Titulo: **SUMA Y RESTA DE POLINOMIOS**

Año escolar: 2do: año de bachillerato
Autor: José Luis Albornoz Salazar
Ocupación: Ing Civil. Docente Universitario
País de residencia: Venezuela
Correo electrónico: martilloatomico@gmail.com

El autor de este trabajo solicita su valiosa colaboración en el sentido de enviar cualquier sugerencia y/o recomendación a la siguiente dirección :

martilloatomico@gmail.com

Igualmente puede enviar cualquier ejercicio o problema que considere pueda ser incluido en el mismo.

Si en sus horas de estudio o práctica se encuentra con un problema que no pueda resolver, envíelo a la anterior dirección y se le enviará resuelto a la suya.

◄MONOMIO : *Es una expresión algebraica que consta de un solo término.*

Ejemplos : $3a$, $-9b$, X^2, $-5X^3Y^5$, $\frac{XY^2}{2a}$

◄POLINOMIO : *Es una expresión algebraica que consta de más de un término.*

Ejemplos : $a + b$, $a + x - y$, $X^3 + 2X^2 + X - Y$

BINOMIO *es un polinomio que consta de dos términos.*

Ejemplos : $a + b$, $x - y$, $-\frac{XY^2}{2a} + \frac{Y}{b}$

TRINOMIO *es un polinomio que consta de tres términos.*

Ejemplos : $a + b - c$, $x - y + 6$, $5X - \frac{XY^2}{2a} + \frac{Y}{b}$

EL GRADO *de un polinomio puede ser* ***absoluto y con relación a una letra.***

Grado absoluto *de un polinomio es el grado de su término de mayor grado. Así, en el polinomio $X^4 - 5X^3 + X^2 - 3X$ el primer término es de cuarto grado; el segundo, de tercer grado; el tercero, de segundo grado, y el ultimo, de primer grado; luego, el* ***grado absoluto del polinomio es el cuarto.***

Grado *de un polinomio* ***con relación a una letra*** *es el mayor exponente de dicha letra en el polinomio. Así, el polinomio $a^6 + a^4x^2 - a^2x^4$ es de* ***sexto grado*** *con relación a la "a" y de* ***cuarto grado*** *con relación a la "x".*

Se dice que un ***polinomio*** *es* ***completo con relación a una letra*** *cuando contiene todos los exponentes sucesivos de dicha letra, desde el más alto al más bajo que tenga dicha letra en el polinomio. Así, el polinomio $x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - 3x$ es completo respecto de la "x", porque contiene todos los exponentes sucesivos de la "x" desde el más alto "5", hasta el más bajo "1", o sea 5, 4, 3, 2, 1; el polinomio $a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4$ es completo respecto de "a" y "b".*

Polinomio ordenado con respecto a una letra *es un polinomio en el cual los exponentes de una letra escogida, van aumentando o disminuyendo. Así, el polinomio $x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 5x + 8$ está ordenado en* ***orden descendente*** *con relación a la letra "x"; el polinomio $a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4$ está ordenado en* ***orden descendente*** *respecto a la letra "a" y en* ***orden ascendente*** *respecto a la letra "b".*

◄SUMA DE POLINOMIOS : *Para sumar dos o más polinomios se escriben uno a continuación de los otros con sus propios signos y se reducen los términos semejantes si los hay.*

Ejemplo : ***Sumar $-3a + 5b$ y $-9b + 2a$***

Se escriben los dos polinomios uno a continuación del otro conservando los signos :

$$-3a + 5b - 9b + 2a$$

Se reducen por separado los términos semejantes entre si.

Trabajando con "a" : $-3a + 2a = -a$

Trabajando con "b" : $+5b - 9b = -4b$

$$-3a + 5b - 9b + 2a = -a - 4b$$

En la práctica, suelen colocarse los polinomios unos debajo de los otros de modo que los términos semejantes queden en columnas y se hace la reducción de éstos, separándolos unos de otros con sus propios signos.

