UNIDAD DIDÁCTICA:

SEMEJANZA
Y
RAZÓN ÁUREA

William O. Flores López

Rosana Rodríguez López

Ramón M. Veiga Fernández

"La geometría tiene dos grandes tesoros: uno es el teorema de Pitágoras; el otro es la división de un segmento en razones extrema y media. El primero lo podemos comparar con una pieza de oro; al segundo lo podemos considerar una preciosa joya".

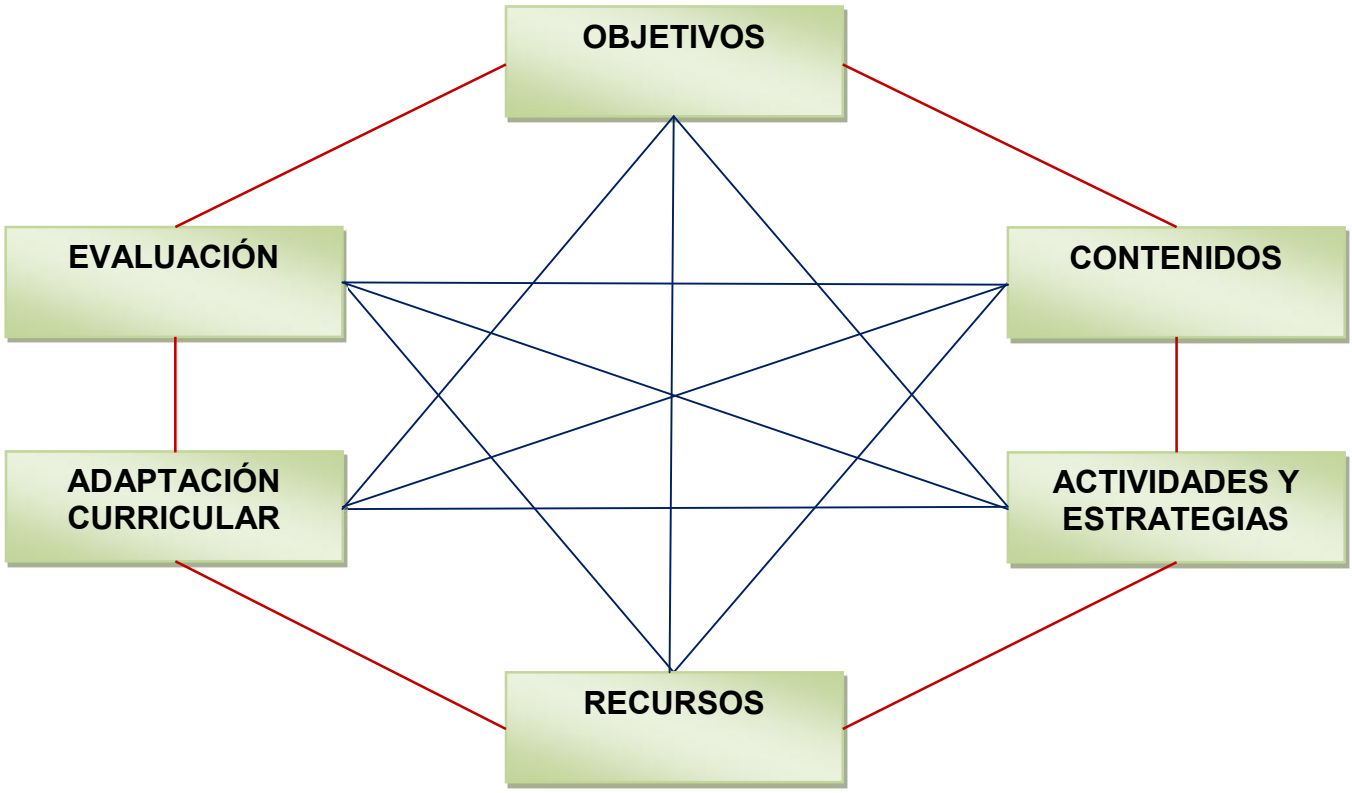
Kepler

I. INTRODUCCIÓN

La geometría es uno de los tópicos matemáticos más novedosos en cuanto a su planteamiento. En los nuevos diseños curriculares de la ESO, el tratamiento de la geometría ha estado exclusivamente centrado en el aprendizaje de figuras, es por lo que a continuación presentaremos una ***"propuesta de unidad didáctica dedicada a la semejanza y a la razón áurea"*** *que está dirigida* a estudiantes de Matemáticas de 4º de ESO (OPCIÓN A).

En el desarrollo de la unidad y en el diseño de las diferentes actividades, se procurará activar el desarrollo de las diferentes competencias que, dado el aspecto multidisciplinar del tema, no resultará difícil. Se procurará activar aspectos propios de otras disciplinas como el Dibujo Técnico y el Arte. En esta unidad didáctica, se exponen procedimientos con la formación y creatividad del manejo del programa de código libre GeoGebra, que es una herramienta TIC que posteriormente utilizaremos para desarrollar diferentes actividades, aunque previamente habrá que adiestrar a los alumnos.

Es importante considerar que todos estos aprendizajes necesitan ser programados, en el sentido de que para abordarlos es preciso marcarse objetivos y contenidos, diseñar actividades de desarrollo y evaluación y prever los recursos necesarios. Esta unidad didáctica se configura en torno a una serie de elementos, dichos elementos contemplan los siguientes aspectos: descripción, objetivos didácticos, contenidos, actividades, recursos materiales, organización del espacio y el tiempo y evaluación, por los que está constituido el siguiente diagrama:



II. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El problema que planteamos para la realización de esta unidad didáctica es ***"Identificar la razón áurea en las diferentes figuras, polígonos, semejantes, donde esté la influencia del numero áureo, para llegar a la comprensión del cálculo de áreas y volúmenes".*** Los medios informáticos nos ayudaran a estimar el valor del número áureo.

III. DETERMINACIÓN DEL CONTENIDO ACADÉMICO.

Trataremos aquí el concepto de proporcionalidad en Geometría. Diremos que dos figuras son semejantes, si tienen la misma forma y sus dimensiones son proporcionales.

Dos polígonos son *semejantes* si sus lados son proporcionales. A la razón entre sus lados, le llamaremos *razón de semejanza*. Una definición equivalente de polígonos semejantes, es que son aquellos que tienen ángulos iguales.

Aunque no sea objeto de esta unidad, se podría hacer un estudio funcional de la semejanza: La semejanza es la transformación del plano que resulta de componer un movimiento y una homotecia. Llamaremos razón de semejanza a la razón de la homotecia correspondiente.

No será este último el enfoque que daremos a nuestra unidad didáctica, sino que nos centraremos en dos casos particulares de semejanza: la escala y la razón áurea.

Las escalas son factores de reducción que nos permiten representar en un plano elementos de la realidad. Así la escala (por ejemplo E 1:50) es la razón de semejanza entre la realidad y el plano.

Otro caso particular de semejanza es la razón áurea. Podemos consultar múltiples trabajos al respecto algunos con un enfoque más artístico (Pacioli, 1987), otras con un enfoque matemático (Alsina y Trillas, 1984), todos ellos atractivos presentando el mágico número de oro ϕ.

El número áureo se define como la proporción que divide a un segmento en dos partes tales que la mayor es a la menor como el total es a la mayor.

