FISICA 1

ESTATICA y CINEMATICA

FISICA CERO
MATEMÁTICA NECESARIA PARA ENTENDER FÍSICA

ESTATICA
FUERZAS COPUNTUALES – SUMA DE FUERZAS – REGLA DEL PARALELOGRAMO - METODO ANALITICO PARA SUMAR FUERZAS - ΣF_X Y ΣF_y - RESULTANTE - EQUILIBRIO - EQUILIBRANTE FUERZAS NO COPUNTUALES - MOMENTO DE UNA FUERZA - ECUACION DE MOMENTOS - EQUILIBRIO DE ROTACION - CENTRO DE GRAVEDAD

CINEMATICA:
POSICION – VELOCIDAD – ESPACIO RECORRIDO - MRU – ACELERACION - MRUV – ECUACIONES HORARIAS - ENCUENTRO - ACELERACION DE LA GRAVEDAD - CAIDA LIBRE - TIRO VERTICAL - TIRO OBLICUO - CINEMATICA DEL MOVIMIENTO CIRCULAR - MOVIMIENTO RELATIVO – CINEMATICA VECTORIAL

INDICE

Página

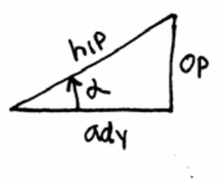
FISICA 0

MATEMATICA QUE HAY QUE SABER PARA ENTENDER FISICA

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$2^4 \times 2^6 = 2^{4+6} = 2^{10}$$

$$\left(2^4\right)^6 = 2^{4\times 6} = 2^{24}$$



$$\text{sen}\,\alpha = \frac{op}{hip}$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

ECUACIÓN CUADRATICA

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

FORMULA PARA RESOLVER UNA ECUACIÓN CUADRATICA

TEMAS:

FACTOREO - SACAR FACTOR COMUN - PASAR DE TERMINO - DESPEJAR - SUMAR FRACCIONES - ECUACION DE LA RECTA - UNA ECUACION CON UNA INCOGNITA - DOS ECUACIONES CON DOS INCOGNITAS - ECUACION DE UNA PARABOLA - ECUACION CUADRATICA - SOLUCION DE UNA ECUACIÓN CUADRÁTICA.

FISICA 0

Fórmulas y cosas de matemática que hay que saber para entender física

Hola. A mucha gente le va mal en física por no saber matemática. No es que el tipo no entienda física. Lo que no entiende es matemática. Entonces cuando le tiran un problema no sabe para dónde agarrar. Si vos sabés bien matemática dejá este apunte de lado. Ponete ya mismo a resolver problemas de física, te va a ser más útil. Si vos sabés que la matemática no te resulta fácil, lee con mucha atención lo que yo pongo acá. Hacete todos los ejercicios. Hacele preguntas a todos los ayudantes o incluso a mí sí me encontrás por ahí en algún pasillo. Yo sé perfectamente que nunca nadie te enseñó nada y ahora te exigen que sepas todo de golpe. Qué le vas a hacer. Así es la cosa.

Ahora, ojo, Todos los temas que pongo acá son cosas **QUE VAN A APARECER MIENTRAS CURSES LA MATERIA.** No es que estoy poniendo cosas descolgadas que nunca vas a usar. Todo, absolutamente todo lo que figura va a aparecer y vas a tener que usarlo. Pero:

¡Alegría!

Vas a ver que no es tan difícil !

PASAR DE TÉRMINO - DESPEJAR

VER

En física todo el tiempo hay que andar despejando y pasando de término. Tenés que saberlo a la perfección. No es difícil. Sólo tenés que recordar las siguientes reglas:

1 - Lo que está sumando pasa restando
2 - Lo que está restando pasa sumando
3 – Lo que está multiplicando pasa dividiendo
4 - Lo que está dividiendo pasa multiplicando
5 - Lo que está como ^{2} pasa como raíz
6 - Lo que está como raíz pasa como ^{2}

Reglas para pasar de término

Estas reglas se usan para despejar una incógnita de una ecuación. Despejar x significa hacer que esta letra incógnita x quede sola a un lado del signo igual. (Es decir que a la larga me va a tener que quedar x = tanto).

Veamos: Usando las reglas de pasaje de términos despejar X de las siguientes ecuaciones:

1) 2 = 5 – X
X está restando, la paso al otro lado sumando: ➔ 2 + X = 5
El 2 está sumando, lo paso al otro lado restando: ➔ X = 5 – 2

Por lo tanto ⇒ $\boxed{x=3}$ ← Solución.

2) $4 = \frac{8}{X}$

X está dividiendo, la paso al otro lado multiplicando: ➔ 4 . X = 8
El cuatro está multiplicando, lo paso al otro miembro dividiendo: ➔ $X = \frac{8}{4}$

Es decir: $\boxed{x=2}$ ← Solución.

3) $x^2 = 25$
La x está al cuadrado. Este cuadrado pasa al otro lado como raíz: ➔ $X=\sqrt{25}$

Por lo tanto ⇒ $\boxed{x=5}$ ← Solución.

Resolvete ahora estos ejercicios. En todos hay que despejar X :

1) x + 5 = 8 Rta: x = 3

2) x + 5 = 4 Rta: x = -1

3) – x – 4 = - 7 Rta: x = 3

4) $\frac{2}{x} = 4$ Rta: x = $\frac{1}{2}$

5) $\frac{2}{5x} = 10$ Rta: x = $\frac{1}{25}$

6) $\frac{2}{5-x} = \frac{1}{5}$ Rta: x = - 5

7) $-7 = 4 - x^2$ Rta: x = $\sqrt{11}$

8) $\frac{1}{(x-2)^2} = 4$ Rta: x = 2,5

9) $\frac{1}{(x-2)^2} = a$ Rta: x = $\frac{1}{\sqrt{a}} + 2$

10) $V = \dfrac{X - X_0}{t - t_0}$ Rta: $X = X_0 + V\,(t - t_0)$

11) $V_f = \sqrt{2\,g\,x}$ Rta: $x = \dfrac{V_f^{\,2}}{2\,g}$

SUMA DE FRACCIONES

Para sumar por ejemplo $\frac{3}{2}+\frac{5}{4}$ lo que hago es lo siguiente:

Abajo de la raya de fracción va a ir el mínimo común múltiplo. Esto quiere decir el número más chico que puede ser dividido por 2 y por 4 (Ese número sería 4). El mínimo común múltiplo a veces es difícil de calcular, por eso directamente multiplico los dos n° de abajo y chau. En este caso 2x4 da 8, de manera que en principio el asunto quedaría así: $\dfrac{\cdots\cdots\cdots}{8}$

Para saber lo que va arriba de la raya de fracción uso el siguiente procedimiento:

$$\frac{3}{2}+\frac{5}{4}=\frac{\qquad}{8}$$

Este 8 dividido por el 2 me da 4. Ahora lo multiplico por este 3 y lo pongo acá

$$\frac{3}{2}+\frac{5}{4}=\frac{12}{8}$$

Haciendo el mismo procedimiento con el 4 de la segunda fracción me queda:

$$\frac{3}{2}+\frac{5}{4}=\frac{12+10}{8}$$

Es decir:

$$\frac{3}{2}+\frac{5}{4}=\frac{22}{8}$$

Simplificando por dos:

$$\frac{3}{2}+\frac{5}{4}=\left[\frac{11}{4}\right] \quad \leftarrow \text{Resultado}$$

Comprobá este asunto con algunas fracciones a ver si aprendiste el método:

1) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ Rta : 1

2) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ Rta : $\frac{3}{4}$

3) $1 + \frac{1}{2}$ Rta : $\frac{3}{2}$

4) $\frac{1}{2} + \frac{2}{3}$ Rta : $\frac{7}{6}$

5) $\frac{2}{3} + \frac{4}{5}$ Rta : $\frac{22}{15}$

6) $\frac{7}{3} + \frac{5}{7}$ Rta : $\frac{64}{21}$

7) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ Rta : $\frac{b + a}{a.b}$

8) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ Rta : $\frac{a.d + b.c}{b.d}$

DISTRIBUTIVA

Suponé que tengo que resolver esta cuenta: 2 (3 + 5) = X. Se puede sumar primero lo que está entre paréntesis , y en ese caso me quedaría:

$$2\,(8) = X \quad \Rightarrow \quad 16 = X$$ ←Solución.

Pero también se puede resolver haciendo distributiva. Eso sería hacer lo siguiente:

ESTE x ESTE

$$2\,(3 + 5) = x$$

MAS ESTE POR ESTE

ES DECIR: $2.3 + 2.5 = x$

o sea : $6 + 10 = x \Rightarrow \boxed{x = 16}$ ← solución

✯ Practicalo un poco con estos ejemplos:

1) 3 (4 + 5) Rta : 27

2) 3 (4 – 5) Rta : -3

3) $a\,(b + c)$ Rta : $ab + ac$

4) $a\,(b + c + d)$ Rta : $ab + ac + ad$

5) $a\,(m_1 + m_2)$ Rta : $a\,m_1 + a\,m_2$

6) $\mu\,(m_1 g + N_2)$ Rta : $\mu\,m_1 g + \mu\,N_2$

SACAR FACTOR COMÚN

Sacar factor común es hacer lo contrario de hacer distributiva. Por ejemplo si tengo la expresión: $X = 2\cdot 4 + 2\cdot 7$ Me va a quedar:

$$X = 2\,(4 + 7) \qquad \leftarrow \text{ Saqué el 2 como factor común}$$

A veces en algunos problemas conviene sacar factor común y en otros hacer distributiva. Eso depende del problema.

Ejemplo: Sacar factor común en las expresiones:

1) $F = m_1 a + m_2 a$ Rta : $F = a\,(m_1 + m_2)$

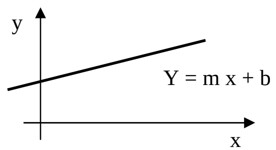
2) $X = x_0 + v\,t - v\,t_0$ Rta : $X = x_0 + v\,(t - t_0)$

3) $F_{roz} = \mu\,m_1 g + \mu\,N_2$ Rta : $\mu\,(m_1 g + N_2)$

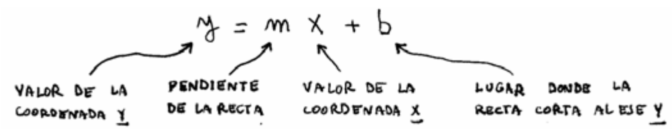
4) $L = F_1 d - F_2 d$ Rta : $d\,(F_1 - F_2)$

ECUACIÓN DE UNA RECTA

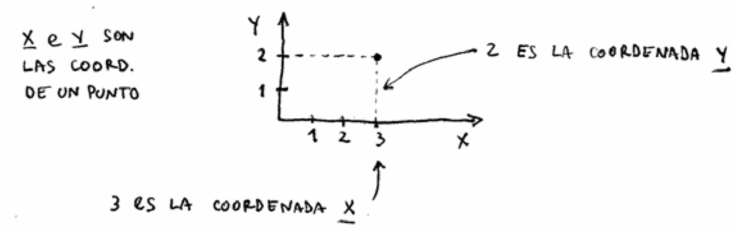
En matemática la ecuación de una recta tiene la forma y = m x + b. Se representa en un par de ejes x - y asi:



En esta ecuación hay varias que tenés que conocer que son:

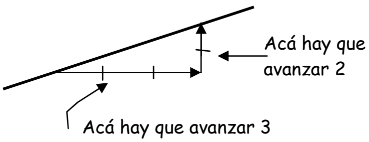


Fijate lo que significa cada una de estas cosas. Veamos primero qué son x e y. Si quiero representar en el plano el punto (3 ,2) eso significa que:

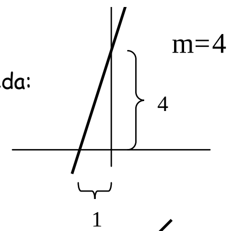


Veamos ahora qué es m. La **m** representa la **pendiente de la recta**. La pendiente da una idea de la inclinación que tiene la recta. Por ejemplo, la pendiente vale 2/3 eso significa que la inclinación de la recta tendrá que ser tal que:

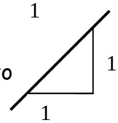
$$m = \frac{2}{3}$$



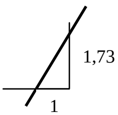
Si la pendiente es 4 puedo poner al Nro 4 como $\frac{4}{1}$ y me queda:



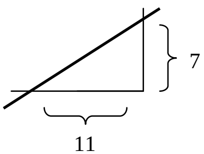
Tengo muchos otros casos. Si la pendiente fuera m = 1 tendría esto (Es decir, sería una recta a 45 °).



Si m fuera 1,73, el asunto quedaría así:



Entonces, la pendiente de una recta es una función en donde:

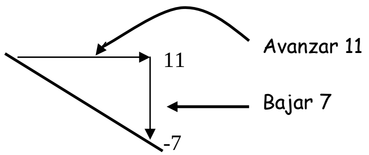


$$m = \frac{7}{11}$$

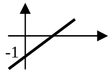
La parte de **arriba** indica lo que hay que avanzar en **Y**

La parte de **abajo** indica lo que hay que avanzar en **X**

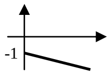
Otra cosa: si la pendiente es negativa (como $m = -\frac{7}{11}$) pongo $m = \frac{-7}{11}$ y la cosa queda:



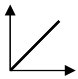
El valor **b** se llama **<u>ordenada al origen</u>** y representa el lugar donde la recta corta al eje Y.

Por ejemplo, una recta así: 

tiene b = - 1

Otra recta así 

también tiene b = -1

Y las rectas que son así  tienen b = 0. Es decir, salen del origen de coordenadas.

¿ <u>CÓMO SE REPRESENTA UNA RECTA</u> ?

Si tengo una ecuación y = m x + b y quiero representarla, lo que hago es darle valores a **X** y obtener los de **Y**. Con estos valores formo una tablita y los represento en un par de ejes x-y. Fijate: Si tengo por ejemplo y = 2 x + 1

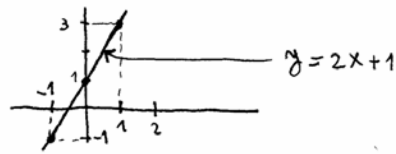
Le doy a **x** el valor 0 y obtengo $\Rightarrow$ y = 2 . 0 + 1 = 1
Le doy a **x** el valor 1 y obtengo $\Rightarrow$ y = 2 . 1 + 1 = 3
Le doy a **x** el valor –1 y obtengo $\Rightarrow$ y = 2. (-1) + 1 = -1

Puedo tomar todos los valores que quiera pero con tomar 2 alcanza. Poniendo todo esto en una tabla me queda:

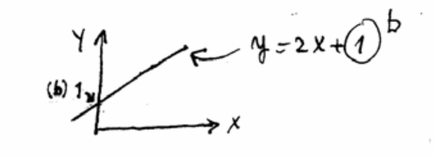
x	y
0	1
1	3
- 1	-1

Y = 2 x + 1

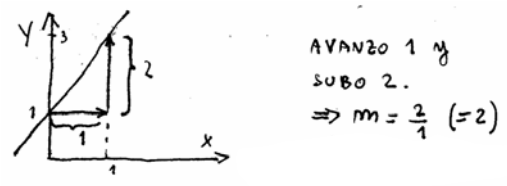
Ahora represento los puntos (0 ; 1) (1 ; 3) y (- 1 ; - 1) en el plano x-y. Uniendo los puntos tengo la recta



Si quisiera ver si la recta está bien trazada puedo fijarme en los valores de m y de b:



La recta corta al eje Y en 1, así que está bien. Veamos la pendiente:

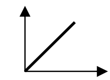


La pendiente de y = **2** x + 1 es m = 2, así que el asunto verifica. Para entender esto mejor tendrías que hacerte algunos ejercicios. Vamos:

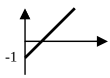
✯ **DADA LA ECUACIÓN DE LA RECTA:**

a) Ver cuánto valen **m** y **b**
b) Graficar la recta dándole valores de **x** y sacando los de **y**
c) Verificar en el gráfico que los valores de m y b coinciden con los de a)

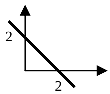
1) y = x — Rta: m = 1 , b = 0



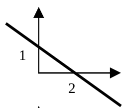
2) y = x - 1 — Rta : m = 1 , b = -1



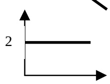
3) y = 2 - x — Rta: m = - 1 , b = 2



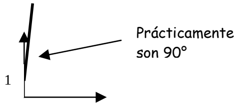
4) y = $-\frac{x}{2} + 1$ — Rta: m = $-\frac{1}{2}$, b = 1



5) y = 2 — Rta: m = 0 , b = 2

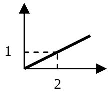


6) y = 1.000 x + 1   Rta: m = 1.000 , b = 1

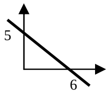


Acá van otro tipo de ejercicios que también son importantes:

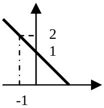
*** DADO EL GRÁFICO, CALCULAR m Y b Y DAR LA ECUACIÓN DE LA RECTA.**

a) 

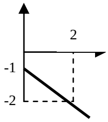
Rta: $m = \frac{1}{2}$; b = 0 $y = \frac{1}{2} x + 0$

b) 

Rta: $m = -\frac{5}{6}$; b = 5 $y = -\frac{5}{6} x + 5$

c) 

Rta: m = - 1 ; b = 1   y = - 1 x + 1

d) 

Rta: $m = -\frac{1}{2}$; b = -1 $y = -\frac{1}{2} x - 1$

<u>PARÁBOLA</u>

Una parábola es una curva así ⇒ . Desde el punto de vista matemático esta curva está dada por la función:

$$Y = a\,x^2 + b\,x + c \qquad \leftarrow \textbf{Ecuación de la parábola}$$

Fijate que si tuviera sólo el término y = b x + c tendría una recta. Al agregarle el término con x^2 la recta se transforma en una parábola. Es el término cuadrático el que me dice que es una parábola. Ellos dicen que $y = a\,x^2 + b\,x + c$ es una **función cuadrática p**orque tiene un término con x^2. Una parábola típica podría ser por ejemplo:

$$Y = 2\,x^2 + 5\,x + 8$$

En este caso **a** sería igual a 2, **b** a 5 y **c** sería 8. Los términos de la ecuación también pueden ser negativos como en:

$$Y = -\,x^2 + 2\,x - 1$$

Acá sería a = - 1, b = 2 y c = -1. A veces el segundo o tercer término pueden faltar. (El primero <u>NO</u> por que es el cuadrático). Un ejemplo en donde faltan términos sería:

$Y= 0{,}5\ x^2 - 3$ (a = 0,5 , b = 0, C = -3)

o también:

$Y = x^2 - 3\ x$ (a = 1, b = - 3, c = 0)

La ecuación también puede estar desordenada, entonces para saber quién es a, quién b, y quién c, tengo que ordenarla primero. Ejemplo:

$$Y = -\ 3\ x - 1 + 5\ x^2$$

$$(Y = 5\ x^2 - 3\ x - 1 \;\Rightarrow\; a = 5,\ b = -\ 3,\ c = -\ 1)$$

REPRESENTACIÓN DE UNA PARÁBOLA

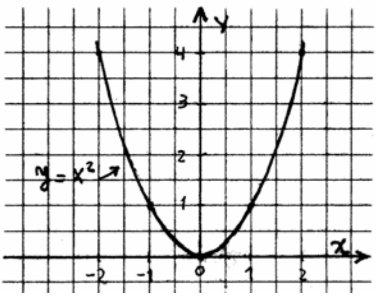
Lo que hago es darle valores a x y sacar los valores de y. Con todos estos valores voy armando una tabla. Una vez que tengo la tabla, voy representando cada punto en un par de ejes x,y. Uniendo todos los puntos, obtengo la parábola.

EJEMPLO:

REPRESENTAR LA EC. $Y = X^2$.

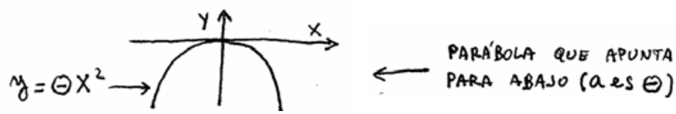
TABLA

VALOR DE X	VALOR DE Y
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4



De acuerdo a los valores de a, b y c la parábola podrá dar más abierta, más cerrada, más arriba o más abajo, pero SÍ hay una cosa que tenés que acordarte y es que si el término cuadrático es negativo la parábola va a dar para abajo.

Es decir, por ejemplo, si en el ejemplo anterior hubiese sido $Y= -\ x^2$ en vez de $Y = x^2$, la cosa habría dado así:



¿ Por qué pasa esto ? Rta : Porque **a** es negativo. (En este caso a = - 1)

Entonces conviene que te acuerdes siempre que:

> Si en la ecuación $Y = a\,x^2 + b\,x + c$ el valor de a es negativo, entonces la parábola va a dar para abajo

Dicho de otra manera:

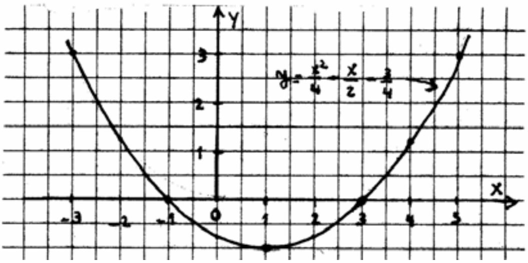
LAS PARABOLAS POSITIVAS ESTÁN CONTENTAS

LAS PARÁBOLAS NEGATIVAS ESTÁN TRISTES

¿ Y si a la ecuación cuadrática no le falta ningún término ? Rta: No pasa nada, el asunto es el mismo, lo único es que va a ser más lío construir la tabla por que hay que hacer más cuentas. Fijate:

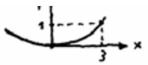
REPRESENTAR LA ECUACIÓN $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$

X	Y
-3	3
-1	0
1	-1
3	0
5	3



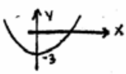
Ejercicios: Representar las siguientes parábolas y decir cuánto valen los términos a, b y c:

1)- $y = \frac{x^2}{9}$ RTA: $a = \frac{1}{9}$, $b = 0$, $c = 0$

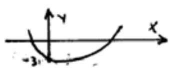


2)- $y = -\frac{x^2}{9}$ RTA: $a = -\frac{1}{9}$, $b = 0$, $c = 0$

3)- $y = \frac{x^2}{9} - 3$ RTA: $a = \frac{1}{9}$, $b = 0$, $c = -3$



4) $y = \frac{x^2}{9} - 3x - 3$ RTA: $a = \frac{1}{9}$, $b = -3$, $c = -3$



Solución de una ecuación cuadrática

Una ecuación cuadrática es la ecuación de una parábola igualada a cero. Es decir, si en vez de tener **y** = a x^2 + b x + c tengo a x^2 + b x + c = **0** , eso será una ecuación cuadrática. Por ejemplo, son ecuaciones cuadráticas:

$$X^2 + 4 = 0 \quad , \quad 5\,X^2 - 3\,X + 7 = 0 \quad , \quad 7\,X - 3\,X^2 = 0$$

Lo que se busca son los valores de **x** que **satisfagan** la ecuación. ¿ Qué significa eso ? Significa reemplazar x por un valor que haga que la ecuación dé cero. Supongamos que tengo:

$$x^2 - 4 = 0$$

¿Qué valores tiene que tomar **x** para que x^2 – 4 de cero ? Bueno, a ojo me doy cuenta que si reemplazo x por 2 la cosa anda. Fijate:

$$\overset{x}{2}{}^2 - 4 = 0 \quad (\text{ Se cumple })$$

¿Habrá algún otro valor? Sí. Hay otro valor es x = - 2. Probemos:

$$(-2)^2 - 4 = 4 - 4 = 0 \quad (\text{ anda })$$

Este método de ir probando está muy lindo pero no sirve. ¿ Por qué ? Rta: Porque en este caso funcionó por la ecuación era fácil. Pero si te doy la ecuación $0 = -\frac{1}{10}x^2 + 20x - 30$ ...

¿Cómo hacés? Acá no puede irse probando porque el asunto puede llevarte un año entero. (Por ejemplo para esa ecuación las soluciones son: x = 1,51142 y x = 198,4885).

A los valores de **x** que hacen que toda la ecuación de cero se los llama **raíces de la ecuación** o **soluciones de la ecuación**. Entonces, la idea es encontrar un método que sirva para hallar las **raíces** de la ecuación. Este método ya fue encontrado en el mil seiscientos y pico y se basa en usar la siguiente fórmula (la demostración está en los libros):

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \Leftarrow$$

Solución de una ecuación cuadrática

¿ Cómo se usa esta fórmula ? Mirá este ejemplo: Encontrar las raíces de la ecuación Y = x^2 – 4 x + 3. En este caso **a = 1; b =-4** y **c = 3.** Entonces el choclazo queda:

$$x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1}$$

$$\Rightarrow \; x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} \quad \rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2}$$

$$\Rightarrow \; x_{1,2} = \frac{4 \pm 2}{2}$$

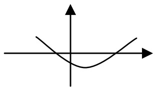
Ahora, para una de las soluciones uso el signo + y para la otra el signo menos. La cosa queda así:

$$x_1 = \frac{4+2}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_1 = 3}$$

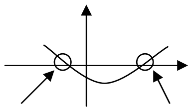
$$x_2 = \frac{4 - 2}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_2 = 1}$$

Entonces x = 3 y x = 1 son las soluciones de la ecuación.

Quiero decirte una cosita más con respecto a este tema: una ecuación cuadrática podrá tener una solución, 2 soluciones o ninguna solución. ¿ Cómo es eso ? Fijate: ¿ Qué significa igualar la ecuación de una parábola a cero ? Rta: Bueno, una parábola

es esto ➔ 

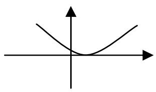
Preguntar para qué valores de **x** la **y** da cero, significa preguntar dónde corta la Parábola al eje de las x. Es decir, que las raíces de una ecuación cuadrática representan esto:



Una solución. **Otra solución**

Soluciones de una ecuación cuadrática

El caso de una solución única va a estar dado cuando la parábola NO corta al eje de las **x** en dos puntos sino que lo corta en un solo punto. Es decir, voy a tener esta situación :



← Caso de raíz única.

La ecuación cuadrática puede no tener solución cuando la parábola No corta en ningún momento al eje de las **x**. Por ejemplo:

← CASO DE NO SOLUCIÓN

Cuando te toque una ecuación de este tipo, te vas a dar cuenta porque al hacer $\sqrt{b^2 - 4ac}$ te va a quedar la raíz cuadrada de un número negativo (como por ejemplo $\sqrt{-4}$). No hay ningún número que al elevarlo al cuadrado, de negativo, de manera que este asunto no tiene solución. Acá te pongo algunos ejemplos:

✭ Encontrar las soluciones de la ecuación usando la fórmula $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

(Podés verificar los resultados graficando la parábola)

1) $x^2 - 2x - 3 = 0$ Rta: $x_1 = 3$; $x_2 = -1$

2) $x^2 - 7x + 12 = 0$ Rta: $x_1 = 4$ $x_2 = 3$

3) $x^2 - 2x + 1 = 0$ Rta: $x = 1$ (Raíz doble)

4) $x^2 - 18x + 81$ Rta: $x = 9$ (Raíz doble)

5) $x^2 + x + 1 = 0$ No tiene solución.

6) $x^2 - x + 3 = 0$ No tiene solución.

SISTEMAS DE 2 ECUACIONES CON 2 INCÓGNITAS

Una ecuación con una incógnita es una cosa así $\Rightarrow$ $x - 3 = 5$. Esta ecuación podría ser la ecuación de un problema del tipo: " Encontrar un número x tal que si le resto 3 me da 5 ".
¿ Cómo se resolvería una ecuación de este tipo ?
Rta: Muy fácil. Se despeja x y chau. Fijate :

$$x - 3 = 5 \quad \Rightarrow \quad x = 5 + 3 \quad \Rightarrow \quad \underline{\mathbf{x = 8}}$$

¿Qué pasa ahora si me dan una ecuación así ? : $x + y = 6$.
Esto es lo que se llama una ecuación con 2 incógnitas. Así como está, no se puede resolver. O sea, se puede, pero voy a tener infinitas soluciones. Por ejemplo, algunas podrían ser:

$$x = 6 \;;\; y = 0$$
$$ó \quad x = 7 \;;\; y = -1$$
$$ó \quad x = 8 \;;\; y = -2$$

Creo que ves a dónde apunto. Si trato de buscar 2 números x e y tal que la suma sea 6, voy a tener millones de soluciones. (Bueno... millones no... infinitas !!!)

Bueno, ahora distinta es la cosa si yo te digo: "dame dos números cuya suma sea 6 y cuya resta sea 4" Ahí el asunto cambia. Este problema **SI** tiene solución. Matemáticamente se pone así:

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 4 \end{cases}$$

Esto es lo que ellos llaman sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.
¿Cómo se resuelve esto? Veamos.

SOLUCIÓN DE UN SISTEMA DE 2 ECUACIONES CON 2 INCÓGNITAS

Hay varios métodos para resolver 2 ecuaciones con 2 incógnitas. Te recuerdo los 2 métodos más fáciles. Supongamos que tengo el sistema:

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 4 \end{cases}$$

MÉTODO 1 : **DESPEJAR Y REEMPLAZAR (SUBSTITUCIÓN)**
Se despeja una de las incógnitas de la primera ecuación y se reemplaza en la segunda.
Por ejemplo, despejo x de la 1°. Me queda: $x = 6 - y$.
Reemplazando esta x en la segunda ecuación. Me queda: $(6 - y) - y = 4$
Ahora:

$$6 - y - y = 4 \quad \rightarrow \quad 6 - 4 = 2\,y$$

$$2 = 2\,y \Rightarrow \underline{\mathbf{y = 1}}$$

Ya calculé el valor de y. Reemplazando esta Y en cualquiera de las 2 ecuaciones originales saco el valor de x. Por ejemplo, si pongo y = 1 en la 1ra de las ecuaciones:

$$x + 1 = 6$$

$$x = 6 - 1 \Rightarrow \underline{\mathbf{x = 5}}$$

MÉTODO 2 : **SUMA Y RESTA**
Se suman o se restan las 2 ecuaciones para que desaparezca alguna de las incógnitas.
Por ejemplo:

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 4 \end{cases}$$

Sumo las ecuaciones miembro a miembro y me queda:

$$x + y + x - y = 6 + 4$$

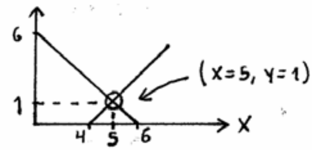
Ahora la y se va. Me queda: $2x = 10 \Rightarrow$ **<u>x = 5</u>**

Al igual que antes, reemplazando este valor de x en cualquiera de las 2 ecuaciones originales, obtengo el valor de y. Una cosa: Acá yo sumé las ecuaciones, pero también se pueden restar.Si las hubiera restado, el asunto hubiera sido el mismo (se iba a ir la x) Este segundo método viene perfecto para los problemas de dinámica. El 1er método también se puede usar, claro. A ellos no les importa qué método uses.

Otra cosita: en realidad cada una de las ecuaciones del sistema, es la ecuación de una recta. Por ejemplo el sistema anterior se podría haber puesto así:

$$y = -x + 6$$
$$y = x - 4$$

¿ Entonces cuál sería el significado geométrico de encontrar la solución de un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas ? <u>Rta:</u> significa encontrar el punto de encuentro de las 2 rectas. Por ejemplo, en el caso de recién tendría esto:



Solución de un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas

<u>EJERCICIOS</u>
Resolver los siguientes sistemas de 2 ecuaciones con 2 incógnitas. (Podés representar las 2 rectas para verificar)

1) $\begin{cases} x + 2y = 6 \\ 2x + y = 12 \end{cases}$ <u>RTA:</u> $x = 6$, $y = 0$

2) $\begin{cases} -3x + y = -4 \\ 2x - 3y = -8 \end{cases}$ <u>RTA:</u> $x = 2{,}8571...$, $y = 4{,}5714...$

3) $\begin{cases} \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}y = 0 \\ -4x + 2y = 2 \end{cases}$ <u>RTA:</u> $x = -2/3$, $y = -1/3$

4) $\begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = 0 \end{cases}$ <u>RTA:</u> SIN SOLUCIÓN

MATEMÁTICA CERO – PALABRAS FINALES

Acá termina mi resumen de matemática. Pero atención, **esta no es toda la matemática que existe**. La matemática es gigantesca. Lo que puse acá es lo hiper-necesario y lo que seguro vas a usar. Hay otros temas que también vas a necesitar como vectores o trigonometría. Estos temas te los voy a ir explicando a lo largo del libro.