Ejemplos :

1) ***Sumar 4a – 3b – 5c y 7b – 9a – 3c***

Se coloca uno debajo del otro de manera que los términos semejantes queden en columnas ("a" debajo de "a", "b" debajo de "b" y "c" debajo de "c"). Todos los términos conservan sus signos.

El segundo polinomio se reordena de manera tal que las letras queden en el mismo orden que en el primer polinomio:

$$\begin{array}{rrr} +4a & -3b & -5c \\ -9a & +7b & -3c \\ \hline \end{array}$$

Posteriormente se reducen los términos semejantes en sentido vertical.

$$\begin{array}{rrr} +4a & -3b & -5c \\ -9a & +7b & -3c \\ \hline -5a & +4b & -8c \end{array}$$

Resultado : **– 5a + 4b – 8c**

2) ***Sumar $5X^3 + 3X - 2$ y $2X^2 - 9X + 4$***

Se coloca uno debajo del otro de manera que los términos semejantes queden en columnas. Todos los términos conservan sus signos.

Los polinomios deben ordenarse en el mismo sentido (ascendente o descendente) y donde falte un término se dejará el espacio vacío.

$$\begin{array}{rrrr} 5X^3 & & +3X & -2 \\ & 2X^2 & -9X & +4 \\ \hline \end{array}$$

Posteriormente se reducen los términos semejantes en sentido vertical. En la columna donde haya un solo término se coloca tal como esté.

$$\begin{array}{rrrr} 5X^3 & & +3X & -2 \\ & 2X^2 & -9X & +4 \\ \hline 5X^3 & +2X^2 & -6X & +2 \end{array}$$

Resultado : **$5X^3 + 2X^2 - 6X + 2$**

3) ***Sumar $5X^3 + 3X - 2$; $X^4 - 6X^2$; $2X^2 - 9X + 7$***

Se colocan uno debajo del otro de manera que los términos semejantes queden en columnas. Todos los términos conservan sus signos.

Los polinomios deben ordenarse en el mismo sentido (ascendente o descendente) y donde falte un término se dejará el espacio vacío.

$$\begin{array}{rrrrr} & 5X^3 & & +3X & -2 \\ X^4 & & -6X^2 & & \\ & & 2X^2 & -9X & +7 \\ \hline \end{array}$$

Posteriormente se reducen los términos semejantes en sentido vertical. En la columna donde haya un solo término se coloca tal como esté.

$$\begin{array}{rrrrr} & 5X^3 & & +3X & -2 \\ X^4 & & -6X^2 & & \\ & & 2X^2 & -9X & +7 \\ \hline \mathbf{X^4} & \mathbf{+5X^3} & \mathbf{-4X^2} & \mathbf{-6X} & \mathbf{+5} \end{array}$$

4) ***Sumar $a^3 - b^3$; $-5a^2b - 4ab^2$; $a^3 - 7ab^2 - b^3$***

$$\begin{array}{rrrrr} a^3 & & & & -b^3 \\ & -5a^2b & -4ab^2 & & \\ a^3 & & -7ab^2 & & -b^3 \\ \hline 2a^3 & -5a^2b & -11ab^2 & & -2b^3 \end{array}$$

5) **Sumar** $X^3 - XY^2 - Y^3$; $X^3 - 5X^2Y - Y^3$; $2X^3 - 4XY^2 - 5Y^3$

$$\begin{array}{llll} x^3 & & -xy^2 & -y^3 \\ x^3 & -5x^2y & & -y^3 \\ 2x^3 & & -4xy^2 & -5y^3 \\ \hline 4X^3 & -5X^2Y & -5XY^2 & -7Y^3 \end{array}$$

6) **Sumar** $X^4 - X^2Y^2$; $-5X^3Y + 6XY^3$; $-4XY^3 + Y^4$; $-4X^2Y^2 - 6$

$$\begin{array}{lllllll} x^4 & & -x^2y^2 & & & & \\ & -5x^3y & & +6xy^3 & & & \\ & & & -4xy^3 & +y^4 & & \\ & & -4x^2y^2 & & & -6 & \\ \hline x^4 & -5x^3y & -5x^2y^2 & +2xy^3 & +y^4 & -6 & \end{array}$$

