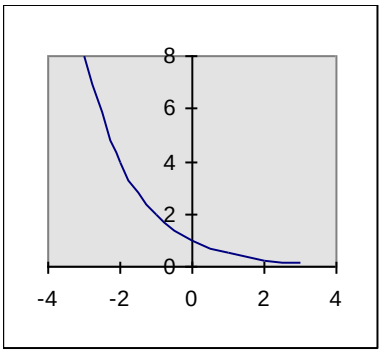
Definición: Una **función exponencial** con base b es una función de la **forma $f(x) = b^x$**, donde b y x son números reales tal que b > 0 y b es diferente de uno.

El **dominio** es el conjunto de todos los números reales y el **recorrido** es el conjunto de todos los números reales positivos.

1) $f(x) = 2^x$, tabulando la siguiente función , genera el siguiente grafico:



2) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(2^{-1}\right)^x = 2^{-x}$, tabulando la siguiente función, genera el siguiente grafico:



Propiedades de $f(x) = b^x$, b>0, b diferente de uno:

1) Todas las gráficas intersecan en el punto (0,1).
2) Todas las gráficas son continuas, sin huecos o saltos.
3) El eje de x es la asíntota horizontal.
4) Si b > 1 (b, base), entonces b^x aumenta conforme aumenta x.
5) Si 0 < b < 1, entonces b^x disminuye conforme aumenta x.
6) La función f es una función uno a uno.

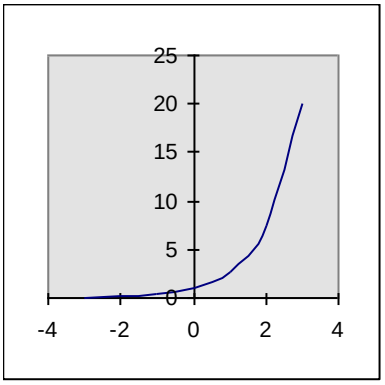
La función exponencial de base e

Al igual que π, **e** es un número irracional donde **e = 2.71828...** La notación **e** para este número fue dada por Leonard Euler (1727).

Definición: Para un número real x, la ecuación **$f(x) = e^x$** define a la **función exponencial de base e**.

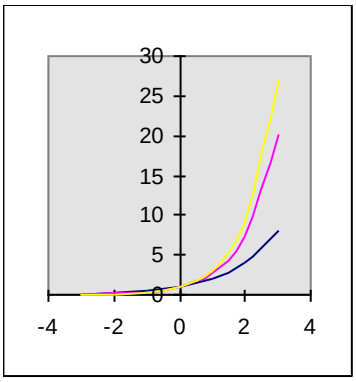
Las calculadoras científicas y gráficas contienen una tecla para la función $f(x) = e^x$.

La gráfica de $f(x) = e^x$ es:



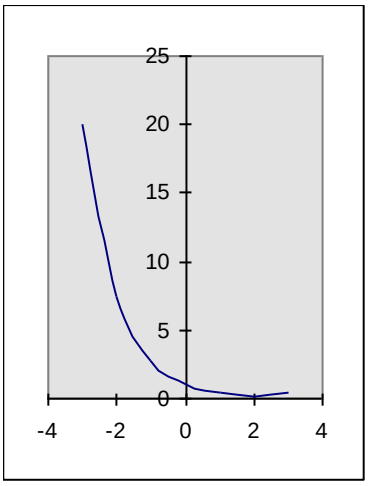
El **dominio** es el conjunto de los números reales y el **rango** es el conjunto de los números reales positivos.

La función **$f(x) = e^x$** es una **función exponencial natural**. Como 2<e<3, la gráfica de $f(x) = e^x$ está entre $f(x) = 2^x$ y $f(x) = 3^x$, como se ilustra a continuación:



En la simplificación de expresiones exponenciales y en las ecuaciones exponenciales con base **e** usamos las mismas propiedades de las ecuaciones exponenciales con base **b.**

La gráfica de la función exponencial $f(x) = e^{-x}$ es:



➢ ***FUNCIONES TRIGONOMETRICAS***

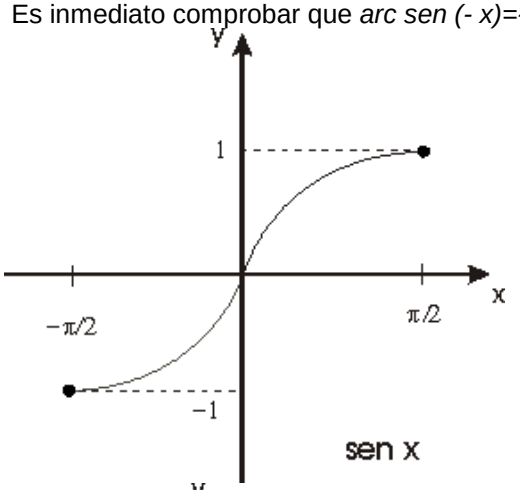
- **Trigonométricas circulares directas:**
  Son aquellas cuyos valores dependen de un ángulo, y son el seno, coseno, tangente, cotangente, secante, cosecante de este ángulo.