Ahora, pregunta... ¿ Detestás la matemática ?

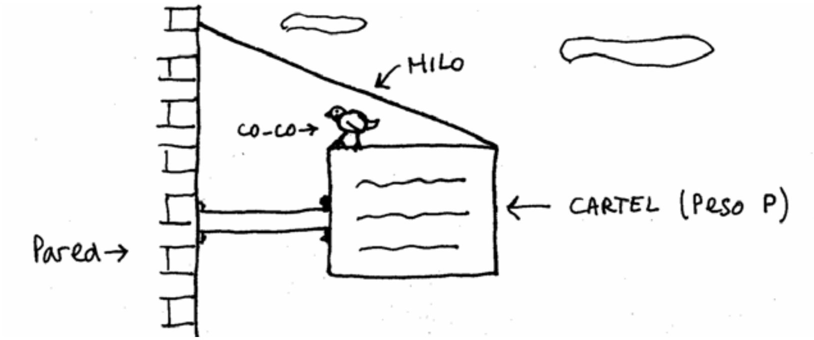
Rta: Bueno, no sos el único. El 95 % de la gente la detesta. Es que la matemática es muy fea. Y encima es difícil.

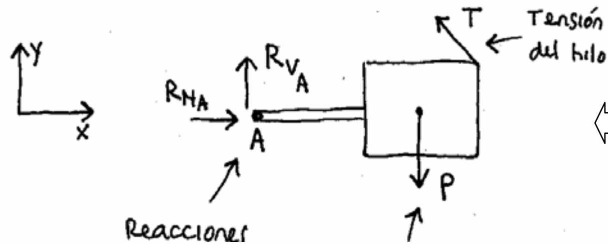
¿ Hay alguna solución para esto ?

Rta: Mirá,... no hay salida. Vas a tener que saber matemática sí o sí para entender física. Y te aclaro, más adelante **ES PEOR**. A medida que te internes en FISICA O MATEMATICA vas a tener que saber más matemática, más matemática y más matemática. (Me refiero a Análisis I, Análisis II, álgebra y demás). Lo único que se puede hacer para solucionar esto es estudiar. (Y estudiar mucho). Es así. El asunto depende de vos.

FIN MATEMÁTICA CERO

ESTATICA





PESO DEL CARTEL

FUERZAS QUE ACTÚAN SOBRE EL CARTEL

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

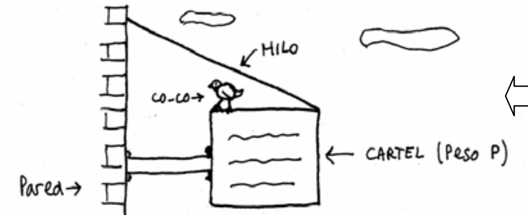
$$\sum M\rfloor_A = 0$$

ECUACIONES QUE SE PLANTEAN

ESTATICA

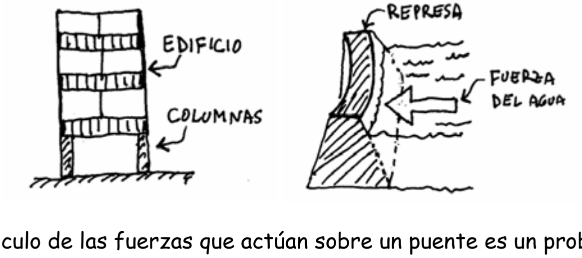
La estática se inventó para resolver problemas de Ingeniería. Principalmente problemas de Ingeniería civil y problemas de Ingeniería mecánica. El primero que empezó con esto fue Galileo Ídolo. (Año 1500, más o menos). La idea de Galileo era tratar de calcular cuánto valía la fuerza que actuaba sobre un cuerpo. Ahora...
¿ Para que quiere uno saber qué fuerza actúa sobre un cuerpo ?
Rta: Bueno, a grandes rasgos digamos que si la fuerza que actúa sobre un cuerpo es muy grande, el cuerpo se puede romper. Muchas veces uno necesita poder calcular la fuerza que actúa para saber si el cuerpo va a poder soportarla o no.

Mirá estos ejemplos: Los carteles que cuelgan en las calles suelen tener un cable o un alambre que los sostiene. El grosor de ese alambre se calcula en función de la fuerza que tiene que soportar. Esa fuerza depende del peso del cartel y se calcula por estática.



EL ALAMBRE SE PUEDE ROMPER SI EL PESO DEL CARTEL ES MUY GRANDE

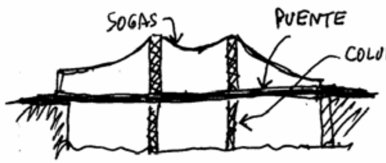
En los edificios, el peso de toda la construcción está soportado por las columnas. El grosor de las columnas va a depender de la fuerza que tengan que soportar. En las represas, el agua empuja tratando de volcar la pared. La fuerza que tiene que soportar la pared se calcula por estática. El grosor de la pared y la forma de la pared se diseñan de acuerdo a esa fuerza que uno calculó.



FUERZAS QUE ACTÚAN SOBRE UN EDIFICIO Y SOBRE UNA REPRESA

El cálculo de las fuerzas que actúan sobre un puente es un problema de estática.
A grandes rasgos, cuando uno quiere saber como tienen que ser las columnas y los

cables que van a sostener a un puente, tiene que resolver un problema de estática.



LOS CABLES Y LAS COLUMNAS SOPORTAN TODA LA FUERZA EN UN PUENTE

En las máquinas, el cálculo de fuerzas por estática es muy importante. Por ejemplo, en los trenes hay un gancho que conecta un vagón con otro. El grosor de ese gancho se saca resolviendo un problema de estática.

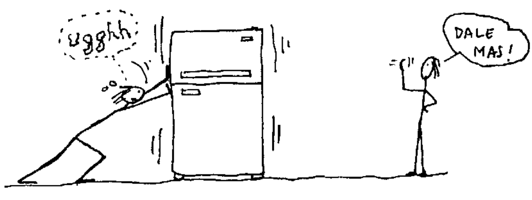
Hoy en dia todos estos cálculos los hacen las computadoras. Pero lo que hace la máquina no es nada del otro mundo. Hace las mismas cuentas que vos vas a hacer al resolver los problemas de la guía. Solamente que ella las hace millones y millones de veces.

¿ <u>QUÉ SIGNIFICA RESOLVER UN PROBLEMA DE ESTÁTICA</u> ?

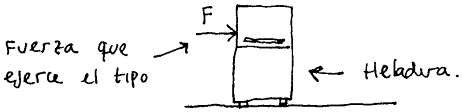
En estática a uno le dan un cuerpo que tiene un montón de fuerzas aplicadas. Resolver un problema de estática quiere decir calcular cuánto vale alguna de esas fuerzas. En estática todo el tiempo hablamos de fuerzas. Entonces primero veamos qué es una **fuerza.**

<u>FUERZA</u>

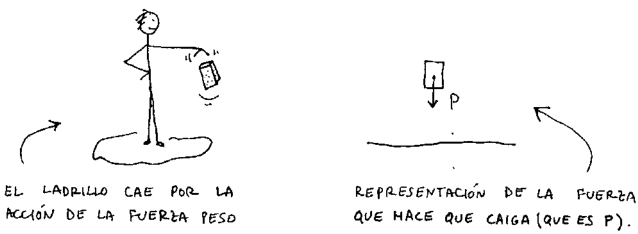
Es la acción que uno ejerce con la mano cuando empuja algo o tira de algo. Por ejemplo:



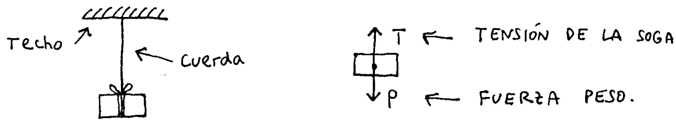
A esta acción uno la representa poniendo una flechita para el mismo lado para donde va la fuerza. Si un señor empuja una heladera, al empujarla ejerce una fuerza. Esta fuerza ellos la representan así:



Hay otro tipo de fuerza que siempre aparece en los problemas de estática que es la fuerza **PESO**. La Tierra atrae a las cosas y quiere hacer que caigan. A esta fuerza se la llama peso. Por ejemplo, si yo suelto un ladrillo, cae. En ese caso la fuerza peso está actuando de la siguiente manera:

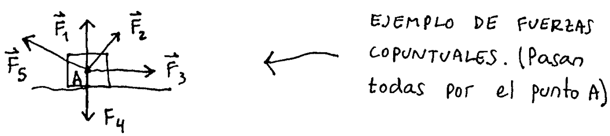


Vamos a este otro caso. Supongamos que cuelgo un ladrillo del techo con una soga. El ladrillo no se cae porque la soga lo sostiene. Ellos dicen entonces que la soga está ejerciendo una fuerza hacia arriba que compensa al peso. A esa fuerza se la llama **tensión**. (Tensión, tensión de la soga, fuerza que hace la cuerda, es lo mismo). La tensión de una soga se suele representar así:

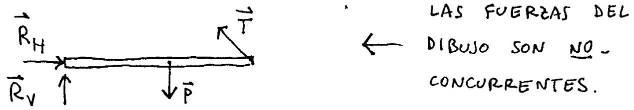


FUERZAS CONCURRENTES (Atento)

Cuando TODAS las fuerzas que actúan sobre un mismo cuerpo PASAN POR UN MISMO PUNTO, se dice que estas fuerzas son concurrentes. (= Que concurren a un mismo punto). A veces también se las llama fuerzas copuntuales. Lo que tenés que entender es que si las fuerzas son copuntuales vos las podés dibujar a todas saliendo desde el mismo lugar. Por ejemplo, las siguientes fuerzas son concurrentes:



También las fuerzas pueden no pasar por el mismo lugar. En ese caso se dice que las fuerzas son no-concurrentes. Acá tenés un ejemplo:



Los problemas de fuerzas copuntuales son los que se ven primero porque son más fáciles. Después vienen los problemas de fuerzas no-copuntuales que son más difíciles. Ahí hay que usar momento de una fuerza y todo eso.

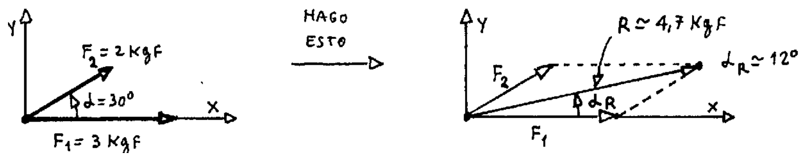
SUMA DE FUERZAS - RESULTANTE.

Supongamos que tengo un cuerpo que tiene un montón de fuerzas aplicadas. Lo que estoy buscando es reemplazar a todas las fuerzas por una sola. Esa fuerza actuando sola tiene que provocar el mismo efecto que todas las otras actuando juntas. Por ejemplo, suponé que un auto se paró. Se ponen a empujarlo 3 personas. Yo podría reemplazar a esas 3 personas por una sola que empujara de la misma manera. Hacer esto es "hallar la resultante del sistema de fuerzas". Concretamente, hallar la resultante quiere decir calcular cuanto vale la suma de todas las fuerzas que actúan.
Atención, las fuerzas no se suman como los números. Se suman como vectores.

A la fuerza resultante de la llama así justamente porque se obtiene como "resultado" de sumar todas las demás. Hay 2 maneras de calcular la resultante de un sistema de fuerzas: Uno es el método gráfico y el otro es el método analítico. En el método gráfico uno calcula la resultante haciendo un dibujito y midiendo con una regla sobre el dibujito. En el método analítico uno calcula la resultante en forma teórica haciendo cuentas.

SUMA DE FUERZAS GRAFICAMENTE – METODO DEL PARALELOGRAMO.

Este método se usa solo cuando tengo 2 fuerzas. Lo que se hace es calcular la diagonal del paralelogramo formado por las 2 fuerzas. Por ejemplo, fijate como lo uso para calcular gráficamente la resultante de estas dos fuerzas F_1 y F_2 de 2 kgf y 3 kgf que forman un ángulo de 30 grados:



Ojo, las fuerzas son vectores. Entonces para calcular la resultante va a haber que decir cuál es su módulo y cuál es el ángulo que forma con el eje x. Si estoy trabajando gráficamente, mido el ángulo y el módulo directamente en el gráfico. El módulo lo mido con una regla y el ángulo con un transportador.

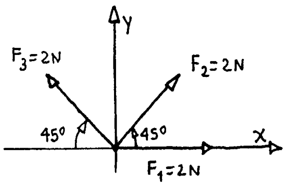
METODO DEL POLIGONO DE FUERZAS

Si me dan más de 2 fuerzas, puedo calcular la resultante usando el método del polígono de fuerzas. Este método se usa poco porque es medio pesado. Igual conviene saberlo porque en algún caso se puede llegar a usar. Lo que se hace es lo siguiente:

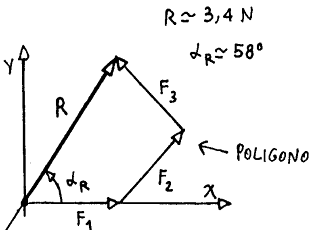
1 - Se va poniendo una fuerza a continuación de la otra formando un polígono.
2 – Se une el origen de la primera fuerza con la punta de la última.
3 – Este último vector es la resultante del sistema.

NOTA: Si el polígono da cerrado es porque el sistema está en equilibrio. (Es decir, la resultante vale cero, o lo que es lo mismo, no hay resultante). Fijate ahora. Voy a calcular la resultante de algunas fuerzas usando el método del polígono.

EJEMPLO: Hallar la resultante del sistema de fuerzas F_1, F_2 y F_3



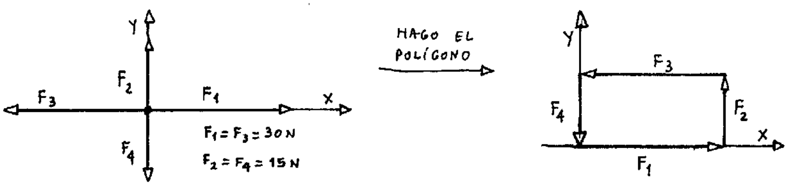
Entonces voy poniendo una fuerza a continuación de la otra y formo el polígono. Hago una flecha que va desde la cola de la primera fuerza hasta la punta de la última. Esa flecha que me queda marcada es la resultante:



Acá el valor de R es aproximadamente de 3,4 N y alfa $_R$ aproximadamente 58° .
Los medí directamente del gráfico con regla y transportador.

Vamos a otro caso que muestra cómo se usa el método del polígono de fuerzas :

EJEMPLO: Hallar la resultante de las fuerzas F_1, F_2 , F_3 y F_4.



En este caso el polígono dio **CERRADO**. La resultante es **CERO**. Todas las fuerzas se compensan entre sí y es como si no hubiera ninguna fuerza aplicada.

NOTA: la deducción del método del polígono de fuerzas sale de aplicar sucesivamente la regla del paralelogramo.

Para que entiendas el tema que sigue necesito que sepas trigonometría. Entonces va un pequeño repaso. Título:

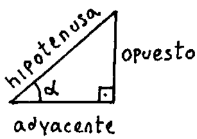
TRIGONOMETRÍA

FUNCIONES SENO, COSENO y TANGENTE de un ÁNGULO

La palabra trigonometría significa medición de triángulos. A grandes rasgos la idea es poder calcular cuánto vale el lado de un triángulo sin tener que ir a medirlo con una regla. Todo lo que pongo acá sirve sólo para triángulos que tiene un ángulo de 90° (Triángulo Rectángulo).
El asunto es así: Los tipos inventaron unas cosas que se llaman funciones trigonométricas que se usan todo el tiempo en matemática y en física.

Para cualquier triángulo que tenga un ángulo de 90° (rectángulo) ellos definen las siguientes funciones :

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{op.}{hip.}\ ,\quad \cos\alpha = \frac{ady.}{hip.}\ ,\quad tg\,\alpha = \frac{op.}{ady.}$$



Estas funciones trigonométricas lo que hacen es decir cuántas veces entra un lado del triángulo en otro de los lados para un determinado ángulo alfa.

Por ejemplo, si uno dice que el seno 30° = 0,5 , lo que está diciendo es que lo que mide en cm el cateto opuesto dividido lo que mide en cm la hipotenusa da 0,5. Esto significa que la hipotenusa entra media vez en el cateto opuesto.

Lo interesante de este asunto es que el valor que tomen las funciones trigonométricas seno de alfa, coseno de alfa y tg de alfa **NO** dependen de qué tan grande uno dibuje el triángulo en su hoja. Si el triángulo es rectángulo y el ángulo alfa es 30°, el seno de alfa valdrá 0,5 siempre. (Siempre).

Cada vez que uno necesita saber el valor de sen alfa o cos α se lo pregunta a la calculadora y listo. Ojo, la máquina tiene que estar siempre en grados (DEG).
También si bien uno tiene la calculadora, conviene saber los principales valores de memoria. Va acá una tablita que te puede ayudar :

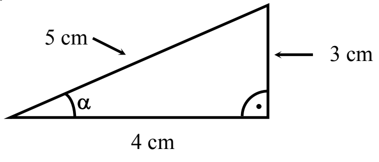
	0°	30°	45°	60°	90°
SEN α	$\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$	$\frac{\sqrt{1}}{2} = 0,5$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = 0,707$	$\frac{\sqrt{3}}{2} = 0,866$	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$
COS α	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$	$\frac{\sqrt{3}}{2} = 0,866$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = 0,707$	$\frac{\sqrt{1}}{2} = 0,5$	$\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$
tg α	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞

Ejemplo: Calcular el valor de las funciones trigonométricas para un triángulo rectángulo de lados 3 cm, 4 cm y 5 cm.

Escribo la expresión de sen α, cos α y tg α

$$\boxed{\operatorname{sen}\alpha = \frac{op}{hip} \;;\; \cos\alpha = \frac{ady}{hip} \;;\; tg\,\alpha = \frac{op}{ady}}$$ $\Leftarrow$ FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

Dibujo el triangulo de lados 3, 4 y 5.



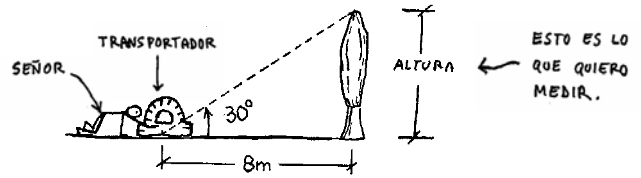
Para calcular los valores de seno, coseno y tangente de alfa, hago las cuentas :

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{3\ \text{cm}}{5\ \text{cm}} = 0{,}6$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{4\ \text{cm}}{5\ \text{cm}} = 0{,}8$$

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}} = \frac{3\ \text{cm}}{4\ \text{cm}} = 0{,}75$$

Es un poco largo de explicar las millones de cosas que se pueden hacer usando las funciones trigonométricas. Puedo darte un ejemplo:
Suponé que vos querés saber la altura de un árbol pero no tenés ganas de subirte hasta la punta para averiguarlo. Lo que se podría hacer entonces es esto: Primero te parás en un lugar cualquiera y medís la distancia al árbol. Suponé que te da 8 m. Después con un transportador medís al ángulo que hay hasta la punta del árbol. (Alfa). Suponé que te da 30°. Esquemáticamente sería algo así:



Ahora, usando la fórmula de tangente de un ángulo: $\text{tg}\ \alpha = \frac{\text{op}}{\text{ady}}$. Entonces :

$$\text{tg}\ 30° = \frac{\text{Altura del árbol}}{8\text{m}}$$

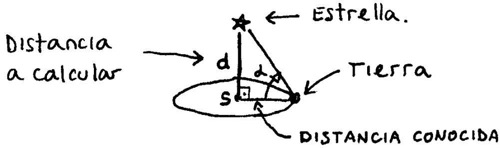
$$\Rightarrow \textit{Altura} = 8\,m \cdot \overbrace{\text{tg}\ 30}^{0{,}577}$$

$$\Rightarrow \underline{\text{Altura} = 4{,}61\ \text{m}} \qquad \leftarrow \quad \text{Altura del árbol.}$$

De esta manera se pueden calcular distancias en forma teórica. Cuando digo " en forma teórica " quiero decir, sin tener que subirse al árbol para medirlo. Si uno quiere, puede dibujar el triángulo en escala en una hoja y medir todo con una regla. Se puede hacer eso pero es mucho lío y no da exacto.

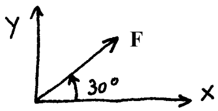
Es más hay veces que hay distancias difíciles de medir. Por más que uno quiera, no puede ir hasta ahí y medirla. En esos casos, la única manera de calcular esa distancia es usar trigonometría.

Por ejemplo acá te pongo un caso de esos: la distancia a una estrella... Te recuerdo que conocer la distancia a las estrellas fue el sueño de la humanidad durante muchos miles de años. ¿ Cómo harías para medir la distancia a una estrella ? Pensalo. A ver si este dibujito te ayuda un poco.

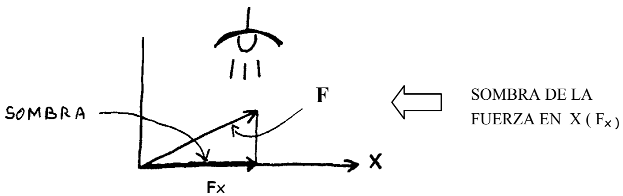


PROYECCIONES DE UNA FUERZA

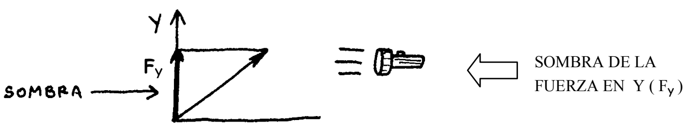
Suponé que me dan una fuerza inclinada un ángulo alfa. Por ejemplo esta:



Hallar la proyección de la fuerza sobre el eje **x** significa ver <u>cuánto mide la sombra de esa fuerza sobre ese eje</u>. Es decir, lo que quiero saber es esto:



Hallar la proyección sobre el eje **y** es la misma historia:

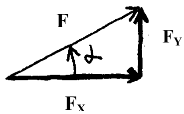


Para saber cuánto mide la proyección de una fuerza sobre un eje, en vez de andar midiendo sombras se usa la trigonometría. Fijate :

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{\text{op}}{\text{hip}} \Rightarrow \text{op} = \text{hip} \cdot \text{sen}\,\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{ady}}{\text{hip}} \Rightarrow \text{ady} = \text{hip} \cdot \cos\alpha$$

Es decir, si tengo una fuerza F, las proyecciones **F_x** y **F_y** van a ser:

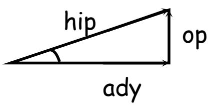


$$\boxed{\begin{aligned} F_x &= F \times \cos\alpha \\ F_Y &= F \times \text{sen}\,\alpha \end{aligned}}$$

VER

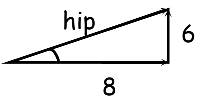
PITÁGORAS

El teorema de Pitágoras sirve para saber cuánto vale la hipotenusa de un triángulo rectángulo sabiendo cuánto valen los 2 catetos. Si tengo un triángulo rectángulo se cumple que:



$$\boxed{\text{hip}^2 = \text{ady}^2 + \text{op}^2}$$ ⟸ **TEOREMA DE PITAGORAS**

Ejemplo: Tengo un triángulo de lados 6 cm y 8 cm. ¿ Cuánto mide su hipotenusa ?



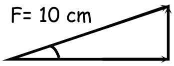
Rta.: $\text{hip}^2 = (6\text{ cm})^2 + (8\text{ cm})^2$

$h^2 = 100\text{ cm}^2$

$h = 10\text{ cm}$ ← **VALOR DE LA HIPOTENUSA**

<u>Ejemplo</u>: **HALLAR LAS PROYECCIONES EN EQUIS Y EN Y PARA UNA FUERZA DE 10 NEWTON QUE FORMA UN ÁNGULO DE 30° CON EL EJE X.**

Tomando las cosas en escala, tengo un vector de 10 cm con alfa = 30 °.
Es decir, algo así :



$$F_y = 10\,\mathrm{cm} \cdot \overbrace{\mathrm{sen}\ 30°}^{0,5} = 5\,\mathrm{cm}$$

$$F_x = 10\,cm \cdot \underbrace{\cos 30°}_{0,866} = 8,66\,cm$$

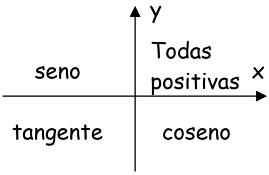
Entonces la proyección sobre el eje X mide 8,66 cm y la proyección sobre el eje Y mide 5 cm . Conclusión: F_X = 8,66 Newton y F_Y = 5 Newton. Probá componer estas 2 proyecciones por Pitágoras y verificá que se obtiene de nuevo la fuerza original de 10 N.

Aprendete este procedimiento para hallar las proyecciones de una fuerza. Se usa mucho. Y no se usa sólo acá en estática. También se usa en cinemática, en dinámica y después en trabajo y energía. Es más, te diría que conviene memorizar las formulitas $F_x = F. \cos \alpha$ y $F_y = F. \mathrm{sen}\, \alpha$.

Es fácil : La F_y es F por seno y la F_x es F por coseno. Atención, esto vale siempre que el ángulo que estés tomando sea el que forma la fuerza con el eje X.

Van unos últimos comentarios sobre trigonometría:

* Las funciones trigonométricas sen α , cos α y tg α pueden tener signo (+) o (-). Eso depende de en qué cuadrante esté el ángulo alfa . Fijate:



SIGNO POSITIVO DE LAS FUNCIONES SENO COSENO Y TANGENTE SEGÚN EL CUADRANTE. (RECORDAR)

* Te paso unas relaciones trigonométricas que pueden serte útiles en algún problema. Para cualquier ángulo alfa se cumple que :

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\mathrm{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$$

Además : $\mathrm{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

Y también: $\cos\alpha = \text{sen}\,(90° - \alpha)$

(Ej: cos 30° = sen 60°)

FIN RESUMEN DE TRIGONOMETRIA

Hasta ahora todo lo que puse fueron cosas de matemática. Tuve que hacerlo para que pudieras entender lo que viene ahora. Título :

SUMA DE FUERZAS ANALITICAMENTE

Lo que se hace para hallar la resultante en forma analítica es lo siguiente :

1 – Tomo un par de ejes x – y con el origen puesto en el punto por el que pasan todas las fuerzas.

2 – Descompongo cada fuerza en 2 componentes. Una sobre el eje x (Fx) y otra sobre el eje y (Fy).

3 – Hallo la suma de todas las proyecciones en el eje x y en el eje y

Es decir, lo que estoy haciendo es calcular el valor de la resultante en x (Rx) y el valor de la resultante en y (Ry). Este asunto es bastante importante y ellos suelen ponerlo de esta manera :

$$\boxed{\begin{array}{lll} R_x = \Sigma F_x & \longleftarrow & \text{SUMATORIA EN } \mathbf{x} \\ R_y = \Sigma F_y & \longleftarrow & \text{SUMATORIA EN } \mathbf{y} \end{array}}$$

← RESULTANTES EN X y en Y.

Esto se lee así : La resultante en la dirección **x** (horizontal) es la sumatoria de todas las fuerzas en la dirección x. La resultante en la dirección **y** (vertical) es la sumatoria de todas las fuerzas en la dirección **y**.

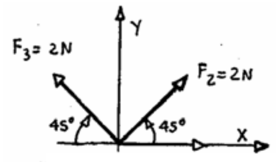
4 – Componiendo R_x con R_y por Pitágoras hallo el valor de la resultante.

$$\boxed{R^2 = R_x^{\,2} + R_y^{\,2}} \longleftarrow \textbf{PITAGORAS}$$

Haciendo la cuenta $\text{tg}\,\alpha_R = R_y / R_x$ puedo calcular el ángulo alfa que forma la resultante con el eje X. Vamos a un ejemplo:

EJEMPLO

HALLAR ANALÍTICAMENTE LA RESULTANTE DEL SIGUIENTE SISTEMA DEFUERZAS CONCURRENTES CALCULANDO R y α_R .

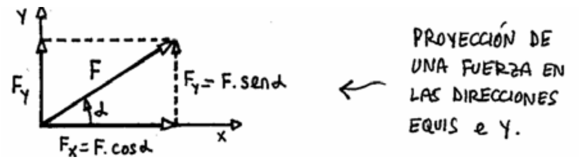


$F_1 = 2$ N

Para resolver el problema lo que hago es plantear la sumatoria de las fuerzas en la dirección <u>x</u> y la sumatoria de las fuerzas en la dirección <u>y</u> . O sea:

$$R_{x}.= \sum F_x \qquad y \qquad R_y = \sum F_y$$

Calculo ahora el valor de R_x y R_y proyectando cada fuerza sobre el eje **x** y sobre el eje **y**. Si mirás las fórmulas de trigonometría te vas a dar cuenta de que la componente de la fuerza en la dirección **x** será siempre $F_x = F.\cos\alpha$ y la componente en dirección y es $Fy = F.\text{sen}\,\alpha$. (α es el ángulo que la fuerza forma con el eje **x**).



Entonces:

$$R_x = \sum F_x = F_1 . \cos\alpha_1 + F_2 . \cos\alpha_2 + F_3 . \cos\alpha_3$$

$$\Rightarrow R_x = 2\text{ N} . \cos 0° + 2\text{ N} . \cos 45° - 2\text{ N} . \cos 45\,°$$

Fijate que la proyección de F_3 sobre el eje **x** va así ← y es **negativa**. Haciendo la suma:

$$\boxed{R_x = 2\text{ N}} \longleftarrow \text{Resultante en x}$$

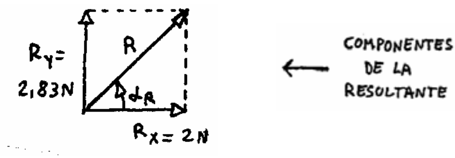
Haciendo lo mismo para el eje y:

$$R_y = \sum F_y = F_1 . \text{sen}\,\alpha_1 + F_2 . \text{sen}\,\alpha_2 + F_3 . \text{sen}\,\alpha_3$$

$\Rightarrow R_y = 2\text{ N} \cdot \text{sen } 0° + 2\text{ N} \cdot \text{sen } 45° + 2\text{ N} \cdot \text{sen } 45°$

$\boxed{R_y = 2{,}828\text{ N}}$ ← Resultante en y

O sea que lo que tengo es esto:



Aplicando Pitágoras:

$$R = \sqrt{(2\text{ N})^2 + (2{,}828\text{ N})^2}$$

$\boxed{R = 3{,}46\text{ N}}$ ← Resultante

Otra vez por trigonometría: $\text{tg } \alpha_R = R_y / R_x \Rightarrow$ $\text{tg } \alpha_R = \dfrac{2{,}82\text{N}}{2\text{N}}$

$\Rightarrow \text{tg } \alpha_R = 1{,}414 \Rightarrow$

$\boxed{\alpha_R = 54{,}73°}$ ⇦ Angulo que forma R con el eje x

Para poder calcular α_R conociendo tg α_R usé la función arco tg de la calculadora .

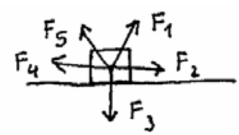
Atención, se pone : [1] [.] [4] [1] [SHIFT] [TAN]

Nota: a veces en algunos problemas piden calcular la equilibrante. La equilibrante vale lo mismo que la resultante pero apunta para el otro lado. Para el problema anterior la fuerza equilibrante valdría 3,46 N y formaría un ángulo :

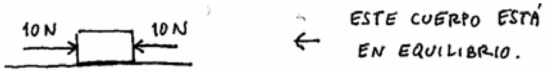
$$\alpha_E = 54{,}73° + 180° = 234{,}73°$$

EQUILIBRIO (Importante)

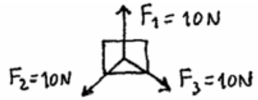
Supongamos que tengo un cuerpo que tiene un montón de fuerzas aplicadas que pasan por un mismo punto (concurrentes).



Ellos dicen que el cuerpo estará en equilibrio si la acción de estas fuerzas se compensa de manera tal que es como si no actuara ninguna fuerza sobre el cuerpo. Por ejemplo:

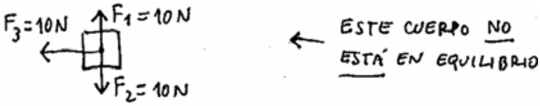


Este otro cuerpo también está en equilibrio:



⇦ OTRO CUERPO
EN EQUILIBRIO

Vamos al caso de un cuerpo que NO está en equilibrio:



Es decir, F_1 y F_2 se compensan entre sí, pero a F_3 no la compensa nadie y el cuerpo se va a empezar a mover para allá ← .