◄RESTA DE POLINOMIOS : *Para restar dos polinomios se debe escribir el minuendo con sus propios signos y a continuación el sustraendo con los signos cambiados y se reducen los términos semejantes si los hay.*

minuendo

$$m - s = d$$

sustraendo *diferencia*

Ejemplo : **De** $-3a + 5b$ **restar** $9b - 2a$

Se escribe el minuendo (al que se le va a restar) con sus propios signos y a continuación el sustraendo (lo que se va a restar) con los signos cambiados :

$$-3a + 5b - 9b + 2a$$

Se reducen por separado los términos semejantes entre sí.

Trabajando con "a" : $-3a + 2a = -a$
Trabajando con "b" : $+5b - 9b = -4b$
$= -a - 4b$

$$(-3a + 5b) - (9b - 2a) = -3a + 5b - 9b + 2a = -a - 4b$$

En la práctica, suele escribirse el sustraendo con sus signos cambiados debajo del minuendo, de modo que los términos semejantes queden en columnas y se hace la reducción de éstos, separándolos unos de otros con sus propios signos.

Ejemplo :

1) $5X^3 + 3X - 2$ **menos** $-2X^2 + 9X - 4$

Se le cambian los signos al sustraendo (lo que se va a restar)

$$2X^2 - 9X + 4$$

Se coloca debajo del minuendo (al que se le va a restar) de manera que los términos semejantes queden en columnas.

Los polinomios deben ordenarse en el mismo sentido (ascendente o descendente) y donde falte un término se dejará el espacio vacío.

$$\begin{array}{lll} 5X^3 & & +3X - 2 \\ & 2X^2 & -9X + 4 \\ \hline \end{array}$$

Posteriormente se reducen los términos semejantes en sentido vertical. En la columna donde haya un solo término se coloca tal como esté.

$$\begin{array}{lll} 5X^3 & & +3X - 2 \\ & 2X^2 & -9X + 4 \\ \hline 5X^3 & +2X^2 & -6X + 2 \end{array}$$

Resultado : $5X^3 + 2X^2 - 6X + 2$

Es bueno aclarar que en la resta de polinomios se aplican los mismos criterios que en la suma de polinomios una vez que se le cambien los signos al sustraendo (lo que se va a restar).

Lo importante entonces es identificar el sustraendo (lo que se va a restar) y cambiarle todos los signos, no importa la forma como se plantee el ejercicio.

Ejercicios :

1) *De* **a + b** *restar* **a – b**
2) *De* **2X – 3Y** *restar* **– X + 2Y**
3) *De* **8a + b** *restar* **– 3a + 4**
4) *De* **X^2 – 3X** *restar* **– 5X + 6**

Respuestas:

1. $$\begin{array}{r} a+b \\ -a+b \\ \hline 2b \end{array}$$

2. $$\begin{array}{r} 2x-3y \\ x-2y \\ \hline 3x-5y \end{array}$$

3. $$\begin{array}{r} 8a\ +b \\ 3a\qquad -4 \\ \hline 11a+b-4 \end{array}$$

4. $$\begin{array}{r} x^2-3x \\ 5x-6 \\ \hline x^2+2x-6 \end{array}$$

5) *Restar* **$7a^2b + 9ab^2$** *de* **$a^3 – a^2b$**
6) *Restar* **X – Y + Z** *de* **X – Y + Z**
7) *Restar* **– X – Y + Z** *de* **X + Y – Z**

Respuestas:

5. $$\begin{array}{r} a^3-a^2b \\ -7a^2b-9ab^2 \\ \hline a^3-8a^2b-9ab^2 \end{array}$$

6. $$\begin{array}{r} x-y+z \\ -x+y-z \\ \hline 0 \end{array}$$

7. $$\begin{array}{r} x+y-z \\ x+y-z \\ \hline 2x+2y-2z \end{array}$$

◄SIGNOS DE AGRUPACIÓN : *Los signos de agrupación son de cuatro (4) clases : el paréntesis ( ), el corchete [ ], las llaves { } y el vínculo o barra — (el último es muy poco usado).*

