

TEORÍA DE CONJUNTOS

Podemos entender por conjunto a la agrupación, asociación, colección, reunión, unión de integrantes homogéneos y heterogéneos, los cuales pueden ser naturaleza real o imaginaria. En conclusión pueden estar integrados por letras, números, meses de un año, astros, países mares etc., a los integrantes en general se les llama elementos del conjunto.

Presentamos a continuación otros ejemplos.

- Conjunto formado por los libros de un estante.
- Conjunto formado por los juguetes de un niño.
- Conjunto formado por los países del África.
- Conjunto formado por los elementos químicos.

I.- NOTACIÓN DE CONJUNTO

La notación la podemos realizar de la siguiente manera:

El conjunto formado por los cinco primeros números naturales

- ❖ $A=\{2,4,6,8,10\}$ se lee: "A es el conjunto formado por los elementos 2,4,6,8,10"
- ❖ $B=\{m,n,r,o,p\}$ se lee: "B es conjunto formado por los elementos m,n,r,o,p".
- ❖ $C=\{\text{sódio, lítio, potasio}\}$ se lee C es conjunto formado por los elementos químicos, sódio, lítio, potasio.

"Los elementos siempre se separan por comas o puntos y comas, y son encerrados entre llaves ($\{ \}$). Los conjuntos siempre se denotan o son representados por letras Mayúsculas como A, B, C, D..."

Si en un conjunto se repite el mismo elemento se considera solo una vez.

Ej. : $R=\{a, a, a\} = \{a\}$ un solo elemento.

II.- RELACIÓN DE PERTENENCIA (\in)

Se dice que todo elemento de un conjunto pertenece a dicho conjunto si forma parte del conjunto en mención y para indicar esto lo representamos de la siguiente manera \in y en contrario de no pertenencia \notin

$$A = \{d, u, r, o\}$$

$u \in A$ Se lee “u pertenece al conjunto A”

$s \notin A$ Se lee "s no pertenece al conjunto A"

1. Número Cardinal.- Nos referimos al número de elementos que tiene un conjunto. Car (D)= n (D)= número de elementos. Ej.:

Es = 5 a e i o u

1 2 3 4 (5) ← número Cardinal del conjunto D

Car (D)=n (D)=5

Nos dice que: **D tiene 5 elementos**

Car (A) = n(A) = 4

$$B = \{p, r, s, t\} \quad \therefore \quad \begin{matrix} p & r & s & t \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} p \text{ es primer elemento.} \\ r \text{ es segundo elemento.} \\ s \text{ es tercer elemento, etc.} \end{array} \right\}$$

a) Por Extensión.- Llamado también por modo explícito, enumerativo o de forma tabular, donde cada elemento del conjunto es nombrado individualmente.

$$P = \{\text{Tierra, Marte, Neptuno, Júpiter}\}$$
$$Q = \{\text{Juan, Iván, Jorge}\}$$

$R = \{\text{Rebeca, Mercedes, Victoria}\}$

b) Por Comprensión.- Llamado también modo implícito, descriptivo o de forma constructiva, es cuando los elementos que forman el conjunto, enuncian una propiedad que los caracteriza a todos.

Ej.:

$P = \{x/x \text{ es un planeta}\}$

Se lee El conjunto P formado por los elementos x tal que x es un planeta

$Q = \{x/x \text{ es un elemento químico}\}$

Se lee El conjunto Q formado por los elementos x tal que x es un elemento químico.

V.- CLASIFICACIÓN DE CONJUNTO

Por el número de elementos que poseen los conjuntos pueden clasificarse en:

➤ Conjunto Vacío.- Es aquel que carece de elementos, también llamado nulo y se denota por el símbolo (\emptyset). Ej.:

$A = \{x/x \text{ es un perro que tiene alas}\}$

$B = \{x/x^3 = 27 \text{ donde } x \text{ es par}\}$

$C = \{x/x \in \mathbb{N}; 12 < x < 13\}$

➤ Conjunto Unitario.- Es aquel conjunto que esta formado por un solo y único elemento. Ej.:

$P = \{x/x \text{ esta formado por satélites de la tierra}\}$

$Q = \{x/x + 2 = 7\}$

$R = \{2, 2, 2, 2\}$ "ojo tiene un solo elemento".