Todos los cuerpos que veas en los problemas de estática van a estar quietos. Eso pasa porque las fuerzas que actúan sobre el tipo se compensan mutuamente y el coso no se mueve. Sin hilar fino, digamos un cuerpo esta en equilibrio si está quieto. En estática siempre vamos a trabajar con cuerpos que estén quietos. De ahí justamente viene el nombre de todo este tema. (Estático: que está quieto, que no se mueve).

Pero ahora viene lo importante. Desde el punto de vista físico, ellos dicen que :

> UN CUERPO ESTÁ EN EQUILIBRIO SI LA SUMA DE TODAS LAS FUERZAS QUE ACTÚAN SOBRE ÉL VALE <u>CERO</u>.

Otra manera de decir lo mismo es decir que **<u>si un sistema de fuerzas copuntuales está en equilibrio, su resultante tiene que ser cero</u>**. Es decir, no hay fuerza neta aplicada. La manera matemática de escribir esto es:

$$\boxed{\sum F = 0}$$ ⇦ condición de equilibrio para un sistema de fuerzas concurrentes

Esta fórmula se lee: la suma de todas las fuerzas que actúan tiene que ser cero . Esta es una ecuación vectorial. Cuando uno la usa para resolver los problemas tiene que ponerla en forma de 2 ecuaciones de proyección sobre cada uno de los ejes. Estas ecuaciones son (atento):

Condición de equilibrio para un sistema de fuerzas concurrentes (ec. de proyección)

$\boxed{\sum F_x = 0}$ ⇐ Condición de equilibrio para el eje horizontal.

$\boxed{\sum F_y = 0}$ ⇐ Condición de equilibrio para el eje vertical.

No te preocupes por estas fórmulas. Ya lo vas a entender mejor una vez que resuelvas algunos problemas. Ahora van unos comentarios importantes.

ACLARACIONES:

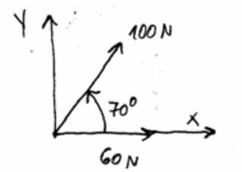
- Para hallar analíticamente la resultante de dos fuerzas se puede usar también el teorema del coseno. No conviene usarlo, es fácil confundirse al tratar de buscar el ángulo alfa que figura en la fórmula.

- Por favor, fijate que las condiciones de equilibrio $\sum F_x = 0$ y $\sum F_y = 0$ garantizan que el sistema esté en equilibrio solo en el caso en de que TODAS LAS FUERZAS PASEN POR UN MISMO PUNTO.
(Esto no es fácil de ver. Lo vas a entender mejor más adelante cuando veas el concepto de momento de una fuerza).

UN EJEMPLO

Dos fuerzas concurrentes, F_1 de 60 N y F_2 de 100 N forman entre sí un ángulo de 70º. Para obtener un sistema de fuerzas en equilibrio se aplica una fuerza F_3 ¿ Cuánto deben valer, aproximadamente, el módulo de F_3 y el ángulo que forma dicha fuerza con F_1 ?

El problema no tiene dibujito. Lo hago :



⇐ ESQUEMA DE LO QUE PLANTEA EL ENUNCIADO

Tomé la fuerza de 60 N en el eje equis para hacer más fácil el asunto. Planteo la suma de fuerzas en x y en y para sacar la resultante

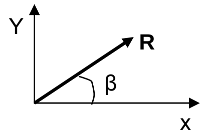
$$\Sigma F_X = 60\,N + 100\,N \cdot \cos 70^\circ = 94{,}202\,N$$

$$\Sigma F_Y = 100\,N \times \text{sen}\,70^\circ = 93{,}969\,N$$

$$R^2 = F_x^2 + F_y^2 \;\rightarrow\; R^2 = (\,94{,}02\,N\,)^2 + (\,93{,}969\,N\,)^2$$

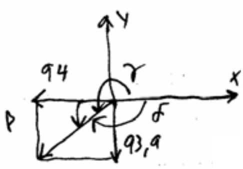
$\rightarrow$ $\underline{R = 133\ N}$ $\leftarrow$ VALOR DE LA RESULTANTE

Calculo el ángulo que forma la resultante con el eje x:



$$tg\,\beta = \frac{93{,}969}{94{,}202} \simeq 1 \Rightarrow \beta = 44{,}93^\circ$$

Ahora, la fuerza equilibrante tendrá el mismo módulo que la resultante pero irá para el otro lado. Quiere decir que el asunto queda así:



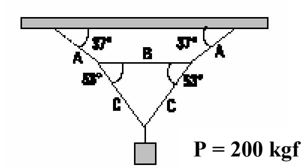
Entonces:

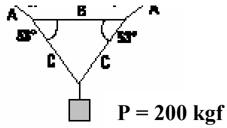
$\underline{E = 133\ N}$ $\leftarrow$ VALOR DE LA EQUILIBRANTE

$\underline{\delta = 135^\circ}$ $\leftarrow$ ANGULO DE LA EQUILIBRANTE

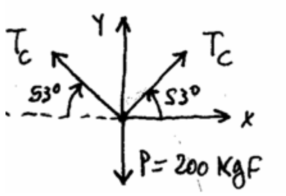
OTRO EJEMPLO

Hallar la tensión en cada una de las cuerdas de la figura. El peso que soportan es de 200 kgf.





Empiezo por la parte de abajo. Hago un dibujito :



Planteo las sumatorias en x y en Y. El cuerpo no se mueve. Está en equilibrio. Entonces la ΣF_x y la ΣF_y tienen que ser CERO. Me queda:

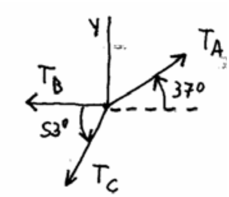
$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow$$

$$T_c \cdot \text{Sen } 53° + T_c \cdot \text{Sen } 53° - 200 \text{ kgf} = 0$$

$$2.T_c \cdot \text{Sen } 53° = 200 \text{ kgf}$$

$$\boxed{Tc = 125{,}21 \text{ N}} \leftarrow$$ VALOR DE LA TENSION EN LAS DOS CUERDAS **C**

La sumatoria en equis queda $T_c \cdot \text{Cos } 53° - T_c \cdot \text{Cos } 53° = 0$. No tiene sentido que la plantee porque no puedo despejar nada de ahí. Vamos a las otras cuerdas. El dibujito sería algo así:



Otra vez planteo las sumatorias en x y en Y. Otra vez el cuerpo está en equilibrio, asi que ΣF_x y ΣF_y tienen que ser CERO. Me queda:

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow$$

$$T_A \cdot \text{Sen } 37° - T_c \cdot \text{Sen } 53° = 0$$

T_c ya la había calculado antes y me había dado 125,2 kgf. Entonces reemplazo:

$$T_A \,.\, \text{Sen } 37° - 125{,}2 \text{ kgf} \,.\, \text{Sen } 53° = 0$$

$$T_A \,.\, 0{,}6 = 125{,}2 \text{ kgf} \,.\, 0{,}8$$

$$\boxed{\mathbf{T_A = 166{,}2 \ kgf}} \longleftarrow$$ VALOR DE LA TENSION EN LA CUERDA **A**

Ahora planteo la sumatoria de las fuerzas en equis. Me queda : $\Sigma F_x = 0$ ➔

$$T_A \,.\, \cos 37° - T_B - T_c \,.\, \cos 53° = 0$$

Los valores de T_A y T_C ya los conozco. Entonces reemplazo:

$$166{,}2 \text{ kgf} \,.\, \cos 37° - T_B - 125{,}2 \text{ kgf} \,.\, \cos 53° = 0$$

$$T_B = 166{,}2 \text{ kgf} \,.\, \cos 37° - 125{,}2 \text{ kgf} \,.\, \cos 53°$$

$$\boxed{T_B = 57{,}3 \text{ kgf}} \longleftarrow$$ VALOR DE LA TEN-SION EN LA CUERDA

FIN FUERZAS COPUNTALES

FUERZAS NO COPUNTUALES

Hasta ahora teníamos problemas donde todas las fuerzas pasaban todas por un mismo punto. Para resolver este tipo de problemas había que plantear 2 ecuaciones. Estas ecuaciones eran la sumatoria de las fuerzas en dirección **x** y la sumatoria de fuerzas en dirección **y**.

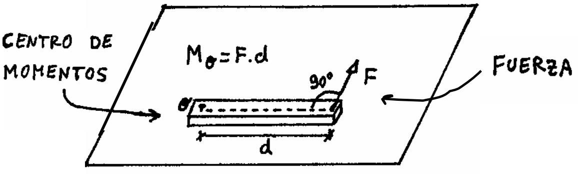
Ahora vamos a tener problemas donde las fuerzas **no pasan por el mismo punto**. (Se dice que las fuerzas son NO CONCURRENTES o NO COPUNTUALES). Entonces para resolver los ejercicios va a haber que plantear otra ecuación que es la ecuación del momento de las fuerzas. Entonces, título:

MOMENTO DE UNA FUERZA

Para resolver el asunto de fuerzas que no pasan por un mismo punto se inventa una cosa que se llama momento de una fuerza. Ellos definen el momento de una fuerza con respecto a un punto ó como:

$$\boxed{M_ó = F \cdot d} \Leftarrow$$

Momento de una fuerza con respecto al punto ó.



La distancia que va del punto a la fuerza se llama **d** y F es la componente de la fuerza en forma perpendicular a d (ojo con esto). La fuerza puede llegar a estar Inclinada

En ese caso, el momento de la fuerza con respecto a O vale Mo = $F_y \cdot d$. (F_y vendría a ser la componente de la fuerza perpendicular a d).

SIGNO DEL MOMENTO DE UNA FUERZA ← VER

Una fuerza aplicada a un cuerpo puede hacerlo girar en sentido de las agujas del reloj o al revés. Entonces hay 2 sentidos de giro posibles, uno de los dos tendrá que ser positivo y el otro negativo.

Para decidir cuál sentido es positivo y cuál es negativo hay varias convenciones. Una de las convenciones dice así: " el momento de la fuerza será positivo cuando haga girar al cuerpo en sentido <u>contrario</u> al de las agujas del reloj ".

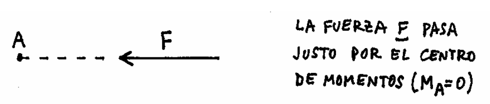
La otra convención, dice: " el momento será positivo cuando la fuerza en cuestión haga girar al cuerpo en <u>el mismo sentido</u> que las agujas del reloj ".

Yo te aconsejo que uses la siguiente convención: Antes de empezar el problema uno marca en la hoja el sentido de giro que elige como positivo poniendo esto: ↺(+) (giro antihorario positivo) o esto: (+)↻ (giro horario positivo).

Esta última convención es la que suelo usar yo para resolver los problemas. Creo que es la mejor porque uno puede elegir qué sentido de giro es positivo para cada problema en particular. ¿ Cuál es la ventaja ?
<u>Rta</u>: La ventaja es que si en un ejercicio la mayoría de las fuerzas tienen un determinado sentido de giro, elijo como positivo <u>ese</u> sentido de giro para <u>ese</u> problema y listo. Si elijo el sentido al revés, no pasa nada, pero me van a empezar a aparecer un montón de signos menos. (= Molestan y me puedo equivocar)

¿ Puede el momento de una fuerza ser cero ?

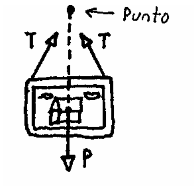
Puede. Para que M (= F . d) sea cero, tendrá que ser cero la fuerza o tendrá que ser cero la distancia. Si F = 0 no hay momento porque no hay fuerza aplicada. Si <u>d</u> es igual a cero, quiere decir que la fuerza pasa por el centro de momentos.



Quiero que veas ahora una cuestión importante que es la siguiente: ¿ qué tiene que pasar para que un sistema de fuerzas que no pasan por el mismo punto esté en equilibrio ?

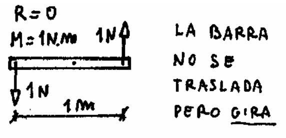
CONDICIÓN DE EQUILIBRIO PARA FUERZAS NO CONCURRENTES ← OJO

Supongamos el caso de un cuerpo que tiene aplicadas fuerzas que pasan todas por un punto. Por ejemplo, un cuadro colgado de una pared.



Para estos casos, la condición para que el tipo estuviera en equilibrio era que la suma de todas las fuerzas que actuaban fuera cero. O sea, que el sistema tuviera resultante nula. Esto se escribía en forma matemática poniendo que $\sum F_x = 0$ y $\sum F_y = 0$.

Muy bien, pero si lo pensás un poco, el asunto de que <u>**R**</u> sea cero, sólo garantiza que el cuerpo <u>no se traslade</u>. Si las fuerzas <u>NO PASAN POR UN MISMO PUNTO</u> , puede ser que la resultante sea cero y que el cuerpo no se traslade... pero el objeto podría estar girando. Mirá el dibujito:



⇐ CUPLA (O PAR)

En este dibujito, la resultante es <u>**cero**</u>, sin embargo la barra está girando. Esto es lo que se llama CUPLA (o par). Una cupla son 2 fuerzas iguales y de sentido contrario separadas una distancia <u>d</u>. La resultante de estas fuerzas es cero, pero su momento <u>NO</u>. Al actuar una cupla sobre un cuerpo, <u>**el objeto gira pero no se traslada**</u>.

El momento de las fuerzas que actúan es el que hace que la barra gire. Por eso es que cuando las fuerzas no pasan por un mismo punto hay que agregar una nueva condición de equilibrio. Esta condición es <u>que el momento total que actúa sobre el cuerpo tiene que ser **CERO**</u>. La ecuación es $\sum M_{ó} = 0$. Se la llama ecuación de momentos.

Este asunto de " $\sum M_{ó} = 0$ " Se lee: " La sumatoria de los momentos respecto a un punto o es igual a cero ". Al igualar la suma de los momentos a cero, uno garantiza el equilibrio de rotación. Es decir, impide que la barra gire.

ENTONCES:

PARA QUE ESTÉ EN EQUILIBRIO UN CUERPO QUE TIENE UN MONTÓN DE FUERZAS APLICADAS QUE NO PASAN POR UN MISMO PUNTO, DEBE CUMPLIRSE QUE :

$\sum F_x = 0$	Garantiza que no haya traslación en x.
$\sum F_y = 0$	Garantiza que no haya traslación en y.
$\sum M_{ó} = 0$	Garantiza que no haya rotación.

VER

CONCLUSIÓN (LEER)

Para resolver los problemas de estática en donde las fuerzas NO pasan por un mismo punto hay que plantear tres ecuaciones.
Estas ecuaciones van a ser una de momentos ($\sum M_{ó} = 0$) y dos de proyección ($\sum F_x = 0$ y $\sum F_y = 0$) . Resolviendo las 3 ecuaciones que me quedan, calculo lo que me piden.

ACLARACIONES:

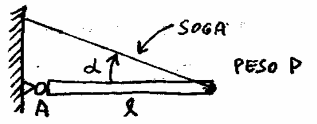
- Recordar que el sentido positivo para los momentos lo elige uno.
- Siempre conviene tomar momentos respecto de un punto que anule alguna incógnita. Generalmente ese punto es un apoyo.
- No siempre va a haber que usar las tres ecuaciones para resolver el problema. Depende de lo que pidan. Muchas veces se puede resolver el problema usando sólo la ecuación de momentos.

* Para resolver un problema no necesariamente uno está obligado a plantear $\sum F_x$, $\sum F_y$. A veces se pueden tomar dos ecuaciones de momento referidas a puntos distintos. (Por ejemplo, los 2 apoyos de una barra).

EJEMPLO

Una barra de longitud 2 m y 100 Kg de peso está sostenida por una soga que forma un ángulo alfa de 30° como indica la figura. Calcular la tensión de la cuerda y el valor de las reacciones en el apoyo A. Suponer que el peso de la barra está aplicado en el centro de la misma.

$\alpha = 30°$
P = 100 kgf
L = 2 m

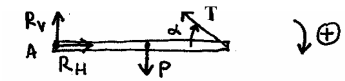


Bueno, primero hago un esquema de la barra poniendo todas las fuerzas que actúan:

Puse el par de ejes x–y . El sentido de giro lo tomé positivo en sentido de las agujas del reloj .
Planteo las tres condiciones de equilibrio : $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$, $\sum M_ó = 0$. El centro de momentos (punto O) puede ser cualquier punto. En general conviene elegirlo de manera que anule alguna incógnita. En este caso me conviene tomar el punto A.

$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad R_h - T_c \cdot \cos\alpha = 0$

$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad R_v + T_c \cdot \text{sen}\,\alpha - P = 0$



$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad P \cdot L/2 - T_c \cdot \text{sen}\,\alpha \cdot L = 0$

Reemplazando por los datos:

$$\begin{cases} R_h - T_c \cdot \cos 30° = 0 \\ R_v + T_c \cdot \text{sen}\, 30° - 100\text{ kgf} = 0 \\ 100\text{ kgf} \times 2\text{m} / 2 - T_c \times \text{sen}\, 30° \times 2\text{ m} = 0 \end{cases}$$

De la última ecuación despejo T_C :

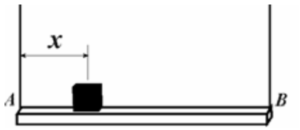
$$\boxed{T_C = 100 \text{ kgf}}$$

Reemplazando T_C en las otras ecuaciones calculo las reacciones horizontal y vertical en el punto A :

$$\boxed{\begin{array}{l} R_{HA} = 86{,}6 \text{ kgf} \\ R_{VA} = 50 \text{ kgf} \end{array}}$$

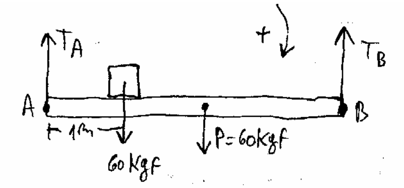
OTRO EJEMPLO

Una tabla AB que mide 4 m de longitud y que pesa 60 kgf está sostenida en equilibrio por medio de dos cuerdas verticales unidas a los extremos A y B. Apoyada sobre la tabla a 1 m de distancia del extremo A hay una caja que pesa 60 kgf.



a) - Calcular la tensión en ambas cuerdas
b) - Si la cuerda A resiste como máximo una tensión de 85 kgf, ¿Cuál es la distancia mínima x entre la caja y el extremo A ?

Hagamos un dibujito del asunto. Pongo las fuerzas que actúan y marco el sentido positivo para el momento de las fuerzas.



a) Planteo la sumatoria de las fuerzas en la dirección vertical y la sumatoria de momentos respecto al punto A. Me queda:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T_A + T_B = 120 \text{ Kgf}$$

$$\Sigma M\rfloor_A = 0 \Rightarrow 60 \times 1 + 60 \times 2 = 4\, T_B$$

Haciendo las cuentas:

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} T_B = 45\ kgf \\ \hline T_A = 75\ kgf \end{array}}$$

b) – Para calcular la distancia tomo momentos respecto del punto B. Me dicen que la máxima tensión en la cuerda A puede ser de 85 kgf. Quiere decir que TA = 85 kgf. Me queda:

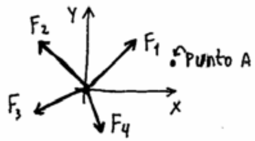
$$\sum M\Big|_B = 0 \Rightarrow \overbrace{85\ kgf}^{T_A} \times 4 = 60\ d_B + 60 \times 2$$

$$\Rightarrow d_B = 3,\hat{6}\ m$$

$$\Rightarrow \boxed{d_A = 33\ cm} \leftarrow \text{Distancia de A a la caja.}$$

TEOREMA DE VARIGNON

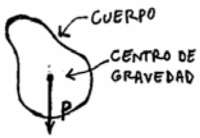
El teorema de Varignon dice que el momento de la resultante es igual a la suma de los momentos de las fuerzas. Vamos a ver qué significa esto. Fijate. Suponete que tengo un sistema de varias fuerzas que actúan. Calculo la resultante de ese sistema y obtengo una fuerza R.



Lo que dice el teorema es esto: supongamos que yo sumo el momento de todas las fuerzas respecto al punto A y me da 10 kgf.m (por ejemplo). Si yo calculo el momento de la resultante respecto de A, también me va a dar 10 kgf.m. Eso es todo.

CENTRO DE GRAVEDAD DE UN CUERPO

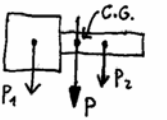
El centro de gravedad de un cuerpo es el lugar donde está aplicada la fuerza peso.



Si el cuerpo es simétrico, el C.G. va a coincidir con el centro geométrico del cuerpo. Por ejemplo para un cuadrado o para un círculo, el C.G. va a estar justo en el centro de la figura.

¿ Como se halla el centro de gravedad de un cuerpo ?

Rta: Bueno, se hace así: Si el cuerpo está compuesto por varias figuras simétricas, se divide al cuerpo en varias figuras mas chicas. Ahora se calcula " el peso " de cada una de esas figuras. " El peso " es una manera de decir. Lo que uno hace es suponer que el peso de cada figura va a ser proporcional a la superficie. Esta fuerza peso se pone en el centro geométrico. Sería algo así:



Después uno saca la resultante de todos esos pesos parciales. El centro de gravedad es el lugar por donde pasa la resultante de todos esos parciales.

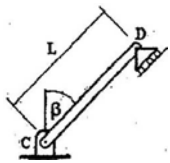
FIN TEORIA DE ESTATICA

PROBLEMAS TOMADOS EN PARCIALES

Van acá unos problemas que saqué da parciales

PROBLEMA 1

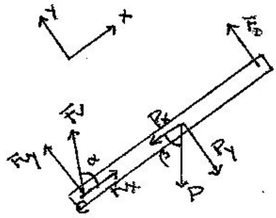
La barra homogénea de la figura, de 50 kgf de peso se encuentra en equilibrio. Si el apoyo móvil contrarresta el movimiento perpendicular a la barra y no hay fuerzas de roce ni en C ni en D, siendo β = 37 °



a) ¿cuál es el valor de la fuerza que ejerce el apoyo fijo en C ?
b) Si el apoyo móvil sigue restringiendo la traslación perpendicular a la barra, y ese esfuerzo es de 10 kgf, ¿cuál es el valor del ángulo β para que la barra esté en equilibrio ?

SOLUCIÓN

En los ejercicios de estática donde hay fuerzas aplicadas a distintos puntos siempre se tiene que cumplir que las sumatoria de fuerzas y de momentos sean cero. Primero hagamos el dibujo de las fuerzas. El peso de la barra va en el centro geométrico. Las fuerzas paralelas a la barra están contrarrestadas por el apoyo móvil (D).

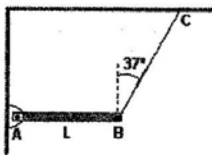


Planteemos la sumatoria de momentos desde C: $\boxed{\Sigma M|_C = M_P + M_{F_D} = 0}$, recordando que: M = F . d . sen α. Haciendo la descomposición de la fuerza peso, y reemplazando los datos tenemos: $\underline{F_D = 15\text{ kgf}}$. Planteemos las sumatorias de fuerzas: $F_{vx} - P_x = 0$ y $F_D - P_y + F_{vy} = 0$. Esto da: $\underline{F_{vy} = 40\text{ kgf}}$ y $\underline{F_{vx} = 15\text{ kgf}}$.

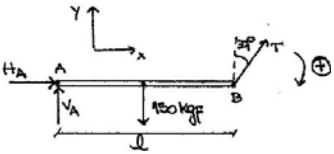
Para calcular el módulo de F_v usamos: $\boxed{|F_v| = \sqrt{(F_{vx})^2 + (F_{vy})^2}}$. Resulta: $\boxed{\mathbf{|F_v| = 42{,}72\text{ kgf}}}$.
En la segunda parte tenemos que F_D = 10 kgf, por lo que β deja de ser 37°. Llamemos δ al nuevo ángulo. Planteamos de nuevo la sumatoria de momentos: $\boxed{\Sigma M|_C = -P_y . L/2 + F_D . L = 0}$, resulta: $\frac{P.\ \text{sen}\ \delta}{2} = F_D$, despejando δ, tenemos: $\boxed{\delta = \mathbf{23{,}57°}}$.

PROBLEMA 2

Una barra de peso 150 kgf y longitud L puede girar alrededor del punto A. Está sostenida en la posición horizontal mediante la cuerda AC como se indica la figura.
a) hallar la fuerza que realiza la cuerda en estas condiciones.
b) calcular la reacción del vínculo A sobre la barra, en módulo, dirección y sentido.



SOLUCIÓN



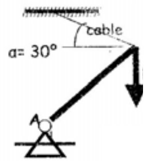
La sumatoria de momentos desde A es: $\Sigma M|_A = 150\text{ kgf}. \ell/2 - T . \cos 37° . \ell = 0$.
De acá: **T = 93,75 kgf**.
La sumatoria de fuerzas en x es: $H_A + T . \text{sen } 37° = 0$, entonces: $\mathbf{H_A = -56{,}25\text{ kgf}}$ **(la fuerza tiene sentido contrario al marcado en el dibujo)**.

Finalmente, en la sumatoria de fuerzas en y: T. cos 37° + V_A – 150 kgf = 0.

Resulta: **V_A = 75 kgf (hacia arriba)**.

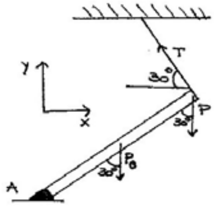
PROBLEMA 3

Una barra homogénea y de sección constante, cuyo peso es de 300 kgf, está sujeta en su extremo por un cable de acuerdo a la figura adjunta, colgando del extremo de la barra un peso de 4.500 kgf. Se pide hallar: a) La tensión que soporta el cable y las reacciones del vínculo en la articulación A
b) El valor máximo que puede adquirir P, si el cable soporta una tensión máxima de 5.000 kgf.



SOLUCIÓN

Supongamos que el ángulo entre la barra y el cable es de 90°. (No lo aclaran).
Hacemos la sumatoria de momentos desde A: $\boxed{\Sigma M\big|_A = M_P + M_{P_B} - M_T = 0}$.



Usando M = F . d . sen α, y teniendo en cuenta que como la barra es homogénea el peso se aplica en la mitad podemos calcular T.

Resulta: **T = 2.325 kgf**

Ahora, las sumatorias de fuerzas:

$F_{Ax} - T_x = 0$ y $F_{Ay} + T_y - P - P_B = 0$, donde F_A es la fuerza de vínculo en A. Calculamos las componentes de F_A, y tenemos:

F_{AX} = 2.013,51 kgf y F_{AY} = 3.637,5 kgf.

Para la segunda parte volvemos a usar la sumatoria de momentos desde A y la definición de momento. Sabemos ahora que T = 5.000 kgf, y conocemos P_B y el ángulo. Reemplazando y haciendo la cuenta tenemos:

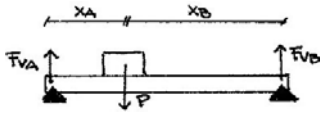
$$\boxed{P = 9.850 \text{ kgf}}$$

PROBLEMA 4

Sobre una tabla horizontal de longitud L y de peso despreciable, se coloca una caja peso P. Para que la reacción de vínculo en A sea la quinta parte de la reacción de vínculo en B, la caja deberá ubicarse a:

a) 1/6 de L a la derecha de A
b) 1/5 de L a la izquierda de B
c) 4/5 de L a la derecha de A
d) 4/5 de L a la izquierda de B
e) 1/5 de L a la derecha de A
f) 1/6 de L a la izquierda de B

SOLUCIÓN

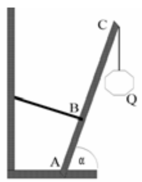


Recordá que $x_A + x_B = L$. Tomamos momentos desde A: $\boxed{\Sigma M\big|_A = M_P + M_{F_{vB}} = 0}$, usando la definición de momento llegamos a: $x_A \cdot P = L \cdot F_{vB}$. Ahora hacemos lo mismo desde B: $\boxed{\Sigma M\big|_B = M_P + M_{F_{vA}} = 0}$, tenemos: $x_B \cdot P = L \cdot F_{vA}$.

Además buscamos que se cumpla: $F_{vA} = {}^1/_5\, F_{vB}$. Usando esta relación en las ecuaciones que obtuvimos de las sumatorias de momentos llegamos a: $\mathbf{x_A = {}^1/_5\, x_B}$.

Entonces, la respuesta correcta es la b).

PROBLEMA 5

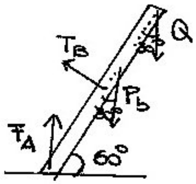


En la figura, el cuerpo Q cuelga de una la barra AC. La misma se encuentra sostenida en A por un vínculo que le permite rotar y se mantiene en equilibrio debido a una cuerda que la sostiene perpendicularmente a la barra en B. Calcular :

a) La tensión que soporta la cuerda en B ?
b) El módulo de la fuerza de vínculo en A.

DATOS: AC = 3 m, AB = 1 m, Q = 100 kgf, P_b= 10 kgf, α = 60°

SOLUCIÓN



Para calcular la tensión en B, tomamos la sumatoria de momentos desde A:

$$\boxed{\Sigma M\Big|_A = M_{T_B} - M_{P_b} - M_Q = 0}$$

Tenemos todos los datos, reemplazamos y llegamos a:

$$\boxed{\mathbf{T_B = 157{,}5\ kgf}}$$

Para la segunda parte planteamos la sumatoria de momentos desde el extremo de donde cuelga el peso Q:

$$\boxed{\Sigma M\Big|_Q = -M_{F_A} - M_{T_B} + M_{P_b} = 0}$$

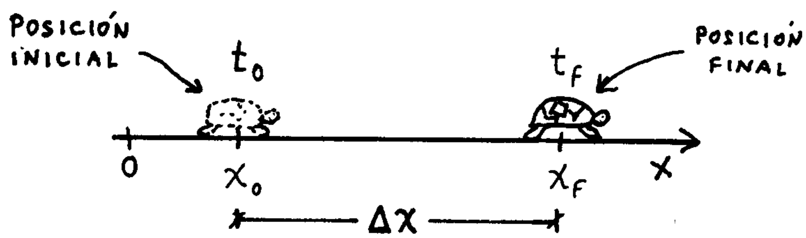
Para reemplazar fijate que el ángulo que forman las fuerzas con la barra es de 30°, que es la diferencia entre 90° y 60°. Haciendo las cuentas llegamos a:

$$\boxed{\mathbf{|F_A| = 205\ kgf}}$$

FIN ESTATICA

MRU

MOVIMIENTO RECTILINEO Y UNIFORME



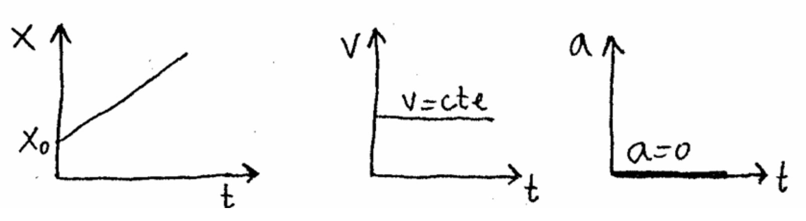
ECUACIONES HORARIAS

$$\begin{cases} 1^{ra}: (\text{posición}) \rightarrow \boxed{X = X_0 + V\,(t - t_0)} \\ 2^{da}: (\text{velocidad}) \rightarrow V = cte \\ 3^{ra}: (\text{aceleración}) \rightarrow a = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{V = \frac{X_F - X_0}{t_F - t_0}} \begin{array}{l} \leftarrow \text{Esto es } \Delta x \\ \leftarrow \text{Esto es } \Delta t \end{array}$$

⇦ **ASI SE CALCULA LA VELOCIDAD EN EL MRU**

GRÁFICOS PARA EL MRU



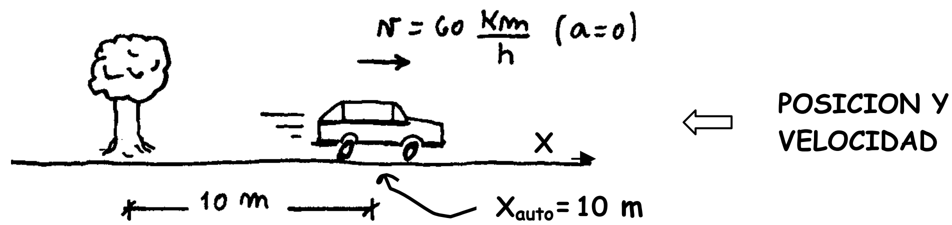
CINEMÁTICA

CONCEPTOS DE POSICIÓN, VELOCIDAD Y ACELERACIÓN

En cinemática hay tres cosas que tenés que conocer porque se usan todo el tiempo. Fijate :

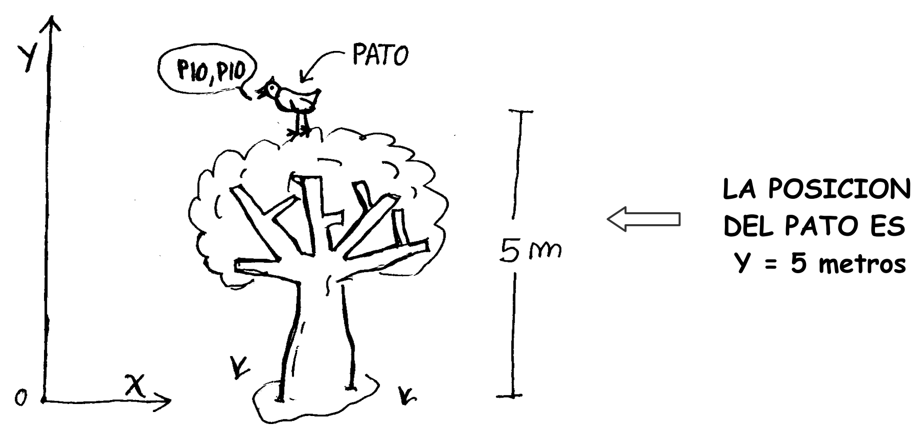
El lugar en donde está la cosa que se está moviendo se llama **Posición**.
La rapidez que tiene lo que se está moviendo se llama **velocidad**.
Si la velocidad del objeto aumenta o disminuye, se dice que tiene **aceleración**.

