

El Teorema de Poincaré y de Bendixson

Orlando Galdames Bravo

6 de abril de 2010

COURBES DÉFINIES PAR UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE. 375

Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle;

PAR M. H. POINCARÉ,
Ingénieur des Mines.

Une théorie complète des fonctions définies par les équations différentielles serait d'une grande utilité dans un grand nombre de questions de Mathématiques pures ou de Mécanique. Malheureusement, il est évident que dans la grande généralité des cas qui se présentent on ne peut intégrer ces équations à l'aide des fonctions déjà connues, par exemple à l'aide des fonctions définies par les quadratures. Si l'on voulait donc se restreindre aux cas que l'on peut étudier avec des intégrales définies ou indéfinies, le champ de nos recherches serait singulièrement diminué, et l'immense majorité des questions qui se présentent dans les applications demeureraient insolubles.

Il est donc nécessaire d'étudier les fonctions définies par des équations différentielles en elles-mêmes et sans chercher à les ramener à des fonctions plus simples, ainsi qu'on a fait pour les fonctions algébriques, qu'on avait cherché à ramener à des radicaux et qu'on étudie maintenant directement, ainsi qu'on a fait pour les intégrales de différentielles algébriques, qu'on s'est efforcé longtemps d'exprimer en termes finis.

Rechercher quelles sont les propriétés des équations différentielles est donc une question du plus haut intérêt. On a déjà fait un premier pas dans cette voie en étudiant la fonction proposée dans le voisinage d'un des points du plan. Il s'agit aujourd'hui d'aller plus loin et d'étu-

SUR LES COURBES DÉFINIES PAR DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

PAR
IVAR BENDIXSON
à STOCKHOLM.

Dans ses mémoires «Sur les courbes définies par des équations différentielles»,¹ M. POINCARÉ a envisagé l'étude des équations différentielles sous un point de vue nouveau. En se bornant au côté qualitatif de la question, il a démontré une suite de théorèmes de la plus grande importance, à l'aide desquels on peut déterminer complètement la nature des courbes intégrales réelles, satisfaisant à une équation différentielle de la forme

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y},$$

X et Y désignant des polynômes en x et en y .

Il s'est d'ailleurs borné au cas où chaque point singulier (a, b) de l'équation en question est tel que l'on ait

$$\begin{aligned} X &= \alpha(x - a) + \beta(y - b) + X_1, \\ Y &= \gamma(x - a) + \delta(y - b) + Y_1, \end{aligned}$$

X_1 et Y_1 désignant des polynômes en $x - a, y - b$, ne contenant que des termes au moins de la deuxième dimension, et $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ des constantes assujetties à ces deux conditions que l'équation

$$\begin{vmatrix} \alpha - \lambda & \beta \\ \gamma & \delta - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

n'ait pas de racine nulle et n'ait pas de racine multiple.

¹ Journal de Mathématiques, 1881, 1882, ...
Acta mathematica. 21. Imprimé le 20 décembre 1909.

Prólogo

Para la labor de recopilación y clasificación del material se han utilizado mayormente los recursos en línea disponibles en internet, libros, artículos, apuntes, etc. . . incluyendo los artículos originales de Poincaré [24] y Bendixson [1]. Para las reseñas históricas se ha utilizado básicamente el texto de Krzysztof Ciesielski [4], el cual recomiendo para tener, con pocas palabras, una visión amplia sobre el tema. Para las explicaciones intuitivas y los comentarios bibliográficos se han usado las notas de Scott Zimmerman [32]. Para la prueba he elegido la del libro de Gerald Teschl [28], por considerarla la más cercana en el tiempo y con una notación mas actual de las que he encontrado. También nos hemos valido del libro de Morris W. Hirsch y Stephen Smale [13] y del libro de Philip Hartman [11] el cual dedica unas 60 páginas a la teoría de Poincaré-Bendixson, para completar la demostración de Teschl. El libro de Hartman suele presentarse como un libro de nivel avanzado, pero en su defensa diré que al menos la parte de la teoría de Poincaré-Bendixson esta expuesta con bastante detalle. Para explicar los límites del teorema nos hemos referido a las notas de curso de los profesores Joris Vankerschaver y Moley Tao [29]

Como prerrequisitos a pesar de que hay conceptos que necesitan algo más que los apuntes que se pueden proporcionar en un trabajo de este calibre, y siendo una doctrina que auna una amplia variedad de ramas de la matemática intentaremos dar una idea general de los conceptos necesarios en ecuaciones diferenciales ordinarias, topología y sistemas dinámicos. Pero hay que decir que también son necesarios conocimientos en análisis de dos variables reales, geometría del plano y rudimentos del álgebra de grupos.

El trabajo se divide en dos partes, una formativa en la que se demuestra el teorema a un nivel de detalle comprensible para la mayoría de los estudiantes de matemáticas, y una segunda parte informativa en la que se enumeran diversas versiones de los teoremas en distintos ámbitos de las matemáticas. Esta segunda parte deja constancia de la semilla plantada por la fuerte influencia que han producido y producen hoy en día.

Índice

1. Prerrequisitos	4
1.1. Introducción	4
1.2. Topología	4
1.3. Ecuaciones diferenciales ordinarias	6
1.4. Sistemas dinámicos	7
2. El Teorema de Poincaré-Bendixson	13
2.1. Introducción	13
2.2. Demostración del Teorema	14
2.3. Limitaciones del Teorema	18
3. Versiones del Teorema de Poincaré-Bendixson	20
3.1. Las versiones originales	20
3.2. Poincaré-Bendixson y los sistemas dinámicos	22
3.3. Poincaré-Bendixson sobre superficies	23

Introducción

Henri Poincaré (1854-1912) es, sin duda, uno de los matemáticos más influyentes y es considerado padre de la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales. Uno de los motivos de esta consideración viene por su trabajo publicado entre 1881 y 1886 [24], concretamente en el volumen 1 (1885) obtiene una primera versión del teorema para un sistema autónomo en el plano $x' = f(x)$, con f una función analítica. En el volumen 2 (1886) realiza un estudio del diagrama de fases de un problema de mecánica celeste, logrando responder varias preguntas de la teoría de ecuaciones diferenciales sin necesidad de encontrar la solución explícita.

Ivar Otto Bendixson (1861-1935) publica en 1901 [1], el artículo que de alguna forma le dio a conocer a la comunidad matemática, se trataba de una versión más débil del mismo teorema pero con una prueba más rigurosa que la de Poincaré. Fue uno de los primeros resultados aplicables a la teoría de sistemas dinámicos, teoría que en aquel entonces estaba por venir, y hoy en día uno de los más importantes dentro de la misma. En el mismo artículo, realiza un estudio de los diagramas de fases de los subconjuntos del mismo que están entre ciertas órbitas especiales llamadas separatrices.

El Teorema de Poincaré-Bendixson, nace de un teorema enunciado inicialmente por Poincaré, posteriormente versionado por Bendixson. Finalmente, la intuición de Poincaré y el rigor de Bendixson conformaron un teorema generalizado con una demostración rigurosa que hoy en día conocemos como el Teorema de Poincaré-Bendixson. Originalmente el teorema se planteó como herramienta para el estudio de las soluciones de sistemas de ecuaciones diferenciales autónomos en el plano, pero pronto se vio que podía desprenderse de su parte analítica y demostrarse utilizando únicamente técnicas topológicas, y de aquí su aplicación a la teoría de los sistemas dinámicos. A partir de aquí han sido infinidad los investigadores e investigadoras los que han querido aportar su granito de arena, construyendo así una teoría para el estudio local de los sistemas dinámicos y las ecuaciones diferenciales.

En esencia el teorema dice que para un sistema dinámico en el plano, o equivalentemente en un sistema de ecuaciones diferenciales en el plano, una órbita, o equivalentemente una solución al sistema, la cual está dentro de un conjunto acotado, converge necesariamente bien a un punto de equilibrio, bien a una órbita periódica o bien a un grafo. Pero tal vez, la conclusión más relevante del teorema es que con unas condiciones de diferenciabilidad no encontraremos ningún sistema dinámico caótico sobre el plano.

1. Prerrequisitos

1.1. Introducción

El teorema de Poincaré-Bendixson se demostró inicialmente para dimensión 2, en cuya demostración más conocida se utiliza el teorema de la curva de Jordan en el plano y este es el enfoque en el cual nos centraremos en el presente trabajo. Los conocimientos previos no son necesariamente básicos, sirva de muestra el siguiente resultado va un poco más allá de lo que suele conocer un alumno de bachiller.