➤ Conjunto Universal.- Se denota por la letra U; contiene, comprende o dentro del cual están todos los demás conjuntos. Ej.:

Si consideramos U como el conjunto de todos los Elementos Químicos, entonces dentro de U existirán subconjuntos de elementos sólidos, líquidos, gaseosos, radiactivos, metales, etc.

➤ Conjunto Finito.- Es aquel cuyo elemento se puede contar en forma usual desde primero hasta el último. Ej.:

$A = \{\text{El número computadoras del salón de clase}\}$

$B = \{275 \text{ paginas del libro}\}$

C= {números impares de 5 al 21}

➤ Conjunto Infinito.- Es aquel cuyo elemento al contarlos no se llega a un último elemento del conjunto, es llamado también indeterminado. Ej.:

A= { $x \in \mathbb{Z}$; $x > 2$ }

B= { x/x Es un número real}

VI.- RELACIÓN ENTRE CONJUNTO

1. Inclusión (\subset).- Se dice que un conjunto "A" esta incluido en otro "B", cuando todo elemento de A, pertenece a B, matemáticamente se define:

$$A \subset B \Leftrightarrow x \in A \rightarrow x \in B$$

Ej.:

A= {radio, televisor, refrigeradora}

B= {Artefactos eléctricos} $\therefore A \subset B$ (A esta incluido en B)

Sean los conjuntos:

$$\begin{array}{l} P = \{6, 7, 8, 9, 10\} \\ Q = \{6, 8, 10\} \\ R = \{6, 10\} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} R \subset P \text{ o } P \supset R \\ Q \subset P \text{ o } P \supset Q \\ R \subset Q \text{ o } Q \supset R \end{array} \right.$$

\subset Se lee ".....esta incluído....."
 \supset Se lee ".....incluye a....."

Dos conjuntos son iguales si tienen los mismos elementos su forma es:

A=B además se cumple:

$$A \subset B \text{ y } B \subset A$$

2. Subconjunto Propio.- B es un subconjunto propio de A, si en primer lugar B es un subconjunto de A, ó B esta incluido en A, y en segundo lugar B no es igual a A, en todo caso no existe por lo menos un elemento de A que no esta en B es decir:

A= {1, 2, 3, 4,5}

B= {2,4} $B \subset A$

Nota: Todo conjunto es subconjunto de si mismo, pero no es subconjunto propio de si mismo. Ej.:

Si: A= {r, s, t}, Entonces:

$$P(A) = \left\{ \emptyset, \{r\}, \{s\}, \{t\}, \{r, s\}, \{s, t\}, \{r, s, t\} \right\}$$

Subconjuntos de A
Subconjunto propios de A
A

3. Conjunto Potencia.- Se llama así al conjunto que esta formado por todos los subconjuntos que se forman de un conjunto dado. Se simboliza por P su notación $P(A)$, se lee potencia del conjunto **A**. Ej.:

Hallar la potencia del siguiente conjunto: $A = \{1, 2, 3\}$

Donde **A** tiene 3 elementos

$$P(A) = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \emptyset\}$$

Donde: $n[P(A)] = 2^{n(A)}$ $\therefore 2^3 = 8$

También si un conjunto tiene “n” elementos, su número de subconjuntos es 2^n y el número de elementos de sus subconjuntos propios es $2^n - 1$

Ej.: Hallar el número de subconjuntos y el número de subconjuntos propios en: $B = \{f, g, h, i\}$

$$P(B) = \{\emptyset, \{f\}, \{g\}, \{h\}, \{i\}, \{f, g\}, \{f, h\}, \{f, i\}, \{g, h\}, \{g, i\}, \{h, i\}, \{f, g, h\}, \{f, h, i\}, \{g, h, i\}, \{f, g, i\}, \{f, g, h, i\}\}$$

⇒ El número de elementos de **B**: $n(B) = 4$

⇒ El número de conjuntos potencia de **B** será:

$$n[P(B)] = 2^n = 16$$

⇒ El número de Subconjuntos de **B**: **16**

⇒ El número de Subconjuntos Propios de **B**: $2^n - 1 = 15$

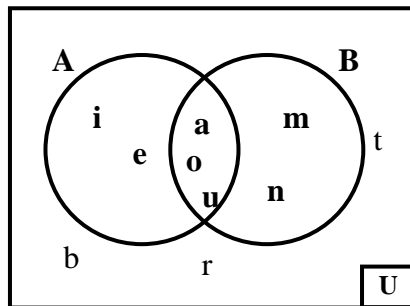
VII.- REPRESENTACIÓN GRAFICA DE CONJUNTO

1.- Diagrama de VENN

Los conjuntos pueden ser representados haciendo uso de gráficas como: círculos, elipses, rectángulos u otras figuras geométricas de áreas plana, dentro de los cuales se ubican los elementos que le pertenecen y fuera a los elementos que no pertenecen al conjunto.