Es decir, dos números A y B (A<B) están en proporción de oro si:

$$\frac{A+B}{A} = \frac{A}{B}$$

Luego:

$$AB + B^2 = A^2 \quad \Rightarrow A^2 - BA - B^2 = 0$$

$$A = \frac{B \pm \sqrt{B^2 + 4B^2}}{2} = \frac{B \pm B\sqrt{5}}{2} = B.\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

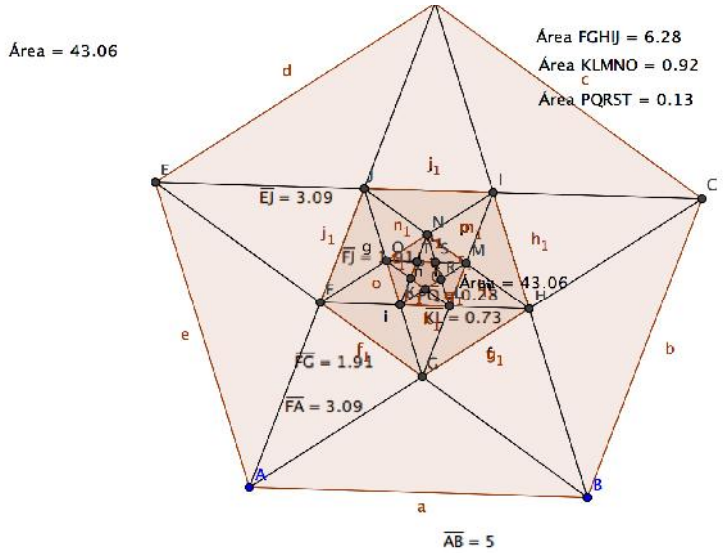
Luego la solución positiva de la ecuación resulta en la proporción:

$\frac{A}{B} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi = 1{,}618033989\ldots$que es el número de oro.

Enunciaremos a continuación algunas propiedades del número áureo:

1.- $\Phi - 1 = \frac{1}{\Phi}$

2.- ϕ es el cociente entre la diagonal y el lado del pentágono regular. Trazando las diagonales obtenemos el pentáculo, en el que hay más relaciones áureas.



3.-En el pentáculo hay dos tipos de triángulos isósceles de 72°, 72° y 36°, llamado *triángulo sublime*, e isósceles obtusángulo de 36°,36 °y 108°, que tiene los lados en proporción $1:\Phi^2$ y los lados en 1:3

4.- Un rectángulo áureo es aquel que tiene los lados en proporción áurea. A partir de uno se generan otros por adición o substracción de cuadrados.

5.-Dada la sucesión de Fibonacci:

a, b, a+b, a+2b, 2a+3b, 3a+5b…;

es decir, $u_0 = a$,$u_1 = b$,$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ se cumple que $\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n-1}}{u_n} = \Phi$

6.- $\Phi = 2.\cos\frac{\pi}{5}$ Esta propiedad geométrica implica la presencia del número áureo en multitud de proporciones entre polígonos regulares, pues el ángulo de 36° aparece en el pentágono, decágono, estrellas pentagonales y decagonales.

El número áureo tiene diferentes conexiones con otras partes de las matemáticas, así como con el arte, véase por ejemplo (Cachafeiro, 2010), la Biología y la Arquitectura, donde por ejemplo nos podríamos extender hablando del Modulor de Le Corbusier.

IV. DETERMINACIÓN DE LA PROBLEMÁTICA DE APRENDIZAJE

Daniel Chazan caracteriza en "Similarity: Exploring the understanding of a geometrical concept", los conceptos previos de los alumnos acerca de semejanza además de las dificultades que experimentan en el aprendizaje de este tema. Aún sin pretender presentar un grupo cerrado de ítems, este autor identifica cuatro áreas de dificultad en relación a la semejanza:

a) Comprensión del concepto de semejanza,

b) Proporciones durante la amplificación de un objeto,

c) Relaciones en el crecimiento dimensional, y

d) Proporciones en triángulos rectángulos.

Todas estas cuestiones se tratan durante una unidad de semejanza típica en la educación secundaria y han sido reconocidas como obstáculos para los estudiantes de enseñanza secundaria. De acuerdo con las citadas aportaciones (Chazan, 1988), esta situación motivó la creación de una unidad de semejanza enfocada a su uso con una herramienta informática, de modo que los alumnos son instados a explorar construcciones incluyendo semejanza y pretendiendo, en la medida de lo posible, que esta actividad les fuerce a confrontar sus concepciones con las evidencias que puedan ser contrarias. La herramienta informática permite atacar las dificultades de comprensión de los estudiantes haciendo que se enfrenten a tareas relacionadas con esas dificultades. Potenciando el trabajo grupal de los alumnos, se favorece que el docente observe al estudiante "hacer Matemáticas", dejando a la vista los procesos de pensamiento a lo largo de la discusión.

Por otra parte, en el trabajo citado (Chazan, 1988) se señala que la dificultad más básica que experimentan los estudiantes estudiando semejanza implica un

aspecto crucial de semejanza, razón y proporción. También se indica que los estudiantes suelen confundir semejanza con dimensión.

Ruiz y sus colaboradores (2009) presentan una revisión de las estrategias que emplean los estudiantes de sexto grado de primaria al resolver actividades de razón y proporción simple y directa, con la finalidad de reconocer los procesos cognitivos del pensamiento de los alumnos y poder determinar cómo estructuran sus respuestas ante situaciones problemáticas. Según (Clark y otros 2003; Ruiz, 2002; Ruiz y otros, 2002), la enseñanza y aprendizaje de los tópicos de razón y proporción se inicia en la educación primaria y constituyen el cimiento para la adquisición de los conceptos fundamentales. Como afirman Ruiz y sus colaboradores, la incomprensión de los tópicos de razón y proporción contribuyen al mal empleo de conocimientos de la aritmética escolar, como el manejo de problemas multiplicativos, además de distorsionar conceptos que se abordan en secundaria y en el nivel superior, como el estudio de funciones.

Piaget e Inhelder (1978) indican que en el estudio de la evolución del pensamiento del niño, con frecuencia encontraron el problema de cómo llegan a ser entendidas las proporciones. Para Piaget la noción de proporción empieza siempre de una forma cualitativa y lógica, antes de estructurarse cuantitativamente. Además, el razonamiento proporcional, junto con la habilidad de formular hipótesis y trabajar con un cierto número de variables es, para Piaget, indicativo de que el estudiante se encuentra en la etapa del razonamiento formal y que es cuando el sujeto tiene que reflexionar y hacer abstracciones para entender a las razones como relaciones entre cantidades y vincularlas a otras razones.

Markovits, Hershkowits y Bruckheimer (1986), al analizar problemas de valor perdido y problemas de comparación, llegan a la conclusión de que una de las razones por las que los estudiantes resuelven erróneamente estos problemas es el uso de la regla de tres no apoyado en la comprensión. Nesher y Sukenik (1989) apuntan como uno de los errores dominantes la estrategia aditiva, de modo que la relación de las razones es apreciada como la diferencia entre términos, en vez de asimilar que es de carácter multiplicativo.

Los trabajos de Hart (1988) sobre los métodos empleados por estudiantes de enseñanza secundaria durante la resolución de problemas de razón y proporción, apuntan la dificultad hallada por la mayoría de los estudiantes en la resolución de este tipo de problemas usando muchos de ellos métodos aditivos y evitando el uso de fracciones. Según el autor, los problemas de proporción requieren a menudo el reconocimiento de un factor escalar fraccional, seguido de una multiplicación por el factor, relacionándose así con la comprensión de las fracciones. Por otra parte, Streefland considera que la enseñanza temprana de razón y proporción debe partir de niveles cualitativos, aún apoyando procesos de cuantificación.

Ruiz y sus colaboradores (2009) indican varios aspectos relativos al pensamiento cognitivo de los estudiantes, a través de las estrategias empleadas para resolver la tarea. Como conclusión, extraen que la enseñanza escolar no ha

explotado al máximo el pensamiento cualitativo de los estudiantes en relación a la proporcionalidad. Este hecho es deducido, por ejemplo, por centrar su atención en una de las dimensiones de las figuras que se les pedía reducir o amplificar. El hecho de que visualizaran un dibujo en su conjunto, y no se fijaran en cada una de sus partes, para poder seleccionar la reducción del original, indica la necesidad de trabajar más el aspecto cualitativo de la proporcionalidad. Además, los alumnos mostraron una cierta comprensión rudimentaria de la proporción, confusión al establecer relaciones entre magnitudes y falta de detección del factor escala. Tampoco fueron conscientes de la diversidad de representaciones que conducían a la solución. Como estrategia de resolución de tareas frecuente se observó la estrategia del valor unitario.