Teorema 1.1 (Teorema de la función implícita). *Sea el punto $p = (a_1, \dots, a_n, b) \in \mathbb{R}^{n+1}$ y la ecuación $F(x_1, \dots, x_n, b) = 0$, donde F es una función de $n + 1$ variables reales cumpliendo las siguientes condiciones:*

1. $F(p) = 0$, es decir, el punto p satisface la ecuación.
2. En un entorno $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ del punto p existen y son continuas las derivadas parciales hasta orden k , es decir, la función es de clase $C^k(U)$.
3. $\frac{\partial}{\partial z} F(p) \neq 0$. Entonces, en un entorno V del punto $q = (x_1, \dots, x_n)$, existe una única función $z = f(x_1, \dots, x_n)$ cuyas derivadas parciales son continuas hasta orden k en dicho entorno, es decir, $f \in C^k(V)$ y tal que $F(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)) = 0$ para todo $(x_1, \dots, x_n) \in V$.

Aunque existen versiones de este teorema con hipótesis más generales, esta versión será suficiente para los resultados que se muestran en este trabajo.

En esta sección veremos los resultados más destacados y menos conocidos orientados a la demostración del teorema.

1.2. Topología

Para los conceptos básicos de topología como espacios métricos, compacidad, conexión, continuidad. . . , remitimos al lector a un texto de introducción a la topología [20], aunque hay muchísimos más este es sumamente didáctico.

Como hemos dicho, en la demostración más difundida del teorema de Poincaré-Bendixson se utiliza el teorema de la curva de Jordan, lo cual simplifica bastante la prueba, por tanto dada una curva diremos que es una *curva de Jordan* si es homeomorfa a la circunferencia S^1 , otra forma de definirla es como una curva simple y cerrada, o dicho de otra forma, que no tiene extremos ni autointersecciones. También usaremos el concepto de *arco de Jordan* que

es una curva homeomorfa al intervalo cerrado, habitualmente denotado por I .

El teorema de la dicotomía del plano fue formulado por Marie Ennemond Camille Jordan en 1887 [16] y de él toma el nombre, pero fue el matemático Oswald Veblen [30] el primero en dar una prueba satisfactoria para la mayoría de los matemáticos en 1905.

Teorema 1.2 (Teorema de la curva de Jordan). *Si J es una curva de Jordan, entonces su complemento en el plano es la unión de dos conjuntos abiertos, conexos y disjuntos. Formalmente: $\mathbb{R}^2 \setminus J = M_1 \cup M_2$ donde los M_i son conjuntos abiertos y conexos para $i = 1, 2$ y $M_1 \cap M_2 = \emptyset$.*

El libro de Victor Guillemin y Alan Pollack [8] nos brinda la oportunidad de construir una demostración para el caso generalizado de \mathbb{R}^n resolviendo una serie de ejercicios, esta generalización es conocida como Teorema de Separación de Jordan-Brouwer. Allen Hatcher [12] da una prueba sobre S^2 utilizando grupos de homología. Para una prueba clásica se puede consultar el texto de Maxwell A. H. Newman [21].

Otro concepto que necesitaremos es el de transversalidad, aunque aplicando este concepto a curvas sobre el plano, es excesivo pues la definición es muy general y el uso que le daremos es un caso muy particular que puede deducirse inmediatamente de la geometría de la curva, sin embargo lo deduciremos de la transversalidad dado el carácter evaluativo del presente trabajo. Para esta definición necesitaremos dos variedades X e Y y una subvariedad $Z \subset Y$ y una aplicación $f: X \rightarrow Y$, y que usaremos a conveniencia.

Definición 1.1. *Decimos que f corta transversalmente a Z en $x \in X$ si se cumplen las dos condiciones:*

$$(I) \quad f(x) \in Z.$$

$$(II) \quad df_x: T_x X \rightarrow T_{f(x)} Y \supset T_{f(x)} Z \quad y \quad df_x(T_x X) + T_{f(x)} Z = T_{f(x)} Y.$$

Y se denota por $f \pitchfork_x Z$ o $f \pitchfork Z$ en x .

Definición 1.2. *Decimos que f es transversal a Z si para todo $x \in X$ se cumple una de las siguientes condiciones:*

$$1. \quad f(x) \notin Z.$$

$$2. \quad f \pitchfork_x Z.$$

Concretamente a nosotros nos interesará el caso en que $X = S^1$, $Y = \mathbb{R}^2$, $Z = J \subset \mathbb{R}^2$ un arco o una curva de Jordan y $f = \phi: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$, una curva de clase C^k ($k \geq 1$) sobre \mathbb{R}^2 que hará el papel de curva integral de una ecuación diferencial como veremos en la Sección 2. En \mathbb{R}^2 tenemos la ventaja de que es sencillo encontrar una caracterización de la transversalidad utilizando el producto escalar al uso. Si parametrizamos J mediante la curva $\alpha: I \rightarrow J$ y suponemos que existen $s \in S^1$ y $t \in I$ tales que $\phi(s) = \alpha(t)$ hemos de comprobar que

$$d\phi_s(T_s S^1) + T_{\phi(s)} J = T_{\phi(s)} \mathbb{R}^2$$

y sabemos que $T_s S^1 = \mathbb{R}$, y por tanto $d\phi_s(T_s S^1) = d\phi_s(\mathbb{R}) = \langle \{ \frac{d}{dt} \phi(s) \} \rangle = \langle \{ \phi'(s) \} \rangle$, y análogamente tenemos que $T_{\phi(s)} J = T_{\alpha(t)} J = d\alpha_t(\mathbb{R}) = \langle \{ \alpha'(t) \} \rangle$. Por otro lado $T_{\phi(s)} \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2$, luego está claro que $\langle \{ \phi'(s) \} \rangle + \langle \{ \alpha'(t) \} \rangle = \mathbb{R}^2$ si y sólo si $\alpha'(t)$ y $\phi'(s)$ no son tangentes, o lo que es lo mismo $\alpha'(t)$ y $\phi'(t)^\perp$ no son perpendiculares (obviamente también sirven $\alpha'(t)^\perp$ y $\phi'(t)$), es decir, son transversales si y sólo si

$$\alpha'(t) \cdot \phi'(t)^\perp \neq 0.$$

1.3. Ecuaciones diferenciales ordinarias

En esta sección únicamente vemos la definición sistema de ecuaciones diferenciales autónomo tomada de unos apuntes de la Universidad Politécnica de Valencia [5], y una referencia al libro de Philips Hartman[11] para quien desee indagar más sobre este tipo de sistemas.

Una *ecuación diferencial ordinaria* es una relación de la forma

$$F(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

donde t es la *variable independiente* y n es el *orden* de la ecuación, si el orden es 1 se dirán de *primer orden* y así sucesivamente. Un *sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias* es un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias las cuales deben satisfacerse a la vez, tiene esta forma

$$\begin{cases} F(t, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n)}) = 0 \\ F(t, y_2, y_2', \dots, y_2^{(n)}) = 0 \\ \vdots \\ F(t, y_m, y_m', \dots, y_m^{(n)}) = 0 \end{cases}$$

Para nuestro propósito únicamente necesitaremos ecuaciones diferenciales de primer orden sobre el plano, que expresadas en su forma matricial explícita quedaría

$$y' = f(t, y)$$

donde $y = (y_1, y_2)$ y $f = (f_1, f_2)$.

Un sistema de ecuaciones diferenciales en el plano, en las que la variable independiente t no ocurre explícitamente se llama *autónomo*, es decir:

$$y' = f(y). \quad (1)$$

Una propiedad importante y trivial es que en estos sistemas si $y = y(t)$, donde $t \in (\alpha, \beta)$, es una solución del sistema autónomo (1), entonces $y = y(t + t_0)$ también es solución del sistema para $t \in (\alpha - t_0, \beta - t_0)$, obvio pues f no depende del parámetro independiente, por tanto $\frac{d}{dt}y(t + t_0) = y'(t + t_0) \frac{d}{dt}(t + t_0) = y'(t + t_0) = f(y(t + t_0))$.

El problema de condición inicial o problema de Cauchy asociado a un sistema autónomo tiene la forma

$$y' = f(y), \quad y(0) = y_0.$$

Dada una curva $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ solución a este problema de Cauchy diremos que es solución *maximal* si dada otra curva $\gamma': I' \rightarrow \mathbb{R}^2$ solución al sistema $I' \subseteq I$. Sabemos que la solución maximal al problema de Cauchy es única. No discutiremos aquí sobre la existencia, unicidad o extensión de las soluciones para este tipo de problemas, esta se puede ver como consecuencia del teorema de existencia de Peano, y se puede consultar el Teorema 1.2 de la página 145 del libro de Hartman [11] para una demostración sobre estos asuntos.