A continuación representamos algunos conjuntos:

$A = \{a, e, i, o, u\}$ y $B = \{a, m, n, o, u\}$ $\therefore A \cup B = \{a, e, i, o, u, m, n\}$



$\therefore A \cap B = \{a, o, u\}$

Nota: "U" es el conjunto universal de todas las letras del alfabeto.

VIII.- OPERACIONES ENTRE CONJUNTOS

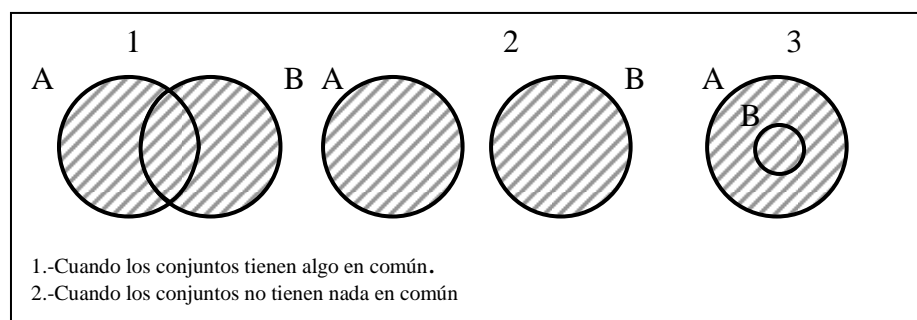
Las operaciones de conjuntos son: la unión, la intersección, la diferencia, la complementación, el conjunto producto y la diferencia simétrica.

1. **UNIÓN DE CONJUNTO.-** La unión de conjunto A y B es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a A, a B o a ambos, se simboliza por:

$A \cup B$, y se lee "A" unión "B"

Notación: $A \cup B = \{x/x \in A \vee x \in B\}$

Gráficamente es:



Propiedades: Los más importantes son:

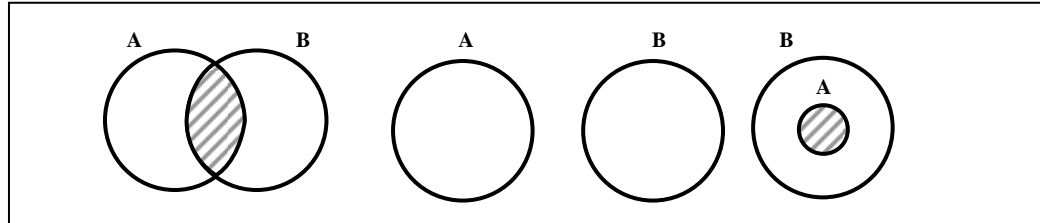
- 1) $A \cup B = B \cup A$ (conmutativa)
- 2) $A \cup A = A$ (Idempotencia)
- 3) $A \cup \emptyset = A$
- 4) $A \cup U = U$; U: universo

2.- Intersección (\cap): Dados los conjuntos A y B, se llama intersección al conjunto formado por los elementos que pertenecen a A y B a la vez; es decir es el conjunto formado por los elementos comunes a A y B

Notación:

$$A \cap B = \{x/x \in A \vee x \in B\}$$

Gráficamente:



Propiedades:

- i) $A \cap B = B \cap A$
- ii) $A \cap A = A$
- iii) $A \cap \emptyset = \emptyset$
- iv) $A \cap U = A$; U: universo

3.- Diferencia (-): Dados 2 conjuntos A y B, se llama diferencia de A y B, al conjunto formado por todos los elementos de A y que no pertenecen a B; es decir, es el conjunto formado por los elementos que pertenecen exclusivamente a A.