Por otra parte, en Ruiz (2008), se plantea la importancia de que los estudiantes complementen su aprendizaje de razón y proporción (simple y directa) con la observación y manipulación de representaciones hechas por geometría dinámica, más concretamente en el ambiente del Cabri-Geometre. La autora señala que las representaciones de distinta naturaleza usadas de manera simultánea le permiten al estudiante, por un lado, dotar de significado a los problemas planteados y, por otro, desarrollar el pensamiento proporcional cualitativo, el cual se ve favorecido con el uso del Cabri-Géomètre, y hacer el tránsito al cuantitativo.

Los autores Lesh, Post y Bher señalan que toda persona que resuelve un problema referido a proporciones, no necesariamente usa el razonamiento proporcional, sino que puede simplemente notar una simple relación numérica o usar un algoritmo mecánico tal como una multiplicación cruzada. Según estos autores, el razonamiento proporcional abarca una amplia y compleja gama de habilidades cognoscitivas que incluyen tanto la dimensión matemática como la psicológica.

Según Ruiz (2008), la utilización de la conservación de la proporción puede ser usada en el desarrollo de las actividades didácticas, al menos con tres posibles enfoques:

i) como verificador de los cálculos que hagan los alumnos,
ii) como generador de nuevos problemas por medio del arrastre de algún punto libre conveniente,
iii) como ilustrador de la transición entre las configuraciones posibles.

Por consiguiente, se presenta Cabri-Géometrè como un recurso para favorecer el reconocimiento y desarrollo de patrones perceptuales.

Finalmente, en Ruiz y colaboradores “Empleo de la Tecnología en la enseñanza de los temas de razón y proporción en educación Básica “, se introducen algunas actividades enfocadas a la enseñanza de razón y proporción desarrolladas en una web interactiva, identificando si permiten al estudiante de 11 años de edad lograr consolidar los conceptos involucrados, desarrollando su pensamiento proporcional cualitativo y ayudándolo a recuperar el sentido que tiene su pensamiento proporcional cuantitativo.

Galbraith y Haines (1998) mostraron que los estudiantes que usan el ordenador en su práctica de aprendizaje en matemáticas, disfrutan las matemáticas. Se sienten atraídos por las características de flexibilidad que proporciona el ordenador, por lo que no les importa pasar mucho tiempo para completar una tarea y disfrutan probando nuevas ideas. Su opinión es que las aplicaciones basadas en la Web aumentan el nivel de confianza, motivación, e interacción. Observaron además que los alumnos mostraron gran interés al trabajar con la aplicación Web interactiva y tuvieron autonomía en la resolución de las tareas.

La aplicación Web interactiva logró que el alumno desarrollara habilidades que con el lápiz y papel no logran ser desarrolladas en todos los alumnos de un grupo. Se concluye que las actividades realizadas permitieron desarrollar lo visual y lo perceptual, es decir, lo que constituye su pensamiento proporcional cualitativo. También desarrollaron aspectos cuantitativos mediante la comparación de figuras, a través de la superposición de ellas (Freudenthal, 1983). La experiencia tuvo como resultado que los alumnos fuesen capaces de emplear los distintos registros de representación al resolver problemas de razón y proporción, permitiendo construir estos conceptos, dotándolos de significado y sentido, yendo más allá que la simple aplicación de un algoritmo.

Las actividades consideradas en esta unidad van enfocadas al estudio de la proporción a través de cuestiones de tipo geométrico. En cuanto a las dificultades de comprensión de los conceptos geométricos, los autores Dina van Hiele-Geldof y Pierre van Hiele, sugieren que la comprensión geométrica de los estudiantes progresa a través de diversos niveles que deben alcanzarse de modo consecutivo: los niveles de van Hiele (visual, descriptivo/analítico, abstracto/relacional, deducción formal y rigor/metamatemática). Los trabajos de varios autores reflejan que gran parte de los alumnos comienzan la educación secundaria con un nivel de comprensión Van Hiele bajo, mientras que se requeriría al menos un nivel 3 (o incluso 4) para el estudio de la geometría a nivel de la enseñanza secundaria. Dado que la elaboración de pruebas formales requiere al menos un nivel 4, muchos alumnos tendrían problemas para entender los contenidos. Normalmente los problemas se concentran demasiado en el empleo de fórmulas para realizar diferentes cálculos, y no lo suficiente en analizar los conceptos, plantear conjeturas sobre las propiedades, probarlas, y estudiar multitud de figuras experimentalmente.

Por otra parte, de acuerdo con la teoría del psicólogo Jean Piaget sobre desarrollo cognitivo, una persona necesita alcanzar un cierto nivel (llamado el estado de las operaciones formales) para ser capaz de razonar formalmente y entender y construir pruebas.

Una de las dificultades que presentan los estudiantes en relación a las pruebas es su propio concepto de lo que constituye una prueba. Por ejemplo, algunos alumnos consideran que comprobar que un enunciado se cumple para un ejemplo, o quizás varios, es suficiente para mostrar su veracidad, o que el dibujo de un diagrama adecuado permite demostrar visualmente que una

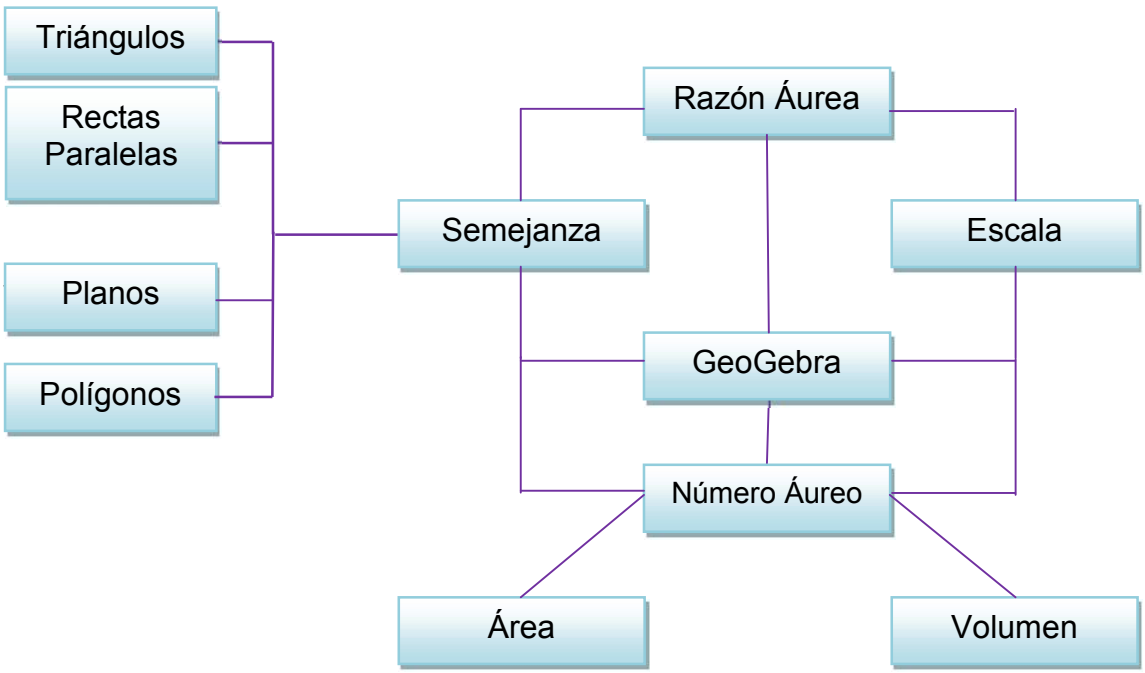
propiedad se cumple. La utilización de herramientas informáticas persigue facilitar que los estudiantes formulen y prueben conjeturas.

V. FORMULACIÓN, SELECCIÓN Y SECUENCIACIÓN DE OBJETIVOS.

Objetivos escolares de la semejanza y la razón áurea:

1. Identificar figuras semejantes.
2. Identificar polígonos semejantes.
3. Calcular la razón de semejanza entre dos figuras.
4. Identificar la escala como razón de semejanza.
5. Realizar diferentes cálculos con escalas.
6. Reconocer la influencia de la razón de semejanza en el cálculo de áreas y volúmenes.
7. Conocer el número áureo.
8. Identificar la aparición del número áureo en diferentes lugares.
9. Utilizar diferentes medios informáticos para estimar el valor del número áureo.