1.4. Sistemas dinámicos

La definición de sistema dinámico ha evolucionado considerablemente desde sus primeras definiciones allá por los años treinta, donde el sistema dinámico no se había desligado de la componente analítica que le proporciona la ecuación diferencial del que proviene. De hecho algunas definiciones y resultados que se dan en esta sección, aparecieron antes de tener una definición formal de lo que hoy entendemos por sistema dinámico, un ejemplo de ello son los mismos teoremas de Poincaré y Bendixson.

Las siguientes definiciones las podemos encontrar en el manual de Teschl [28] y servirán para entender mejor el desarrollo de la demostración. También nos hemos servido del manual de José A. Martínez Alfaro [19].

Definición 1.3. *Un sistema dinámico es una triada (M, G, T) donde M es un espacio, puede ser un espacio métrico, un espacio vectorial, un espacio*

topológico o incluso una variedad diferencial al que llamaremos espacio de fases, G es un semigrupo y T es la acción del semigrupo sobre el espacio, es decir

$$\begin{aligned} T: \quad G \times M &\rightarrow M \\ (g, x) &\mapsto T_g(x) \end{aligned}$$

donde T cumple que $T_{gh} = T_g \circ T_h$.

Si $G = (\mathbb{N} \cup \{0\}, +)$ o $G = (\mathbb{Z}, +)$ diremos que el sistema dinámico es discreto. Si $G = (\mathbb{R}^\pm, +)$ o $G = (\mathbb{R}, +)$ diremos que el sistema es continuo. Nosotros trabajaremos únicamente con el caso continuo y para $M \subseteq \mathbb{R}^2$. Luego en nuestro caso tendríamos una aplicación $\phi: (\mathbb{R} \text{ ó } \mathbb{R}^+ \times M \rightarrow M$ cumpliendo que $\phi(t + s, x) = \phi(t, \phi(s, x))$.

Dado un sistema autónomo

$$x' = f(x), \quad f \in C^k(M, \mathbb{R}^2), \text{ para } k > 1. \quad (2)$$

Este sistema puede verse como un campo vectorial, y sus soluciones son curvas en M tales que su tangente es este campo vectorial en cada punto.

Definición 1.4. *A las soluciones del sistema (2) se les llama curvas integrales o trayectorias. Y diremos que una curva ϕ es curva integral en x_0 si $\phi(0) = x_0$.*

Por tanto, por lo comentado en la sección anterior, existe una única curva integral maximal en $x \in M$, al intervalo de definición de este sistema lo denotaremos por I_x y a esta solución $\phi(t, x)$, definimos entonces el siguiente conjunto:

$$W = \bigcup_{x \in M} I_x \times \{x\} \subseteq \mathbb{R} \times M$$

Definición 1.5. *Llamamos flujo de nuestra ecuación diferencial a la aplicación*

$$\begin{aligned} \Phi: \quad W &\longrightarrow M \\ (t, x) &\longmapsto \phi(t, x) \end{aligned}$$

También se puede usar la notación $\Phi(t, x) = \Phi_t(x) = \Phi_x(t)$, según convenga y dependiendo del elemento al que se le quiera dar importancia.

La propiedad más importante del flujo es que

$$\Phi(t + s, x) = \Phi(t, \Phi(s, x))$$

y que en definitiva es la que hace que un sistema autónomo se “adapte” a nuestra definición de sistema dinámico. Para comprobar esta propiedad basta comprobar que fijado $t \in I_x$ entonces $\phi(t + s, x)$ (donde ahora la variable temporal es s) también es solución del sistema pero para el punto inicial $\phi(t + 0, x) = \phi(t, x)$ y por unicidad de la solución $\phi(t + s, x) = \phi(t, \phi(s, x))$. Para ver que es solución calculamos su derivada respecto de s que es $\frac{d}{ds}\phi(t + s, x) = \frac{d}{du}\phi(u, x)\frac{du}{ds}(s)$ donde $u = t + s$, entonces $\frac{d}{ds}\phi(t + s, x) = 1$, y por tanto $\frac{d}{ds}\phi(t + s, x) = \phi'(u) = f(\phi(u))$ por ser ϕ solución.

A continuación se definen los subconjuntos más relevantes del espacio de fases y por extensión, del sistema dinámico, y que posteriormente nos servirán para construir la demostración.

Definición 1.6. Dado $x \in M$, se define la órbita de x al conjunto

$$\gamma(x) := \Phi(I_x, x) \subseteq M.$$

El concepto de órbita en un sistema dinámico es el mismo que se utiliza en álgebra para definir las órbitas de una acción, y del mismo modo las órbitas son las distintas clases de equivalencia de los puntos que pertenecen a la órbita. Entre otras cosas tenemos que las órbitas son disjuntas dos a dos y que la unión de todas las órbitas son todo el espacio de fases.

Definición 1.7. Dado $x \in M$, se dice que es punto fijo o punto estacionario o punto singular o punto de equilibrio si $\gamma(x) = \{x\}$. En cualquier otro caso se dice que es punto regular.

Definición 1.8. Dado $x \in M$, se define la órbita positiva al subconjunto de la órbita $\gamma(x)$

$$\gamma_+(x) := \Phi(I_x^+, x), \quad \text{donde} \quad I_x^+ = \{t \in I_x : t > 0\}.$$

Análogamente la órbita negativa a

$$\gamma_-(x) := \Phi(I_x^-, x), \quad \text{donde} \quad I_x^- = \{t \in I_x : t < 0\}.$$

Notar que puede darse el caso en que $I_x^\pm = \emptyset$, entonces $\gamma_\pm(x) = \emptyset$.

Definición 1.9. Dado $x \in M$, se dice que es periódico si existe $T \in I_x$ tal que $T \neq 0$ y $\Phi(T, x) = x$. Y se llama periodo al ínfimo mayor que cero de todos estos valores, es decir a $T_x := \inf\{T \in I_x : T > 0, \Phi(T, x) = x\}$.

Por extensión de la definición de punto periódico se suele decir que los puntos fijos son puntos de periodo cero.

Definición 1.10. *Una órbita se dice que es una órbita periódica si contiene un punto periódico.*

Notar que si $t \neq 0$ y $\Phi(t, x) = x$, dado $y \in \gamma(x) = \Phi(I_x, x)$ tendremos que existe un $s \in I_x$ tal que $y = \Phi(s, x) = \Phi(s, \Phi(t, x)) = \Phi(s+t, x) = \Phi(t+s, x) = \Phi(t, \Phi(s, x)) = \Phi(t, y)$ y por tanto y también es periódico. Así que en una órbita periódica todos los puntos son periódicos y con el mismo periodo. Además, como $\Phi(kT_x, x) = \Phi((k-1)T_x + T_x, x) = \Phi((k-1)T_x, \Phi(T_x, x)) = \Phi((k-1)T_x, x)$ para cualquier $k \in \mathbb{Z}$ tendremos que tanto para valores positivos como negativos de I_x , el flujo pasa por x y por tanto $\gamma^+(x) \cap \gamma^-(x) \neq \emptyset$, el recíproco es sencillo, basta tomar un elemento de la intersección no vacía y aplicar las definiciones de órbita positiva y negativa, encontraremos dos valores de I_x que nos dan x al aplicarle el flujo, y que por tanto cumple la definición de periódico. Por este motivo a las órbitas periódicas también se les llama *órbitas cerradas*.

Definición 1.11. *Clasificaremos las órbitas del sistema (2) del siguiente modo:*

Órbitas fijas. *Son las órbitas en la que todos sus puntos son fijos.*

Órbitas cerradas. *Son las órbitas periódicas, también se llaman órbitas periódicas regulares.*

Órbitas no cerradas. *Son las órbitas que no son ni fijas ni cerradas.*

Las siguientes definiciones y resultados son interesantes pues su importancia dentro de la teoría de sistemas dinámicos, pone de relieve la trascendencia del teorema principal de este trabajo.

Definición 1.12. *Dado $U \subseteq M$ y $\sigma \in \{+, -\}$, diremos que es σ -invariante si para todo $x \in U$ tenemos que $\gamma_\sigma \subseteq U$. Diremos que es invariante si es $+$ -invariante y $-$ -invariante.*

La definición viene a decir que un conjunto invariante es aquel que contiene todas las órbitas de todos sus puntos.