Los signos de agrupación se emplean para indicar que las cantidades encerradas en ellos deben considerarse como un ***todo****, o sea, como* ***una sola cantidad****.*

Así, X + (Y – Z), que equivale a X + (+Y – Z), indica que la diferencia Y – Z debe sumarse con X, y ya sabemos que para efectuar esta suma escribimos a continuación de X las demás cantidades con su propio signo y tendremos :

X + (Y – Z) = X + Y – Z

La expresión X+(–2Y+Z) indica que a X hay que sumarle – 2Y + Z; luego, a continuación de X, escribimos – 2Y + Z con sus propios signos y tendremos :

X + (– 2Y + Z) = X – 2Y + Z

Vemos, pues, que hemos suprimido el paréntesis precedido del signo +, dejando a cada una de las cantidades que estaban dentro de él con sus propios signos.

La expresión X – (Y + Z), que equivale a X – (+Y + Z), indica que de X hay que restar la suma Y + Z y como para restar escribimos el sustraendo con los signos cambiados a continuación del minuendo, tendremos:

X – (Y + Z), = X – Y – Z

La expresión X – (– Y + Z),indica que de X hay que restar – Y + Z; luego cambiando los signos al sustraendo tendremos:

X – (– Y + Z), = X + Y – Z

Vemos pues, que hemos suprimido el paréntesis precedido del signo –, cambiando el signo a cada una de las cantidades que estaban encerradas en el paréntesis.

El corchete [ ], las llaves { } y el vínculo o barra —, tienen la misma significación que el paréntesis y se suprimen del mismo modo.

Ejercicios : *Simplificar, suprimiendo los signos de agrupación y reduciendo términos semejantes:*

1. $x-(x-y)$
$= x - x + y$
$= y$

2. $x^2+(-3x-x^2+5)$
$= x^2 - 3x - x^2 + 5$
$= -3x+5$

3. $a+b-(-2a+3)$
$= a+b+2a-3$
$= 3a+b-3$

4. $4m-(-2m-n)$
$= 4m+2m+n$
$= 6m+n$

5. $2x+3y-(4x+3y)$
$= 2x+3y-4x-3y$
$= -2x$

6. $a+(a-b)+(-a+b)$
$= a+a-b-a+b$
$= 2a-a = a$

7. $a^2+[-b^2+2a^2]-[a^2-b^2]$
$= a^2-b^2+2a^2-a^2+b^2$
$= 3a^2-a^2 = 2a^2$

8. $2a-\{-x+a-1\}-\{a+x-3\}$
$= 2a+x-a+1-a-x+3$
$= 1+3 = 4$

9. $x^2+y^2-(x^2+2xy+y^2)+[-x^2+y^2]$
$= x^2+y^2-x^2-2xy-y^2-x^2+y^2$
$= -x^2-2xy+y^2$

10. $(-5m+6)+(-m+5)-6$
$= -5m+6-m+5-6$
$= -6m+5$

11. $a+\overline{a-b}+\overline{-a+b}$ *(vínculo o barra)*
$= a+a-b-a+b = 2a-a = a$

12. $a-\overline{a-b}-\overline{-a-b}$ *(vínculo o barra)*
$= a-a+b+a+b = 2a-a+2b = a+2b$

Cuando unos signos de agrupación están incluidos dentro de otros :

1) *Simplificar la expresión :*

$$2a+[a-(a+b)]$$

Primero suprimo (elimino) el signo de agrupación que esté incluido dentro de otro (los más interiores), en este caso se puede observar que existe un paréntesis dentro de un corchete.