Por lo tanto, planteamos la siguiente estrategia de aprendizaje que es un mapa conceptual, el cual nos permitirá sintetizar la información para comprenderla en el proceso enseñanza-aprendizaje de esta unidad didáctica:



Realizaremos diferentes actividades para alcanzar los objetivos propuestos. En el siguiente cuadro, se recoge la contribución de las diferentes actividades a la consecución de los objetivos propuestos:

OBJETIVO	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1.- Identificar figuras semejantes.	**X**										
2.- Identificar polígonos semejantes.		**X**									
3.-Calcular la razón de semejanza entre dos figuras.	**X**	**X**									
4.- Identificar la escala como razón de semejanza.	**X**				**X**						
5.-Realizar diferentes cálculos con escalas.					**X**						
6-Reconocer la influencia de la razón de semejanza en el cálculo de áreas y volúmenes.		**X**									
7.-Conocer el número áureo.		**X**	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**
8.- Identificar la aparición del número áureo en diferentes lugares.		**X**	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**
9.-Utilizar diferentes medios informáticos para estimar el valor del número áureo.	**X**	**X**	**X**	**X**		**X**	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**

VI. SELECCIÓN DE ESTRATEGIAS DIDÁCTICAS: PLANTEAMIENTO METODOLÓGICO Y SECUENCIACIÓN DE ACTIVIDADES.

PLANTEAMIENTO METODOLÓGICO

El diseño de las actividades proviene de la perspectiva de que los estudiantes construyen su conocimiento por sí mismos (Piaget, 1952) en respuesta a sus objetivos dentro del contexto social (Vygotsky, 1978) como lo puede ser el aula (Cobb & Bauersfeld, 1995). El diseño instruccional y la metodología debe permitir, por un lado, oportunidades para que los estudiantes elaboren de modo individual su experiencia e intuiciones además de la construcción colectiva del conocimiento escolar. Por otro lado, los estudiantes deben implicarse en actividades participativas que promuevan un ambiente escolar basado en el apoyo por parte del profesor (Fuson, De La Cruz, Smith, Lo Cicero, Hudson, Ron, & Steeby, 2000).

La colaboración entre profesores y alumnos produce la modificación iterativa del diseño de modo que se optimice la consonancia con las dificultades, estrategias, vocabulario, y comprensiones emergentes (Abrahamson, 2003).

Se ha demostrado que las actividades resultan más efectivas cuando su lectura o construcción permite a los alumnos conectar el material con sus comprensiones previas (Wilensky, 1993), entendiendo "comprensiones" no como conceptos estáticos, sino como maneras de actuar y pensar (von Glasersfeld, 1990, pág. 37; o Freudenthal, 1981).

De los trabajos sobre Fenomenología (Heiddeger, 1962), se conoce que las concepciones previas de los estudiantes, tanto académicas como no académicas, se encuentran de modo implícito en su modo de actuar y pensar y se hacen parcialmente explícitas a través de la problematización en la clase que facilita la apropiación de los artefactos matemáticos (Abrahamson, 2003).

Siguiendo los estudios realizados por Piaget y sus colaboradores sobre proporcionalidad (Piaget, Grize, Szeminska y Bang, 1968), que llevaron a pensar que una vez que los alumnos habían entendido las funciones lineales serían capaces de resolver problemas de proporcionalidad en cualquier situación, los trabajos de Vergnaud (1994) sugieren, en cambio, que a la hora de entender el concepto de proporcionalidad, la naturaleza de la situación del problema juega un papel importante. Véase (Abrahamson, 2003).

Las actividades que se trabajan en la unidad persiguen el razonamiento, la argumentación y el trabajo en pequeño grupo, remarcando el papel protagonista del alumno asistido por profesor, que fomenta la actitud positiva hacia el aprendizaje y que los alumnos sean conscientes del valor que tiene el trabajo que ellos realizan para su propio aprendizaje.

La acción del profesor irá dirigida del siguiente modo. En primer lugar, los estudiantes obtienen información del profesor, quien presenta una nueva idea y permite que estos trabajen con el nuevo concepto. A continuación, y a través de la guía del profesor, los alumnos realizan tareas mediante la exploración de las relaciones implícitas. Tras la explicación de sus descubrimientos, los estudiantes podrán realizar tareas más complejas y resumir su aprendizaje.

Es importante permitir al alumnado que experimente, investigue, y juegue con las ideas geométricas y figuras, para ello la utilización de las nuevas tecnologías será de gran ayuda, en particular el uso de herramientas de geometría dinámica, que permitirán una manipulación interactiva de las figuras, moviéndolas, rotándolas, estrechándolas, de modo que se puedan analizar sus propiedades.

Los alumnos podrán comprobar distintos comportamientos, hacer sus procedimientos más sistemáticos, realizar descubrimientos por sí mismos y comunicar su conocimiento explicando sus conclusiones.

SECUENCIA DE ACTIVIDADES

El *número áureo* o *número de oro* es uno de los tres famosos números que tiene como nombre una letra, **Φ**. Se trata de un número que no se puede expresar como razón de dos números enteros, lo que equivale a decir que tiene infinitos decimales y que, además, esos infinitos decimales no responden a ninguna regla de repetición.

La también llamada *divina proporción* ha tenido una importancia capital a lo largo de la historia en artes plásticas y arquitectura, considerándosela la proporción perfecta entre los lados de un rectángulo. Presentamos ésta como una importante herramienta en la aplicación de la proporcionalidad, a la vez que se potencia su utilidad en el estudio de propiedades de tipo geométrico.

La mayoría de las actividades (especialmente las más sencillas que se proponen al principio) han sido diseñadas de manera que se facilite un contexto donde los alumnos puedan realizar una observación y exploración del problema planteado, indagación y experimentación con las diferentes posibilidades y aplicación a ejemplos particulares. La utilización de Geogebra se convierte en una herramienta ideal para garantizar que los alumnos realicen las diferentes fases dentro de las actividades propuestas. En las actividades más complejas, se proporciona un guión detallado con la finalidad de orientar la actuación.

ACTIVIDAD 1: LA FOTO.

Repartimos el alumnado en grupos de 4 o 5 alumnos. Hacemos una foto. Podemos imprimirla en un folio A3 primero, y después en A4.

Pedimos medir a cada uno de los componentes del grupo en la foto A3 con una regla. Luego tomamos la medida real de uno solo de los miembros del grupo.

¿Podríamos calcular ya la medida real del resto de los miembros del grupo?

¿Cómo mecanizaríamos los cálculos?

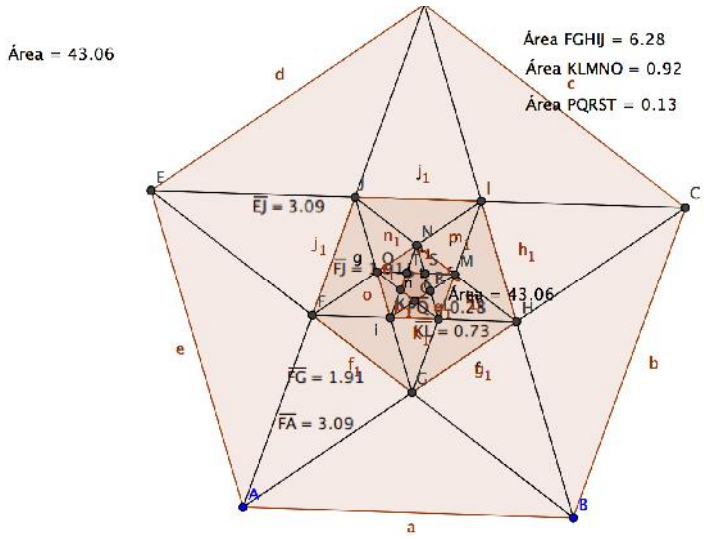
¿Como calcularíamos la altura en A4 de cada uno de los componentes utilizando el menor número posible de veces la regla? Mecaniza los datos.