Ejemplo:



Para la posición se usa la letra **x** porque las posiciones se marcan sobre el eje **x**. Si el objeto está a una determinada altura del piso se usa un eje vertical **y** (y la altura se indica con la letra y).

EJEMPLO: Supongamos que tengo algo a 5 metros de altura. Para dar su posición tomo un eje vertical **Y**. Con respecto a este eje digo:

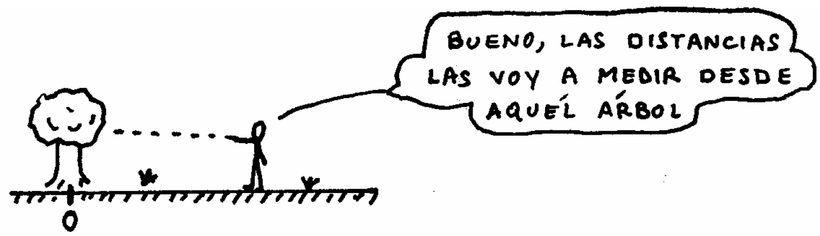


X e **Y** se llaman **coordenadas del cuerpo**. Dar las coordenadas de una cosa es una manera de decir dónde está el objeto en ese momento. (Por ejemplo, un avión).

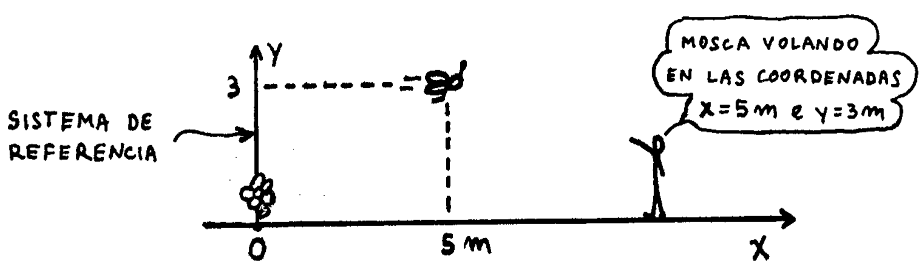
SISTEMA DE REFERENCIA

Cuando digo que la posición de algo es x = 10 m, tengo que decir 10 m medidos **desde dónde**. Vos podés estar a 10 m de tu casa pero a 100 m de la casa de tu primo.

De manera que la frase: "estoy a 10 m" no indica nada. Hay que aclarar **desde dónde uno mide esos 10 m.** Entonces en física, lo que ellos hacen es decir:

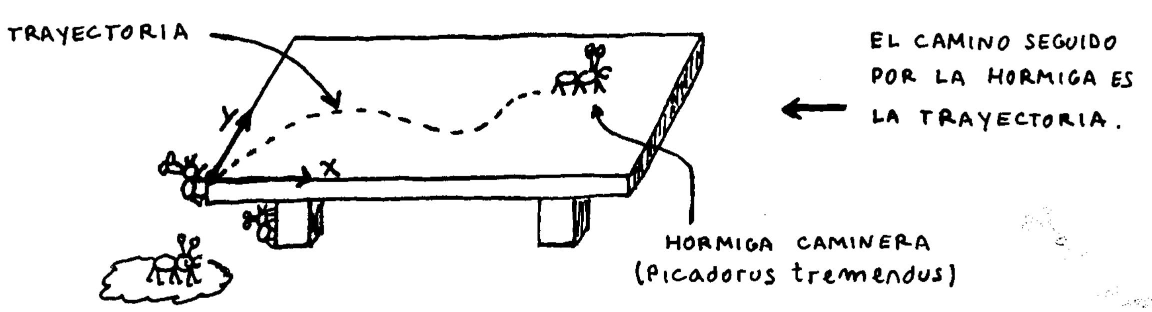


En el lugar que elijo como cero pongo el par de ejes **x-y**. Estos dos ejes forman el **sistema de referencia**. Todas las distancias que se miden están **referidas** a él. Para resolver los problemas siempre hay que tomar un par de ejes **x-y**. Poner el par de ejes **x-y** nunca está de más. Si no lo ponés, no sabés desde dónde se miden las distancias. Las ecuaciones que uno plantea después para resolver el problema, **van a estar referidas al par de ejes x-y que uno eligió**.



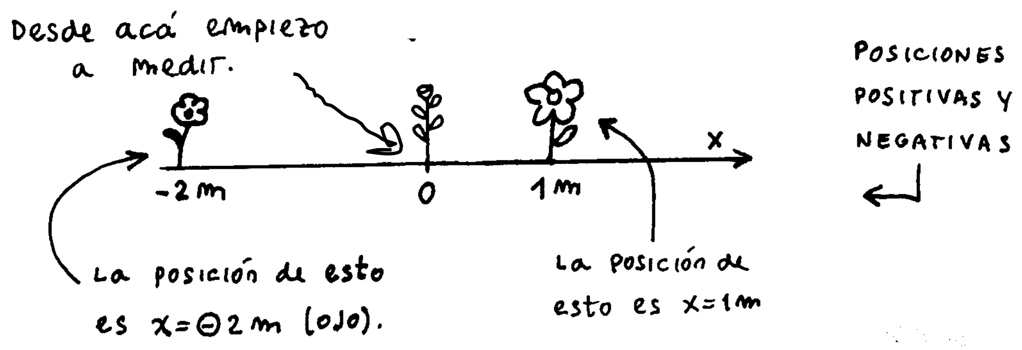
TRAYECTORIA (Fácil)

La **trayectoria** es el caminito que recorre el cuerpo mientras se mueve. Puede haber muchos tipos de trayectorias. Acá en MRU es siempre rectilínea. La trayectoria no tiene por qué ser algún tipo de curva especial. Puede tener cualquier forma. Ejemplo:



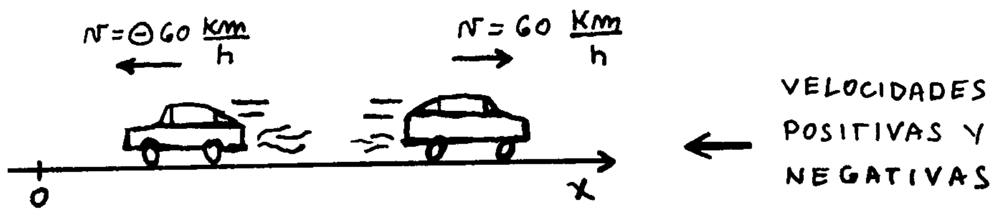
POSICIÓNES NEGATIVAS (Ojo)

Una cosa puede tener una posición negativa como x = - 3 m, ó x = - 200 Km. Eso pasa cuando la cosa está del lado negativo del eje de las equis. Esto es importante, porque a veces al resolver un problema el resultado da negativo. Y ahí uno suele decir: Huy, me dió X = - 20 m. No puede ser. Pero puede ser. La posición puede dar negativa. Incluso la velocidad y la aceleración también pueden dar negativas. Mirá en este dibujito como se representa una posición negativa :



VELOCIDAD NEGATIVA (leer)

Si una cosa se mueve en el mismo sentido que el eje de las x, su velocidad es (+). Si va al revés, es (-). Atento con esto que no es del todo fácil de entender. A ver:



Es decir, en la vida diaria uno no usa posiciones ni velocidades negativas. Nadie dice: "estoy a –3 m de la puerta". Dice: "estoy 3 m **detrás** de la puerta". Tampoco se usa decir: "ese coche va a – 20 km/h ". Uno dice: "ese coche va a 20 Km por hora **al revés de cómo voy yo**. Pero atento porque acá en cinemática la cuestión de posiciones negativas y velocidades negativas se usa todo el tiempo y hay que saberlo bien.

LA LETRA GRIEGA DELTA (Δ)

Vas a ver que todo el tiempo ellos usan la letra Delta. Es un triangulito así: ➔ Δ . En física se usa la delta para indicar que a lo final hay que restarle lo inicial. Por ejemplo, Δx querrá decir " equis final menos equis inicial ". Δt querrá decir " t final menos t inicial ", y así siguiendo. En matemática a este asunto de hacer la resta de 2 cosas se lo llama hallar la **variación** o **diferencia**.

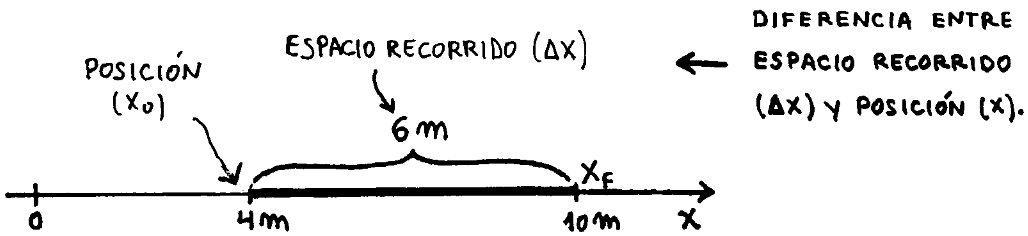
ESPACIO RECORRIDO (ΔX **)**

El lugar donde el tipo está se llama **posición**. La distancia que el tipo recorre al ir de una posición a otra se llama **espacio recorrido**. Fijate que posición y espacio recorrido NO son la misma cosa. Pongámonos de acuerdo. Vamos a llamar:

X_0 = posición inicial (lugar de donde el tipo salió)
X_f = posición final (lugar a donde el tipo llegó)
ΔX = espacio recorrido. ($= X_f - X_o$)

Si el móvil salió de una posición inicial (por ejemplo $X_0 = 4$ m) y llegó a una posición final (por ejemplo $X_f = 10$ m) , el espacio recorrido se calcula haciendo esta cuenta:

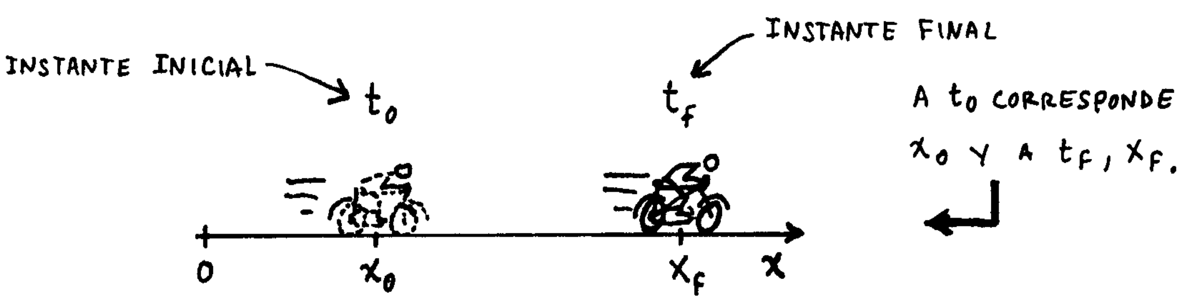
$$\boxed{\Delta x = x_f - x_0} \longleftarrow$$ **ESPACIO RECORRIDO**



Es decir, en este caso me queda: $\Delta X = 10\text{ m} - 4\text{ m} \rightarrow \underline{\Delta X = 6\text{ m}}$

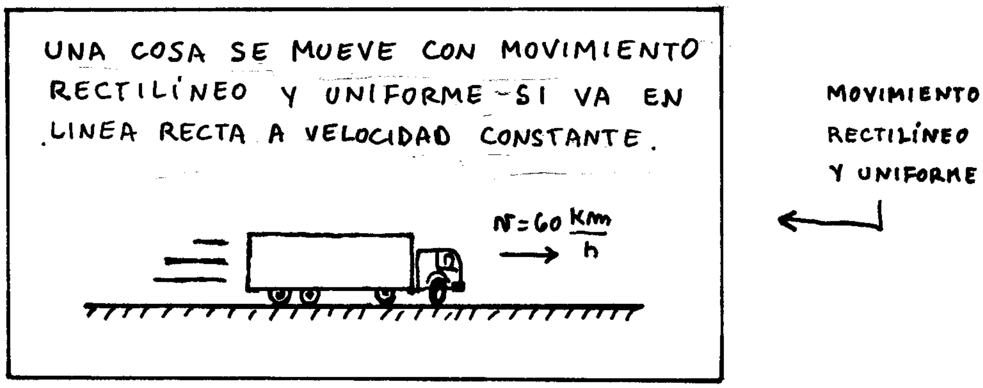
TIEMPO TRANSCURRIDO o INTERVALO DE TIEMPO (Δt)

El intervalo de tiempo Δt es el tiempo que el tipo estuvo moviéndose. Delta t puede ser 1 segundo, 10 segundos, 1 hora, lo que sea... Si el objeto salió en un instante inicial t_0 (por Ej. a las 16 hs), y llegó en un determinado instante final (por Ej. a las 18 hs), el intervalo de tiempo delta t se calcula haciendo la cuenta $\Delta t = t_f - t_0$, (Es decir 18 hs – 16 hs = 2 hs).



MOVIMIENTO RECTILÍNEO y UNIFORME (MRU)

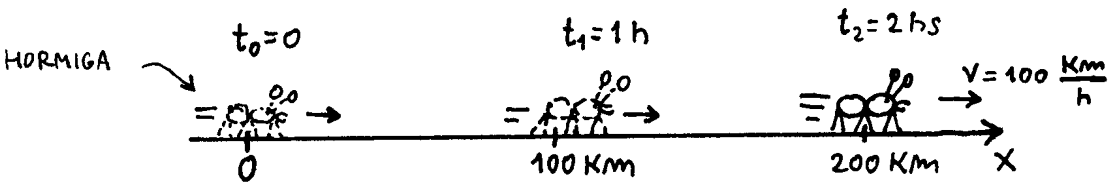
Una cosa se mueve con movimiento rectilíneo y uniforme si se mueve en **línea recta** y va con velocidad constante. Otra manera de decir lo mismo es decir que el móvil recorre **espacios iguales en tiempos iguales**. Esto lo dijo Galileo (ídolo !).



En el MRU la velocidad no cambia, se mantiene constante. Al ser la velocidad todo el tiempo la misma, digo que lo que se viene moviendo **no acelera.** Es decir, en el movimiento rectilíneo y uniforme **la aceleración es cero** (a = 0).

EJEMPLO DE CÓMO SE CONSTRUYEN GRÁFICOS EN EL MRU (Leer esto)

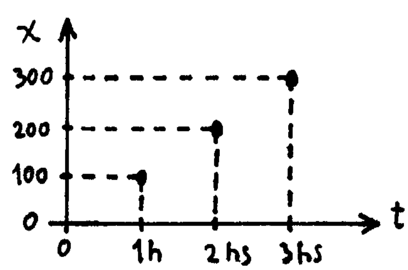
Muchas veces piden hacer gráficos. ¿Cómo es eso? Fijate. Suponé que una cosa se viene moviendo a 100 por hora. Una hormiga, por ejemplo.



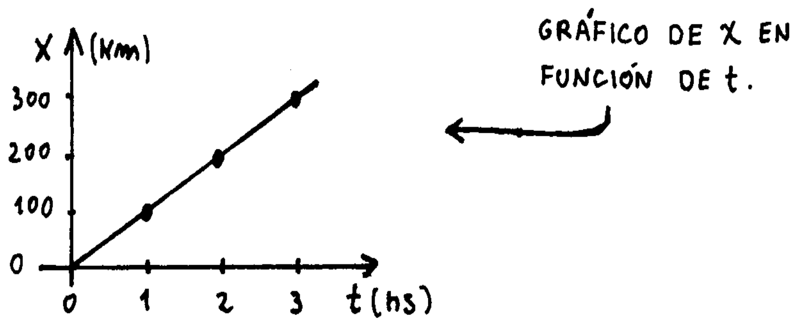
Después de una hora habrá recorrido 100 Km. Después de 2 hs habrá recorrido 200 Km y así siguiendo... Esto se puede escribir en una tablita:

POSICIÓN	TIEMPO
0 Km	0 hs
100 Km	1 h
200 Km	2 hs

Ahora puedo hacer un gráfico poniendo para cada tiempo la posición correspondiente (A 0 le corresponde 0, a 1 le corresponde 100, etc).



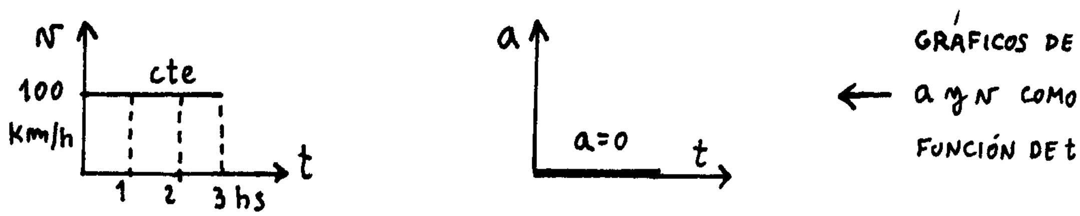
Uniendo todos los puntos tengo el gráfico de la posición en función del tiempo:



A este gráfico se lo suele llamar abreviadamente **X (t) , X = f (t) , o X = X (t)**.
Todas estos nombres quieren decir lo mismo:

Representación de la posición X en función del tiempo.

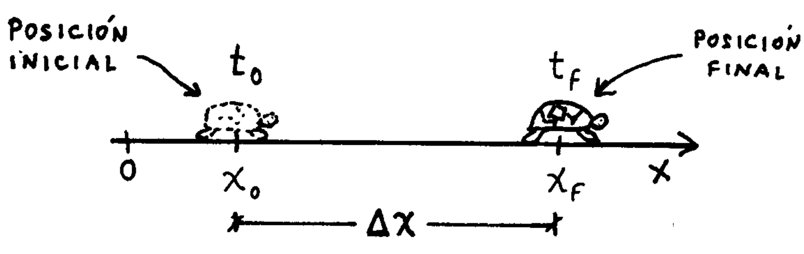
Puedo dibujar también los gráficos de velocidad y aceleración en función del tiempo. (Importantes). Si lo pensás un poco vas a ver que quedan así:



En estos 3 gráficos se ven perfectamente las características del MRU. O sea : El gráfico de **x** en función del tiempo muestra que la posición es **lineal** con el tiempo. (Lineal con el tiempo significa directamente proporcional). El gráfico de **V** en función de **t** muestra que la velocidad se mantiene **constante**. El gráfico de **a** en función de **t** muestra que la aceleración es todo el tiempo **cero**.

CÁLCULO DE LA VELOCIDAD EN EL MRU

Para calcular la velocidad se hace la cuenta **espacio recorrido** sobre **tiempo empleado**. Esta misma cuenta es la que vos usás en la vida diaria. Supongamos que un tipo salió de la posición x_0 y llegó a la posición x_f .



La velocidad va a ser: $v = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \boxed{v = \dfrac{x_f - x_0}{t_f - t_0}} \Leftarrow$ ASI SE CALCULA LA VELOCIDAD EN EL MRU

Por ejemplo, si una persona viaja de Buenos Aires a Mar del Plata (400 km) en 5 horas, su velocidad será:

$$v = \frac{400 \text{ Km}}{5 \text{ hs}} = 80 \frac{\text{Km}}{\text{h}}$$

Si el tipo salió inicialmente del kilómetro 340 (X_0) y llega al km 380 (X_f) después de 30 minutos, su velocidad será :

$$\Delta X = \underbrace{380 \text{ Km}}_{X_F} - \underbrace{340 \text{ Km}}_{X_0}$$

$$v = \frac{\Delta X}{\Delta t} = \frac{40 \text{ Km}}{0{,}5 \text{ hs}} = 80 \frac{\text{Km}}{\text{h}}$$

<u>ECUACIONES HORARIAS EN EL MRU</u> (Importante).

La definición de velocidad era: $v = \dfrac{x - x_0}{t - t_0}$. Si ahora despejo $x - x_0$ me queda :

$$\rightarrow \quad v \cdot (t - t_0) = x - x_0$$

$$\rightarrow \quad \boxed{x = x_0 + v \cdot (t - t_0)} \quad \leftarrow 1^{ra} \text{ ECUACION HORARIA}$$

Se la llama " horaria " porque en ella interviene el tiempo (= la hora). Como ($t - t_0$) es Δt, a veces se la suele escribir como $x = x_0 + v \times \Delta t$. Y también si t_0 cero vale cero, se la pone como $x = x_0 + v_x t$. (Importante).

Pregunta: ¿ Para qué sirve la ecuación horaria de la posición ?

<u>Rta</u>: Esta ecuación <u>**me va dando la posición del tipo en función del tiempo**</u>.

O sea, yo le doy los valores de t y ella me da los valores de x. (Atento). Fijate :

Suponete que lo que se está moviendo salió en $t_0 = 0$ de la posición $x_0 = 200$ Km.

Si el objeto al salir tenía una velocidad de 100 Km/h, su ecuación horaria será:

$$X = 200 \text{ Km} + 100 \frac{\text{Km}}{\text{h}} \cdot (t - 0)$$

$$\Rightarrow \quad X = 200 \text{ Km} + 100 \frac{\text{Km}}{\text{h}}\, t$$

Si en la ecuación voy dándole valores a **t** (1 h, 2 hs, 3 hs, etc) voy a tener la posición donde se encontraba el tipo en ese momento. En realidad siempre hay 3 ecuaciones horarias. La velocidad y la aceleración también tienen sus ecuaciones horarias. Para el caso del MRU, las ecuaciones de v y de a son :

$$v = cte \qquad y \qquad a = 0$$

En definitiva, las tres ecuaciones horarias para el MRU son:

$$\begin{cases} x = x_0 + v.(t - t_0) \\ v = Cte \\ a = 0 \end{cases} \Leftarrow$$

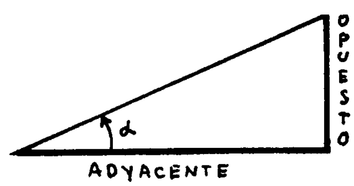
ECUACIONES HORARIAS PARA EL MOVIMIENTO RECTILINEO Y UNIFORME

De las tres ecuaciones sólo se usa la primera para resolver los problemas. Las otras dos no se usan. Son sólo conceptuales. (Pero hay que saberlas). Recordá que casi siempre **t** cero vale cero, entonces la 1ra ecuación horaria queda como:

$$\boxed{x = x_0 + v\,t}$$

TANGENTE DE UN ÁNGULO

Calcular la tangente (tg) de un ángulo significa hacer la división entre lo que mide el cateto opuesto y lo que mide el cateto adyacente. Dibujo un ángulo cualquiera.



⇐ Un triángulo De ángulo alfa

En este triángulo la tangente de alfa va a ser:

$$\boxed{tg\ \alpha = \frac{opuesto}{adyacente}} \leftarrow$$ Tangente de un ángulo.

Midiendo con una regla directamente sobre la hoja obtengo: Opuesto: 2,1 cm. Adyacente: 4,8 cm

Entonces:

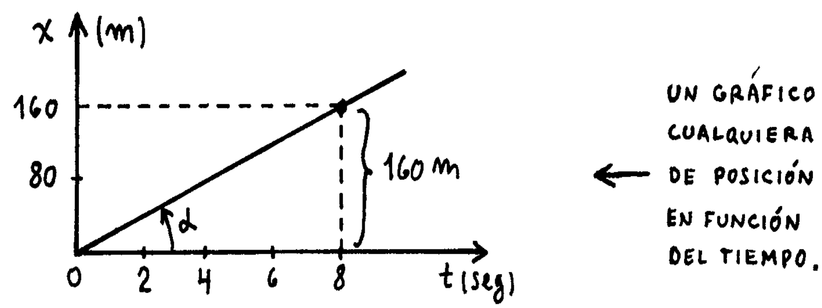
$$tg\ \alpha = \frac{2{,}1\,cm}{4{,}8\,cm} = 0{,}437$$

Fijate que el resultado no dió en cm ni en metros. La tangente de un ángulo es siempre un **número sin unidades**.

PENDIENTE DE UNA RECTA

La pendiente de una recta es una cosa parecida a la tg de un ángulo. Pero la pendiente no es un número. Tiene unidades. Hallar el valor de la pendiente de una recta significa hacer la división entre **la cantidad que está representando** el cateto opuesto y **la cantidad que está representando** el cateto adyacente.

Veamos: supongamos que tengo la siguiente recta que proviene de la representación de la posición en función del tiempo para una cosa que se viene moviendo con MRU:



Para el ángulo alfa que yo dibujé, el cateto opuesto MIDE unos 1,8 cm si lo mido con una regla en la hoja. Pero REPRESENTA 160 m. De la misma manera, el cateto adyacente MIDE unos 3,8 cm; pero REPRESENTA 8 seg. De manera que el valor de la pendiente de la recta va a ser:

$$\text{pendiente} = \frac{160\ \text{m}}{8\ \text{s}} \Rightarrow \text{pendiente} = 20\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

En este caso:

$$\text{Pendiente} = \frac{\text{Valor que representa el Cat. Op.}}{\text{Valor que representa el Cat.Ady.}} \longleftarrow$$

Pendiente de una recta

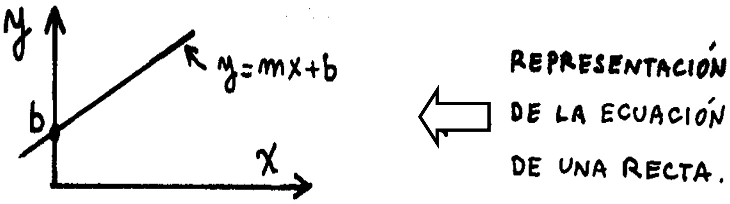
Repito. Fijate que la pendiente no es sólo un número, sino que tiene unidades. En este caso esas unidades me dieron en metros por segundo. La pendiente puede darte en otras unidades también. Eso depende de qué estés graficando en función de qué.

LA PENDIENTE DE LA RECTA EN EL GRÁFICO X=f(t) ES LA VELOCIDAD

No es casualidad que la pendiente del gráfico anterior haya dado justo en unidades de velocidad. La pendiente de la recta en el gráfico posición en función del tiempo **SIEMPRE** te va a dar la velocidad del movimiento.
¿ Por qué ?.
Rta: Porque al hacer la cuenta "opuesto sobre adyacente" lo que estás haciendo es $\Delta x/\Delta t$, y esto es justamente la velocidad (Atenti).

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LAS ECUACIONES HORARIAS (Ver)

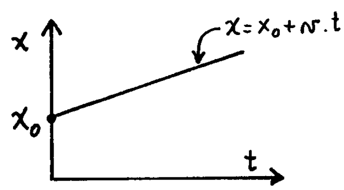
En cinemática se usan todo el tiempo 3 gráficos muy importantes que son los de posición, velocidad y aceleración en función del tiempo. Cada gráfico es la representación de una de las ecuaciones horarias. Quiero que te acuerdes primero cómo se representaba una recta en matemática. La ecuación de la recta tenía la forma y = m.x + b. **Eme** era la pendiente y **Be** era la ordenada al origen (= el lugar donde la recta corta al eje vertical). Por ejemplo la ecuación de una recta podría ser y = 3 x + 4.



Si tomo la 1ra ecuación horaria con $t_0 = 0$ (Que es lo que en general suele hacerse), me queda $x = x_0 + v.t$. Ahora fijate esta comparación:

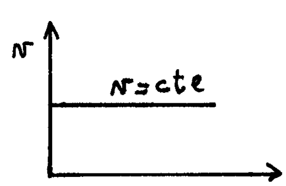
$$\begin{array}{ccccccc} y & = & m & x & + & b \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ X & = & v & t & + & X_0 \end{array}$$

Veo que la ecuación de X en función del tiempo en el MRU también es una recta en donde **la velocidad es la pendiente** y **X_0 es el lugar donde la recta corta el eje vertical.** Para cada ecuación horaria puedo hacer lo mismo y entonces voy a tener 3 lindos gráficos, uno para cada ecuación. Los tres tristes gráficos del MRU quedan así:

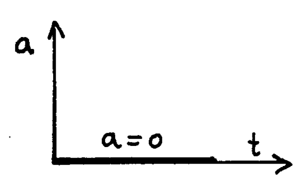


POSICIÓN en función del tiempo (Muestra que x aumenta linealmente con **t**)

LOS 3 GRÁFICOS DEL MRU (IMPORTANTES)



VELOCIDAD en función del tiempo (Muestra que **v** se mantiene constante).



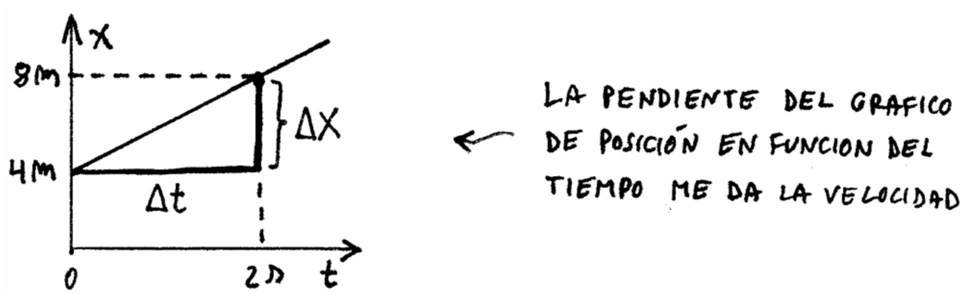
ACELERACIÓN en función del tiempo. Muestra que la **a** es cero todo el tiempo.

ANALISIS DE LAS PENDIENTES Y LAS AREAS DE LOS GRAFICOS DEL MRU

Los 3 gráficos del MRU son la representación de las ecuaciones horarias. Fijate que en algunos de estos gráficos, el área y la pendiente tienen un significado especial.