Notación:

$$A - B = \{x/x \in A \vee x \notin B\}$$

Ej.: Sean los conjuntos:

$$A = \{1, 2, 3, 6\}$$

$$B = \{2, 4, 6, 7, 8\}$$

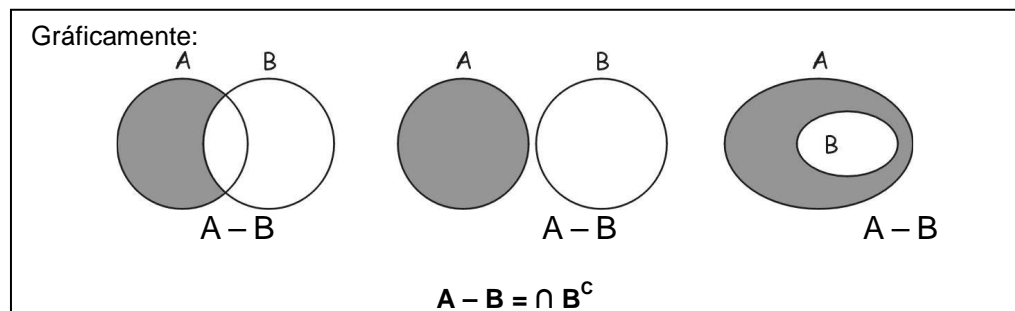
$$C = \{4, 7, 8\}$$

$$\Rightarrow A - B = \{1, 3\}$$

$$B - C = \{2, 6\}$$

$$A - C = \{1, 2, 3, 6\}$$

Gráficamente:



Propiedades:

- i) $A - A = \emptyset$
- ii) $A - \emptyset = A$
- iii) $\emptyset - A = \emptyset$
- iv) $A - B = B - A \Leftrightarrow A = B$

4. Complemento de un conjunto ($C(A)$, A^C): Dado un conjunto A que está incluido en el universo U, se denomina complemento del conjunto A, a todos los elementos que estén fuera de A, pero dentro del universo.

Notación:

$$A^C = \{x/x \in U \wedge x \notin A\}$$

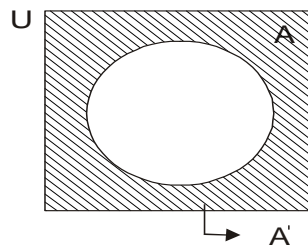
Ejem: Sean:

$$U = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8\}$$

$$A = \{1, 3, 4, 7, 8\}$$

$$A^C = \{2, 5, 6\}$$

Gráficamente:

**Propiedades:**

- i) $(A^C)^C = A$
- ii) $\emptyset^C = U$
- iii) $U^C = \emptyset$
- iv) $A \cup A^C = U$
- v) $A \cap A^C = \emptyset$

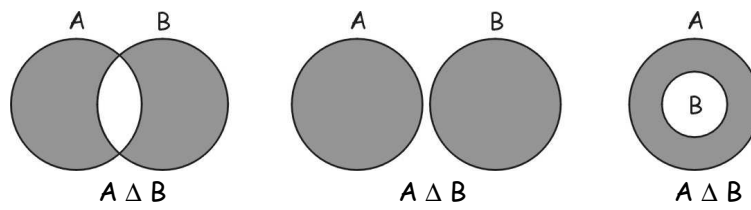
5.- Diferencia Simétrica (Δ).- Se llama diferencia simétrica de los conjuntos A y B, al conjunto de elementos de A y B, excepto los que pertenecen a la intersección. Esto es, que pertenecen a A o a B

$$A \Delta B = \{x/x \in A \text{ y } x \notin B\} \vee \{x/x \in B \text{ y } x \notin A\}$$

NOTA:

PUEDA DECIRSE TAMBIÉN QUE “ $A \Delta B$ ” ES EL CONJUNTO DE TODOS LOS ELEMENTOS DE $A \cup B$ QUE NO PERTENECEN AL CONJUNTO $A \cap B$. EN OTRAS PALABRAS “ $A \Delta B$ ” ES EL CONJUNTO FORMADO POR LOS ELEMENTOS “EXCLUSIVOS” DE A O DE B.

Gráficamente:



- $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$
- $A \Delta B = A^c \Delta B^c$

Nota: “Leyes de Morgan”

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$