¿Cuál es la media de las alturas reales de la clase? Relaciona las alturas medias reales, las medias A4 y las medias A3.

ACTIVIDAD 2: EL PENTÁGONO

Para realizar esta actividad utilizaremos el programa de software libre Geogebra, en el cual habremos adiestrado previamente a los alumnos.

- Construiremos un pentágono regular. ¿Cuánto miden sus ángulos interiores? ¿Cuánto medirán los de un hexágono? ¿Y los de un decágono?
- Mide las longitudes de los lados y el área del pentágono.
- Traza una de las diagonales del pentágono. ¿Qué relación existe entre el lado y la diagonal?
- Traza el resto de las diagonales. Observa que se forma un pentágono. ¿Qué relación existe entre este pentágono y el original? Fíjate en los lados y las áreas.
- Clasifica los diferentes tipos de triángulos que aparecen.
- Sin volver a hacer las diagonales, predice la longitud de las mismas y el lado y el área del nuevo pentágono que se forma.



ACTIVIDAD 3: ¿SOMOS ÁUREOS?

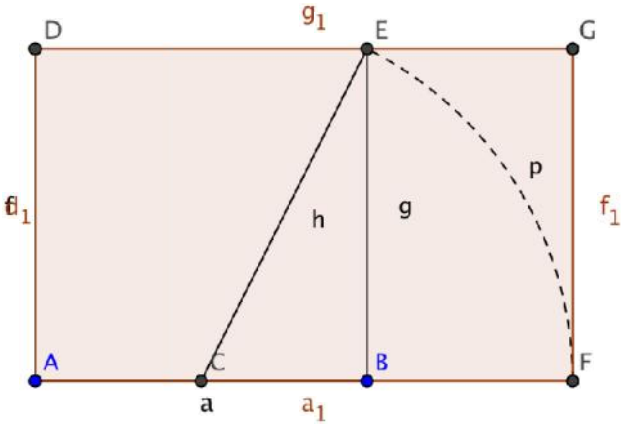
Midamos la estatura y la altura del ombligo de cada uno de los miembros de la clase. Calcula la relación entre ambos con su cociente. ¿Qué observas? Si una persona mide 182 cm., ¿a qué altura del suelo se espera que tenga el ombligo?

ACTIVIDAD 4: CONSTRUCCIÓN DE UN RECTÁNGULO ÁUREO CONOCIDO SU LADO MENOR

El problema consiste en, dado un segmento, obtener otro de modo que la razón entre este último y el dado sea la razón áurea. Construye, utilizando Geogebra, un rectángulo áureo a partir de su lado menor.

A modo de guía, y tal como se indica en la figura siguiente, el proceso de construcción consistirá en los siguiente pasos:

- Construir un triángulo rectángulo con el segmento dado y su mitad.
- A la diagonal de este triángulo le sumamos la mitad del segmento dado.
- Comprobar que el segmento así obtenido es al dado como la razón áurea.



ACTIVIDAD 5: EL PLANO DE MI CASA

Se presentará al grupo un plano real de una casa E 1:50 del tipo:

QuickTime™ and a decompressor are needed to see this picture.

¿Cuáles son las dimensiones reales de la cocina? ¿Cuál es la superficie?

Averigua el precio medio de la vivienda en Santiago y calcula el precio de esta casa.

¿Podríais hacer un diseño de una casa de 50 m^2? Y con estancias áureas?

ACTIVIDAD 6:

La siguiente definición aparece en el Libro VI de los Elementos de Euclides:
Se dice que un segmento ha sido cortado en extrema y media razón cuando la recta entera es al segmento mayor como el segmento mayor es al segmento menor.
Otra manera de expresarlo sería: *El todo es a la parte mayor como ésta es a la menor*

Traduce la definición anterior a lenguaje algebraico observando la relación entre los dos segmentos que se obtienen en la división:
1. Considerad un segmento de longitud ***l***
2. Divididlo en dos partes, llamándole a la mayor de ellas, ***a*** y a la menor ***b***.
3. Escribid ***l*** en función de ***a*** *y* ***b***
4. Transcribid en lenguaje algebraico: "El segmento total es al segmento mayor como el segmento mayor es al menor"

¿Qué se puede concluir sobre la razón entre el todo y el trozo mayor (que es igual a la razón entre el lado mayor y el menor), en la división de cualquier segmento en Media y Extrema razón, independientemente de la longitud del segmento?

(El número $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ se llama ***número áureo o número de oro*** y se representa por la letra griega **φ** o su mayúscula **Φ)**.

Si dos números cualesquiera están en razón áurea, ¿qué relación existe el menor y la diferencia entre ambos números?

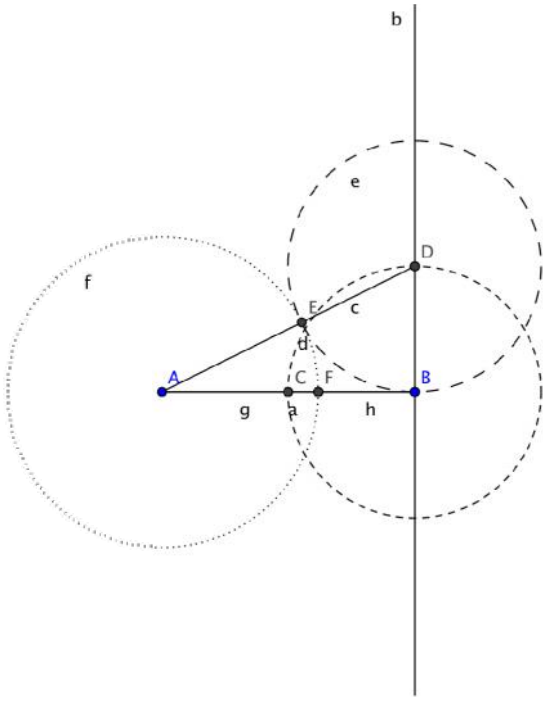
ACTIVIDAD 7: PROPIEDADES
Comprueba las siguientes cuestiones:

a. El inverso de φ es $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

b. $1+\varphi^{-1}=\varphi$
c. $\varphi+1=\varphi^2$
d. $\varphi+\varphi^{-1}=\sqrt{5}$

ACTIVIDAD 8: DIVISIÓN CLÁSICA DE UN SEGMENTO EN MEDIA Y EXTREMA RAZÓN

La manera clásica de dividir un segmento en Media y Extrema razón es una aplicación rápida del Teorema de Pitágoras: Un triángulo rectángulo cuyo cateto menor sea la mitad del cateto mayor ***a*** cumple que la hipotenusa es $\frac{a\sqrt{5}}{2}$. Realiza este proceso utilizando Geogebra.



ACTIVIDAD 9: EL RECTÁNGULO ÁUREO. PROPIEDADES

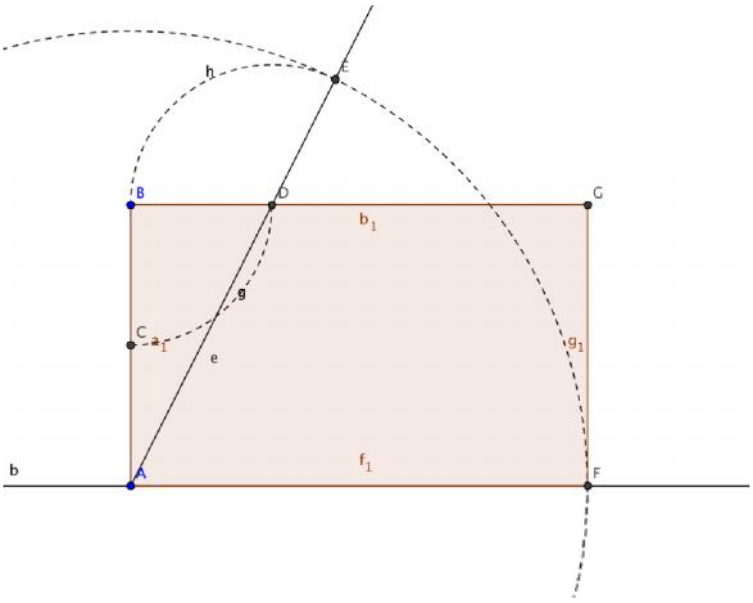
Llamamos ***rectángulo áureo*** a aquel en el que la razón entre el lado mayor ***a*** y el lado menor ***b*** es la razón áurea $\frac{a}{b}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Comprueba la siguiente propiedad de los rectángulos áureos: Si a un rectángulo áureo le quitamos el cuadrado determinado por su lado menor, el rectángulo resultante también es áureo.