LA PENDIENDIENTE DEL GRAFICO DE POSICIÓN ES LA VELOCIDAD

El grafico de posición en función del tiempo ya lo analicé antes. La pendiente de ese gráfico me da la velocidad. Quiero que lo veas de nuevo con más detalle porque es importante. Fijate. Agarro un gráfico cualquiera de un auto que se mueve con MRU. Por ejemplo, supongamos que es este:



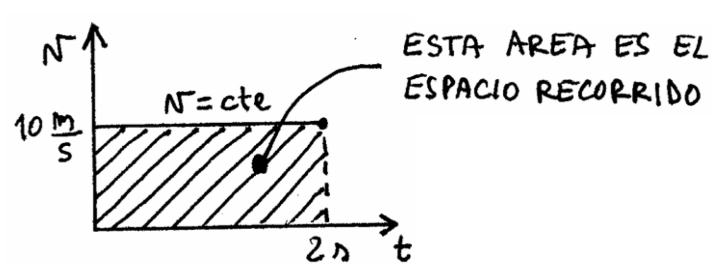
Este gráfico me dice que el auto salió de la posición inicial x = 4 m y llegó a la posición final x = 8 m después de 2 segundos. Quiere decir que el tipo recorrió 4 m en 2 seg. Entonces su velocidad es de 2 m/s. Esto mismo se puede ver analizando la pendiente del gráfico. Fijate que el cateto adyacente es el tiempo transcurrido Δt. El cateto opuesto es el espacio recorrido Δx. Entonces, si calculo la pendiente tengo :

$$\text{Pend} = \frac{\text{op}}{\text{ady}} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$\text{Pend} = \frac{8\,m - 4\,m}{2\,s - 0\,s} = 2\,\frac{m}{s}$$

EL AREA DEL GRAFICO DE VELOCIDAD ES EL ESPACIO RECORRIDO

Supongamos que un auto se mueve con velocidad 10 m/s. Su gráfico de velocidad sería así:



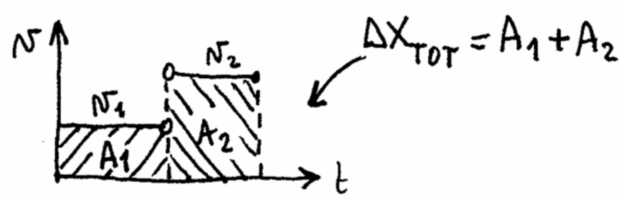
Fijate que al ir a 10 m/s, en 2 segundos el tipo recorre 20 m .

Esto mismo lo puedo calcular si miro la superficie del gráfico. Fijate qué pasa si hago la cuenta para el área que marqué:

$$Area_{\square} = Base \times Altura$$

$$\Rightarrow Area = 2\,s \times 10\,\frac{m}{s} = \underline{20\,m} \longleftarrow \text{ESTO ES } \Delta X$$

A veces es más fácil sacar las velocidades y los espacios recorridos calculando pendientes y áreas que haciendo las cuentas con las ecuaciones. Por ejemplo, fijate el caso de una persona que va primero con una velocidad v_1 y después con otra velocidad v_2:



Para calcular la distancia total que recorrió directamente saco las áreas A_1 y A_2 del gráfico de velocidad.

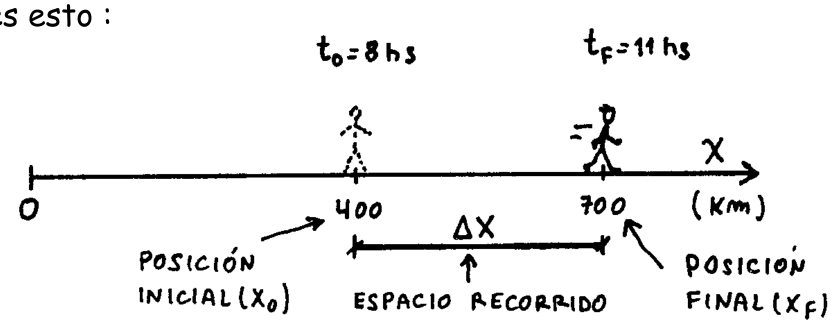
<u>PREGUNTA</u>: Yo analicé solamente la pendiente del gráfico de posición y el área del gráfico de velocidad. Pero también se pueden analizar pendientes y áreas para los otros gráficos. Por ejemplo. ¿ Qué significa la pendiente del gráfico de velocidad ? ¿ Qué significa el área del gráfico de aceleración ? (Pensalo)
Estos conceptos de pendientes y áreas son importantes. Necesito que los entiendas bien porque después los voy a volver a usar en MRUV.

<u>UN EJEMPLO DE MOVIMIENTO RECTILÍNEO Y UNIFORME</u>

Un señor sale de la posición $X_0 = 400$ Km a las 8 hs y llega a $X_f = 700$ Km a las 11 hs. Viaja en línea recta y con v = cte. Se pide:

a)- Calcular con qué velocidad se movió.(En Km/h y en m/s)
b)- Escribir las 3 ecuaciones horarias y verificarlas.
c)- Calcular la posición a las 9 hs y a las 10 hs.
d)- Dibujar los gráficos de x = f(t), v = v(t) y a = a(t).

Lo que tengo es esto :



a) - Calculo con qué velocidad se movió. V era $\Delta x / \Delta t$, entonces: $v = \dfrac{x - x_0}{t - t_0}$

$$v = \frac{700 \text{ Km} - 400 \text{ Km}}{11 \text{ hs} - 8 \text{ hs}}$$

$$v = \frac{300 \text{ Km}}{3 \text{ hs}}$$

$$\underline{V = 100 \text{ Km / h}}$$ ⇐ Velocidad del tipo

Para pasar 100 Km/h a m/s uso el siguiente truco: (recordalo por favor). A la palabra "Km" la reemplazo por 1.000 m y a la palabra "hora" la reemplazo por 3600 seg. Entonces :

$$100 \ \frac{Km}{h} = 100 . \frac{1000 \ m}{3600 \ seg}$$

$$\Rightarrow \quad 100 \ \frac{Km}{h} = \frac{100 \ m}{3,6 \ seg}$$

Fijate en este " tres coma seis". De acá saco una regla que voy a usar :

Para pasar de Km/h a m/s hay que <u>dividir</u> por 3,6.Para pasar de m/s a Km/h hay que <u>multiplicar</u> por 3,6.

← Regla para pasar de Km /h a m/s y viceveversa

Si no te acordás de esta regla, no es terrible. Lo deducís usando el mismo truco que usé yo y listo. (O sea, 1 Km son mil metros, 1 hora son 3.600 segundos, etc).

b) - Escribir las 3 ec. horarias y verificarlas.
Bueno, en el movimiento rectilíneo y uniforme las ecuaciones horarias eran:

$$\begin{cases} x = x_0 + v . (t - t_0) \\ v = Cte \\ a = 0 \end{cases}$$

En este caso reemplazo por los datos y me queda:

$$\begin{cases} x = 400 \text{ Km} + 100 \dfrac{\text{Km}}{\text{h}} (t - 8 \text{ hs}) \\ v = 100 \text{ Km/h} = \text{constante} \\ a = 0 \end{cases}$$

Verificar las ecuaciones horarias significa comprobar que están bien planteadas. Bueno, con la 2da y la 3 ra ($V = 100$ Km / h, y $a = 0$) no tengo problema. Sé que el movimiento es rectilíneo y uniforme de manera que la velocidad me tiene que dar constante y la aceleración cero. (➔ Están bien).

Vamos a la verificación de la 1ra ecuación.
Si esta ecuación estuviera bien planteada, reemplazando t por 8 hs (= t_0), la posición me tendría que dar 400 Km (= x_0). Veamos si da:

$$x = 400\text{Km} + 100\ \text{Km}/\text{h}\,(t - 8\text{ hs})$$

$$x = 400\text{Km} + 100\,\text{Km}/\text{h}\,\underbrace{(8\text{hs} - 8\text{hs})}_{0}$$

➔ <u>X = 400 Km</u> (Dió bien).

Vamos ahora a la posición final. Para t = 11 hs la posición me tiene que dar x = 700 Km. Otra vez reemplazo t_{cero} por 11 hs. Hago la cuenta a ver que da.

$$X = 400\text{ Km} + 100\text{ Km/h}\,(t - 8\text{ hs})$$

$$X = 400\text{ Km} + 100\text{ Km/h}\,(11\text{ hs} - 8\text{ hs})$$

➔ <u>X = 700 Km</u> (Dió bien).

c)- Calcular la posición a las 9 hs y a las 10 hs.
Hago lo mismo que lo que hice recién, pero reemplazando t por 9 hs y por 10 hs:

$$x = 400\text{ Km} + 100\ \frac{\text{Km}}{\text{h}}\,(\underbrace{9\text{ hs} - 8\text{ hs}}_{1\text{h}})$$

$$\Rightarrow x_{(9\text{hs})} = 500\text{ Km} \quad \leftarrow \text{ Posición a las 9 hs.}$$

Para t = 10 hs :

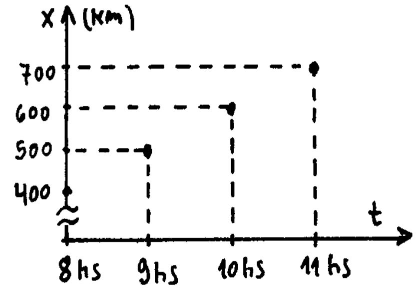
$$x_{(10\text{hs})} = 400\text{ Km} + 100\ \frac{\text{Km}}{\text{h}}\,(\underbrace{10\text{ hs} - 8\text{ hs}}_{2\text{hs}})$$

$$\Rightarrow x_{(10\text{hs})} = 600\text{ Km} \quad \leftarrow \text{ Posición a las 10 hs}$$

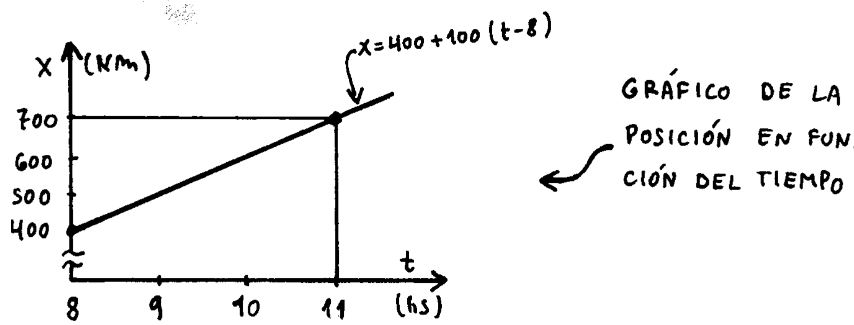
d) - Dibujar los gráficos $x = x_{(t)}$, $v = v_{(t)}$ y $a = a_{(t)}$

El gráfico más complicado de hacer es el de posición en función del tiempo. Con lo que calculé antes puedo armar una tabla y represento estos puntos en el gráfico **x-t** :

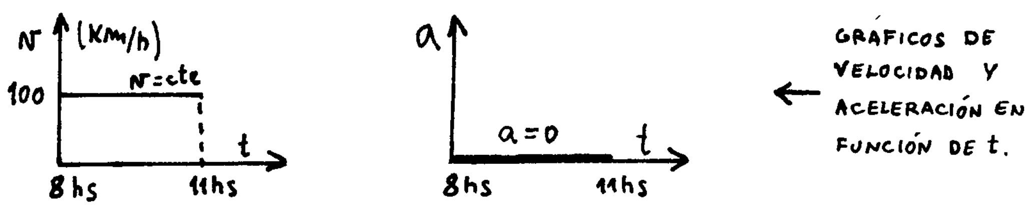
X (Km)	t (hs)
400 Km	8 hs
500 Km	9 hs
600 Km	10 hs
700 Km	11 hs



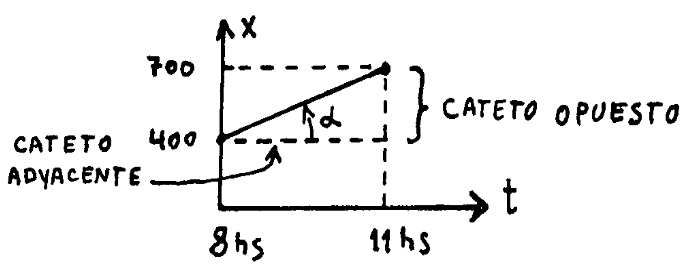
En realidad no hacia falta tomar tantos puntos. Con 2 hubiera sido suficiente (Porque es una recta). Finalmente el gráfico posición en función del tiempo X (t) queda así :



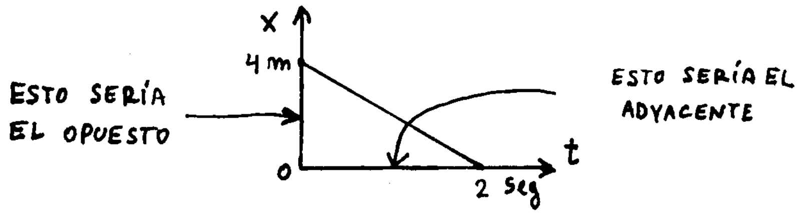
Los otros 2 gráficos quedarían así



Por último me gustaría verificar que la pendiente del gráfico de posición en función del tiempo es la velocidad del movimiento. Veamos si verifica :



Fijate bien cómo consideré los catetos opuesto y adyacente. Siempre el cateto opuesto tiene que ser el espacio recorrido (Δx) y siempre el cateto adyacente tiene que ser el tiempo empleado (Δt). Por ejemplo, si la recta estuviera yendo para abajo en vez de para arriba :



Este sería el caso de una cosa que tiene velocidad negativa. (= está yendo para atrás). Para la verificación de la pendiente hago esto:

$$\text{pendiente} = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}}$$

$$\text{pend.} = \frac{700\text{Km} - 400\text{Km}}{11\text{hs} - 8\text{hs}}$$

$$\text{pend.} = 100\,\text{Km/h} \qquad \leftarrow \text{Dio bien.}$$

VELOCIDAD MEDIA

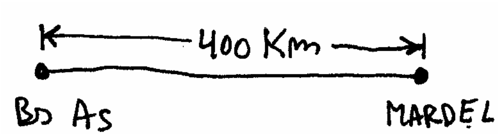
Cuando uno viaja, no va todo el tiempo a la misma velocidad. Va más rápido, más despacio, frena, para a tomar mate y demás. Entonces no se puede hablar de "velocidad" porque V no es constante. Para tener una idea de la rapidez del movimiento, lo que se hace es trabajar con la **VELOCIDAD MEDIA**. Si un tipo va de un lugar a otro pero no viaja con velocidad constante, su velocidad media se calcula así:

$$\boxed{v_{MEDIA} = \frac{\text{DISTANCIA TOTAL RECORIDA}}{\text{TIEMPO TOTAL EMPLEADO}}} \quad \leftarrow \text{VELOCIDAD MEDIA}$$

¿ Para qué se calcula la velocidad media ? ¿ Qué significa calcular la velocidad media ? Rta: La velocidad media es la velocidad **CONSTANTE** que tendría que tener el móvil para recorrer la misma distancia en el mismo tiempo. Vamos a un ejemplo:

UN SEÑOR VA DE BUENOS AIRES A MAR DEL PLATA (D = 400 KM). LOS 1^{ros} 300 Km LOS RECORRE EN 3 hs Y MEDIA. DESPUÉS SE DETIENE A DESCANSAR MEDIA HORA Y POR ÚLTIMO RECORRE LOS ÚLTIMOS 100 Km EN 1 HORA. CALCULAR SU VELOCIDAD MEDIA. HACER LOS GRÁFICOS DE POSICIÓN Y VELOCIDAD EN FUNCIÓN DEL TIEMPO

Hagamos un dibujito

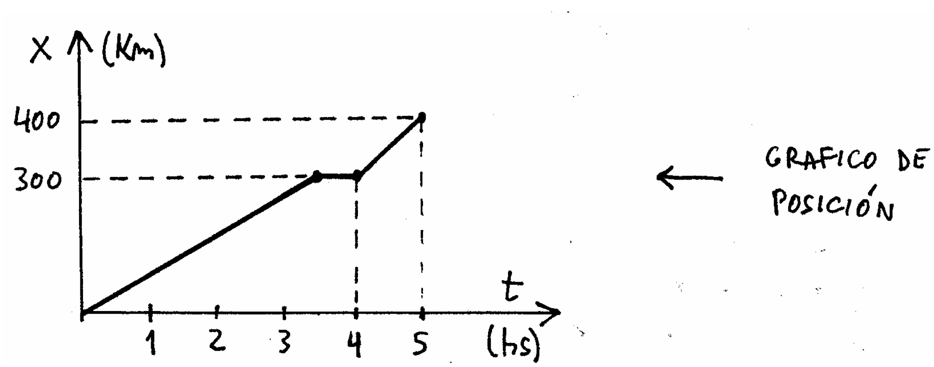


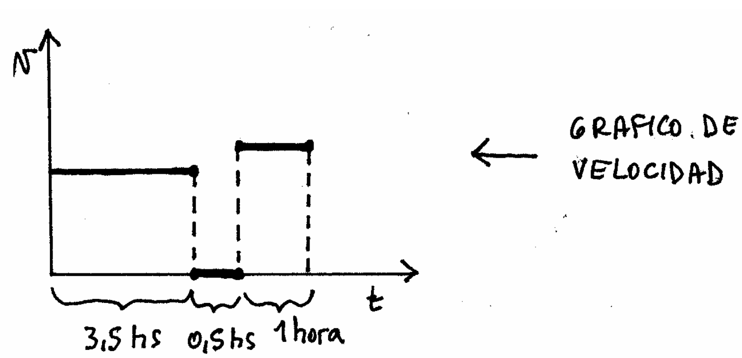
La distancia total recorrida es 400 km. El tiempo total que tardó va a ser 3,5 hs + 0,5 hs + 1 h. Entonces su velocidad media va a ser:

$$v_M = \frac{400 \text{ Km}}{3,5 \text{ hs} + 0,5 \text{ hs} + 1 \text{ h}}$$

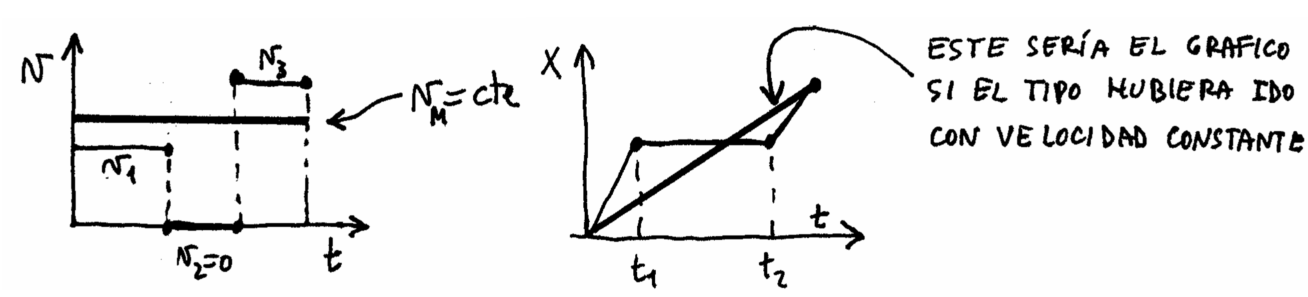
$$\Rightarrow \boxed{v_M = 80 \frac{\text{Km}}{\text{h}}} \leftarrow \text{VELOCIDAD MEDIA}$$

Si el tipo fuera todo el tiempo a 80 km/h, llegaría a Mar del Plata en 5 hs. Podés ver también este significado mirando los gráficos de posición y velocidad.





Ahora fijate el significado hacer los gráficos con la velocidad media:

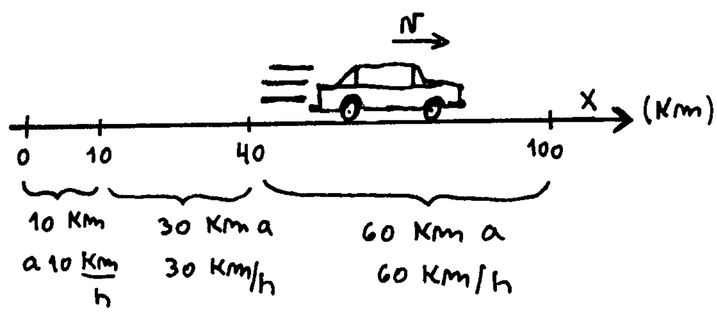


OTRO EJEMPLO DE VELOCIDAD MEDIA

Un señor tiene que recorrer un camino que tiene 100 Km. Los primeros 10 Km los recorre a 10 Km/h. Después recorre 30 Km a 30 Km por hora. Y, por último, recorre los 60 Km finales a 60 Km/h.

a)- ¿ Qué tiempo tardó en recorrer los 100 Km ?
b)- ¿ A qué velocidad constante tendría que haber ido para recorrer los 100 Km en el mismo tiempo ?
c)- Dibujar los gráficos: x(t),v(t) y a(t).

Hago un esquema de lo que plantea el problema:



Me fijo que tiempo tardó en recorrer cada tramo. Como V era $\Delta x / \Delta t$, entonces $\Delta t = \Delta x / v$. Entonces calculo el tiempo que tardó en cada tramo :

$$\Delta t_1 = \frac{10\,\text{Km}}{10\ \text{Km/h}} = 1\,\text{h}$$

$$\Delta t_2 = \frac{30\,\text{Km}}{30\,\text{Km/h}} = 1\,\text{h}$$

$$\Delta t_3 = \frac{60\text{Km}}{60\,\text{Km/h}} = 1\,\text{h}$$

El tiempo total que va a tardar va a ser la suma de estos 3 tiempos. Es decir:

$$\Delta t_{total} = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3$$

$$\Delta t_{total} = 3 \text{ hs.}$$

Por lo tanto tarda 3 hs en recorrer los 100 Km.

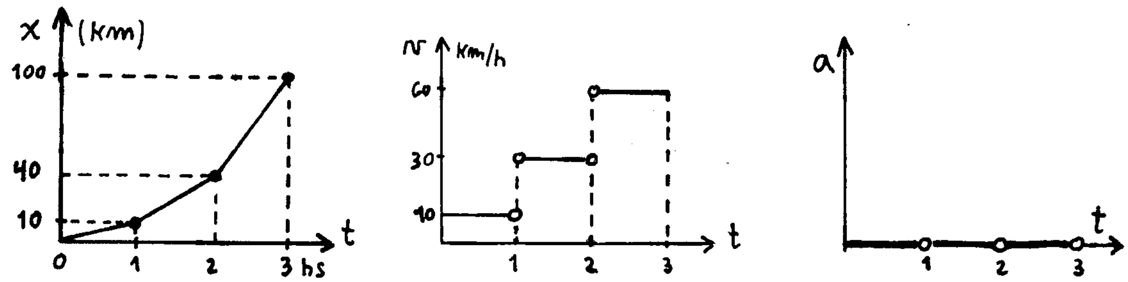
b) La velocidad constante a la que tuvo que haber ido para recorrer la misma distancia en el mismo tiempo es justamente la **velocidad media**.

Entonces:

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow v_m = \frac{100\,\text{Km}}{3\,\text{hs}}$$

➔ $\underline{V_M = 33{,}33\ \text{Km/h}}$ ← Velocidad media

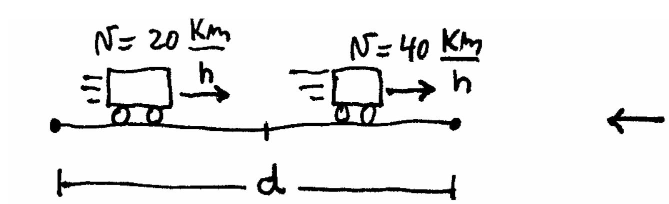
c) Fijate como quedan los gráficos:



Lo que quiero que veas es cómo en el primer gráfico las rectas se van inclinando más y más hacia arriba a medida que aumenta la velocidad. Más aumenta la velocidad, más aumenta la pendiente. Esto no es casualidad. La pendiente de la recta en el gráfico x (t) es justamente la velocidad. Por eso, al aumentar la velocidad, aumenta la inclinación. Esto es algo importante que tenés que saber.
Otra cosa: Fijate que la velocidad media **<u>NO ES</u>** el promedio de las velocidades.

<u>PROBLEMA PARA PENSAR</u>

UN AUTO RECORRE LA MITAD DE UN CAMINO A 20 km/h Y LA OTRA MITAD A 40 km/h. ¿ CUÁL ES SU VELOCIDAD MEDIA ?



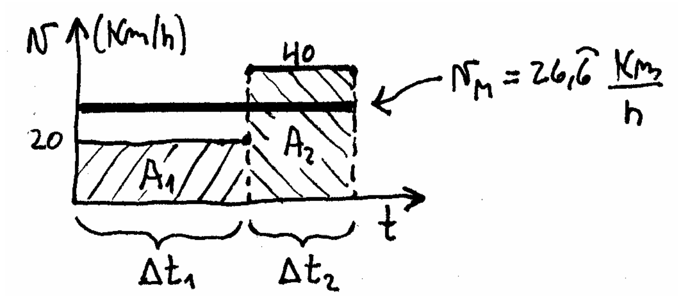
← EL AUTO RECORRE CADA MITAD DEL CAMINO A DISTINTA VELOCIDAD

<u>Ayudita 1</u>: En este problema la distancia total no es dato. En realidad esa distancia no se necesita para resolver el problema. Entonces, como no la conocés, llamala " d ". (Cada mitad será d/2). Hacé las cuentas trabajando con letras y vas a ver que da.

<u>Ayudita 2</u> : La velocidad media no depende de cuál sea el valor de la distancia d. Si el problema no te sale trabajando con letras, dale un valor cualquiera a d. Por ejemplo, 100 km. Calculá el tiempo que tardó en recorrer cada mitad (= 50 km) y calculá la velocidad media.

Si resolvés el problema te va a dar $V_{MEDIA} = 26,66$ Km/h.

Fijate como da el gráfico de velocidad hecho en forma cualitativa. Notá que Δt_1 no vale lo mismo que Δt_2. Fijate también que la velocidad media **NO ES** el promedio de las velocidades.

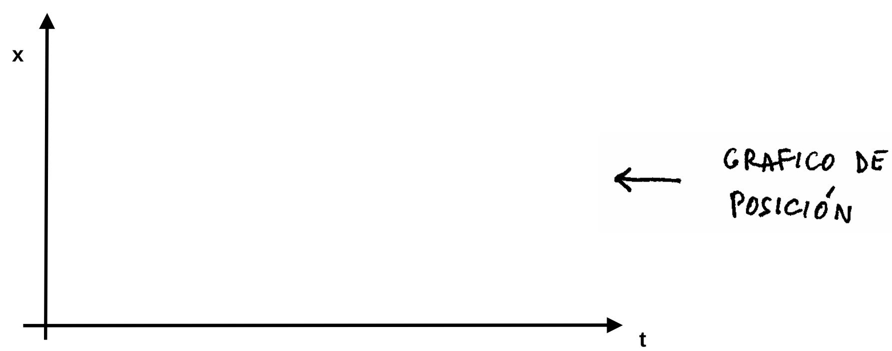


Si pensás un poco, te vas a dar cuenta de que el área debajo de la raya gruesa va a dar el espacio total recorrido. Y esa área tendrá que ser igual a la suma de las áreas A_1 y A_2 .

Pregunta: ¿ Por qué la velocidad media dio más cerca de 20 km/h que de 40 km/h ?

Ultima cosa : ¿ serías capaz de hacer el gráfico de posición en función del tiempo ?

Tomá, acá te dejo el lugar para que lo pongas.



NOTA SOBRE MRU :

No tengo ejercicios de parcial para poner de Movimiento Rectilíneo y Uniforme.

Lo que pasa es que MRU rara vez es tomado en los examenes. A veces aparece algún problema de encuentro o de velocidad media. Pero no mucho más que eso. Pero atención, que no tomen MRU no quiere decir que no lo tengas que saber. Al revés, tenés que saber bien MRU porque es la base de toooooodo lo que sigue.

A veces la gente se queja de que no entiende MRUV. En realidad lo más probable es que el tipo no entienda MRUV porque no entendió MRU.

Y otra cosa, es bueno saber MRU. Es uno de los temas de física que más se aplica en la vida diaria. Cuando ellos calculan el retroceso del glaciar Perito Moreno debido al calentamiento global, usan MRU. Cuándo calcularon la velocidad de la ola del Tsunami del 2004 en Sumatra, usaron MRU. Cuando vos calculás cuanto vas a tardar en llegar a Mar del Plata sabiendo que vas a 80 por hora, usás MRU.

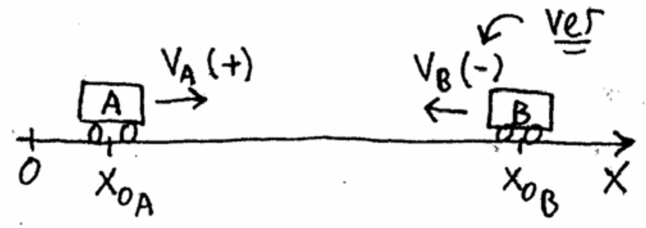
Usando MRU se pueden calcular velocidades de todo tipo. Tanto sea la rapidez con que se mueven las estrellas o la velocidad de crecimiento de las uñas.

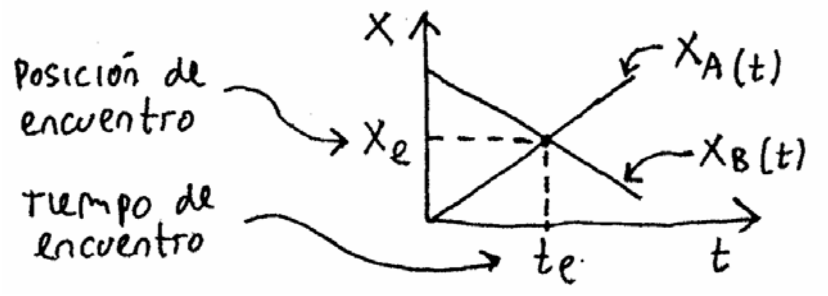
Vamos a un ejemplo concreto. Vos sabés que los continentes se mueven. Al principio estaban todos juntos y después se fueron separando a medida que pasaron los millones de años. Entonces contestame esto: La velocidad de deriva continental de América es de unos 5 cm por año. ¿ Cuánto se ha movido el continente americano en los últimos 100 millones de años ?

Sugerencia: Primero tirá un número a ojo y después hacé la cuenta.

FIN MRU

ENCUENTRO


ver
V_A (+)
V_B (-)
A
B
0
X_{0_A}
X_{0_B}
X


X
Posición de encuentro
X_e
$X_A(t)$
$X_B(t)$
Tiempo de encuentro
t_e
t

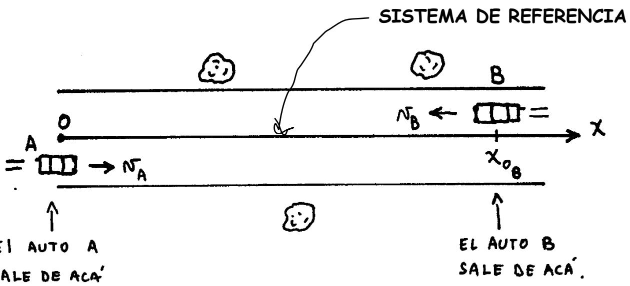
ENCUENTRO (Importante)

Encuentro es un tema que les gusta bastante. Suelen tomarlo en los exámenes y hay que saberlo bien. No es muy difícil. Lee con atención lo que sigue.

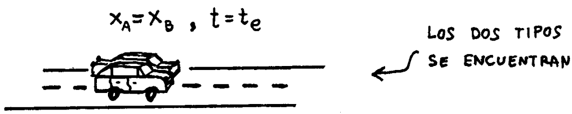
¿ CUÁNDO DOS COSAS SE ENCUENTRAN ?

Dos cosas se encuentran cuando pasan por el mismo lugar al mismo tiempo. Fijate que esto último lo subrayé. Es que para que 2 cosas se encuentren no alcanza con que pasen por el mismo lugar. Tienen que pasar por el mismo lugar **al mismo tiempo**.
El otro dia vos fuiste a lo de tu primo. Yo también fui a lo de tu primo pero no te vi.
¿ Cómo puede ser que no te haya visto si estuvimos en el mismo lugar ?
Rta: Bueno, seguramente no habremos estado en el mismo momento. Es decir, los dos estuvimos en el mismo lugar pero **NO** al mismo tiempo.
No te compliques. Esto que parece fácil, **ES** fácil.

Una situación de encuentro podría ser la siguiente: Esto muestra una ruta vista de arriba. (Típico problema de encuentro).



En algún momento los dos autos se van a encontrar en alguna parte de la ruta.
Lo que va a pasar ahí es esto:



Este asunto del encuentro lo pongo en forma física así:

¡IMPORTANTE! $\boxed{x_A = x_B \;\; para \;\; t = t_e}$ ← Condición de encuentro.

Esta condición se cumple en todos los casos y en todos los problemas de encuentro. Es decir, puede ser que los coches estén viajando en el mismo sentido o en sentido contrario. Puede ser que uno vaya frenando y el otro acelerando. Puede uno ir con MRUV y el otro con MRU. Lo que sea. La historia es siempre la misma y la condición será $x_A = x_B$ para $t = t_e$.