La siguiente definición de conjunto límite es una versión moderna sobre la idea original de conjunto límite de George D. Birkhoff [2]. Intuitivamente es

un conjunto al que van a parar todas las órbitas del flujo cuando el tiempo se hace infinito, tanto hacia adelante como hacia atrás en el tiempo. Tomando el orden natural del tiempo, coloquialmente se dice que las órbitas se alejan (si $t \rightarrow +\infty$) o se acercan (si $t \rightarrow -\infty$) a estos conjuntos, y de ahí su importancia, pues si tenemos determinados estos conjuntos, tenemos determinado todo el sistema, al menos cualitativamente.

Definición 1.13. *El conjunto ω_{\pm} -límite de un punto $x \in M$ es el conjunto de todos los puntos $y \in M$ tales que existe una sucesión $(t_n)_n \subset I_x$ tal que $\lim_n \Phi(t_n, x) = y$, y se denota como $\omega_{\pm}(x)$.*

Algunos autores llama α -límite al ω_- -límite y ω -límite al ω_+ -límite, por su analogía con el alfabeto griego, nosotros respetaremos la notación de Teschl.

El siguiente resultado nos asegurará que las hipótesis del teorema de Poincaré-Bendixson son factibles.

Teorema 1.3. *Los conjuntos $\alpha(\gamma)$ y $\omega(\gamma)$ son cerrados e invariantes. Si γ^+ está acotado, entonces $\omega(\gamma)$ es no vacío, compacto y conexo. Además $d(x(t), \omega(\gamma))$ tiende a cero cuando $t \rightarrow +\infty$.*

Para una demostración puede consultarse el libro de F. Verhulst [31].

El siguiente teorema nos asegura que una sección transversal o como la llamaremos aquí un arco transversal es en realidad una variedad de dimensión 1 sin autointersecciones, lo que es fundamental para la posterior prueba.

Teorema 1.4. *Sea X una variedad 2-dimensional y (X, \mathbb{R}, π) un sistema dinámico. Entonces toda sección continua y localmente conexa es bien un arco de Jordan o una curva de Jordan.*

En este caso la referencia es el libro de Otomar Hájek [14].

La siguiente definición la podemos encontrar en el libro de L. Perko [23], aunque en el presente trabajo no extraeremos conclusiones sobre los ciclos límite, es conveniente conocer el concepto para ver la relación que hay entre el teorema de Poincaré-Bendixson y estos importantes conjuntos, ya que son estos conjuntos los que nos proporcionan mayor información cualitativa que cualquier otro conjunto definido hasta el momento sobre un sistema dinámico.

Definición 1.14. *Un ciclo límite γ de un sistema dinámico en el plano es una órbita periódica que coincide con el conjunto α u ω -límite de otra trayectoria γ' distinta de γ . Si el ciclo límite γ es el ω -límite de todas las otras*

trayectorias en un entorno de γ , entonces se dice que γ es el **ciclo ω -límite** o ciclo límite estable. Análogamente, si γ es el α -límite de un entorno de trayectorias, entonces es el α -límite o ciclo límite inestable.

Recordemos que un conjunto $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ es una subvariedad de codimensión uno, o equivalentemente de dimensión $n - 1$, si la podemos definir como

$$\Sigma = \{x \in U : S(x) = 0\},$$

donde $U \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto y $S \in C^k(U)$ cumpliendo que $\frac{\partial}{\partial x} S \neq 0$ para todo $x \in \Sigma$. La subvariedad Σ es transversal al campo vectorial f si $((\partial S / \partial x) \cdot f)(x) \neq 0$ para todo $x \in \Sigma$.

Lema 1.1. *Sea $x \in M$ y $T \in I_x$. Sea Σ una subvariedad de codimensión uno transversal a f , tal que $\Phi(T, x) \in \Sigma$. Entonces existe un entorno U de x y $\tau \in C^k(U)$ tal que $\tau(x) = T$ y por tanto*

$$\Phi(\tau(y), y) \in \Sigma \quad \text{para todo } x \in U.$$

Demostración. Consideremos la ecuación $S(\Phi(t, y)) = 0$, que por hipótesis se satisface para (T, x) . Luego por transversalidad

$$\frac{d}{dt} S(\Phi(t, y)) = \left(\frac{\partial S}{\partial x}(\Phi(t, y)) \cdot \frac{d}{dt} \Phi(t, y) \right) = \left(\frac{\partial S}{\partial x}(\Phi(t, y)) \cdot f(\Phi(t, y)) \right) \neq 0$$

para (t, y) en un entorno $I \times U$ de (T, x) . Luego por el teorema de función implícita 1.1 restringido a U , existe una función $\tau \in C^k(U)$ tal que para todo $y \in U$ tenemos que $S(\Phi(\tau(y), y)) = 0$, lo que implica que $\Phi(\tau(y), y) \in \Sigma$. \square

Definición 1.15. *Llamaremos aplicación de Poincaré a la aplicación*

$$P_\Sigma(y) = \Phi(\tau(y), y).$$

2. El Teorema de Poincaré-Bendixson

2.1. Introducción

La demostración está basada en el manual de Teschl [28], pero para completar la misma se han utilizado también el libro de Hartman [11] y el de Hirsch y Smale [13]. Comenzaremos con unas definiciones previas.

Un *arco* $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$ será una subvariedad de dimensión uno dada por la aplicación diferenciable de $(a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida como $t \mapsto s(t)$, que hará las veces de parametrización de la variedad. Usando esta aplicación, los puntos de Σ pueden ordenarse siguiendo el orden del parámetro t dentro de los números reales. Además, para cada punto $x \in \mathbb{R}^2$ regular de la ecuación (1), podemos encontrar un arco que sea *transversal* a la función f . Según la definición de transversalidad, el vector tangente al arco $(s'_1(t), s'_2(t))$ junto con el vector $(f_1(s(t)), f_2(s(t)))$ forman una base de \mathbb{R}^2 como espacio vectorial, o lo que es lo mismo, el vector normal a s' y el vector f no llevan la misma dirección y por tanto su producto escalar es distinto de cero

$$s'_2(t)f_1(s(t)) - s'_1(t)f_2(s(t)) \neq 0.$$

Es suficiente tomar Σ como el segmento de línea dado por

$$s(t) := t(-f_2(x), f_1(x)) + x,$$

definido en un entorno suficientemente pequeño del cero $(-\varepsilon, \varepsilon)$, que sabemos que existe pues el producto escalar de funciones continuas es una función continua y como $(s \cdot (f \circ s))(0) = \|f(x)\| > 0$ por ser x regular tendremos que

$$\begin{aligned} (s \cdot (f \circ s))(t) &= s'_2(t)f_1(s(t)) - s'_1(t)f_2(s(t)) = \\ & f_1(x)f_1(t(-f_2, f_1)(x) + x) + f_2(x)f_2(t(-f_2, f_1)(x) + x) \neq 0 \end{aligned}$$

para $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, donde ε es suficientemente pequeño. Notar además que si x no es regular no es posible encontrar ningún arco transversal a f , ya que en tal caso $f(x) = 0$ y este vector no forma base.

Llamaremos *segmento del arco* Σ a un subconjunto cerrado, de interior no vacío y conexo de Σ . Notar además que hemos utilizado la notación $f(x)$ para denotar el vector $f(x) - x$, no hay que olvidar que $f(x)$ en realidad es un punto sobre el plano real, usaremos esta notación salvo que se indique lo contrario.

En la demostración que a continuación se expone, la principal dificultad con que nos encontramos viene implícita en el primer Lema 2.1 y viene del argumento conjuntista que se utiliza para ordenar los puntos sobre el arco, por lo que he podido leer, la mayoría de las demostraciones (por no decir todas) incluidas las de Poincaré y Bendixson, utilizan un dibujo para convencerse de que el argumento es correcto. Por mi parte, aunque también me he molestado en realizar un dibujo, creo que la demostración del lema puede prescindirse del mismo y de paso dejar patente que no es tan evidente llegar formalmente a la demostración. En cuanto al resto de la demostración surge con relativa facilidad, salvo por el Lema 2.3 que tiene el mismo problema que el anterior comentado, pero sencillo de resolver usando el mismo razonamiento.