Método alternativo para la construcción del Rectángulo áureo conocido su lado menor

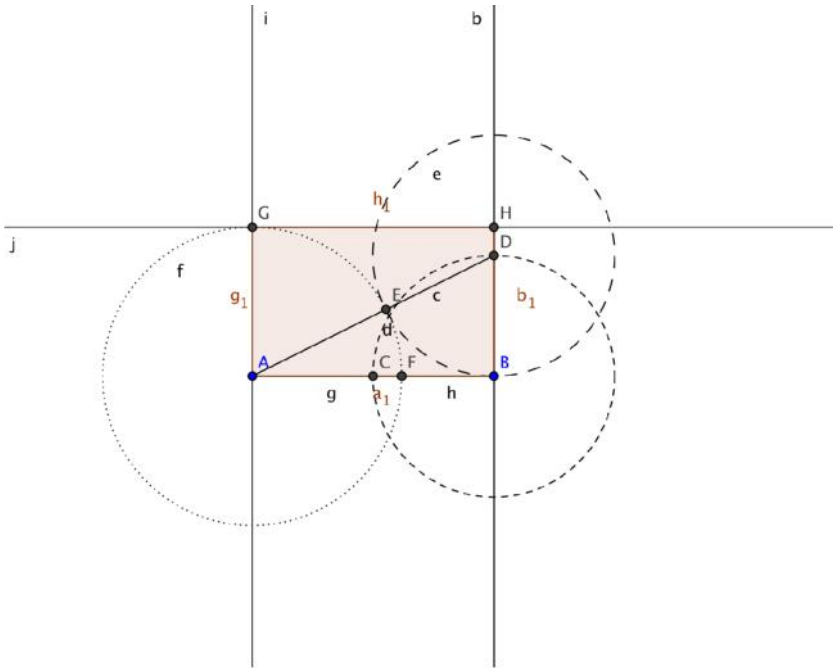
El siguiente proceso de construcción es similar al especificado con anterioridad. Realiza los siguientes pasos con la ayuda de Geogebra:

- Construir un triángulo rectángulo con el segmento dado y su mitad.
- Sumar, a la diagonal de este triángulo, la mitad del segmento dado.
- Comprobar que el segmento obtenido es al dado como la razón áurea.



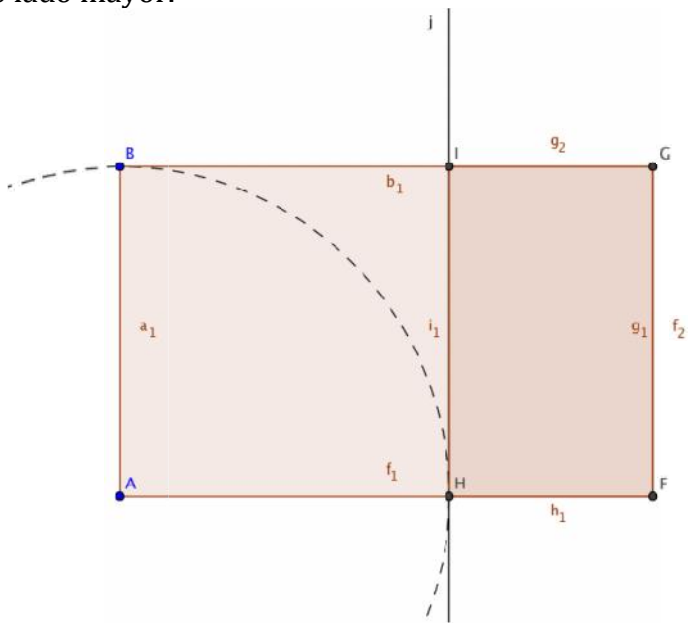
ACTIVIDAD 10: CONSTRUCCIÓN DE UN RECTÁNGULO ÁUREO CONOCIDO SU LADO MAYOR

El proceso de construir un rectángulo áureo conocido su lado mayor es muy sencillo pues hemos visto que, si dividimos un segmento en media y extrema razón, el segmento dado es al fragmento mayor (media razón) como éste es al fragmento menor (extrema razón).
Con ayuda de Geogebra, realiza esta construcción: dado el lado mayor de un rectángulo áureo, dividirlo en media y extrema razón y comprobar que el fragmento mayor es el lado menor del rectángulo áureo buscado.



Utilizad también Geogebra para seguir este otro método alternativo para construir un rectángulo áureo a partir de su lado mayor, utilizando la propiedad de los rectángulos áureos enunciada en la actividad 9:

- Construid el rectángulo áureo que tiene el segmento dado como lado menor.
- Quitad el cuadrado determinado por el lado menor.
- El rectángulo que se obtiene es el buscado, pues tiene al segmento dado como lado mayor.



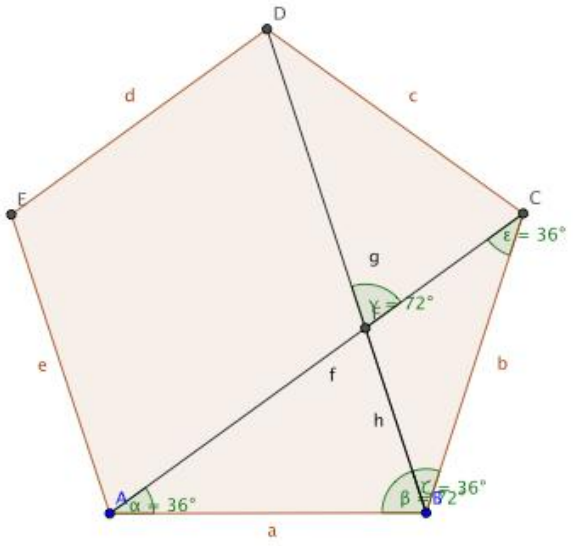
EL PENTÁGONO REGULAR Y LA RAZÓN ÁUREA

El pentágono regular y el número áureo tienen una relación muy estrecha ya que podemos encontrar la razón áurea en varios de los elementos implicados en él. En particular, detallamos los dos casos más interesantes que son básicos para justificar las construcciones del pentágono regular dado el lado y dado el radio.

ACTIVIDAD 11: TRIÁNGULO ÁUREO MAYOR Y TRIÁNGULO ÁUREO MENOR

Cualquier triángulo cuyos ángulos sean 108º, 36º y 36º, se llama Triángulo áureo Mayor. Averigua, con la ayuda de Geogebra, cuál es la relación entre su lado mayor y cualquiera de los otros dos lados. Sugerencia: ¿Cómo es el triángulo que forma la diagonal de un pentágono regular con los lados del pentágono?

Por otro lado, cualquier triángulo cuyos ángulos sean 36º, 72º y 72º, se llama Triángulo áureo Menor. Averigua, utilizando Geogebra, cuál es la relación entre cualquiera de sus lados mayores y su lado menor.