COMO RESOLVER PROBLEMAS DE ENCUENTRO:

Los problemas de encuentro son problemas en los que una cosa sale del lugar A y otra sale del lugar B. Pueden salir al mismo tiempo o no. Pueden moverse en el mismo sentido o no. Pueden ir con MRU o no.
Lo que siempre te van a preguntar es: dónde se encuentran los tipos y después de cuánto tiempo. Para resolver esto conviene seguir estos pasos. Prestá atención:

1- Hago un dibujo de lo que plantea el problema. En ese dibujo elijo un sistema de referencia. Sobre este sistema marco las posiciones iniciales de los móviles y la velocidad de c/u de ellos **con su signo**. Si la velocidad va en el mismo sentido del eje **x** es (**+**). Si va al revés, es (**-**) . (ojo !).

2- Escribo las ecuaciones horarias para c/u de los móviles. (x_A = ..., x_B = ...)

3- Planteo la condición de encuentro que dice que la posición de A debe ser igual a la de B para $t = t_e$.

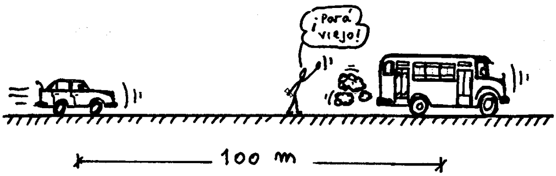
4- Igualo las ecuaciones y despejo t_e . Reemplazando t_e en la ecuación de x_A o de x_B calculo la posición de encuentro.

5- Conviene hacer un gráfico Posición en función del tiempo para los 2 móviles en donde se vea la posición de encuentro y el tiempo de encuentro.

Ejemplo: Problema de encuentro en MRU

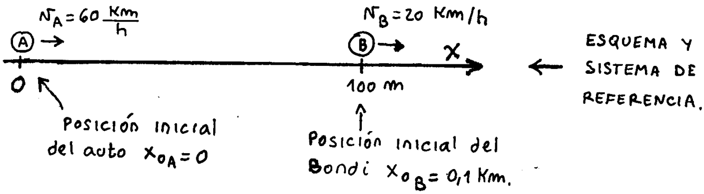
> **Un auto y un colectivo están ubicados como muestra el dibujo y se mueven a 60 y 20 Km/h respectivamente.**
> **a)- Calcular cuánto tiempo tardan en encontrarse.**
> **b)- Hallar el lugar donde se encuentran.**
> **c)- Hacer el gráfico de x(t) para los 2 móviles y verificar los puntos a) y b).**

Bueno, empiezo haciendo un dibujito que explique un poco el enunciado.



Para calcular lo que me piden sigo los pasos que puse antes. O sea:

1 - Hago un esquema. Elijo un sistema de referencia. Marco las posiciones y las velocidades iniciales:



Puse el sistema de referencia en el lugar donde estaba el auto al principio. Las dos velocidades son (+) porque van en el mismo sentido del eje x.

2 - Planteo las ecuaciones horarias. (Ojo. Esto hay que revisarlo bien, porque <u>si las ecuaciones están mal planteadas todo lo que sigue va a estar mal</u>...).

Para el auto
$$\begin{cases} x_A = 0 + 60\ Km/h \cdot t \\ v_A = 60\ Km/h \\ a_A = 0 \end{cases}$$

Para el bondi
$$\begin{cases} x_B = 0{,}1Km + 20\ \frac{Km}{h} \cdot t \\ v_B = 20\ Km/h \\ a_A = 0 \end{cases}$$

3 - Planteo la condición de encuentro que dice que la posición de los 2 tipos debe coincidir en el momento del encuentro:

$$x_A = x_B \quad \text{para} \quad t = t_e$$

Las ecuaciones de la posición para A y B eran:

$$\begin{cases} x_A = 0 + 60\ \frac{Km}{h} \times t \\ x_B = 0{,}1\ Km + 20\ \frac{Km}{h} \times t \end{cases}$$

$$60\ \frac{Km}{h}\cdot t_e = 0{,}1\ Km + 20\ \frac{Km}{h}\cdot t_e$$

$$\Rightarrow \quad 60\ \frac{Km}{h}\cdot t_e - 20\ \frac{Km}{h}\cdot t_e = 0{,}1\ Km$$

$$\Rightarrow \quad 40\ \frac{Km}{h}\cdot t_e = 0{,}1\ Km$$

$$\Rightarrow \quad t_e = \frac{0{,}1\ Km}{40\ Km/h} = 0{,}0025\ hs$$

Una hora son 3600 segundos, entonces, multiplicando por 3600 :

$$\boxed{t_e = 9\ seg} \leftarrow \text{ TIEMPO DE ENCUENTRO}$$

4 - Igualo las ecuaciones y despejo lo que me piden:

Reemplazando este t_e en cualquiera de las ecuaciones horarias tengo la posición de encuentro. Por ejemplo, si reemplazo en la de x_A :

$$x_e = 0 + 60\ \frac{Km}{h}\cdot t_e \quad 0{,}0025\ \text{hs}$$

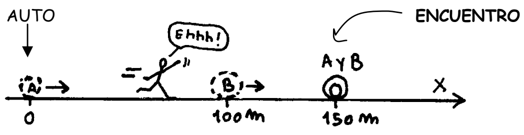
$$\Rightarrow \quad x_e = 0{,}15\ Km\ \ (= 150\ \text{m}) \qquad \leftarrow \text{ POSICION DE ENCUENTRO}$$

Para verificar puedo reemplazar t_e en la otra ecuación y ver si da lo mismo. A mi me gusta verificar, porque si me da bien ya me quedo tranquilo. A ver :

$$x_e = 0{,}1 + 20\ \frac{Km}{h}\cdot t_e \quad 0{,}0025\ \text{hs}$$

$$\Rightarrow x_e = 0{,}15\ Km\ \ (= 150\ \text{m}) \qquad \leftarrow \text{ Bien, dió.}$$

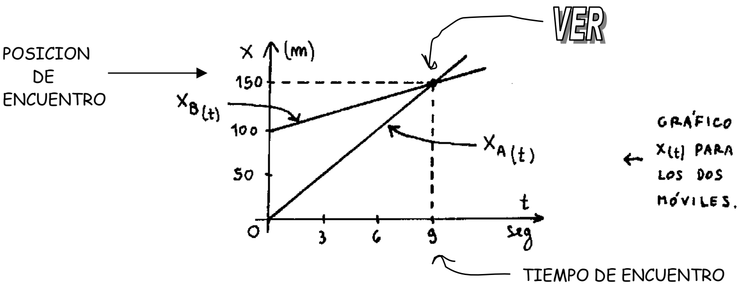
Es decir que la respuesta al problema es que el coche alcanza al colectivo en 9 seg después de recorrer 150 m. De la misma manera podría haber dicho que el encuentro se produce a los 9 segundos y después que el <u>colectivo</u> recorrió 50 m. Esto es importante. Cuando uno dice que el encuentro se produce a los 150 metros tiene que aclarar **<u>desde dónde</u>** están medidos esos 150 metros. La situación final vendría a ser esta:



c) Otra manera de verificar que lo que uno hizo está bien es hacer el gráfico $X_{(t)}$ representando c/u de las ecuaciones horarias. Lo que hago es ir dándole valores a **t** y calcular los de **equis.** Fijate. Es sólo cuestión de hacer algunas cuentas:

Auto	x_A	t	x_B	t	**Colectivo**
x_A = **60.t**	0	0	100m	0	x_B = **0,1 + 20.t**
	50m	3 seg	116m	3 seg	
	100m	6 seg	133m	6 seg	
	150m	9 seg	150m	9 seg	

La representación de las 2 rectas queda así:



El lugar donde se cortan las rectas indica el tiempo de encuentro sobre el eje horizontal y la posición de encuentro sobre el eje vertical.
Siguiendo estos pasos se pueden resolver todos los ejercicios de encuentro.

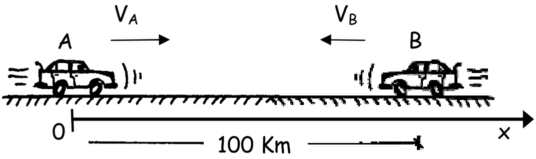
En este problema los móviles iban para el mismo lado. Fijate que pasa si los móviles van en sentido contrario. Ejemplo :

<u>ENCUENTRO DE MOVILES EN DISTINTO SENTIDO</u> ← $\boxed{\text{VER ESTO}}$

UN AUTO A Y UN AUTO B SE ENCUENTRAN SEPARADOS UNA DISTANCIA DE 100 Km. A SE MUEVE CON UNA VELOCIDAD DE 40 Km/h Y B SE MUEVE CON V_B = 60 Km/ h. LOS 2 AUTOS VAN UNO AL ENCUENTRO DEL OTRO. CALCULAR A QUE DISTANCIA DEL AUTO <u>**A**</u> SE PRODUCE EL ENCUENTRO Y DESPUES DE CUANTO TIEMPO. TRAZAR EL GRAFICO POSICIÓN EN FUNCIÓN DEL TIEMPO INDICANDO EL ENCUENTRO

SOLUCIÓN

Hago un dibujito del asunto. Los móviles viajan en sentido contrario. Voy a tomar el sistema de referencia así ➔ poniendo el cero en el auto **A**.



VER

Para el auto **A** $V_A = 40$ Km/h y $X_{0A} = 0$. Para el auto **B** $V_B = -60$ Km/h y $X_{0B} = 100$ Km.

Fijate por favor que la velocidad del auto **B** es **NEGATIVA** porque va a revés del sistema de referencia. El sistema de referencia que tomé va así ➔ y la velocidad de B va así 🡐 . (Atento). Ojo con este signo menos. Es la causa de frecuentes errores. Si uno se equivoca y le pone signo positivo a la velocidad de B, le está diciendo al problema que el auto B va así ➔. O sea, está todo mal.
Planteo las ecuaciones para cada uno de los autos :

Auto A : $X_A = 0 + 40 \text{ Km/h} . t$

Auto B : $X_B = 100 \text{ Km} - 60 \text{ Km/h} . t$

La condición para que los 2 autos se encuentren es que tengan la misma posición en el mismo momento. Es decir:

$X_A = X_B$ para $t = t_e$ ⇦ CONDI CIÓN DE ENCUENTRO

Entonces igualo las ecuaciones. Me queda :

$$40 \text{ Km/h} . t_e = 100 \text{ Km} - 60 \text{ Km/h} . t_e$$

$$100 \text{ Km/h} . t_e = 100 \text{ Km}$$

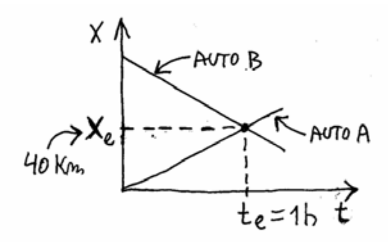
➔ $\boxed{t_e = 1 \text{ h}}$ ⇦ TIEMPO DE ENCUENTRO

Reemplazando este tiempo de encuentro en cualquiera de las 2 ecuaciones saco la posición de encuentro.

$$X_A = 0 + 40\ Km/h \cdot t_e \quad \Rightarrow \quad X_A = 40\ Km/h \cdot 1\ h$$

$$\Rightarrow \boxed{X_e = 40\ Km}$$ ⇦ POSICION DE ENCUENTRO

Respuesta: Los autos se encuentran después de 1 hora y a 40 km de la posición inicial del auto A. Hagamos el gráfico de posición en función del tiempo para los 2 autos :



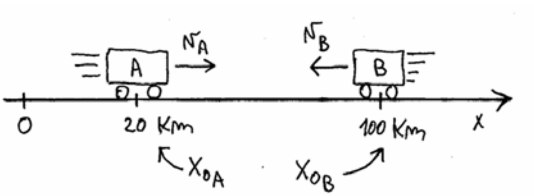
⇦ GRAFICO DEL ENCUENTRO

Fijate que las rectas se cortan. En el punto donde se cortan, tengo el encuentro.

Una cosa: supongamos que yo me hubiera equivocado y hubiera puesto positiva la velocidad de B... ¿ qué hubiera pasado ? ¿ Dónde se encontrarían los móviles en ese caso ? Ojo con lo que vas a decir. No contestes cualquier cosa. Esto es física. En física no hay " yo creo que ", " me parece que ", " me da la impresión de que ". En física las cosas son blancas o negras. O sea, planteá las ecuaciones, hacé el análisis y fijate lo que pasa .

Otra cosa: ¿ que hubiera pasado si el auto **A** no salía del origen de coordenadas ? Veamos como cambia el asunto resolviendo el mismo problema anterior pero cambiando la posición inicial del auto A

Entonces supongamos que las velocidades son las mismas que antes pero la posición inicial de **A** ahora es 20 km. Entonces lo que tengo es esto:



⇦ AHORA LA POSICION INICIAL DE **A** NO ES CERO

Entonces las ecuaciones quedan así:

$$X_A = 20\ Km + 40\ \frac{Km}{h} \cdot t$$
$$X_B = 100\ Km \ominus 60\ \frac{Km}{h} \cdot t$$

← ECUACIONES HORARIAS PARA LOS AUTOS

Si hacés las cuentas te va a dar:

$$\boxed{\begin{array}{l} t_e = 0{,}8\ hs = 48\ min \\ X_e = 52\ Km \end{array}}$$

← SITUACIÓN DE ENCUENTRO

Y el gráfico va a quedar así:

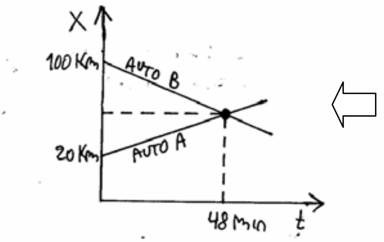
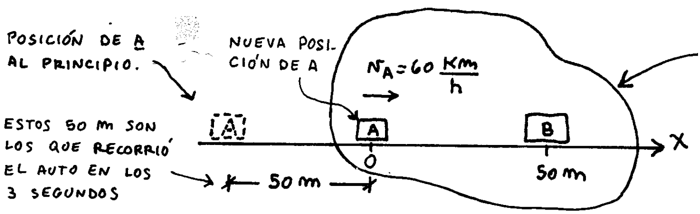


GRAFICO DEL ENCUENTRO

IMPORTANTE: <u>PROBLEMAS DE ENCUENTRO DONDE LOS MOVILES NO SALEN AL MISMO TIEMPO.</u> ← LEER

Puede pasar que en un problema de encuentro uno de los tipos salga antes que el otro o después que el otro. Suponé por ejemplo que un auto A que va a 60 Km/h sale 3 seg <u>antes</u> que el auto B. En ese caso lo que hago es calcular qué distancia recorrió el auto en esos 3 seg y plantear **<u>un nuevo problema de encuentro</u>**. Es decir, hago esto:



NUEVO PROBLEMA DE ENCUENTRO

Este método de resolver problemas de encuentro para móviles que no salen en el mismo momento sirve para todos los casos de encuentro. Se puede aplicar **SIEMPRE**.
Los objetos pueden estar moviéndose en el mismo sentido, en sentido contrario, con MRU, con MRUV, caída libre, tiro vertical. Lo que sea.

Ahora bien (y a esto apuntaba yo): Hay **OTRO** método para resolver este tipo de problemas. Este método es el que generalmente usan ellos y por eso te lo explico. Sin embargo, este método es más difícil de usar y tiene sus complicaciones.

La cosa es así: En realidad las ecuaciones horarias están escritas en función de "t menos t cero". ($t - t_0$). Sería $X = X_0 + V_x (t - t_0)$. De manera que si uno de los móviles sale 3 seg antes que el otro, lo único que hay que hacer es reemplazar " te cero " por 3 segundos y listo.
Hasta acá todo muy lindo. Pero lindo, nada, porque el asunto es el siguiente:

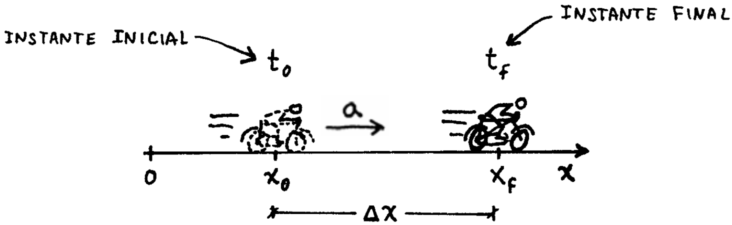
1 - Las DOS ecuaciones horarias tienen el término ($t - t_0$)...
¿ En cuál de las 2 tengo que reemplazar ? (¿ O reemplazo en las 2 ?)
2 – Si el móvil salió 3 segundos ANTES... ¿ te_{cero} vale 3 seg o -3 seg ?
(¿ Y si salió 3 seg <u>después</u> ?)
3 – Si uno de los objetos va con MRUV (acelera), entonces el paréntesis ($t - t_0$) tiene que ir al ^{2}. Eso súper-complica las cosas porque te va a quedar el cuadrado de un binomio.... ¿ Y ahora ? ¿ Quién resuelve las infernales cuentas que quedan ?

<u>Resumiendo</u>: El método de reemplazar $t_0 = 3$ seg en ($t - t_0$) sirve perfectamente.
Como usar, se puede. El problema es que la posibilidad de equivocarse es muy grande por el asunto de los signos y de que uno se puede confundir de ecuación al reemplazar.
Entonces te recomiendo que **NO USES** el método de poner $t - t_0$. Usa el método que te expliqué yo que es más fácil y más entendible.
Creo que fui claro, no ?

Fin Encuentro

MRUV

MOVIMIENTO RECTILINEO UNIFORMEMENTE VARIADO



$$\boxed{a = \frac{V_f - V_0}{t_f - t_0}}$$

← FORMULA PARA CALCULAR LA ACELERACION EN EL MRUV.

1ra: POSICIÓN : $x_f = x_0 + V_0 t + \frac{1}{2} a t^2$

2da: VELOCIDAD: $V_f = V_0 + a t$

3ra: ACELERACIÓN : $a = cte$

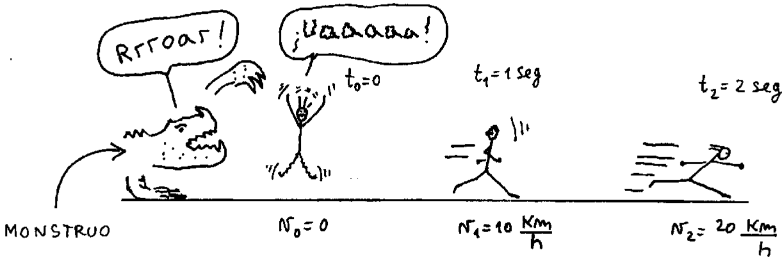
← ECUACIONES HORARIAS

$$\boxed{V_f^2 - V_0^2 = 2a\,(x_f - x_0)}$$

← Ecuación complementaria

MRUV - MOVIMIENTO RECTLÍNEO UNIFORMEMENTE VARIADO

Suponé un coche que está quieto y arranca. Cada vez se mueve más rápido. Primero se mueve a 10 por hora, después a 20 por hora, después a 30 por hora y así siguiendo. Su velocidad va cambiando (varía). Esto vendría a ser un movimiento variado.
Entonces, Pregunta: ¿ Cuándo tengo un movimiento variado ?
Rta: cuando la velocidad cambia. (O sea, varía).
Ahora, ellos dicen que un movimiento es **UNIFORMEMENTE** variado si la velocidad **cambia lo mismo en cada segundo que pasa**. Mirá el dibujito :



Cuando el tipo ve al monstruo se pone a correr. Después de 1 segundo su velocidad es de 10 Km/h y después de 2 segundos es de 20 Km/h. Su velocidad está aumentando, de manera **uniforme**, a razón de 10 Km/h por cada segundo que pasa. Digo entonces que el movimiento del tipo es uniformemente variado aumentando Δv = 10 Km/h en cada Δt = 1 segundo.
Atención, aclaro: en física, la palabra uniforme significa "Siempre igual, siempre lo mismo, siempre de la misma manera ".

ACELERACIÓN (Atento)

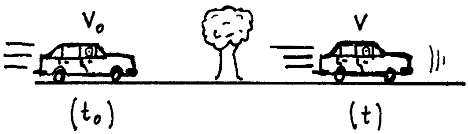
El concepto de aceleración es muy importante. Es la base para poder entender bien - bien MRUV y también otras cosas como caída libre y tiro vertical. Entender qué es la aceleración no es difícil. Ya tenés una idea del asunto porque la palabra aceleración también se usa en la vida diaria. De todas maneras lee con atención lo que sigue y lo vas a entender mejor. Fijate.

En el ejemplo del monstruo malvado que asusta al señor, el tipo pasa de 0 á 10 Km/h en 1 seg. Pero podría haber pasado de 0 á 10 Km/h en un año. En ese caso estaría acelerando más despacio. Digo entonces que la aceleración es la rapidez con que está cambiando la velocidad.

Más rápido aumenta (o disminuye) la velocidad, mayor es la aceleración. Digamos que la aceleración vendría a ser una medida de la "**brusquedad**" del cambio de velocidad. Si lo pensás un rato, vas a llegar a la conclusión de que para tener algo que me indique qué tan rápido está cambiando la velocidad, tengo que dividir ese cambio de velocidad Δv por el tiempo Δt que tardó en producirse. Es decir:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$ ⇦ **Definición de aceleración**

Suponé un auto que tiene una velocidad V_0 en t_0 y otra velocidad V_f al tiempo t_f :



Para sacar la aceleración hago :

$$a = \frac{v_f - v_0}{t_f - t_0}$$ ⇦ **Así se calcula la aceleración**

Una cosa. Fijate por favor que cuando en física se habla de aceleración, hablamos de aumentar **o disminuir** la velocidad. Lo que importa es que la velocidad **CAMBIE**. (Varíe). Para la física, un auto que está frenando tiene aceleración. Atención porque en la vida diaria no se usa así la palabra aceleración. Por eso algunos chicos se confunden y dicen: Pará, pará, hermano. ¿ Cómo puede estar acelerando un auto que va cada vez más despacio ?! Vamos a un ejemplo.

EJEMPLO DE MRUV

Un coche que se mueve con MRUV tiene en un determinado momento una velocidad de 30 m/s y 10 segundos después una velocidad de 40 m/s. Calcular su aceleración.

Para calcular lo que me piden aplico la definición anterior : $a = \frac{v_f - v_0}{t_f - t_0}$.
Entonces :

$$a = \frac{40\ \text{m/s} - 30\ \text{m/s}}{10\ \text{seg}}.$$

➔ a = 10 m/seg

Fijate que el resultado dio en m/s^2. Estas son las unidades de la aceleración: " metro dividido segundo dividido segundo ". Siempre se suelen poner las unidades de la aceleración en m/s^2. Pero también se puede usar cualquier otra unidad de longitud dividida por una unidad de tiempo al cuadrado (como Km/h^2).
Ahora, pregunta: ¿ Qué significa esto de " $1\ m/s^2$ " ?
Rta: Bueno, $1\ m/s^2$ lo puedo escribir como:

$$\frac{1m/s\,\}\ \text{Variación de velocidad.}}{1s\,\}\ \text{Intervalo de tiempo.}}$$

Esto de " 1 m/seg dividido 1 segundo " se lee así: La aceleración de este coche es tal que su velocidad aumenta 1 metro por segundo, en cada segundo que pasa (Atención)
Un esquema de la situación sería éste:

De acá quiero que veas algo importante: Al tener una idea de lo que es la aceleración puedo decir esto (Importante) : La característica del movimiento uniformemente variado es justamente que tiene **aceleración constante**. Otra manera de decir lo mismo (y esto se ve en el dibujito) es decir que en el MRUV la velocidad aumenta todo el tiempo (o disminuye todo el tiempo). Y que ese aumento (o disminución) de velocidad es **LINEAL CON EL TIEMPO**.

Fin del ejemplo

SIGNO DE LA ACELERACIÓN:

VER BIEN ESTO

La aceleración que tiene un objeto puede Ser (**+**) o (**-**). Esto depende de 2 cosas:

1 – De si el tipo se está moviendo cada vez más rápido o cada vez más despacio.
2 – De si se está moviendo en el mismo sentido del eje **x** o al revés. (Ojaldre !)

La regla para saber el signo de la aceleración es esta:

LA ACELERACIÓN ES POSITIVA CUANDO EL VECTOR ACELERACIÓN APUNTA EN EL MISMO SENTIDO QUE EL EJE EQUIS

Si el vector aceleración apunta al revés del eje equis, va a ser negativa. La cosa es que esto nunca se entiende bien y la gente suele decir: Bueno, no es tan difícil. Si el tipo va cada vez más rápido, su aceleración es positiva y si va cada vez más despacio, su aceleración es negativa.
Hummmmm.... ¡ Cuidado ! Esto vale solamente si el tipo se mueve en el sentido positivo del eje **x**. Si el tipo va para el otro lado, los signos son exactamente al revés. No lo tomes a mal. Esto de los signos no lo inventé yo. Todo el asunto sale de reemplazar los valores de las velocidades en la ecuación:

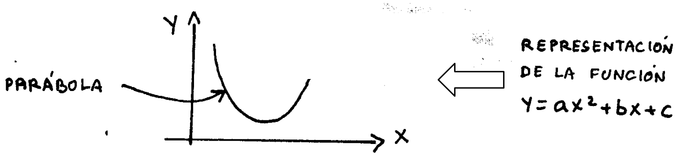
$$a = \frac{v_f - v_0}{t_f - t_0}.$$

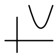
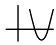
MATEMÁTICA: ECUACIÓN DE UNA PARÁBOLA

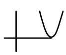
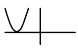
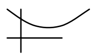
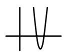
En matemática, una parábola se representaba por la siguiente ecuación:

$$y = a.x^2 + b.x + c \qquad \leftarrow \text{ECUACION DE UNA PARABOLA.}$$

Por ejemplo, una parábola podría ser : $Y = 4\ x^2 + 2x - 8$. Dándole valores a x voy obteniendo los valores de **Y**. Así puedo construir una tabla. Representando estos valores en un par de ejes **x-y** voy obteniendo los puntos de la parábola. Eso puede dar una cosa así:



La parábola puede dar más arriba:  , más abajo  ,más a la derecha:

 , más a la izquierda:  , más abierta:  más cerrada: 

Puede incluso dar para a bajo: 

Una parábola puede dar cualquier cosa, dependiendo de los valores de a, b y c. Pero siempre tendrá forma de parábola. Atento con esto ! Las parábolas aparecen mucho en los problemas de MRUV. Es un poco largo de explicar. Pero en realidad, resolver un problema de MRUV es resolver la ecuación de una parábola. (Una ecuación cuadrática, en realidad)

Solución de una ecuación cuadrática

Se supone que esto también tuviste que haberlo visto en matemática. Por las dudas lo pongo, lo repasás un minuto y te quedás tranquilo. Una ecuación cuadrática es la ecuación de una parábola igualada a CERO. O sea, una ecuación del tipo:

$$a\,X^2 + b\,X + C = 0 \quad \Leftarrow \quad \text{ECUACION CUADRATICA}$$

Por ejemplo : $X^2 - 6X + 8 = 0$. Lo que uno siempre busca son los valores de equis tales que reemplazados en $X^2 - 6X + 8$ hagan que todo el choclo dé 0 (Cero). Esos valores se llaman **soluciones de la ecuación** o **raíces ecuación.** En este caso, esos valores son 2 y 4.

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 4 \end{cases} \quad \leftarrow \quad \text{Son las raíces de la ecuación } x^2 - 6x + 8 = 0$$

Una ecuación cuadrática puede tener 2 soluciones (como en este caso); una sola solución (las dos raíces son iguales), o ninguna solución (raíces imaginarias). Para calcular las raíces de la ecuación cuadrática se usa la siguiente fórmula:

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}} \quad \leftarrow \quad \text{Con esto obtengo las soluciones } x_1 \text{ y } x_2 \text{ de la ec } ax^2 + bx + c = 0$$

Para el ejemplo que puse que era $X^2 - 6X + 8 = 0$ tengo:

$$\underset{a}{1}x^2 - \underset{b}{6}x + \underset{c}{8} = 0$$

OJO

Entonces:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2 \cdot 1}$$

$$x_1 = \frac{6+2}{2} = 4 \quad ; \quad x_2 = \frac{6-2}{2} = 2$$

Nota: Algunas calculadoras tienen ya la fórmula para resolver la ecuación cuadrática metida adentro. Vos ponés los valores de a, b y c. Ella te hace la cuenta y te da los valores de las raíces X_1 y X_2. (Ta güeno)

ECUACIONES HORARIAS Y GRÁFICOS EN EL MRUV (IMPORTANTE)

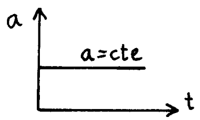
Las ecuaciones horarias son siempre las de posición, velocidad y aceleración en función del tiempo. Quiero que veas cómo se representa cada ecuación en el MRUV. Voy a empezar por la 3ra ecuación que es más fácil de entender.

3ª Ecuación horaria ($a = f_{(t)}$)

La característica fundamental de un movimiento uniformemente variado es que la aceleración es constante. En el MRUV la aceleración no cambia. Es siempre igual. Vale siempre lo mismo. Esto puesto en forma matemática sería:

$a = Cte$ ← 3^{RA} Ecuación horaria

El gráfico correspondiente es una recta paralela al eje horizontal. O sea, algo así:



← GRÁFICO PARA LA 3^{ra} ECUACIÓN HORARIA.

2ª Ecuación horaria ($V = f_{(t)}$)

Otra manera de decir que la aceleración es constante es decir que la velocidad aumenta (o disminuye) linealmente con el tiempo. Esto sale de la definición de aceleración. Fijate. Era:

$$a = \frac{v_f - v_0}{t_f - t_0}.$$

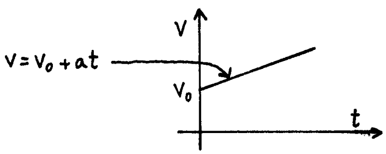
Tonces, si despejo : $V_f - V_0 = a\,(t - t_0)$

➔ $V_f = V_0 + a\,(t - t_0)$

Casi siempre t_{cero} vale cero. Entonces la ecuación de la velocidad queda así:

$\boxed{V_f = V_0 + a\,.\,t}$ ← 2^{da} ECUACION HORARIA

Esto es la ecuación de una recta. Tiene la forma y = eme equis + be. ($Y = m\,x + b$). Acá el tiempo cumple la función de la variable equis. La representación es así:



← REPRESENTACIÓN DE LA 2^{da} ECUACIÓN HORARIA

Por ejemplo, una 2ª ecuación horaria típica podría ser: $V_f = 10\ \frac{m}{s} + 2\ \frac{m}{s}\ t$

El tipo que se mueve siguiendo la ecuación V_f = 10 m/s + 2 m/s.t salió con una velocidad inicial de 10 m/s y tiene una aceleración de 2 m /s ^{2}. Esto lo vas a entender mejor cuando veas algún ejemplo hecho con números y cuando empieces a resolver problemas. (Como siempre). Ahora seguí.

<u>1ra Ecuación horaria</u> (x = $f_{(t)}$)

Esta es la ecuación importante y es la que hay que saber bien. La ecuación de la posición en función del tiempo para el movimiento uniformemente variado es ésta:

$$\boxed{X = X_0 + V_0\, t + \tfrac{1}{2}\, a\, t^2} \leftarrow \text{1ra ECUACION HORARIA.}$$

La deducción de esta ecuación es un poco larga. No la voy a poner acá. Puede ser que ellos hagan la demostración en el pizarrón. No sé. De todas maneras en los libros está. Lo que sí quiero que veas es que es la ecuación de una parábola. Fijate:

$$\begin{array}{ccccccc} x = & x_0 & + & v_0 . t & + & \underline{\underline{\tfrac{1}{2}\, a}}\ . & t^2 \\ \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow\ \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow \\ y = & c & + & b \cdot x & + & a\ . & x^2 \end{array} \Longleftarrow$$

VER LA CORRESPONDENCIA DE CADA TERMINO

Cada término de la ecuación $X = X_0 + V_0\, t + \frac{1}{2}\, a\, t^2$ tiene su equivalente en la expresión $Y = a\, x^2 + b\, x + C$. La representación de la posición en función del tiempo es esta:

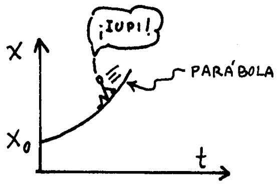
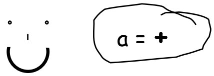


GRÁFICO DE X=X(t) PARA EL MRUV.