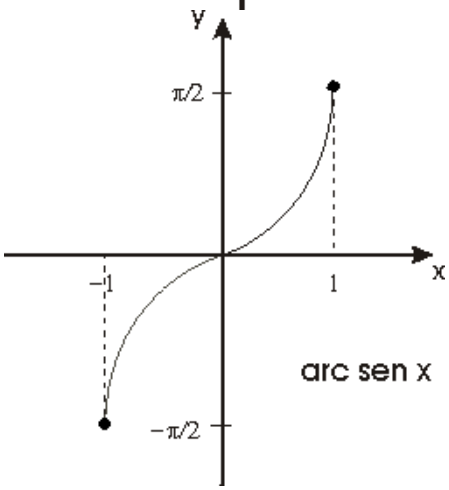
- **Trigonométricas circulares inversas:**
  la función **f(x)=sen x**, definida en el intervalo [-p /2, p /2], es continua, estrictamente creciente y transforma dicho intervalo en el [-1, 1]. Esta función es pues un homeomorfismo del primer intervalo sobre el segundo y su función inversa que denotaremos por

  $$f^{-1}(x)=\text{arc sen } x$$

  Estará **definida de [-1, 1]** siendo también **continua y estrictamente creciente**.

Es inmediato comprobar que *arc sen (- x)=- arc sen x* para todo *x* en [-1, 1].



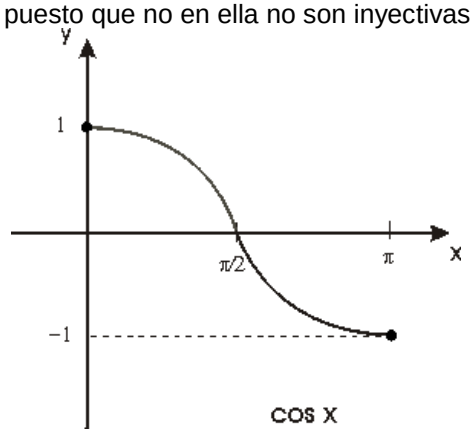


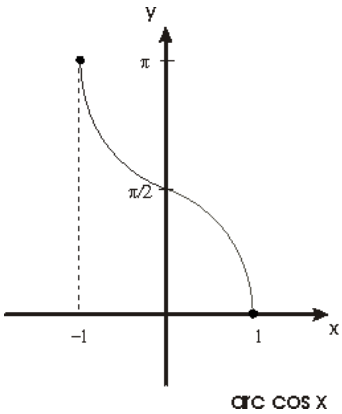
La función ***f(x)=cos x***, definida en el intervalo cerrado [0, p], es continua, estrictamente decreciente y transforma dicho intervalo en el [-1, 1]. Esta función es pues un homeomorfismo del primer intervalo sobre el segundo y su función inversa que denotaremos por

$$f^{-1}(x)=\text{arc cos } x$$

Estará **definida de [-1, 1]** siendo también **continua y estrictamente decreciente**.

Nótese que en ambos casos las funciones seno y coseno no se han considerado en toda la recta real puesto que no en ella no son inyectivas y por lo tanto su función inversa no estaría definida.





Teorema.- Las funciones trigonométricas inversas *arc cos x* y *arc sen x* definidas en el intervalo [-1,1] son **derivables** en todos los puntos de (-1, 1) y se tiene

$$\frac{d}{dx}\mathbf{arccos}x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \frac{d}{dx}\mathbf{arcsen}x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