2.2. Demostración del Teorema

Lema 2.1. *Sea $x_0 \in M$ un punto regular y Σ un arco transversal y que contiene a x_0 . Denotamos por $x_n = x(t_n)$ para $n \geq 1$, la secuencia ordenada (tal vez finita), de todas las intersecciones de $\gamma_\sigma(x_0)$ con el arco Σ . Entonces x_n es monótona con respecto al orden de Σ .*

Demostración. Consideraremos $\sigma = +$. Es suficiente demostrarlo para tres puntos arbitrarios, los denotaremos x_0, x_1, x_2 para conocer su orden original $x_0 < x_1 < x_2$, hemos de averiguar si son consecutivos también en el arco Σ . Sea J la curva formada por la unión de la curva que va de x_0 a x_1 a lo largo de $\gamma_+(x_0)$ y vuelve de x_1 a x_0 por un segmento del arco Σ . Como x_1 es el siguiente punto que interseca con Σ a lo largo de la semiórbita $\gamma_+(x_0)$, tenemos que J es una curva de Jordan. Luego por el teorema de la curva de Jordan tenemos que $M = M_1 \cup M_2$ donde $M_1 \cap M_2 = \emptyset$. Supongamos que M_1 y M_2 son las regiones no acotada y acotada respectivamente.

Sea $\tilde{\Sigma}$ el arco que va de x_0 a x_1 a lo largo de Σ , que como es transversal en todos sus puntos también lo es $\tilde{\Sigma}$ y por el razonamiento de arriba el vector $f(x) \neq 0$ para todo $x \in \tilde{\Sigma}$. Además, por continuidad de la función f tenemos que si $(s \cdot (f \circ s))(t) > 0$ para algún t tal que $x(t) \in \tilde{\Sigma}$ entonces debe serlo para todo t , pues en caso contrario por el teorema de Bolzano existiría un c tal que $(s \cdot (f \circ s))(c) = 0$, lo que está en contradicción con la transversalidad de $\tilde{\Sigma}$. Ver Figuar 1.

Lo que nos viene a decir esto es que $f(x) \in M_1$ ó $f(x) \in M_2$ (exclusivamente uno u otro) para todo $x \in \tilde{\Sigma}$. De nuevo por continuidad de f tendremos que si $f(x) \in M_i$, entonces $f(x_1) \in M_i$ para $i = 1, 2$, o lo que es lo

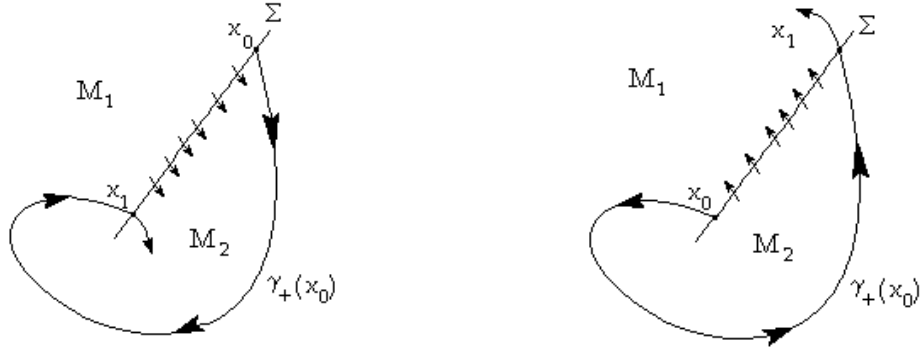


Figura 1: La órbitas entran en el interior de J o salen de él.

mismo, si f apunta siempre hacia una de las dos componentes en $\tilde{\Sigma}$, también lo hace el vector $f(x_1)$. Por las propiedades de las órbitas, estas no pueden autointersectarse, y como $\gamma_+(x_1) \subseteq \gamma_+(x_0)$ tendremos que $\gamma_+(x_1) \subset M_1$ ó $\gamma_+(x_1) \subset M_2$, únicamente una de las dos puede darse.

Por tanto supongamos que $\gamma_+(x_1) \subset M_1$, si el caso es el contrario la demostración es análoga. Por definición de $x_2 = x(t_2)$ y además $t_2 > t_1$, entonces $x_2 \in \gamma_+(x_2) \subseteq \gamma_+(x_1) \subset M_1$. Por otro lado tenemos que $M_1 \cap J = \emptyset$ y $\tilde{\Sigma} \subset \Sigma \subset J$. Entonces $x_2 \notin \Sigma$, es decir, x_2 no está entre x_0 y x_1 dentro de Σ .

Por otro lado, como la curva de J está formada con dos puntos de intersección x_0 y x_1 , entre la órbita de x_0 y el arco Σ , tenemos que $\Sigma \setminus \tilde{\Sigma} \subset M_i$. Como el segmento de curva $\gamma_+(x_0, x_1)$ comienza a un lado del arco Σ y termina en el otro, necesariamente la curva debe pasar al otro lado sin intersectar Σ , pues x_1 es la primera intersección, esto sólo es posible si Σ tiene un extremo en $\text{int}(M)$ ya que Σ es conexo por serlo $(-\varepsilon, \varepsilon)$, de manera que un extremo de Σ queda en M_1 y el otro en M_2 . Intuitivamente lo que ocurre es que la órbita rodea el arco para pasar al otro lado dejando uno de los extremos del mismo totalmente dentro de la curva J , tal y como se muestra en la misma Figura 1.

Si $x_0 < x_1$ en Σ , sabemos que $x_2 \in \gamma_+(x_1)$ está en una de las componentes M_i , y como $f(x_0), f(x_1)$ tienen que estar en el mismo lado de Σ , $s(r_1, \varepsilon)$ está también contenido en la misma componente M_i . Por tanto $x_1 < x_2$ en Σ . Análogamente si $x_0 > x_1$ en Σ $\gamma_+(x_1)$ y $s(-\varepsilon, r_1)$ están en la misma componente (recordemos que $x_i = s(r_i)$ para $i = 0, 1$) y entonces $x_1 > x_2$.

Si aplicamos este procedimiento iterativamente a todos los tripletes $(x_i, x_i + 1, x_i + 2)$ el resultado es el mismo, por lo que podemos concluir que la

secuencia es monótona en Σ . □

El siguiente razonamiento lo utilizaremos en varios de los siguientes resultados. Lo que nos asegura es que si tenemos un punto y del conjunto límite de x y un arco transversal que pasa por y , entonces tenemos una sucesión de puntos sobre la órbita de x que también están en el arco transversal.

Sea $y \in \Sigma \cap \omega_\sigma(x)$, por definición del conjunto ω -límite existe $t_n \rightarrow \sigma\infty$ tal que $x_n = \Phi(t_n, x) \rightarrow y$. Por el Lema 1.1, tomando $x = y$ y $T = 0$, podemos usar la sucesión $\tilde{t}_n = t_n + \tau(x_n)$ que tiende a $\sigma\infty$ como t_n , y la sucesión $\tilde{x}_n = \Phi(\tilde{t}_n, x) \rightarrow y$ cumple que $\tilde{x}_n \in \Sigma \cap \gamma_\sigma(x)$.

Corolario 2.1. *Sea Σ un arco transversal, entonces $\omega_\sigma(x)$ interseca Σ como mucho en un punto.*

Demostración. Supongamos que existen dos puntos distintos $y_1, y_2 \in \Sigma \cap \omega_\sigma(x)$, entonces existen dos sucesiones que tienden a ellos a lo largo de Σ y a lo largo de $\gamma_+(x)$, como hemos visto. Si ordenamos estas dos sucesiones de manera que formen una sucesión monótona a lo largo de $\gamma_+(x)$ tendremos una contradicción con el Lema 2.1 pues la sucesión irá saltando alternativamente de un entorno de y_1 a un entorno de y_2 por la definición de convergencia de sucesiones, y no será monótona en Σ . □

Corolario 2.2. *Si $\omega_\sigma(x) \cap \gamma_\sigma(y) \neq \emptyset$, entonces x es un punto periódico y por tanto $\omega_-(x) = \omega_+(x) = \gamma(x)$.*

Demostración. Primero veamos que $\gamma_\sigma(x) \subseteq \omega_\sigma(x)$, esto es así pues dado $y \in \omega_\sigma(x) \cap \gamma_\sigma(x)$ que existe por ser la intersección distinta de vacío, tenemos por un lado que $\gamma_\sigma(y) = \gamma_\sigma(x)$, y por invarianza de $\omega_\sigma(x)$ tenemos que $\gamma_\sigma(y) \subseteq \omega_\sigma(x)$.

Sea $y \in \omega_\sigma(x) \cap \gamma_\sigma(x)$ que no sea un punto fijo, y sea Σ un arco transversal que contenga a y , entonces tenemos una secuencia $x_n \in \Sigma \cap \gamma_\sigma(x)$ entonces esta intersección es distinta del vacío y por tanto $\Sigma \cap \gamma_\sigma(x) \subseteq \Sigma \cap \omega_\sigma(x)$. Luego por el Corolario 2.1 tenemos que $x_n = y$ para todo n y por tanto y es un punto periódico. □

Corolario 2.3. *Un conjunto C compacto, minimal y σ -invariante, es una órbita periódica.*

Demostración. Sea $x \in C$, entonces $\omega_\sigma(x) = C$ por ser ambos invariantes minimales deben coincidir. $x \in \gamma_\sigma(x) \cap C = \gamma_\sigma(x) \cap \omega_\sigma(x)$, entonces por el Corolario 2.2 x es periódico. Como esto ocurre para todo $x \in C$, tendremos que C debe ser una órbita periódica. □

Lema 2.2. Si $\omega_\sigma(x) \neq \emptyset$ es compacto y no tiene puntos fijos, $\omega_\sigma(x)$ es una órbita periódica regular.