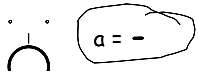
Este dibujito lindo quiere decir muchas cosas. Ellos suelen decirlo así : Este gráfico representa la variación de la posición en función del tiempo para un movimiento uniformemente variado. Este dibujito lindo es la representación gráfica de la función $X = x_0 + V_0\, t + \frac{1}{2}\, a\, t^2$. La ecuación nos da nada más ni nada menos que la posición del móvil para cualquier instante t. Esta función es una ecuación cuadrática. (t está al cuadrado). Esto es importante porque me da una característica fundamental del movimiento uniformemente variado. Esa característica es esta:

" EN EL MRUV LA POSICIÓN VARÍA CON EL CUADRADO DEL TIEMPO. X = f (t2) . EQUIS DEPENDE DE t CUADRADO "

Te decía entonces que la representación gráfica de $X = X_0 + V_0\,t + \frac{1}{2}\,a\,t^2$ es una parábola. Esta parábola puede dar para la derecha, para la izquierda, muy cerrada, muy abierta.... Eso va a depender de los valores de equis cero, de ve cero y de a. Ahora, el hecho de que la parábola vaya para arriba o para abajo depende **<u>ÚNICAMENTE</u>** del signo de la aceleración. Si a es (+), la parábola irá para arriba ($\cup$). Si a es (-) , la parábola irá para abajo ($\cap$). Esto podés acordártelo de la siguiente manera:



La parábola positiva está contenta.



La parábola negativa está triste.

<u>Conclusión</u>: Hay que ser positivo en la vida ! No. Conclusión: mirá el siguiente ejemplo a ver si lo entendés mejor:

<u>Ejemplo</u>. Supongamos que tengo la siguiente ecuación horaria para algo que se mueve con MRUV :

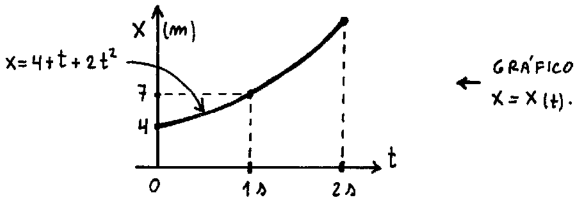
$$X = 4\,m + 1\frac{m}{s}.t + 2\frac{m}{s^2}.t^2$$

Este sería el caso de algo que salió de la posición inicial 4 m con una velocidad de 1 m/s y una aceleración de **<u>4 m/ s²</u>**. (Ojo, es 4, no 2. Pensalo).
Para saber cómo es el gráfico le voy dando valores a t y voy sacando los valores de x. Es decir, voy haciendo las cuentas y voy armando una tablita.

x [m]	t [seg]
4	0
7	1
14	2

TABLA CON LOS VALORES DE LAS POSICIONES Y LOS TIEMPOS.

Ahora represento esto y me da una cosa así:

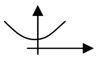


Este gráfico es la representación de la 1ra ecuación horaria. Me gustaría que notaras dos cosas:

1) - La parábola va para arriba ($\cup$) porque $\underline{a}$ es positiva.

2) - Aunque uno vea sólo un arco así $\longrightarrow$  esto es una parábola.

La parte que falta estaría a la izquierda y no la dibujé. La podría representar si le diera valores negativos a t (como –1 seg, -2 seg, etc). En ese caso el asunto daría así:



Fin Explicación Ec. Horarias

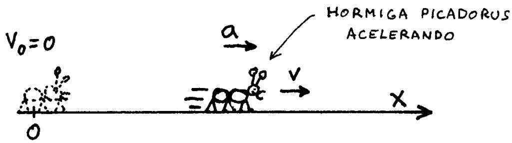
UN EJEMPLO DE MRUV

Una hormiga picadorus sale de la posición X_0 = 0 con velocidad inicial cero y comienza a moverse con aceleración a = 2 m/s² .

a) - Escribir las ecuaciones horarias.

b) - Hacer los gráficos $x_{(t)}$, $v_{(t)}$ y $a_{(t)}$.

Voy a hacer un esquema de lo que pasa y tomo un sistema de referencia:



Las ecuaciones horarias para una cosa que se mueve con movimiento rectilíneo uniformemente variado son:

$$\begin{cases} x = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2 \\ v_f = v_0 + a \cdot t \\ a = cte \end{cases} \Leftarrow$$

ECUACIONES HORARIAS ESCRITAS EN FORMA GENERAL.

x_0 y v_0 valen cero. Reemplazando por los otros datos el asunto queda así:

$$\begin{cases} x = 0 + 0 \cdot t + \frac{1}{2}\, 2 \frac{m}{s^2} \cdot t^2 \\ v_f = 0 + 2 \frac{m}{s^2} \cdot t \\ a = 2 \frac{m}{s^2} = cte \end{cases} \leftarrow$$

Ecuaciones horarias para la hormiga

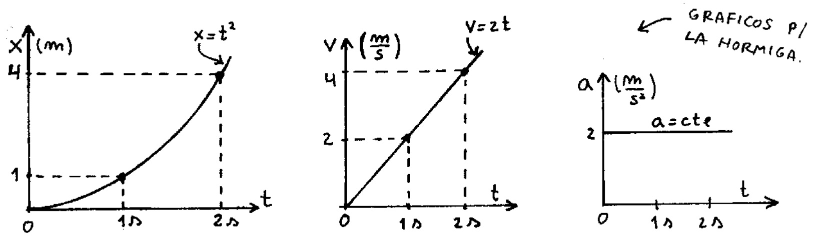
Ahora, dando valores a t voy sacando los valores de equis y de v. Hago esta tabla:

X	t
0	0
1 m	1 s
4 m	2 s

V	t
0	0
2 m/s	1 s
4 m/s	2 s

a	t
2 m/s²	0
2 m/s²	1 s
2 m/s²	2 s

Teniendo la tabla puedo representar las ecuaciones horarias.



Fin del Ejemplo

LA ECUACIÓN COMPLEMENTARIA (leer)

Hay una fórmula más que se usa a veces para resolver los problemas. La suelen llamar ecuación complementaria. La fórmula es ésta:

$$\boxed{V_f^{\,2} - V_0^{\,2} = 2\,a\,(X_f - X_0)} \Leftarrow$$

ECUACION COMPLEMENTARIA

Esta ecuación vendría a ser una mezcla entre la 1ra y la 2da ecuación horaria. La deducción de esta ecuación es un poco larga. Pero te puedo explicar de dónde sale. Seguime. Escribo las 2 primeras ecuaciones horarias. Despejo t de la 2da y lo reemplazo en la 1ra.

$$\begin{cases} x = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2}\, a \cdot t^2 \\ v_f = v_0 + a \cdot t \qquad \Rightarrow\ t = \dfrac{v_f - v_0}{a} \end{cases}$$

REEMPLAZO

Si vos te tomás el trabajex de reemplazar el choclazo y de hacer todos los pasos que siguen, termina quedándote la famosa ecuación complementaria. Sobre esta ecuación me gustaría que veas algunas cositas.

Primero:

Las ecuaciones horarias se llaman así porque en ellas aparece el tiempo. (El tiempo = la hora). La ecuación complementaria **NO** es una ecuación horaria porque en ella no aparece el tiempo.

Segundo: Esta ecuación no es una nueva fórmula. Es mezcla de las otras dos ecuaciones

Tercero:
Nunca es imprescindible usar la ecuación complementaria para resolver un problema. **Todo** problema de MRUV tiene que poder resolverse usando solamente la 1ª y la 2ª ecuación horaria. Lo que tiene de bueno la expresión $V_f{}^2 - V_0{}^2 = 2\ a\ (X_f - X_0)$ es que permite hallar lo que a uno le piden sin calcular el tiempo. Es decir, facilita las cuentas cuando uno tiene que resolver un problema en donde **el tiempo no es dato**.
Resumiendo: La ecuación complementaria ahorra cuentas. Eso es todo.

Ejemplo: **En el problema anterior, calcular la velocidad que tiene la hormiga picadorus después de recorrer 1 m.**

Usando la ecuación complementaria:

$$v_f^2 - v_0^2 = 2\,a\,.(x_f - x_0)$$

$$\Rightarrow \quad v_f^2 - 0 = 2\,.\,2\frac{m}{s^2}.(1\,m - 0)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{V_f = 2\,m/s} \quad \Leftarrow \quad \texttt{VELOCIDAD FINAL}$$

Lo hago ahora sin usar la ecuación complementaria: Escribo las ecuaciones horarias:

$$\text{De la 2}^{a}\text{ ecuación horaria: } v_f = v_0 + a\,.t$$

$$\Rightarrow \quad t = \frac{v_f - \overbrace{v_0}^{0}}{a}$$

$$\Rightarrow \quad t = \frac{v_f}{2\,m/s} \quad \leftarrow \quad \text{Tiempo que tardó la picadorus en recorrer 1 m}$$

$$\text{La 1}^{a}\text{ ec. horaria era: } x = x_0 + v_0 \cdot t + \tfrac{1}{2}\,a \cdot t^2$$

$$\Rightarrow \quad 1m = 0 + 0 \cdot t + \tfrac{1}{2} \cdot 2\frac{m}{s^2} \cdot t^2$$

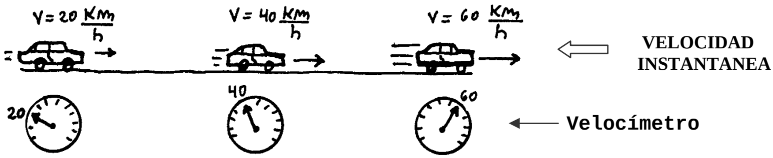
$$\text{Reemplazando t por } \frac{v_f}{2\,m/s^2}: \qquad 1m = \frac{1}{2} \cdot 2\frac{m}{s^2} \cdot \left(\frac{v_f}{2\,m/s^2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad 1m = \frac{m}{s^2} \cdot \frac{s^4}{m^2} \cdot \frac{v_f{}^2}{4}$$

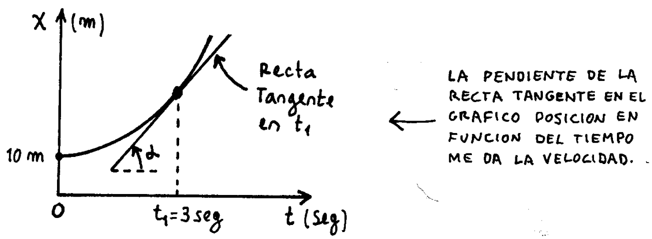
$$\Rightarrow \quad v_f = 2\,m/s \quad \text{(verifica)}$$

VELOCIDAD INSTANTÁNEA EN EL MRUV (leer)

En el movimiento uniformemente variado la velocidad va cambiando todo el tiempo. La velocidad instantánea es la que tiene el tipo justo en un momento determinado. (= en ese instante). El velocímetro de los autos va marcando todo el tiempo la velocidad instantánea.



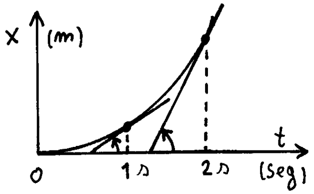
Ahora quiero que le prestes atención a una cuestión importante. Suponé que agarro el gráfico de posición en función del tiempo y trazo la tangente a la parábola en algún lugar. La pendiente de esta recta tangente me va a dar la velocidad instantánea en ese momento. Fijate:



Es decir, yo tengo la parábola. Ahora lo que hago es agarrar una regla y trazar la tangente en algún punto determinado de la curva (por ejemplo en t_1 = 3 seg). Esa recta va a formar un ángulo alfa y va a tener una determinada inclinación. O sea, una determinada pendiente. (Pendiente = inclinación). Midiendo esa pendiente tengo la velocidad instantánea en ese momento (a los 3 segundos).

Es un poco largo de explicar porqué esto es así, pero es así. Se supone que alguna vez tendrían que habértelo explicado en matemática. (Derivada y todo eso).

De este asunto puedo sacar como conclusión que **cuanto mayor sea la inclinación de la recta tangente al gráfico de posición, mayor será la velocidad del tipo en ese momento**. Por favor prestale atención a esta última frase y mirá el siguiente dibujito:



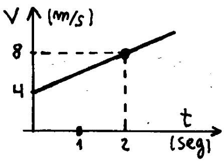
LA VELOCIDAD EN t = 2 seg ES MAYOR QUE LA VELOCIDAD EN t = 1 seg.

La idea es que entiendas esto:

En el gráfico la pendiente de la recta para t = 2 seg es mayor que la pendiente de la recta para t = 1 seg. Esto me dice la que la velocidad a los **2** seg es mayor que la velocidad en 1 seg . Esto es razonable. Este gráfico representa a un tipo que se mueve cada vez más rápido. Todo bien. Ahora, pregunto:...
¿ Cuál será la velocidad del tipo para t = 0 ? (ojo)
Rta: Bueno, ahí la recta tangente es horizontal ( ). Y la pendiente de una recta horizontal es **CERO**. Entonces la velocidad tendrá que ser **cero** .

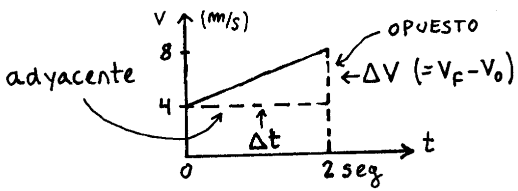
ANÁLISIS DE LA PENDIENTE y DEL ÁREA DEL GRÁFICO $V = V_{(t)}$

Supongamos que tengo un gráfico cualquiera de velocidad en función del tiempo. Por ejemplo éste:



UN GRÁFICO CUALQUIERA DE VELOCIDAD EN FUNCIÓN DE t

Este gráfico indica que lo que se está moviendo salió con una velocidad inicial de 4 m/s y está aumentando su velocidad en 2 m/s, por cada segundo que pasa.
Pensemos:
¿ Qué obtengo si calculo la pendiente de la recta del gráfico ?
Rta: Obtengo la aceleración. Esta aceleración sale de mirar el siguiente dibujito:

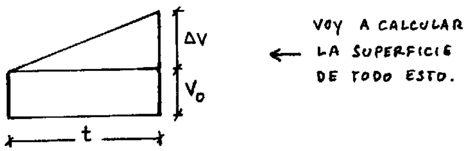


En este caso el opuesto es Δv (la variación de velocidad), y el adyacente es Δt (el intervalo de tiempo). De manera que, hacer la cuenta opuesto sobre adyacente es Hacer la cuenta delta V sobre delta t (Δv / Δt). Y eso es justamente la aceleración ! En este caso en especial daría así:

$$\text{Pend} = \frac{\text{op}}{\text{ady}} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{8\,\text{m/s} - 4\,\text{m/s}}{2\,\text{s} - 0\,\text{s}}$$

$$\rightarrow \qquad \text{Pend} = 2\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \qquad \leftarrow \text{Aceleración}$$

¿ Y si calculo el **área** que está bajo la recta que obtengo ? Veamos:



A ver si me seguís: El área del coso así $\triangle\!\square$ va a ser la de este $\square$ + la de este $\triangle$.

$$A_{\triangle\square} = A_{\square} + A_{\triangle} = b \cdot h + \frac{b \cdot h}{2} = v_0 \cdot t + \frac{t \cdot \overbrace{\Delta v}^{\Delta v = a \cdot t}}{2}$$

$$\Rightarrow A_{\triangle\square} = v_0 \cdot t + \tfrac{1}{2}\, a \cdot t^2 \qquad \leftarrow \text{Esto es } x - x_0$$

$$A_{\triangle\square} = \Delta x$$

$$\Rightarrow \qquad A_{\triangle\square} = \text{Espacio recorrido} \qquad \leftarrow \quad \text{Recordar}$$

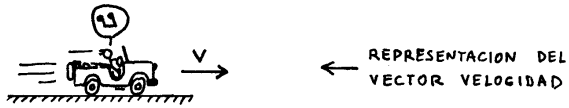
Ahora en el ejemplo que puse antes, el área va a ser:

$$A_{\triangle\square} = A_{\square} + A_{\triangle} = 2\ seg \cdot 4\,\frac{m}{s} + \frac{2seg \cdot (8\ m/s - 4\,m/s)}{2}$$

$$\Rightarrow \qquad A_{\triangle\square} = 12\ \text{m} \qquad \leftarrow \qquad \text{Espacio recorrido}$$

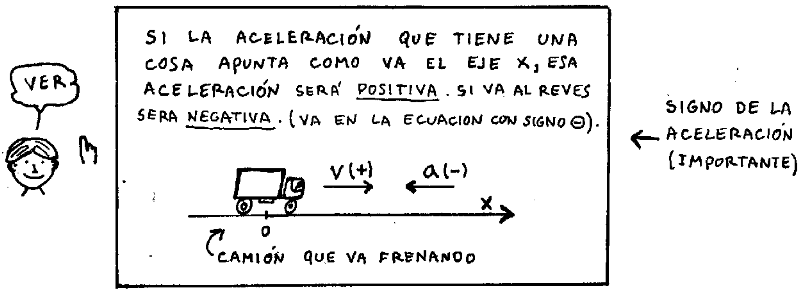
LA VELOCIDAD Y LA ACELERACIÓN SON VECTORES

La velocidad y la aceleración son vectores. ¿ Qué quiere decir esto ?
Rta: Quiere decir que puedo representar la velocidad y la aceleración por una flecha.



Si por ejemplo, la velocidad va así →, la flecha se pone apuntando así →. La situación del dibujito es el caso de un tipo que se mueve con velocidad constante. Fijate ahora estas otras 2 posibilidades:

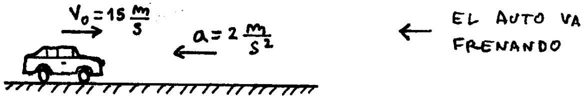
Lo que quiero que veas es que si el auto va para la derecha, la velocidad **siempre** irá para la derecha, pero la aceleración NO. (Es decir, puede que sí, puede que no. Esta cuestión es importante por lo siguiente: si la velocidad que tiene una cosa va en el mismo sentido que el eje x, esa velocidad será (+). Si va al revés será (-).
Lo mismo pasa con la aceleración (y acá viene el asunto). Fijate :



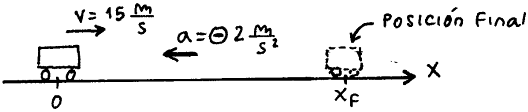
Ejemplo: **Un auto que viene con una velocidad de 54 Km/h frena durante 3 seg con una aceleración de 2m/s².**
¿ Qué distancia recorrió en ese intervalo ?.

Hago un esquema de lo que pasa. El auto viene a 54 por hora y empieza a frenar.

54 km por hora son 15 m/seg. (Dividí por 3,6). El dibujito sería este:



Ahora tomo un sistema de referencia. Lo tomo positivo para allá → . Planteo las ecuaciones horarias. Me queda esto:



$$\begin{cases} x_B = 0 + 15 \dfrac{m}{s} \cdot t + \frac{1}{2} \left(-2 \dfrac{m}{s^2} \right) \cdot t^2 \\ v_B = 15 \dfrac{m}{s} + \left(-2 \dfrac{m}{s^2} \right) \cdot \ t \\ a_B = -2 \dfrac{m}{s^2} = cte. \end{cases} \qquad \leftarrow \text{ Ecuaciones horarias.}$$

En la 1ª ec. horaria reemplazo t por 3 seg y calculo la posición final:

ver

$$x_f = 15 \frac{m}{s} \cdot 3\,seg - 1 \frac{m}{s} \cdot (\,3seg\,)^2$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x_f = 36\ m} \quad \leftarrow \quad \text{Posición final}$$

<u>Conclusión</u>: En los tres segundos el tipo recorre 36 metros. Si yo me hubiera equivocado en el signo de la aceleración y la hubiera puesto positiva, la cosa habría quedado así:

$$x_f = 15 \ \frac{m}{s} \cdot 3\,\text{seg} \ + \ 1 \frac{m}{s} \cdot (\ 3\text{seg}\ )^2$$

X_f = 54 m (Nada que ver)

Lo mismo hubiera pasado si hubiera calculado la velocidad final después de los 3 seg:

$$v_f = 15 \frac{m}{s} \ + \ 2 \frac{m}{s^2} \cdot 3\,\text{seg}$$

$$\Rightarrow \quad v_f = 21 \frac{m}{s} \qquad \leftarrow \text{HORROR !}$$

Esto no puede ser. La velocidad final tiene que dar **menor** que la inicial ! (El tipo está frenando).

Por eso: ojo con el signo de la aceleración. Si lo ponés mal, toooooodo el problema da mal.

CÓMO RESOLVER PROBLEMAS DE MRUV

Lo 1ro que hay que hacer es un dibujito de lo que el problema plantea y tomar un sistema de referencia. Una vez que uno tomó el sistema de referencia, escribe las ecuaciones horarias $X = X_0 + V_0\, t + \frac{1}{2}\, a\, t^2$ y $V_f = V_0 + a.t$. En las ecuaciones uno reemplaza por los datos y el problema tiene que salir.
Si el tiempo no es dato y querés ahorrarte cuentas, podés usar la ecuación complementaria $V_f^2 - V_0^2 = 2\, a\, (X_f - X_0)$

Por favor acordate de una cosa :

> Todo problema de MRUV tiene que poder resolverse usando la 1ra y la 2da ecuación horaria. **NADA MAS**. Puede ser que haya que usar primero una ecuación y después la otra. Puede ser que haya que combinar las ecuaciones. Puede ser cualquier cosa, pero todo problema tiene que salir de ahí.

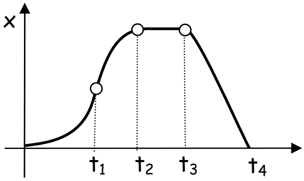
Aclaro esto porque a veces vos venís con **MILES** de ecuaciones de MRUV escritas en tu hoja de formulas. Está MAL. ¿ Miles de ecuaciones ? ¿ Por qué miles ? Las ecuaciones que permiten resolver un problema de MRUV son 2. O sea, te estás complicando.
Repito: Hay sólo DOS las ecuaciones que permiten resolver **cualquier** problema de MRUV. En algún caso tal vez pueda convenir usar la ecuación complementaria si el tiempo no es dato. Pero, insisto, eso se hace para ahorrarse cuentas, nada más. Usando solamente la 1ª y la 2ª ecuación horaria el problema TIENE QUE SALIR. Tal vez sea más largo, pero usando solo 2 ecuaciones el problema tiene que salir.

Fin teoría de MRUV

MRUV – EJERCICIOS SACADOS DE PARCIALES

PROBLEMA 1

Un móvil se desplaza en una trayectoria recta según el gráfico de la figura ¿ Cuál de los siguientes enunciados es correcto ?



☐ La velocidad es cero en t_1 y entre t_2 y t_3
☐ La aceleración es positiva entre 0 y t_2, y nula entre t_3 y t_4
☐ La aceleración es negativa entre 0 y t_1 y entre t_3 y t_4
☐ La velocidad es positiva entre 0 y t_2 y cero entre t_3 y t_4
☐ La velocidad es positiva entre 0 y t_2, y entre t_2 y t_3
☐ La aceleración es negativa entre t_1 y t_2 y nula entre t_3 y t_4

<u>SOLUCION</u>: La velocidad es la pendiente del gráfico de posición en función del tiempo. Es positiva si va así ↗ y negativa si va así: ↘

La aceleración es positiva si la parábola va a para arriba  (sonrie).

Es negativa si la parábola va para abajo  (Está triste)

Fijate que al principio hasta llegar a t_1 la posición crece cada vez más rápido con el tiempo. Es decir que el auto está yendo cada vez más rápido. Ahí la aceleración es positiva. La parábola está yendo para arriba. A partir de t_1 la parábola es negativa. Está yendo para abajo hasta llegar a t_2. Ahí la aceleración es negativa. La recta t_2- t_3 me dice que el auto está quieto entre t_2 y t_3. La recta t_3- t_4 me dice que el auto está yendo para atrás entre t_3 y t_4. (Velocidad negativa, aceleracón es cero).
Entonces, de todas esas afirmaciones, la única que es correcta es la última:

● La aceleración es negativa entre t_1 y t_2 y nula entre t_3 y t_4.

PROBLEMA 2

Un montacargas parte del primer piso (4 m de altura) acelerando durante 1 segundo con a = 2 m/s^2. Luego continúa con velocidad constante durante 7 segundos y por último frena hasta detenerse en un tramo de 1 m. Confeccionar los gráficos de a = a (t); v = v (t); x = x (t) de este movimiento indicando los puntos característicos.

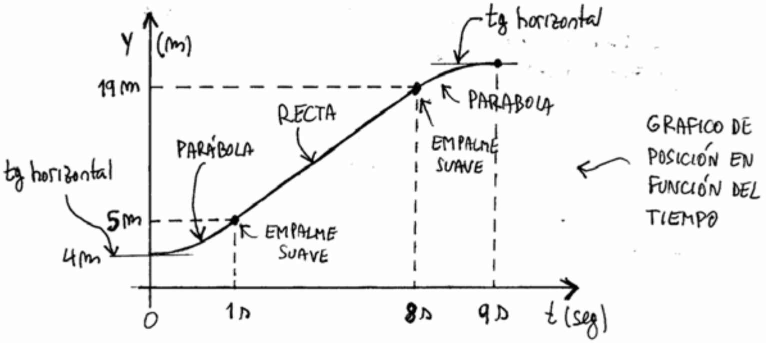
Uso las ecuaciones horarias del MRU y el MRUV, porque el montacargas por momentos se mueve con velocidad constante y en otros acelera o desacelera.

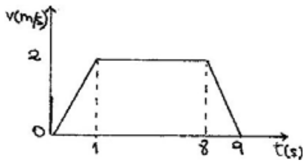
Las ecuaciones son: $\boxed{y = y_0 + v_o t + \frac{1}{2} a t^2}$ (1)

$\boxed{v = v_0 + at}$ (2) y $\boxed{y = y_0 + vt}$ (3)

Inicialmente el ascensor está en y_0 = 4 m y se mueve con MRUV. Usando la ecuación (1) calculo la posición para t = 1 segundo. Resulta: <u>y_1 = 5 m</u>. Después pasa a tener velocidad constante. Esa velocidad la calculo con la ecuación (2), teniendo en cuenta que sale con v_0= 0. Me da: <u>v = 2 m/s</u>. Con este dato calculo la posición luego de 7 s (el tiempo que se mueve con MRU). Uso la ec (3). Me da: <u>y_2 = 19 m</u>. En el último tramo frena, y lo que hay que hallar es la aceleración. Uso: $\boxed{v_f^{\ 2} - v_0^{\ 2} = 2a\Delta x}$.

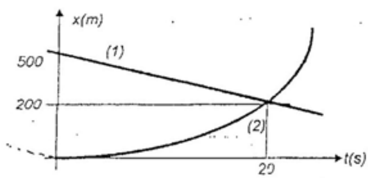
Reemplazando con los datos, tenemos: <u>a = - 2 m/s^2</u>. Sólo queda calcular el tiempo que tarda en frenar, utilizando (2). El tiempo es: <u>t = 1 s</u>. Con todos los datos que tenemos puedo hacer los tres gráficos. Quedan así:





PROBLEMA 3

El gráfico x = x(t) de la figura representa las ecuaciones horarias de dos móviles (1) y (2) que se mueven en la misma dirección. Hallar la veloc. del móvil (1) y la aceleración del móvil (2)



El móvil 1 se mueve con MRU, por eso el gráfico de x(t) es una recta. Entonces, para calcular la velocidad usamos: $\boxed{v_1 = \frac{\Delta x}{\Delta t}}$. En este caso, el móvil parte de los 500 m y llega a los 200 m, y tarda 20 s en hacerlo. Da: $\boxed{\mathbf{v_1 = -15\ m/s}}$. Para el móvil 2, que se mueve con MRUV, utilizamos: $\boxed{v = v_0 + at}$. El móvil parte del reposo, de los 0 m, llega a los 200 m y tarda 20 s en hacer el recorrido. Obtenemos: $\boxed{\mathbf{a_2 = 1\ m/s^2}}$.

PROBLEMA 4

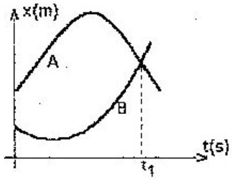
Eligiendo un sistema de referencia adecuado (origen y sentido positivo), indicar cuál de las afirmaciones es correcta.

a) En un movimiento uniformemente variado la velocidad nunca puede ser cero.
b) Siempre que la velocidad sea positiva la aceleración debe ser negativa
c) Siempre que la aceleración sea positiva aumenta el módulo de la velocidad
d) En un movimiento rectilíneo y uniformemente desacelerado (el móvil está frenando), la aceleración siempre es negativa
e) ninguna de las respuestas anteriores es correcta

a) FALSO. En el "tiro vertical", por ejemplo, la velocidad es nula en el punto más alto de la trayectoria.
b) FALSO. Depende del sistema de referencia: la velocidad es positiva si el móvil se dirige en sentido positivo, pero al tiempo que tiene velocidad positiva puede estar acelerando, y en ese caso la aceleración también es positiva.
c) FALSO. También depende del sistema de referencia. Por ejemplo, si en un tiro vertical tomamos la aceleración (hacia abajo) como positiva, el módulo de la velocidad se reduce a medida que el móvil asciende.
d) FALSO. Al igual que en los casos anteriores, depende del sistema de referencia.
Entonces, la respuesta correcta es la e)

PROBLEMA 5

Las curvas trazadas en el gráfico de la figura corresponden a dos móviles que se desplazan con movimiento uniformemente variado. Entonces:



a) En el instante t_1 los móviles tienen la misma velocidad.
b) Ambos móviles se detienen en el mismo instante
c) Inicialmente los móviles se desplazan en sentido contrario

d) Los móviles se desplazan siempre en el mismo sentido
e) Las aceleraciones de ambos móviles siempre tienen el mismo signo.
f) Ambos móviles no se encuentran nunca

Recordemos algunas cosas: la velocidad en un gráfico de x(t) está relacionada con la pendiente de la recta tangente al gráfico. Si la pendiente es positiva, la velocidad también lo es, y sucede al revés si la pendiente es negativa. Si la pendiente es horizontal, v es nula. Si en un gráfico x(t) las curvas de dos móviles se cruzan, es porque los móviles se encuentran. Finalmente, si la curva de x(t) es curva hacia arriba (forma de U) la aceleración es positiva. Si no, a es negativa.

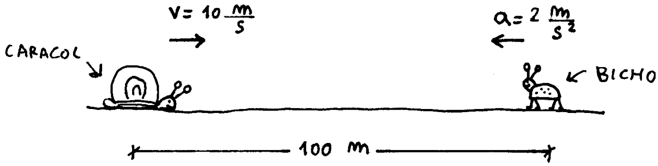
Ahora veamos las afirmaciones:

a) FALSO. Fijate que en t_1 las pendientes de las tangentes a las curvas son: una positiva (la de B) y otra negativa (la de A), entonces no pueden tener igual velocidad.
b) FALSO. Las velocidades de los móviles se anulan en momentos distintos.
c) VERDADERO. En t_0 las velocidades tienen signos opuestos, entonces los móviles se están moviendo en sentidos opuestos.
d) FALSO. Ambas curvas tienen un punto donde la velocidad se hace cero y después cambian las pendientes de las rectas tangentes a dichas curvas, por lo que cambian los signos de sus velocidades, o (lo que es lo mismo) el sentido en que se mueven los móviles.
e) FALSO. Si bien los móviles no cambian sus aceleraciones, la de A es negativa y la de B, positiva.
f) FALSO. Los móviles se encuentran en t_1.

ENCUENTRO EN MRUV (Lo toman)

Los problemas de encuentro en donde uno de los móviles (o los 2) se mueven con aceleración, se resuelven haciendo lo mismo que puse antes en la parte de MRU. Lo único que cambia ahora es que las ecuaciones en vez de ser las de un MRU son las de un MRUV. Te lo muestro con un ejemplo:

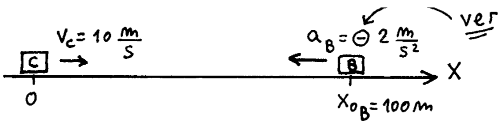
Dado el dibujo de la figura calcular: qué tiempo tardan en encontrarse los 2 móviles y el lugar donde se encuentran.



Este es un caso de encuentro entre un móvil que se mueve con velocidad constante (el caracol) y otro que se mueve con aceleración constante (el bicho).

Para resolver esto hago:

1 - Esquema de lo que pasa. Elijo sistema de referencia. Marco posiciones iniciales y velocidades iniciales.