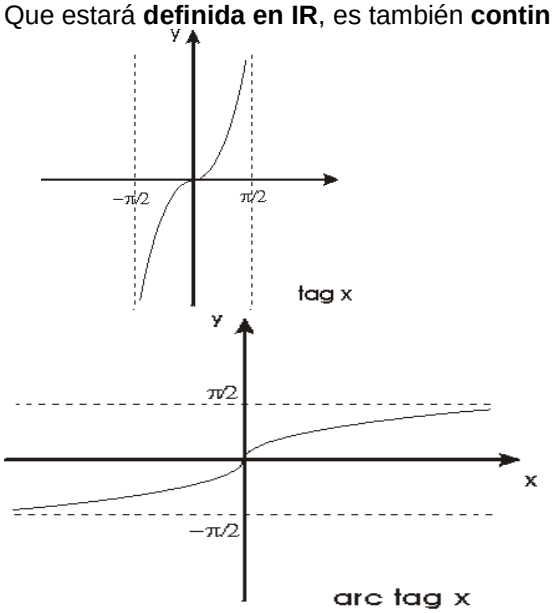
La función ***f(x)=tag x***, definida en el intervalo (-p /2,p /2), es continua, estrictamente creciente y transforma dicho intervalo en IR puesto que

$$lim_{x \to -\pi/2}\,\mathbf{tag}\,x = -\infty, \qquad lim_{x \to \pi/2}\,\mathbf{tag}\,x = \infty$$

Esta función es pues un homeomorfismo del primer intervalo sobre toda la recta real y su función inversa

f^{-1}(x)=arc tag x

Que estará **definida en IR**, es también **continua y estrictamente creciente**.



Además *arc tag x* es derivable en todo punto y su **derivada** viene dada por

$$\frac{d}{dx}\mathbf{arctag}\,x = \frac{1}{1+x^2}.$$

Las funciones trigonométricas inversas verifican las siguientes **igualdades**

- *arc cos x + arc cos (-x) = p ,*
- *arc cos x + arc sen x = p /2,*
- *arc tag x = -arc tag (-x).*

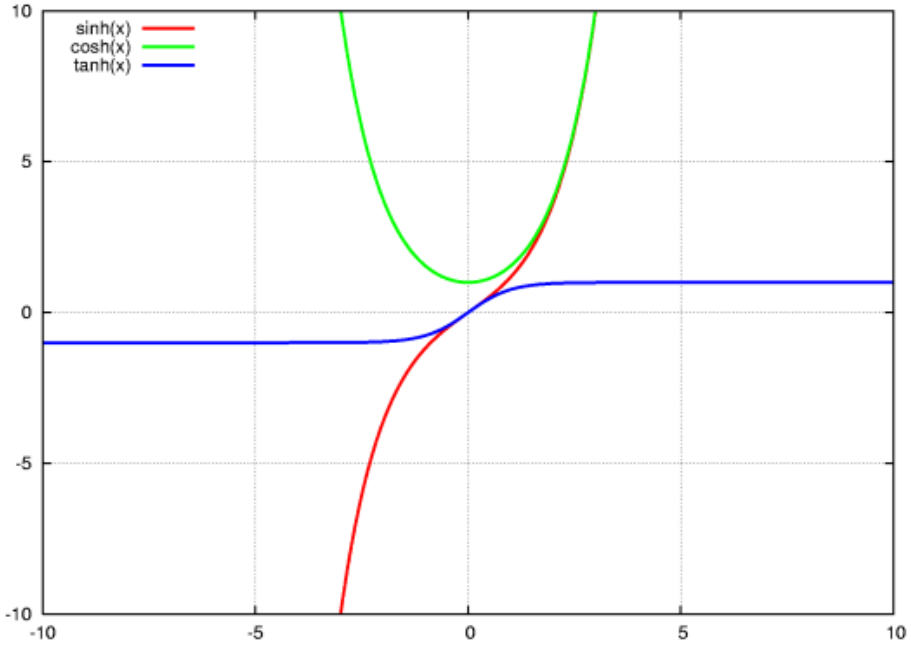
El **resto de las funciones trigonométricas inversas** se consiguen de forma similar aunque es usual considerar la función cotangente definida en (0,p), la función secante definida en [0, p]-{p /2} y la

función cosecante en el intervalo [-p /2,p /2]-{0} (donde son inyectivas) para definir sus inversas que entonces verificarán las siguientes **igualdades**:

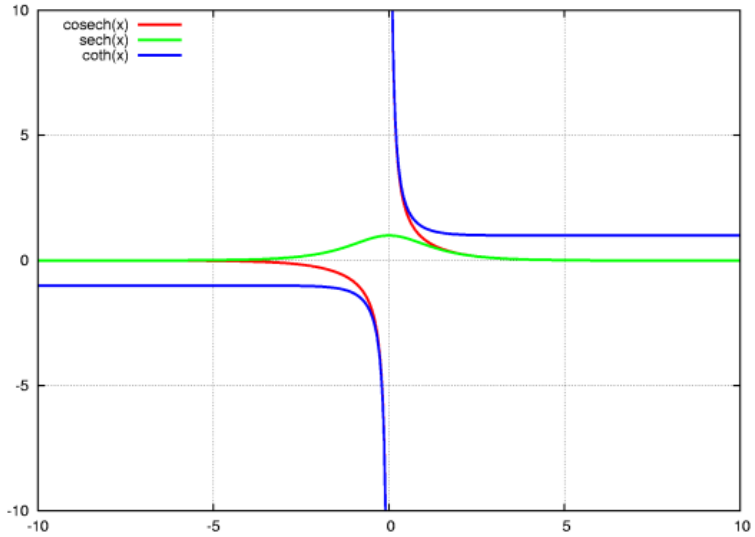
- *arc cotag x = p /2 - arc tag x,*
- *arc sec x = arc cos (1/x)*,
- *arc cosec x = arc sen (1/x).*
-

➢ ***FUNCIÓN HIPERBÓLICA***

Las **funciones hiperbólicas** son análogas a las funciones trigonométricas ordinarias o funciones circulares. Estas son:



sinh, cosh y tanh



csch, sech y coth

El seno hiperbólico

$$\sinh(wx) = \frac{e^{wx} - e^{-wx}}{2}$$

El coseno hiperbólico

$$\cosh(wx) = \frac{e^{wx} + e^{-wx}}{2}$$

La tangente hiperbólica

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

y otras líneas:

$$\coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}$$

(*cotangente hiperbólica*)

$$\operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)}$$

(*secante hiperbólica*)

$$\operatorname{csch}(x) = \frac{1}{\sinh(x)}$$

(*cosecante hiperbólica*)

- **Función logarítmica**

Se llama así a la función inversa a la exponencial, que existe en base a lo demostrado anteriormente:
x = ð (y) = loga y, definida para 0<y<+ð, si a>0 y að1.
Escribamos ahora la función de otra forma:
y = ð (x) = loga x,
donde llamamos de nuevo x a la variable independiente e y a la función, y obtenemos de la gráfica de la función exponencial, la gráfica de la función logarítmica por simetría de primer y tercer cuadrantes.
Por las propiedades de los logaritmos vistas previamente enunciamos las siguientes:
· La función logax sólo está definida para x>0.
· logaa =1 y loga1=0. [Todas las gráficas pasan por el punto (1, 0)]
· Para a>1 (es decir, b>0) es monótona creciente desde -ð hasta +ð; para a<1 (es decir, b<0) es monótona decreciente desde +ð hasta -ð, tanto más lentamente cuanto mayor sea
ð loga xð .
lim logax = + ð (a>1) lim logax = ðð (0<a<1)
x →ð ð x →ð ð
· La curva se aproxima asintóticamente al eje y(para a>1 hacia abajo, para a< 1 hacia arriba), tanto más rápidamente cuanto mayor sea ð logaxð .
lim logax = ðð (a>1) lim logax = +ð (0<a<1)
x →0ð x →0+

VI. BIBLOGRAFÍA

- **http://books.google.com.pe/books?id=0kLDrfUVXbgC&pg=PA24&lpg=PA24&dq=funciones+trascendentes+hiperb%C3%B3licas&source=bl&ots=sJ5k7paqiT&sig=r4424CqiQ1CbvOeDqhsfAli6bMg&hl=es&ei=W2ImTMLmMsiVlAfBh4iVBQ&sa=X&oi=book_result&ct=result&resnum=7&ved=0CCoQ6AEwBg#v=onepage&q=funciones%20trascendentes%20hiperb%C3%B3licas&f=false**

- **http://bc.inter.edu/facultad/ntoro/expow.htm**

- **http://wmatem.eis.uva.es/~matpag/CONTENIDOS/Tfuncele1/marco_funele.htm**
- **http://materias.fi.uba.ar/61107/Apuntes/Rel00.pdf**

Autores:
Luna Rojas, Elvis
Maldonado Oré, Josselyn
Malpica Mateo, Vladimir
Nuñez Huertas, Isabel
Saco Tapia, Junior

Varillas Tacza, Yeni
Vasquez Ayala, Rosita
pilar_rosita92@hotmail.com
Vásquez Pichilingue, Carmen
ÁREA: Terapia Ocupacional
CURSO: Matemática
TEMA: Relaciones y Funciones
PROFESOR: Raúl Castro Vidal
SAN FERNANDO 2010
UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
LA DECANA DE AMÉRICA
FACULTAD DE MEDICINA
E.A.P. DE TECNOLOGÍA MÉDICA