Demostración. Sea $y \in \omega_\sigma(x)$. Tomemos $z \in \omega_\sigma(y) \subseteq \omega_\sigma(x)$ que no será un punto fijo por hipótesis. Fijamos un arco transversal Σ que contenga a z y una sucesión $y_n \rightarrow z$ tal que $y_n \in \Sigma \cap \gamma_\sigma(y)$. Entonces $\Sigma \cap \gamma_\sigma(y) \subseteq \Sigma \cap \omega_\sigma(y) \subseteq \Sigma \cap \omega_\sigma(x) = \{z\}$ por el Corolario 2.1. Entonces $y_n = z$ y $\omega_\sigma(x)$ debe ser una órbita periódica. \square

Lema 2.3.

Supongamos que $\omega_\sigma(x)$ es conexo y contiene un órbita periódica regular $\gamma(y)$. Entonces $\omega_\sigma(x) = \gamma(y)$.

Demostración. Si $\omega_\sigma(x) \setminus \gamma_\sigma(x) \neq \emptyset$, por ser $\omega_\sigma(x)$ conexo tenemos un puntos $\tilde{y} \in \gamma(y)$ tal que existe un $z \in \omega_\sigma(x) \setminus \gamma_\sigma(x)$ arbitrariamente cerca de \tilde{y} . Fijamos un arco transversal Σ que contenga \tilde{y} . Entonces, por el Lema 1.1 podemos encontrar $\tau(z)$ tal que $\Phi(\tau(z), z) \in \Sigma$. Pero entonces, por el Corolario 2.1, tendremos que $\Phi(\tau(z), z) \in \Sigma \cap \omega_\sigma(x) = \{\tilde{y}\}$, luego $z \in \gamma(y)$, lo que es una contradicción. Luego $\omega_\sigma(x) \setminus \gamma_\sigma(x) = \emptyset$ y por tanto hemos demostrado el lema. \square

Cuando escribamos ω_\pm estaremos hablando de ambos conjuntos ω_- -límite y ω_+ -límite, si hablamos de ω_σ con $\sigma \in \{\pm\}$ estaremos hablando de uno sólo de los conjuntos límite.

Teorema 2.1. Sea M un subconjunto abierto de \mathbb{R}^2 y $f \in C^1(M, \mathbb{R}^2)$. Fijemos un punto $x \in M$, $\sigma \in \{\pm\}$ y supongamos que $\omega_\sigma(x) \neq \emptyset$ es compacto, conexo y sólo tiene un número (finito como mucho) de puntos fijos. Entonces se da uno de los siguientes casos:

1. $\omega_\sigma(x)$ es una órbita fija.
2. $\omega_\sigma(x)$ es una órbita periódica regular.
3. $\omega_\sigma(x)$ es un conjunto (finito como mucho) de puntos fijos $\{x_j\}_{j=1}^n$ y una única órbita cerrada $\gamma(x)$ tal que $\omega_\pm \in \{x_j\}_{j=1}^n$

Demostración. Si $\omega_\sigma(x)$ no tiene puntos fijos por el Lema 2.2 tenemos que es una órbita regular. Si $\omega(x)$ tiene al menos un punto fijo x_1 y no tiene puntos regulares, entonces $\omega_\sigma(x) = \{x_1\}$ ya que los puntos fijos son aislados y $\omega_\sigma(x)$ es conexo por hipótesis.

Supongamos que $\omega_\sigma(x)$ contiene puntos fijos y regulares. Sea $y \in \omega_\sigma(x)$ regular, veremos que esto no es posible y que como mucho $\omega_\pm(x)$ es un punto

fijo. Luego es suficiente ver que y no existe.

Sea $z \in \omega_{\pm}$ regular. Tomamos un arco transversal Σ que contenga al punto z y una secuencia $y_n \rightarrow z$ tal que $y_n \in \gamma(y) \cap \Sigma$. Por el Corolario 2.1 $\gamma(y) \subseteq \omega_{\sigma}(x)$ intersecta con Σ en un único punto que tiene que ser y . Y por tanto $y_n = z$ para todo n y $\gamma(y)$ es periódico regular. Ahora por el Lema 2.3 tenemos que $\gamma(y) = \omega_{\sigma}(x)$, lo que contradice la hipótesis de que $\omega_{\sigma}(x)$ contenga puntos fijos. \square

2.3. Limitaciones del Teorema

Aunque el teorema es muy potente gracias a la enorme cantidad de situaciones en las que se puede aplicar, tiene sus limitaciones.

El teorema puede descartarse cuando nos enfrentamos a un comportamiento caótico dentro del plano, lo que nos lleva a que no sea un resultado muy genérico, sin embargo no parece que esta situación se mantenga en otros espacios de configuración u otros tipos de sistemas dinámicos.

Espacio de configuración 2-dimensional. En superficies distintas del plano, puede que el teorema de Poincaré-Bendixson no se cumpla. El siguiente sistema en el toro

$$\begin{cases} x' = 1 \\ y' = \pi \end{cases}$$

Las órbitas de este sistema no son periódicas, de hecho son densas sobre la superficie del toro. Si en lugar de π tomamos cualquier otro número irracional, se sigue cumpliendo. Sin embargo pueden exigirse condiciones para que el teorema se verifique como demuestra el Teorema de Schwartz enunciado en la Sección 3.3.

Dimensiones superiores Para dimensión 3 o mayores, las órbitas pueden aproximarse a un conjunto límite muy complejo conocido como atractor extraño (ver Figura 2). Este sistema se caracteriza por no tener dimensión entera y por una dinámica muy sensible a las condiciones iniciales, es lo que conocemos como caos.

A pesar de esto han habido autores que han investigado la manera de conseguir condiciones similares a las del plano con la finalidad de obtener resultados que equivaldrían al teorema de Poincaré-Bendixson en dimensiones superiores, ver por ejemplo el trabajo de F. Haas [10] y el de M. M. Peixoto [22].