ACTIVIDAD 12: OTRAS RELACIONES ÁUREAS EN EL PENTÁGONO REGULAR

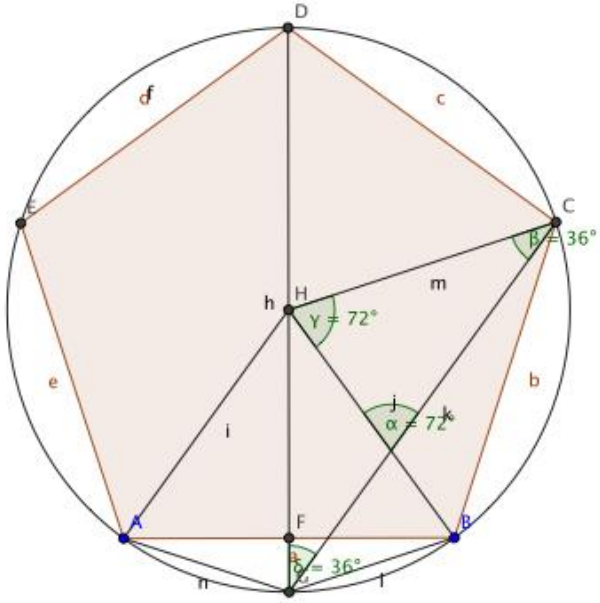
En un pentágono regular se pueden encontrar muchas relaciones áureas. Ya hemos mencionado la existente entre la diagonal y el lado. Vamos ahora a destacar dos relaciones interesantes que permitirán, entre otras cosas, justificar uno de los procedimientos habituales de construcción del pentágono regular dado el radio.

En un pentágono regular inscrito en una circunferencia, trazamos un radio que divida en dos partes iguales a uno de los lados y llamemos ***G*** al punto de corte del radio con la circunferencia.

(A) Si unimos ***G*** con uno cualquiera de los vértices contiguos del Pentágono ***(T)***, el radio es al segmento resultante ***GT*** como la razón áurea. Es interesante observar que el segmento mencionado es, precisamente, el lado del decágono regular inscrito.

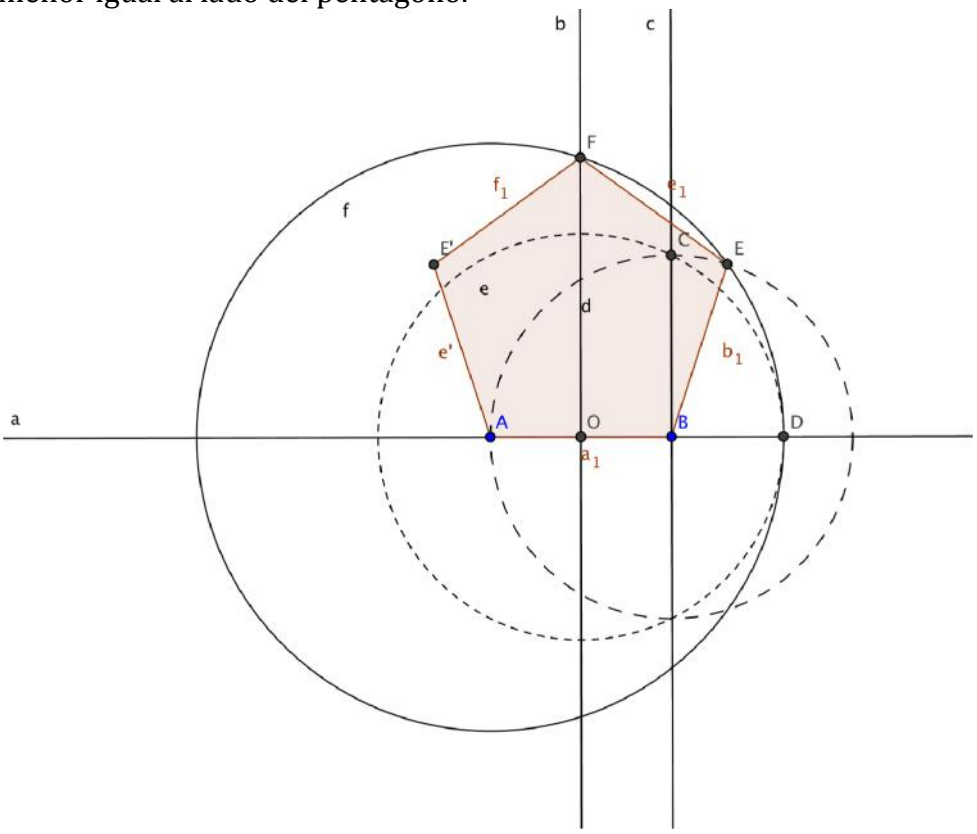
(B) Si unimos ***G*** con uno cualquiera de los vértices siguientes a los contiguos del pentágono ***(P)***, el segmento resultante ***GP*** es al radio como la razón áurea.

Comprobad estas cuestiones con ayuda de Geogebra.



ACTIVIDAD 13: CONSTRUCCIÓN DE UN PENTÁGONO REGULAR DADO EL LADO

Partiendo ahora del lado del pentágono, construid dicho pentágono con la ayuda de Geogebra.
Sugerencia: La diagonal coincidirá con el lado mayor de un rectángulo áureo de lado menor igual al lado del pentágono.

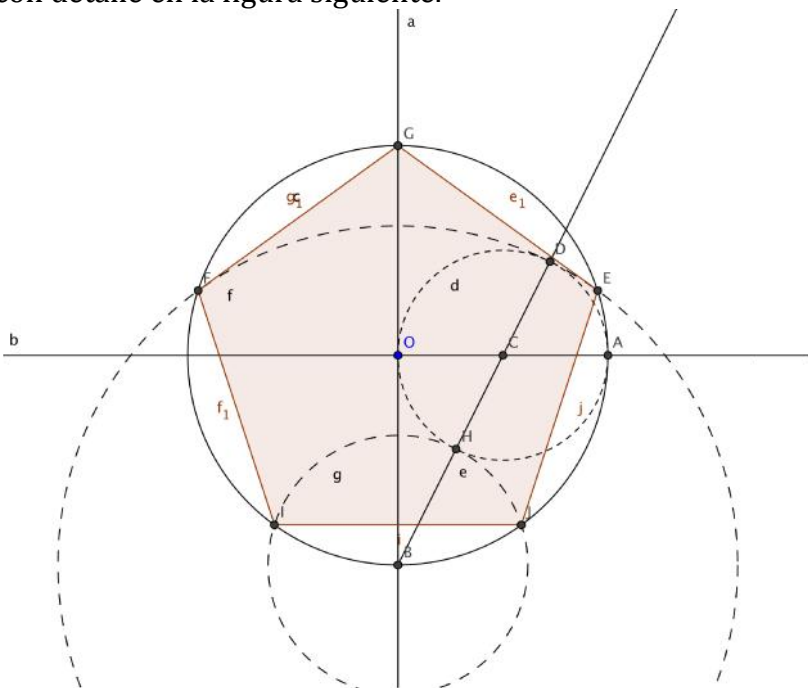


ACTIVIDAD 14: CONSTRUCCIÓN DE UN PENTÁGONO REGULAR DADO EL RADIO

Utiliza las relaciones estudiadas en la Actividad 12 para realizar el siguiente proceso constructivo. Aunque sería posible la construcción utilizando únicamente (B), la utilización de ambos enunciados hace el proceso más elegante. Mediante el uso de Geogebra,

- Partid de un radio de la circunferencia en la que vamos a inscribir el pentágono.
- Construid un segmento de modo que la razón del mismo con el radio sea la razón áurea.

Una vez realizados estos pasos, es inmediato dibujar el pentágono buscado, como se aprecia con detalle en la figura siguiente.



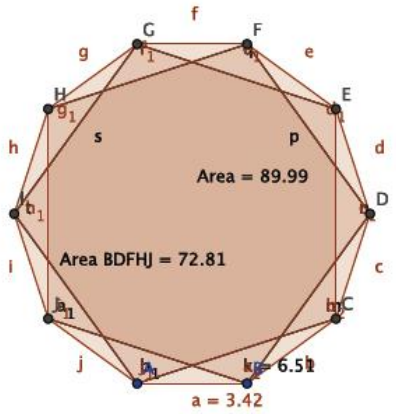
VII. SELECCIÓN DE ESTRATEGIAS DE EVALUACIÓN: EVALUACIÓN DEL APRENDIZAJE Y DEL MÉTODO

Para finalizar, presentamos una actividad de evaluación con la finalidad de evaluar tanto el progreso en el aprendizaje de los alumnos como el método de enseñanza seguido.