Como el paréntesis está precedido de un signo negativo, se cambian los signos de los términos que estén dentro de él :

$$= 2a+[a-a-b]$$

Posteriormente se procede a suprimir el otro signo de agrupación (corchete):

Como el corchete está precedido por un signo positivo, no se alteran los signos de los términos que estén dentro de los referidos corchetes

$$= 2a+a-a-b$$

Una vez que no hayan signos de agrupación se reducen los términos semejantes :

Trabajando con las "a" : $+2a+a-a$ = ***2a***

Trabajando con las "b" : $-b$ = ***– b***

El resultado es : ***2a – b***

2) <u>Simplificar la expresión:</u>

$$- \; [- 3a - \{ b + [- a + (2a - b) - (- a + b)] + 3b \} + 4a]$$

Empezando por los más interiores que son los paréntesis ; si el signo anterior al paréntesis es positivo, le dejo los signos iguales a los que estén dentro del paréntesis ; si el signo anterior al paréntesis es negativo, le cambio los signos a los que estén dentro del paréntesis :

$$- \; [- 3a - \{ b + [- a + 2a - b + a - b] + 3b \} + 4a]$$

Después el corchete que está entre las llaves (como en este caso el corchete está precedido por un signo positivo se mantienen los signos iguales) :

$$- \; [- 3a - \{ b - a + 2a - b + a - b + 3b \} + 4a]$$

Después las llaves que están dentro de los corchetes (como en este caso las llaves están precedidas por un signo negativo, se cambian todos los signos que estén dentro de ellas) :

$$- \; [- 3a - b + a - 2a + b - a + b - 3b + 4a]$$

Por último se suprimen los corchetes exteriores, y como en este caso está precedido por un signo negativo, se le cambiarán todos los signos que están dentro de él :

$$+ 3a + b - a + 2a - b + a - b + 3b - 4a$$

Una vez que no hayan signos de agrupación se reducen los términos semejantes :

Trabajando con las "a" : $+ 3a - a + 2a + a - 4a = 6a - 5a = \mathbf{a}$

Trabajando con las "b" : $+ b - b - b + 3b = 4b - 2b = \mathbf{2b}$

El resultado es : $\mathbf{a + 2b}$

3) <u>Simplificar la expresión:</u>

$$\begin{aligned}
&2m - \left[(m-n) - (m+n)\right] \\
&= 2m - \left[m - n - m - n\right] \\
&= 2m - m + n + m + n \\
&= 2m + 2n
\end{aligned}$$

4) <u>Simplificar la expresión:</u>

$$\begin{aligned}
&7m^2 - \left\{-\left[m^2 + 3n - (5-n) - (-3+m^2)\right]\right\} - (2n+3) \\
&= 7m^2 - \left\{-\left[m^2 + 3n - 5 + n + 3 - m^2\right]\right\} - 2n - 3 \\
&= 7m^2 - \left\{-m^2 - 3n + 5 - n - 3 + m^2\right\} - 2n - 3 \\
&= 7m^2 + m^2 + 3n - 5 + n + 3 - m^2 - 2n - 3 \\
&= 7m^2 + 2n - 5
\end{aligned}$$

5) <u>Simplificar la expresión:</u>

$$\begin{aligned}
&-(3m+n) - \left[2m + \left\{-m + (2m - (2n-5))\right\} - (n+6)\right] \\
&= -3m - n - \left[2m + \left\{-m + (2m - 2n + 5)\right\} - n - 6\right] \\
&= -3m - n - \left[2m + \left\{-m + 2m - 2n + 5\right\} - n - 6\right] \\
&= -3m - n - \left[2m - m + 2m - 2n + 5 - n - 6\right] \\
&= -3m - n - 2m + m - 2m + 2n - 5 + n + 6 \\
&= -6m + 2n + 1
\end{aligned}$$

6) <u>Simplificar la expresión:</u>

$$\begin{aligned}
&-\left[-3x + (-x - (2y-3))\right] + \left\{-(2x+y) + (-x-3) + 2 - (x+y)\right\} \\
&= -\left[-3x + (-x - 2y + 3)\right] + \left\{-2x - y - x - 3 + 2 - x - y\right\} \\
&= -\left[-3x - x - 2y + 3\right] - 2x - y - x - 3 + 2 - x - y \\
&= 3x + x + 2y - 3 - 4x - 2y - 1 \\
&= -4
\end{aligned}$$