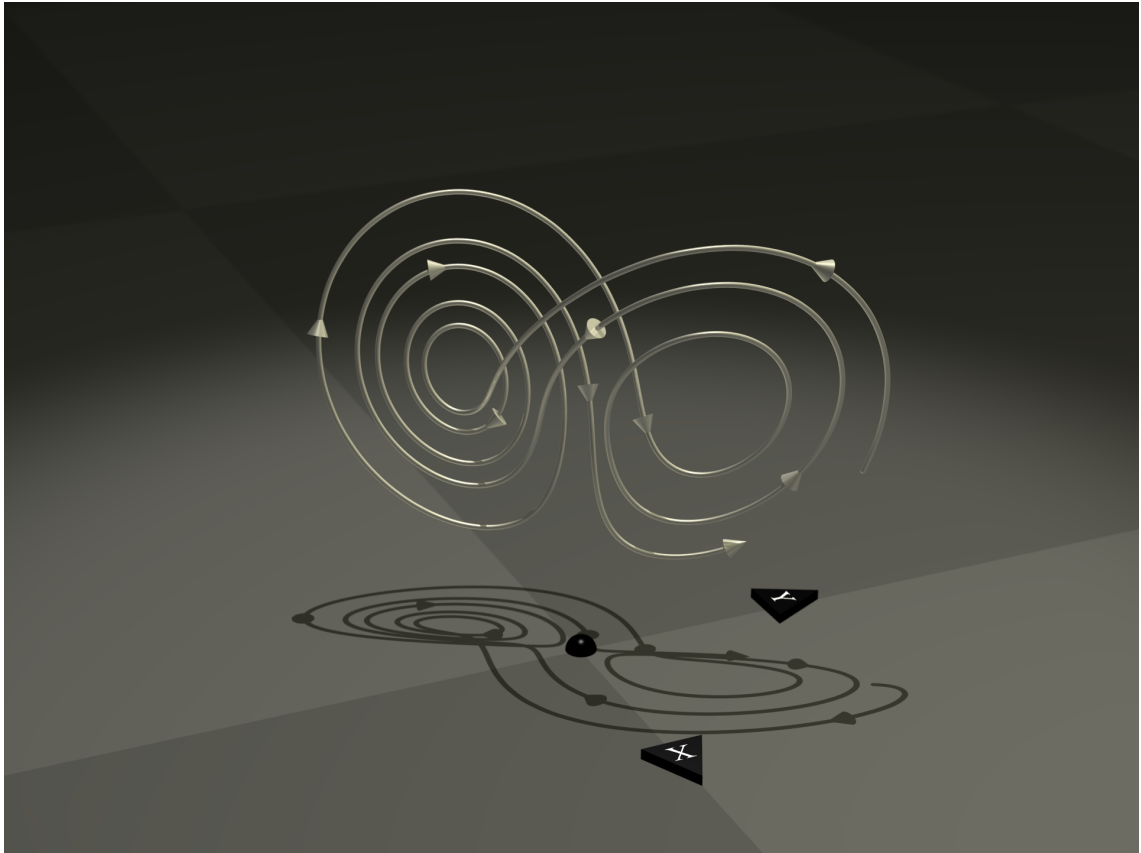


Figura 2: Atractor de Lorentz

Caso discreto No existe un teorema similar para sistemas dinámicos discretos, aunque sí existen algunas contribuciones para generalizar el teorema a sistemas dinámicos híbridos [27], que combinan parte discreta y parte continua.

En conclusión, el teorema de Poincaré-Bendixson nos dice que en un sistema dinámico definido en el plano no puede haber caos.

3. Versiones del Teorema de Poincaré-Bendixson

Esta sección es una traducción parcial de unas notas en preprint del profesor Krzysztof Ciesielski [4] en las que se hace un recorrido histórico de teorema en cuestión, se dan algunas indicaciones sobre la demostración más extendida, análoga a la que hemos presentado en la sección anterior y finalmente se exhiben algunos resultados relacionados y destacados, según su propio criterio, al que he añadido una tesis dirigida por el profesor Carlos Gutiérrez en 2008 y publicada en octubre de 2009 [6].

3.1. Las versiones originales

El teorema nos garantiza, bajo ciertas condiciones, la existencia de órbitas periódicas, frecuentemente estas órbitas son ciclos límite. Y siempre nos asegura la existencia de puntos estacionarios ya que para un sistema definido en el plano, cada órbita periódica debe girar alrededor de un punto de este estilo.

Poincaré [24]

Teorema 3.1. *Sea un sistema autónomo en el plano:*

$$x' = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Supongamos que el sistema define un flujo y que la semiórbita positiva $\gamma^+(p)$ para un $p \in \mathbb{R}^2$ está acotada, y el conjunto límite positivo $\omega(p)$ no contiene puntos estacionarios, entonces $\omega(p)$ es una órbita periódica. Además, para cada p es un punto periódico, $\gamma^+(p)$ es una espiral hacia un ciclo límite del sistema.

Los resultados para el conjunto límite $\alpha(p)$ son análogos.

Corolario 3.1. *Con las mismas hipótesis del teorema, si una región acotada no contiene ningún punto estacionario y contiene una semiórbita de algún punto, entonces contiene una órbita cerrada.*

Bendixson [1]

Teorema 3.2. *Sea un sistema autónomo en el plano:*

$$x' = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Supongamos que $f = (f_1, f_2)$ es continua y que f_1 y f_2 tienen derivadas parciales continuas. Sea p un punto estacionario. Entonces al menos una de las siguientes condiciones debe darse:

1. En un entorno de p existen infinitas órbitas periódicas que dan vueltas alrededor de p .
2. Existe un punto $x \neq p$ tal que $\omega(x) = \{p\}$ o $\alpha(x) = \{p\}$.

Teorema 3.3. *Sea un sistema autónomo en el plano:*

$$x' = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Supongamos que $f = (f_1, f_2)$ es continua y que f_1 y f_2 tienen derivadas parciales continuas. Sea $\gamma(p)$ una órbita periódica. Entonces al menos una de las siguientes condiciones debe darse:

1. En un entorno de $\gamma(p)$ existen infinitas órbitas periódicas.
2. Existe un punto $x \notin \gamma(p)$ tal que $\omega(x) = \gamma(p)$ o $\alpha(x) = \gamma(p)$.

Versión generalizada Que fusiona el Teorema de Poincaré y el Teorema de Bendixson, más conocido como Teorema de Poincaré-Bendixson. Se puede observar que no es exactamente la versión que hemos probado en el apartado anterior, pero también es fácil ver o al menos intuir, su equivalencia con el mismo.

Teorema 3.4. *Sea un sistema autónomo en el plano:*

$$x' = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Supongamos que el sistema define un flujo y que la semiórbita positiva $\gamma^+(p)$ para un $p \in \mathbb{R}^2$ está acotada. Entonces se cumple una sola de las siguientes circunstancias

1. el conjunto positivo $\omega(p)$ es un órbita periódica.
2. para cualquier $q \in \omega(p)$ los conjuntos límite $\alpha(q)$ y $\omega(q)$ no es vacío y contiene puntos estacionarios.

Perko [23] Se trata de una versión para campos vectoriales. Aunque no es clásico puede considerarse como una versión moderna de los anteriores.

Teorema 3.5. *Sea R una región del plano cerrada y acotada. Consideramos un sistema dinámico $x' = X(x)$ en R donde X es un campo de vectores de clase C^1 al menos. Suponemos que R no contiene puntos fijos de X . Suponemos además que existe una trayectoria γ de X que comienza en R y permanece siempre en R . Entonces, o bien γ es una órbita cerrada, o bien γ se aproxima asintóticamente a una órbita cerrada. En otras palabras, existe un ciclo límite en R .*

3.2. Poincaré-Bendixson y los sistemas dinámicos

En los inicios un sistema dinámico se definía como un flujo, o al menos era la definición más extendida entre diferentes autores, y de alguna manera el concepto aún no se desligaba de su componente analítica, ni si quiera Poincaré, a pesar de sus progresos en el estudio cualitativo de un problema de mecánica, profundizó en sus resultados, siendo otros matemáticos como Birkhoff, Whitney o Markov entre otros los que dieron forma a esta teoría tal y como la conocemos hoy en día.

A pesar de que para que un sistema de ecuaciones diferenciales en el plano cumpla el teorema, una de las condiciones constante en todas las versiones es que defina un flujo, en ninguna de las demostraciones conocidas se utiliza la definición actual de flujo o mejor dicho, de sistema dinámico, entre otras cosas por que este era un concepto que aún estaba por llegar. En esta sección veremos cómo algunos autores han adaptado los resultados conocidos en sistemas de ecuaciones, para sistemas dinámicos.

H. Bohr y W. Fenchel [3]

Teorema 3.6. *Sea $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, \pi)$ un sistema dinámico y $p \in \mathbb{R}^2$ un punto regular del sistema. Entonces $p \notin \omega(p)$.*

P. Seibert y P. Tulley [26]

Teorema 3.7. *Sea $X \subset \mathbb{R}^2$ y (X, \mathbb{R}, π) un sistema dinámico. Supongamos que $p \in \mathbb{R}^2$ es un punto regular del sistema. Entonces $p \notin \omega(p)$.*

H. Kneser [17]

Teorema 3.8. *Sea \mathbb{K} la botella de Klein y $(\mathbb{K}, \mathbb{R}, \pi)$ un sistema dinámico sin puntos estacionarios. Entonces existe un $x \in \mathbb{K}$ tal que su órbita es periódica.*

O. Hájek [15]

Teorema 3.9. *Sea (X, \mathbb{R}, π) un sistema dinámico donde X es una variedad dicotómica. Supongamos que $\omega(p) \neq \emptyset$ para algún $p \in X$. Entonces $\omega(p)$ consiste en un conjunto de puntos estacionarios y al menos una familia numerable $\{T_n : n \in A \subset \mathbb{N}\}$ de órbitas no estacionarias. Además, cada subconjunto compacto de X sin puntos estacionarios tiene en común con al menos un número finito de T_n .*

Teorema 3.10. *Sea (X, \mathbb{R}, π) un sistema dinámico donde X es una variedad dicotómica. Supongamos que $\omega(p) \neq \emptyset$ para algún $p \in X$. Entonces $\omega(p)$ consiste en un conjunto de puntos estacionarios y al menos una familia numerable $\{T_n : n \in A \subset \mathbb{N}\}$ de órbitas no estacionarias. Además, cada subconjunto compacto de X sin puntos estacionarios tiene en común con al menos un número finito de T_n .*

N. G. Markley [18]

Teorema 3.11. *Sea \mathbb{K}^2 la botella de Klein y $(\mathbb{K}, \mathbb{R}, \pi)$ un sistema dinámico. Supongamos que $p \in \omega(p)$ o $p \in \alpha(p)$. Entonces p es un punto estacionario o periódico.*

C. Gutiérrez [9]

Teorema 3.12. *Sea (X, \mathbb{R}, π) un sistema dinámico sobre una variedad 2-dimensional X de clase C^∞ . Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. (X, \mathbb{R}, π) es topológicamente equivalente a un sistema dinámico de clase C^2 sobre X .
2. (X, \mathbb{R}, π) es topológicamente equivalente a un sistema dinámico de clase C^∞ sobre X .
3. Si M es un conjunto minimal del sistema (X, \mathbb{R}, π) entonces o bien M es un punto estacionario, o bien M es homeomorfo a la circunferencia (es decir, una órbita periódica) o $M = X$ (es decir, toda la variedad), en el último caso $X = \mathbb{T}^2$.