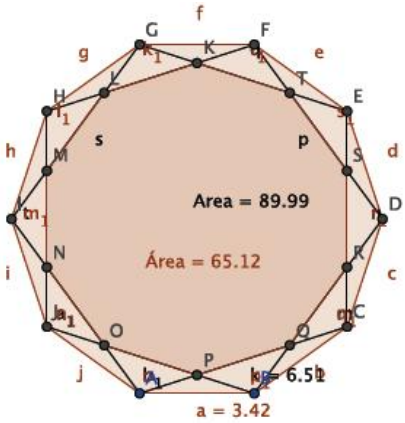
ACTIVIDAD DE EVALUACIÓN: RELACIONES EN EL DECÁGONO REGULAR

Para su realización, los alumnos tendrán a su disposición el programa Geogebra. A pesar de que en esta actividad es necesario manejar otras razones de proporcionalidad diferentes al número áureo, su ejecución nos permitirá saber si el aprendizaje de los alumnos ha sido significativo y si son capaces de enfrentarse a retos donde no se conozca de antemano cual va a ser el resultado.

- Construid un decágono regular. ¿Cuánto miden sus ángulos interiores?
- Mide las longitudes de los lados y el área del decágono.
- Traza la diagonal que une el vértice A con el vértice C del decágono. ¿Qué relación existe entre el lado y esta diagonal? ¿Y para las restantes diagonales?
- Traza todas las diagonales que unen vértices que tienen como adyacente el mismo vértice. ¿Qué figuras se forman? ¿Qué relación existe entre estas figuras y el decágono original? Fíjate en los lados y las áreas.
- Clasifica los diferentes tipos de triángulos que aparecen.
- Sin volver a trazar las diagonales en el nuevo decágono, predice la longitud de las mismas y el lado y el área del nuevo decágono que se formaría siguiendo el procedimiento descrito.



Area ACEGI = 72.81



REFERENCIAS

Abrahamson D. (2003). Text talk, body talk, table talk: a design of ratio and proportion as classroom parallel events, En J N. A. Pateman, B.J. Dougherty y J.T. Zilliox(Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education held jointly with the 25th Conference of PME-NA Volume 2.*

Alsina C. y Trillas E. (1984). *Lecciones de Algebra y Geometría*. Ed. Gustavo Gili, Barcelona.

Cachafeiro, L.C. (2010), Velázquez y el número áureo, SUMA 64.

Chazan, D. (1988). Similarity: Exploring the understanding of a geometrical concept, Technical Report, Educational Technology Center, Cambridge.

Clark, M.R., Berenson, S.B. y Cavey, L.O. (2003). A comparison of ratios and fractions and their roles as tools in proportional reasoning. *Journal of Mathematical Behavior, 22*(3), págs. 297-317.

Cobb, P., y Bauersfeld, H. (Eds.) (1995). *The Emergence of mathematical meaning: Interaction in Classroom Cultures.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Freudenthal, H. (1981). Major problems of mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 12,* págs. 133-150.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* Dordrecht: Reidel Publishing Company.

Fuson, K. C., De La Cruz, Y., Smith, S. B., Lo Cicero, A., Hudson, K., Ron, P., & Steeby, R. S. (2000). Blending the best of the twentieth century to achieve a mathematics equity pedagogy in the twenty-first century. En M. J. Burke (Ed.), Learning mathematics for a new century (págs. 197-212). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Galbraith, P. y Haines, C. (1998). Disentangling the nexus: attitudes to mathematics and technology in a computer learning environment. Educational Studies in Mathematics, 36, págs. 275 . 290.

von Glasersfeld, E. (1990). Environment and Communication. En L. P. Steffe y T. Wood (Eds.), *Transforming children's mathematics education* (págs. 357-376). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum, Publishers.

Hart, K. (1988). Ratio and proportion. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Concepts and operations in the Middle Grades, 2.* (págs. 198-219). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Heidegger, M. (1962). *Being and time.* NY: Harper & Row. (Trabajo original publicado en 1927)

Lesh, R., Post, T. y Behr., M. (1988). Proportional reasoning. En: J. Hiebert y M. Behr (Eds.) Concepts and operations in the Middle Grades, 2. Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics, págs. 93-139.

Markovits, Z., Hershkowits, R. y Bruckhemer, M. (1986). Proportional Reasoning Somme related situations. En University of London, *Psychology of Mathematics Education. Proceedings of the 10th International Conference* (págs. 259-265). London: Editor.

NCTM (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Nesher, P. y Sukenik, M. (1989). Intuitive and formal learning of ratio concepts. En G. Vergnaud, J. Rogalski, y M. Artique (Eds.), *Proceedings of the 13th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* (págs. 33-40). Paris: Université Paris Descartes.

Pacioli, L. (1987). *La Divina Proporción*. Ed. Akal. Madrid (original de 1509).

Piaget, J. (1952). *The child's conception of number*. London, England: Routledge and Kegan.

Piaget, J. (1978). *Psicología del Niño.* Madrid: Morata.

Piaget, J., Grize, J.B., Szeminska, A., y Bang, V. (1968). Epistemologie et psychologie de las fonction. Paris: Presses Universitaires de France. (Versión inglesa publicada en 1997 por D.Reidel publishing).

Piaget, J. e Inhelder, B. (1978a). Las operaciones intelectuales y su desarrollo. En J. Delval (Ed.), *Lecturas en Psicología del niño, I* (págs. 70-119). Madrid: Alianza Editorial.

Piaget, J. e Inhelder, B. (1978b). *De la lógica del niño a la lógica del adolescente.* Buenos Aires: Paidós.

Ruiz, E.F., Lupiáñez, J.L. y Valdemoros, M. (2002). Didactical reflections on proportionality in the Cabri environment based on a previous experience with basic education students. En A. D. Cockburn y E. Nardi (Eds.), *26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 4* (págs. 153-160). Londres: University of East Anglia.

Ruiz, E. F. y Valdemoros, M. (2002). Concepts of ratio and proportion in basic level students: case study. En D. Mewborn, P. Sztajn, E. White,H. Wiegel, R. Bryant y K. Nooney (Eds.), *Proceedings of the 24th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *Vol. 4* (págs. 1651– 1657). Columbus, OH: Eric Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Ruiz, E. F. y Valdemoros, M. (2004). Connections between qualitative and quantitative Thinking about proportion: The case of Paulina. En M. J. Hoines y A. B. Flugestad (Eds), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Vol. 1* (págs. 201-208). Bergen: Bergen University College.

Ruiz E.F. (2008). Construcciones en Cabri para la comprensión de los tópicos de razón y proporción, SinncO 2008

Ruiz E.F., Camarena P. y Rocha M.R. Empleo de la Tecnología en la enseñanza de los temas de razón y proporción en educación Básica.

Ruiz E.F., Lupiáñez J.L. (2009). Detección de obstáculos psicopedagógicos en la enseñanza y el aprendizaje de los tópicos de razón y proporción en alumnos de sexto grado de Educación Primaria Electronic Journal of Research in Educational Psychology. ISSN. 1696-2095. No 17, Vol 7 (1), págs. 397-424.

Streefland, L. (1984a). Search for the roots of ratio: Some thoughts on the long term learning process. Part I. *Educational Studies in Mathematics, 15*(3), 327-348.

Streefland, L. (1984b). Search for the roots of ratio: Some thoughts on the long term learning process. Part II. *Educational Studies in Mathematics, 16*(1), 75-94.

Streefland, L. (1993). The design of a mathematics course. A theoretical reflection. *Educational Studies in Mathematics, 25*(1-2), 109-135.

Vergnaud, G. (1994). Multiplicative conceptual field: What and why? En G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (págs. 41-59). Albany, NY: SUNY Press.

Vygotsky, L. (1978). *Mind in society*. (M. Cole, V. John-Steiner, S. Scribner, y E. Souberman, Eds.). Cambridge, MA: Harvard University Press.