3.3. Poincaré-Bendixson sobre superficies

El resultado principal de esta sección es el teorema de Schwartz sobre superficies, aunque se hace referencia también a otros resultados anteriores y posteriores para superficies concretas.

Versión para S^2

Teorema 3.13. *Sea un sistema autónomo en el plano:*

$$x' = f(x), \quad x \in S^2.$$

Supongamos que el sistema define un flujo. Entonces cualquier conjunto minimal es o bien un punto estacionario o una trayectoria periódica.

Teorema 3.14. *Sea un sistema autónomo en el plano:*

$$x' = f(x), \quad x \in S^2.$$

Supongamos que el sistema define un flujo. Si $p \in S^2$ no es ni estacionario ni periódico, entonces $p \notin \alpha(p)$ y $p \notin \omega(p)$.

Corolario 3.2.

Teorema 3.15. *Sea un sistema autónomo en el plano:*

$$x' = f(x), \quad x \in S^2 \text{ o } x \in \mathbb{R}^2.$$

Supongamos que el sistema define un flujo. Entonces cualquier conjunto minimal del sistema es una sola trayectoria.

Versión para el toro (Denjoy [7])

Teorema 3.16. *Sea un sistema autónomo en el toro \mathbb{T}^2 :*

$$x' = f(x), \quad x \in \mathbb{T}^2.$$

Supongamos que el sistema define un flujo y que f es de clase C^2 . Sea M un conjunto minimal para este sistema. Entonces o bien M es un punto estacionario o bien M es homeomorfo a un círculo (es decir una órbita periódica) o bien $M = \mathbb{T}^2$.

Versión para superficies orientables (Schwartz [25])

Teorema 3.17. *Sea un sistema autónomo en una variedad \mathbb{M} compacta, conexa, 2-dimensional y de clase C^2 :*

$$x' = f(x), \quad x \in \mathbb{T}^2.$$

Supongamos que el sistema define un flujo y que f es de clase C^2 . Sea M un conjunto minimal para este sistema. Entonces o bien M es un punto estacionario o bien M es homeomorfo a un círculo (es decir una órbita periódica) o bien $M = \mathbb{M}$, en este último caso $\mathbb{M} = \mathbb{T}^2$.

Corolario 3.3. *Sea un sistema autónomo en una variedad \mathbb{M} compacta, conexa, orientable, 2-dimensional y de clase C^2 :*

$$x' = f(x), \quad x \in \mathbb{T}^2.$$

Supongamos que el sistema define un flujo y que f es de clase C^2 . Sea M un conjunto minimal para este sistema. Supongamos que $M \neq \mathbb{M}$. Entonces si el conjunto omega-límite de un punto $\omega(p)$ no contiene ningún punto fijo, $\omega(p)$ debe ser homeomorfo a la circunferencia S^1 .

Versión para la botella de Klein (Demuner [6]) El teorema en realidad se demuestra para campos de vectores continuos, no necesariamente diferenciables, y lo hace introduciendo el concepto de ω -recurrencia débil y que consiste en que todas las trayectorias tienen un punto en su ω -límite.

Teorema 3.18. *Sea X un campo vectorial continuo sobre la botella de Klein \mathbb{K}^2 con un número finito de singularidades. Si γ es una trayectoria que no es débilmente ω -recurrente, entonces γ es uno de los siguientes conjuntos:*

1. *Una singularidad.*
2. *Una órbita periódica*
3. *Un grafo.*

Referencias

- [1] Bendixson, I. Sur les courbes définies par des équations différentielles. *Acta Mathematica*, 24:1–88, 1901.
- [2] Birkhoff, G. D. *Dynamical Systems*. Colloquium Publications of the American Mathematical Society, 1927.
- [3] Bohr, H. and Fenchel, W. Ein satz über stabile bewegungen in der ebene. *Harald Bohr Collected Mathematical Works, Copenhagen*, 2, 1952.
- [4] Ciesielski, K. On the poincaré-bendixson theorem, 2001.
- [5] Ginestar Peiró, D., Jiménez Olivo, P. Coll Aliaga, C., Estruch Fuster, V. and Sánchez Juan, E. *Curso Teórico-Práctico. Fundamentos Matemáticos III: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*. Servicio de Publicaciones de la Universidad Politécnica de Valencia, 1994.

- [6] Federson, M. Demuner, D. P. and Gutierrez, C. The poincaré-bendixson theorem on the klein bottle for continuous vector fields. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 25:495–509, octubre 2009.
- [7] Denjoy, A. Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore. *Journal Mathématique Pures et Appliquée*, 9:333–375, 1932.
- [8] Guillemin, V. and Pollack, A. *Differential Topology*. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliff's, 1974.
- [9] Gutierrez, C. Smoothly continuous flows on two-manifolds and recurrences. *Ergodyc Theory Dynamical Systems*, 6:17–44, 1986.
- [10] Haas, F. Poincaré-bendixson type theorems for two-dimensional manifolds different from the torus. *Annals of Mathematics*, 59:292–299, 1954.
- [11] Hartman, P. *Ordinary Differential Equations*. John Wiley & Sons, 1964.
- [12] Hatcher, A. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002.
- [13] Hirsch, M. W. and Smale, S. *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*. Academic-Press, Inc., 1974.
- [14] Hájek, O. Sections of dynamical systems in e^2 . *Czechoslovak Mathematical Journal*, 15(90):205–211, 1965.
- [15] Hájek, O. *Dynamical Systems in the Plane*. Academic Press, Inc., 1968.
- [16] Jordan, M. E. C. *Course d'Analyse*. Gauthier-Villars, 1887.
- [17] Kneser, H. Reguläre kurvenscharen auf ringflächen. *Mathematical Analyse*, 91:135–154, 1924.
- [18] Markley, N. G. The poincaré-bendixson theorem for the klein bottle. *Transactions of the American Mathematical Society*, 135:159–165, 1969.
- [19] Martínez Alfaro, J. A. *Sistemas Dinámicos. Conceptos Básicos*.
- [20] Nuño, J. J. Mascaró, F., Monterde, J. and Sivera, R. *Introducción a la Topología*. Universitat de València, 1997.
- [21] Newman, M. H. A. *Elements of the Topology of Plane Sets of Points*. Cambridge University Press, 1954.

- [22] Peixoto, M. M. Structural stability on two dimensional manifolds. *Topology*, 1:101–120, 1962.
- [23] Perko, L. *Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer-Verlag, New York, 3rd edition, 2001.
- [24] Poincaré, H. Memoire sur les courbes définies par une équation différentielle. *Journal Mathématique Pures et Appliquées*, 7:375–422, 1881.
- [25] Schwartz, A. A generalization of a poincaré-bendixson theorem to closed two-dimensional manifolds. *American Journal of Mathematics*, 85:453–458, 1963.
- [26] Seibert, P. and Tulley, P. On dynamical systems in the plane. *Archive Mathematical*, 18:290–292, 1967.
- [27] Lygeros, J. Simić, S. N., Johansson, K. H. and Shankar, S. Hybrid limit cycles and hybrid poincaré-bendixson. *15th IFAC world Congress, Barcelona, Spain*, 2002.
- [28] Teschl, G. *Nonlinear Dynamics and Chaos*, 1994.
- [29] Vankerschaver, J. and Moley, T. *Lectures on Periodic Orbits*, 2009.
- [30] Veblen, O. Theory on plane curves in non-metric analysis situs. *Transactions of the American Mathematical Society*, 6(1):83–98, 1905.
- [31] Verhulst, F. *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 2002.
- [32] Zimmerman, S. *An Undergraduate's Guide to the Hartman-Grobman and Poincaré-Bendixson Theorems*, 2008.