2 - Planteo las ecuaciones horarias para cada móvil.

ver

Caracol (MRU)
$$\begin{cases} x_C = 0 + 10\,\frac{m}{s}\cdot t \\ v_C = 10\,\frac{m}{s} = cte \\ a_C = 0 \end{cases}$$

Bicho (MRUV)
$$\begin{cases} x_B = 100m + 0\cdot t + \frac{1}{2}\left(-2\,\frac{m}{s^2}\right)\cdot t^2 \\ v_B = 0 + \left(-2\,\frac{m}{s^2}\right)\cdot t \\ a_B = -2\,\frac{m}{s^2} = cte. \end{cases}$$

3 - Escribo la famosa condición de encuentro:

$$x_C = x_B \quad \text{para} \quad t = t_e.$$

4 - Igualo las ecuaciones y despejo el tiempo de encuentro t_e :
Esto es una ecuación cuadrática que se resuelve usando la fórmula que puse antes:

$$10\,\frac{m}{s}\cdot t_e = 100\,m - 1\,\frac{m}{s^2}\cdot t_e^2 \quad \Rightarrow \quad 1\,\frac{m}{s^2}\cdot t_e^2 + 10\,\frac{m}{s}\cdot t_e - 100\,m = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}$$

$$\Rightarrow\ t_{1,2} = \frac{-10\frac{m}{s} \pm \sqrt{\left(10\frac{m}{s}\right)^2 - 4\cdot 1\frac{m}{s^2}\cdot(-100m)}}{2\cdot 1\frac{m}{s^2}} \quad \Rightarrow\ t_{1,2} = \frac{-10\frac{m}{s} \pm \sqrt{500\frac{m^2}{s^2}}}{2\frac{m}{s^2}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{t_1 = 6{,}18\ seg}\ ;\quad \cancel{t_2 = -16{,}18\ seg} \qquad \leftarrow \text{Tiempo de encuentro}.$$

Es decir que el encuentro se produce a los 6,18 segundos. La solución negativa <u>no va</u>. Lo que me está diciendo el (**-**) es que los tipos se hubieran encontrado 16,18 segundos **<u>antes</u>** de salir. Como esta solución no tiene sentido físico, la descarto. (Significa: no la tomo en cuenta).
Para calcular la posición de encuentro reemplazo 6,18 seg en la 1ª ec. horaria.

$$x_c = 10\,\frac{m}{s}\cdot t \quad \Rightarrow \quad x_e = 10\,\frac{m}{s}\cdot t_e \ \ 6{,}18\text{ seg.}$$

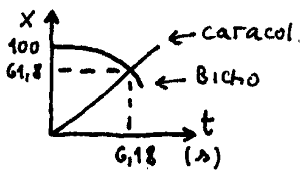
$$\Rightarrow \quad \boxed{x_c = 61{,}8\ m} \quad \leftarrow \ \text{Posición de encuentro.}$$

Para verificar puedo reemplazar t_e en la otra ecuación horaria y ver si da lo mismo. Tenía:

$$\Rightarrow x_e = 100\,m - 1\,\frac{m}{s}\cdot t_e^2$$

$$\Rightarrow x_e = 100\,m - 1\,\frac{m}{s}\cdot(\,6{,}18\ \ s\,)^2$$

$$\Rightarrow \underline{\ x_e = 61{,}8\,m\ } \quad (\text{verifica})$$

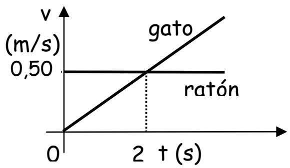


La solución del problema es: El encuentro entre el caracol y el bicho se produce a los 6,18 seg y a 61,8 m del caracol.

ENCUENTRO EN MRUV – PROBLEMAS SACADOS DE PARCIALES

PROBLEMA 1

Un ratón pasa en línea recta por el costado de un gato que descansa, pero este decide en ese instante perseguirlo. Siendo las gráficas de la figura las velocidades de ambos en función del tiempo.



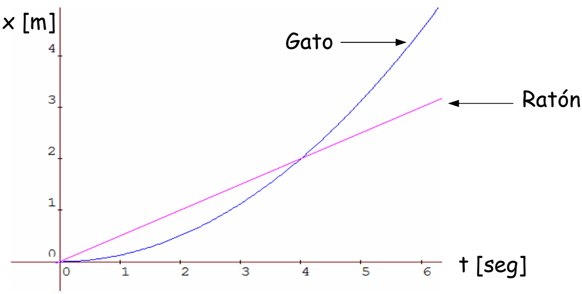
a) ¿Cuánto recorrió el gato para alcanzar al ratón?
b) En un mismo gráfico represente la posición de ambos en función del tiempo.

Veamos: los dos animales están haciendo un movimiento rectilíneo. El ratón va a velocidad constante: V_R = 0,5 m/seg. Y el gato al principio está en reposo y después se acelera con una aceleración de $a_G = \dfrac{0,5\ \text{m/s}}{2\ \text{s}} = 0,25\ \text{m/s}^2$.

Y estos son todos los datos que necesitamos para escribir las ecuaciones horarias de los movimientos, o sea la posición de cada uno en función del tiempo.

$$x_G = \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = 0,125\ \text{m/s}^2 \cdot t^2 \quad \text{y} \quad x_R = V_R \cdot t = 0,5\ \text{m/s} \cdot t$$

Esas dos ecuaciones podemos representarlas en el mismo gráfico, y nos queda algo así:



Si queremos saber cuándo se encuentran, todo lo que tenemos que hacer es resolver:

$$x_G = x_R \quad \Rightarrow \quad 0,125\ \text{m/s}^2 \cdot t^2 = 0,5\ \text{m/s} \cdot t$$

$$\Rightarrow \; t = 0 \quad ó \quad t = 4 \text{ seg}$$

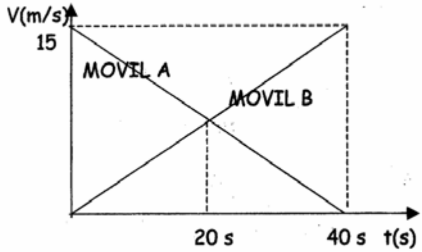
La solución t = 0 es bastante obvia, porque en ese momento el ratón pasó por al lado del gato y éste lo empezó a correr. La otra solución t = 4 segundos nos dice cuándo lo volvió a encontrar. Y si queremos saber a qué distancia, lo reemplazamos en:

$$x_G = 0{,}125 \text{ m/s}^2 \,.\, (4 \text{ s})^2 = 2 \text{ m} \qquad y \qquad x_R = 0{,}5 \text{ m/s} \,.\, 4 \text{ s} = 2 \text{ m}$$

Es decir que el gato alcanza al gato 4 segundos después, a 2m del lugar de donde salió.

PROBLEMA 2

El grafico adjunto muestra la velocidad en fución del tiempo para 2 móviles A y B que se mueven en una trayectoria rectilínea. En T=0 ambos móviles tienen la misma posición. ¿ Cuál de las siguientes afirmaciones es la correcta. ?



- ☐ Ambos móviles se cruzan a los 20 s
- ☐ Los móviles nunca se cruzan
- ☐ La aceleración del móvil A es mayor en valor absoluto a la del móvil B
- ☐ La distancia recorrida por ambos móviles al cabo de 40 segundos es distinta
- ☐ En los primeros 20 segundos la distancia recorrida por el móvil A es el triple que la recorrida por móvil B
- ☐ Ambos móviles se mueven en direcciones opuestas

Tenemos el gráfico de la velocidad en función del tiempo para dos móviles, y nos dan un montón de opciones para responder sobre la posición. Bueno, entonces lo primero que hay que saber es cómo sacar información sobre la posición a partir de un gráfico de velocidad en función del tiempo.

Muy simple: la distancia recorrida por el móvil desde el instante inicial hasta un tiempo t es el área bajo la curva v = f(t) desde t = 0 hasta t = t.

Si tuviéramos el caso inverso, y quisieramos conocer la velocidad instantánea a partir del gráfico de posición en función del tiempo es más simple: es la pendiente de la curva x= f(t).

Los dos móviles parten de la misma posición inicial. Entonces, se cruzarán cuando el área bajo las dos curvas sea la misma, o sea para t = 40 segundos.

En el gráfico nos marcan el tiempo t = 20 segundos como un instante particular, pero en realidad no pasa nada especial, tan sólo se da la casualidad de que los dos móviles tienen la misma velocidad; pero la posición no es la misma; ya que el área bajo las dos curvas no es la misma.

⇒ Mas aún, la distancia recorrida por el móvil A es el triple que la recorrida por el móvil B para t = 20 segundos

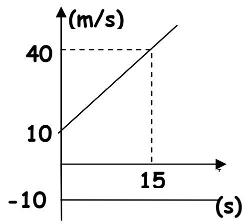
---

PROBLEMA 3

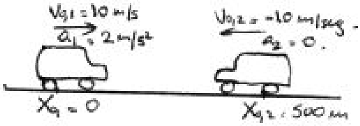
El gráfico adjunto representa la velocidad en función del tiempo para dos autos que se mueven uno hacia el otro, por una carretera recta. Si en t = 0s los autos están distanciados 500 m:

1.a.- hallar la distancia que los separará transcurridos 20 segundos,

1.b.- graficar en un mismo par de ejes, posición en función del tiempo para ambos vehículos (indicar valores característicos sobre los ejes).



Tenemos dos autos moviéndose en una carretera recta. En palabras difíciles: tenemos dos móviles que realizan movimientos rectilíneos. La única diferencia entre los dos es que uno se mueve a velocidad constante (movimiento rectilíneo uniforme M.R.U.), y el otro presenta una aceleración constante (movimiento rectilíneo uniformemente variado M.R.U.V.).



Todos los datos que necesitamos los podemos sacar del gráfico de velocidad en función del tiempo que nos dan. El auto 2 tiene una velocidad constante V_2 = - 10 m/seg (va hacia atrás). Y la aceleración del auto 1 la podemos calcular como

$$a_1 = \frac{\Delta V_1}{\Delta t} = \frac{40 \text{ m/seg} - 10 \text{ m/seg}}{15 \text{ seg}} = \frac{30 \text{ m/seg}}{15 \text{ seg}}$$

$$a_1 = 2 \text{ m/s}^2$$

Toda la física del problema se termina una vez que encontramos las ecuaciones horarias para los movimientos de los dos autos. Después, son puras cuentas. Entonces, siempre lo primero que hay que hacer es buscar las ecuaciones horarias.

Auto 1 = M.R.U.V.) $x_1(t) = x_{0,1} + V_{0,1} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a_1 \cdot t^2 = 10 \text{ m/s} \cdot t + 1 \text{ m/s}^2 \cdot t^2$

$$V_1(t) = V_{0,1} + a_1 \cdot t = 10 \text{ m/s} + 2\text{m/s}^2 \cdot t$$

Auto 2 = M.R.U.) $x_2(t) = x_{0,2} + V_2 \cdot t = 500 \text{ m} - 10 \text{ m/s} \cdot t$

$$V_2 = -10 \text{ m/s.}$$

Ahora sí, con esto podemos responder cualquier pregunta. Veamos qué nos piden:

a) La distancia que los separa a t = 20 seg. Bueno, con las ecuaciones anteriores podemos calcular la ubicación exacta de cada uno de los autos en ese instante.

$$x_1 = 10 \text{ m/s} \cdot 20 \text{ seg} + 1 \text{ m/s}^2 \cdot (20 \text{ s})^2 = 600 \text{ m}$$

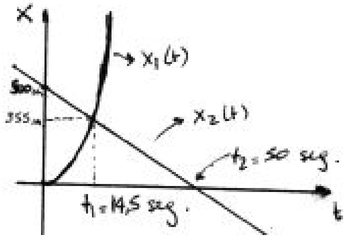
$$x_2 = 500 \text{ m} - 10 \text{ m/s} \cdot 20 \text{ s} = 300 \text{ m}$$

Es decir que los separa una distancia de D = 600 m – 300 m

$$\Rightarrow \mathbf{D = 300 \text{ m}}$$

b) Antes de dibujar el gráfico de posición en función del tiempo, pensemos un poco. El auto 2 se mueve a velocidad constante hacia atrás: entonces, el gráfico de su posición en función del tiempo va a ser una recta que decrece con el tiempo.

El gráfico de la posición del auto 1 deberá crecer con el tiempo, porque se está moviendo hacia adelante. Y se mueve cada vez más rápido (se está acelerando, la velocidad va aumentando), entonces el gráfico no será una recta, sino una parábola. Todo esto se puede ver en el gráfico de posición en función del tiempo para los 2 autos:



También nos piden que señalemos valores importantes sobre ambos ejes. Un punto que parece importante es el instante en el cual se cruzan los dos autos, o sea, cuando $x_1 = x_2$. Y esto lo podemos calcular directamente resolviendo la ecuación:

$$x_1(t) = x_2(t) \Rightarrow 10\ m/s \,.\, t + 1\ m/s^2 \,.\, t^2 = 500\ m - 10\ m/s \,.\, t$$

$$\Rightarrow 1\ m/s^2 \,.\, t^2 + 20 m/s \,.\, t - 500\ m = 0$$

Esta es una ecuación cuadrática, y ya conocemos la fórmula para resolverla; así que te digo directamente el resultado: $t = 14{,}5$ seg ó $t = -34{,}5$ seg. Obviamente, la segunda solución no tiene sentido, porque un tiempo negativo no nos interesa (eso es antes de que los autos empiecen a moverse, no tiene sentido). Entonces, los autos se cruzan en el instante $t_1 = 14{,}5$ segundos. Y ahora que conocemos ese dato, podemos averiguar en qué posición se cruzan.

$$x_1(t_1) = 10\ m/s \,.\, 14{,}5\ seg + 1\ m/s^2 \,.\, (14{,}5\ s)^2 = 355{,}25\ m$$

$\Rightarrow$ **Se cruzan a los 355,25 m**

PROBLEMA 4

Dos móviles marchan hacia un mismo punto en la misma dirección y sentido contrario. Uno de ellos marcha hacia la derecha a una velocidad de 72 km/h constante, y en el mismo instante a 180 metros se encuentra otro móvil que tiene una velocidad de 54 km/h hacia la izquierda y acelera a 2 m/s^2. Hallar la posición y velocidad de ambos en el instante de encuentro.

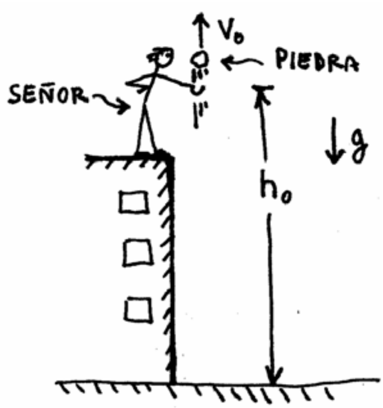
Lo primero que hay que hacer es pasar los datos de velocidad a m/s: $v_1 = 20\ m/s$, $v_{02} = -15 m/s$ (porque van en sentido contrario). Ahora, escribimos las ecuaciones horarias del encuentro para los dos móviles, recordando que el 1 va con MRU y el 2, con MRUV:

Móvil 1: $\boxed{x_e = 20\,{}^{m}\!/\!{}_{s}\,.t_e}$ Móvil 2: $\boxed{x_e = 180m - 15\,{}^{m}\!/\!{}_{s}\,t_e - {}^{1}\!/\!{}_{2}\,2\,{}^{m}\!/\!{}_{s^2}\,t_e^2}$

Igualando las dos ecuaciones obtenemos una ecuación cuadrática, que resolvemos con la fórmula resolverte. Descartamos el valor negativo que obtenemos y resulta: <u>t_e = 4,55 s</u>. Reemplazando este valor en alguna de las dos ecuaciones horarias podemos calcular el valor de la posición del encuentro. Esta es: $\boxed{\mathbf{x_e = 91\ m}}$.
La velocidad del móvil 1 en el momento del encuentro es la misma que al principio, porque <u>en el MRU la velocidad es constante</u>.
Para el móvil 2 usamos la ecuación: $\boxed{v_{2e} = v_{02} + a.t_e}$
Resulta: $\boxed{\mathbf{v_{2e} = -24{,}1\ m/s}}$.

FIN MRUV

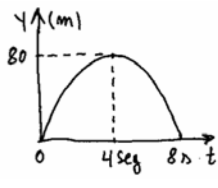
CAÍDA LIBRE Y TIRO VERTICAL

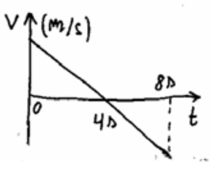


$$\begin{cases} y = y_0 + v_{0y}\, t + \frac{1}{2} g t^2 \\ v_f = v_0 + g t \\ a = cte = g \end{cases}$$

ECUACIONES HORARIAS PARA CAIDA LIBRE Y TIRO VERTICAL

Posición en función del tiempo





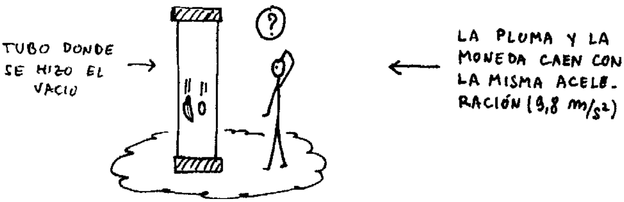
Velocidad en función del tiempo

CAÍDA LIBRE y TIRO VERTICAL

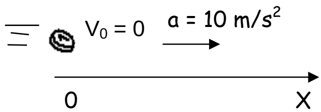
Suponé que un tipo va a la ventana y deja caer una cosa. Una moneda, por ejemplo.

Claro, el tipo tiene razón. Cuando uno deja caer una cosa, lo que cae, cae con MRUV. Toda cosa que uno suelte va a caer con una aceleración de 9,8 m/s^2. Puede ser una moneda, una pluma o un elefante. Si suponemos que no hay resistencia del aire, todas las cosas caen con la misma aceleración.

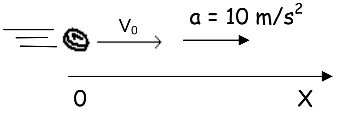
¿ Quién descubrió esto ? Obvio. Galileo . (IDOLO !).
Este hecho es medio raro pero es así. En la realidad real, una pluma cae más despacio que una moneda por la resistencia que opone el aire. Pero si vos sacás el aire, la pluma y la moneda van a ir cayendo todo el tiempo juntas. (Este es un experimento que se puede hacer).



Esta aceleración con la que caen las cosas hacia la Tierra se llama aceleración de la gravedad. Se la denomina con la letra **g** y siempre apunta hacia abajo.
En el caso de la moneda que cae yo puedo "acostar" al problema y lo que tendría sería un objeto que acelera con aceleración 10 m / s ^{2}. Vendría a ser algo así :

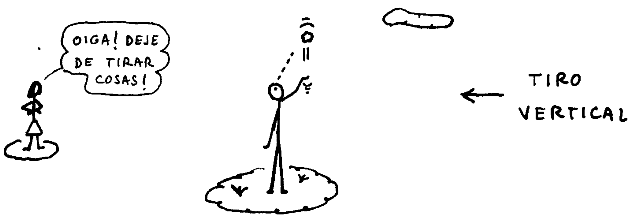


Y si lo hubiera tirado para abajo, tendría velocidad inicial, es decir, esto:

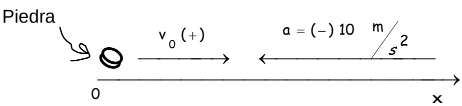


Es decir que un problema de caída libre no se diferencia para nada de un problema de MRUV. Es más, la caída libre **ES** un MRUV. Para resolver los problemas de caída libre o tiro vertical puedo aplicar los mismos razonamientos y las mismas ecuaciones que en MRUV. Todo lo mismo. La única diferencia es que antes todo pasaba en un eje horizontal. Ahora todo pasa en un eje vertical. Lo demás es igual.

Vamos ahora a esto. Pregunta:
¿ Y qué pasa con el tiro vertical ?.
Rta: Y bueno, con el tiro vertical es la misma historia. Tiro vertical significa tirar una cosa para arriba.

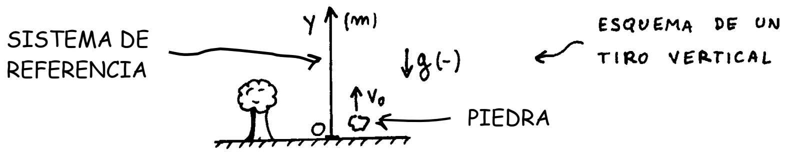


Si yo acuesto una situación de tiro vertical, lo que voy a obtener va a ser esto:



Es decir, tengo la situación de una cosa que sale con una determinada velocidad inicial y se va frenando debido a una aceleración negativa.
¿ Y esto qué es ?
Rta: Y bueno, es un movimiento rectilíneo uniformemente variado.

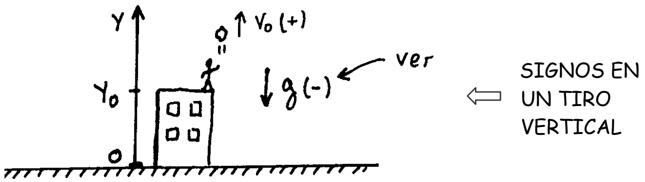
Si hiciera un esquema tomando un eje vertical **y**, tendría algo así:



Conclusión:
Tanto la caída libre como el tiro vertical son casos de movimiento rectilíneo uniformemente variado. Los problemas se piensan de la misma manera y se resuelven de la misma manera. Las ecuaciones son las mismas. Los gráficos son los mismos.
Caída libre y tiro vertical no son un tema nuevo, son sólo la aplicación del tema anterior.
El que sabe MRUV, sabe caída libre y tiro vertical. (Sólo que no sabe que lo sabe).

CÓMO RESOLVER PROBLEMAS DE CAÍDA LIBRE y TIRO VERTICAL

1 - Hago un esquema de lo que pasa. Sobre ese esquema tomo un eje vertical **y**. Este eje lo puedo poner apuntando para arriba o para abajo (como más me convenga) Puede ser algo así:



Sobre este esquema marco los sentidos de V_0 y de g. Si V_0 y g apuntan en el mismo sentido del eje **y**, serán (+) .Si alguna va al revés del eje **y** será (**-**) .(como en el dibujo). El eje horizontal x puedo ponerlo o no. No se usa en estos problemas pero se puede poner.

2 - La aceleración del movimiento es dato. Es la aceleración de la gravedad (g). El valor verdadero de g en La Tierra es 9,8 m/s^2. Pero generalmente para los problemas se la toma como 10 m/s^2.

Para caída libre y tiro vertical tengo siempre 2 ecuaciones: La de posición y la de velocidad. Estas 2 ecuaciones son las que tengo que escribir.También puedo poner la ecuación complementaria que me puede llegar a servir si el tiempo no es dato.

$$\begin{cases} y = y_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} g \cdot t^2 \\ v_f = v_0 + g \cdot t \\ a = cte = g \end{cases} \quad \leftarrow \quad \text{Ecuaciones Horarias}$$

$$v_f^{\ 2} - v_0^{\ 2} = 2 \cdot g \cdot (y_f - y_0) \qquad \leftarrow \text{Ec. Complementaria}$$

Si, por ejemplo en el dibujo V_0 fuera 10 m/s, la aceleración de la gravedad fuera 10 m/s^2 y la altura del edificio fuera de 20 m, las ecuaciones horarias quedarían:

$$\begin{cases} Y = 20\,m + 10\,\frac{m}{s} \cdot t + \frac{1}{2}\left(-10\frac{m}{s^2}\right) \cdot t^{\,2} \\ V_f = 10\frac{m}{s} + \left(-10\frac{m}{s^2}\right) \cdot t \\ a = -\,10\,\frac{m}{s^2} = cte \end{cases} \qquad \leftarrow \quad \text{Reemplacé por los Datos}$$

3 - Usando las primeras 2 ecuaciones horarias despejo lo que me piden.

En los problemas de caída libre y T vertical suelen pedirte siempre las mismas cosas. Puede ser la altura máxima (h_{max}). Puede ser el tiempo que tarda en llegar a la altura máxima. (t_{max}). Puede ser la velocidad inicial con la que fue lanzado. Puede ser el tiempo que tarda en caer ($t_{caída}$). Siempre son cosas por el estilo.

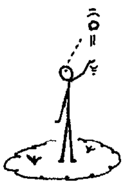
<u>EJEMPLO 1</u> : (Tiro vertical)

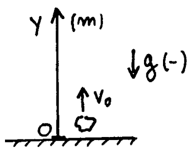
Un señor tira una piedra para arriba con una velocidad inicial de 40 m / s . Calcular :

a) – La altura máxima.
b) – El tiempo tarda en llegar a la altura máxima.
c) -- Trazar los gráficos de posición, velocidad y aceleración en función del tiempo.

Bueno, lo primero que hago es un dibujito de lo que plantea el problema. Elijo mi sistema de referencia. En este caso lo voy a tomar positivo para arriba. ⟹ g = (-) .

DIBUJO ⟹





⟸ SISTEMA DE REFERENCIA

Las ecuaciones horarias para un tiro vertical son :

$$Y = Y_0 + V_{0y}\ t + \tfrac{1}{2}\ g\ t^2$$

$$V_{fy} = V_{0y} + g\ t$$

Reemplazo por los datos. Fijate que tomé el sistema de referencia para arriba. Quiere decir que g es negativa. La voy a tomar como 10 m/s^2. Pongo el sistema de referencia exactamente en la mano del tipo. Me queda: ⟹

$$Y = 0 + 40\ m/s\ t + \tfrac{1}{2}\ (-10\ m/s^2) \cdot t^2$$

$$V_f = 40\ m/s + (-10\ m/s^2) \cdot t$$

Fijate que cuando el cuerpo llega a la altura máxima su velocidad es cero. Entonces reemplazo V_f por cero en la ecuación de la velocidad. Me queda:

$$V_f = 0 \rightarrow 0 = 40\ m/s + (-10\ m/s^2) \cdot t_{max}$$

Despejo t max :

$$t_{max} = \frac{-40\ m/s}{-10\ m/s^2}$$

$$\boxed{t_{max} = 4\ seg}$$ ⟸ Tiempo que tarda en llegar a la altura máxima

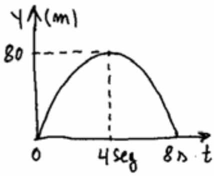
Reemplazando t_{max} = 4 segundos en la ecuación de la posición, calculo la altura máxima:

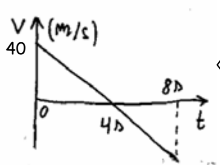
$$Y_{max} = 40\ m/s \cdot 4\ s + \tfrac{1}{2}\ (-10\ m/s^2) \cdot (4\ s)^2$$

$$\boxed{Y_{max} = 80\ m}$$ ⟸ Altura máxima

Para construir los gráficos puedo dar valores o puedo hacerlos en forma cualitativa. Grafico cualitativo quiere decir indicar la forma que tiene sin dar todos los valores exactos. Podés hacerlos como quieras. En este caso quedan así:

Posición en función del tiempo ⟹





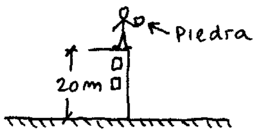
⟸ Velocidad en función del tiempo

Fijate esto: El tiempo que la piedra tardó en llegar a la altura máxima dio 4 segundos. El tiempo que la piedra tarda en tocar el suelo da 8 segundos. (El doble).
¿ Es eso una casualidad ?
¿ Tendrías manera de comprobar que el tiempo que tarda la piedra en caer tiene que ser sí o sí 8 segundos ?
(Pensarlo)

Ejemplo 2 **(CAIDA LIBRE Y TIRO VERTICAL)**

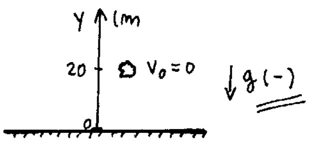
Un señor está parado a 20 m de altura. Calcular qué tiempo tarda y con qué velocidad toca el suelo una piedra si :
a)- La deja caer.
b)- La tira para abajo con V_0 = 10 m/s.
c)- La tira para arriba con V_0 = 10 m/s.

Hago un esquema de lo que pasa. Tengo el tipo arriba de la terraza que tira la piedra:



← ESQUEMA

Voy al caso **a)** donde el tipo deja caer la piedra. Elijo mi sistema de referencia y marco v_0 y g con su signo. En este caso V_o vale cero porque la piedra se deja caer.



← SIST. DE REFERENCIA

Reemplazo por los valores. Voy a calcular todo con g = 10 m/s^2 . Las ecuaciones del movimiento quedan así :

$$\begin{cases} Y = 20\,m + \frac{1}{2}\left(-10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)\cdot t^2 \\ V_f = 0 + \left(-10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)\cdot t \\ a = -\,10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = cte \end{cases}$$

⇦ ECUACIONES HORARIAS

El tiempo que la piedra tarda en caer lo despejo de la 1ª ecuación. Cuando la piedra toca el suelo su posición es y = 0. Entonces en la primera ecuación reemplazo **y** por cero. Me queda :

$$0 = 20\,\mathrm{m} - \tfrac{1}{2} 10 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} t^2$$

$$\Rightarrow \quad 5 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} t^2 = 20\,\mathrm{m} \Rightarrow t^2 = \frac{20\,\mathrm{m}}{5\,\mathrm{m/s}^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{t = 2\,\mathrm{seg}} \leftarrow \text{Tiempo que tarda}$$

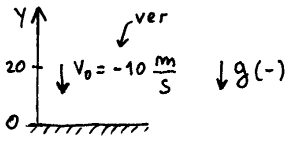
Reemplazando este tiempo en la segunda ecuación tengo la velocidad con que toca el piso :

$$V_f = -10 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 2\,\mathrm{seg}$$

$$\boxed{V_f = -20 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} \quad \leftarrow \quad \text{Velocidad de la piedra al tocar el suelo.}$$

El signo negativo de V_f me indica que la velocidad va en sentido contrario al eje **y**. Siempre conviene aclarar esto.

b) - La tira para abajo con V_0 = 10 m/s.
Tomo el mismo sistema de referencia que tomé antes. Eje Y positivo vertical hacia arriba. Ahora la velocidad inicial es (-) porque va al revés del eje Y. (Atento).



Igual que antes, cuando la piedra toca el suelo, y = 0. Entonces:

$$(y = 0) \Rightarrow \quad 0 = 20\,\mathrm{m} - 10 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot t - 5 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} t^2$$

$$\Rightarrow \underbrace{5 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}_{a} \cdot t^2 + \underbrace{10 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}_{b} \cdot t \underbrace{- 20\,\mathrm{m}}_{c} = 0$$

Esto es una ecuación cuadrática. Fijate que te marqué los valores de a, b y c. Entonces reemplazo los valores de a, b y c en la fórmula de la ecuación cuadrática.

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

$$\Rightarrow \quad t_{1,2} = \frac{-10\frac{m}{s} \pm \sqrt{\left(10\frac{m}{s}\right)^2 - 4\,.\,5\ \frac{m}{s^2}.(-20\,m)}}{2\,.\,5\ \frac{m}{s^2}}$$

Haciendo las cuentas :

$$\Rightarrow \quad t_{1,2} = \frac{-10\frac{m}{s} \pm 22{,}36\frac{m}{s}}{10\frac{m}{s^2}}$$

$$\Rightarrow \quad t_1 = \cancel{-3{,}236\,seg} \ ; \quad \boxed{t_2 = 1{,}236\,seg} \leftarrow \text{ Tiempo de caida.}$$

Taché la 1ª solución porque tiempos negativos no tienen sentido físico. Ahora voy a reemplazar este tiempo de 1,236 segundos en la otra ecuación que es $V_f = V_o + g\ t$ y calculo la velocidad final. (= al tocar el piso). Me queda :

$$V_f = -10\ m/s - 10\ m/s^2\ .\ 1{,}236\ seg$$

$$\boxed{V_f = -22{,}36\ m\ /\ s} \quad \Leftarrow \quad \text{VELOCIDAD FINAL}$$

c) - Cuando el tipo la tira para arriba con V_0 = 10 m/s. El signo de V_o cambia. Ahora V_0 es positiva. Pero... Ojaldre ! El signo de g **NO** cambia ! El vector aceleración de la gravedad sigue apuntando para abajo (como siempre). Entonces el vector aceleración va al revés del eje **Y** ➔ SU SIGNO ES NEGATIVO. Las ecuaciones horarias quedan:

$$Y = 20\ m + 10\ m/s\ t - \tfrac{1}{2}\ 10\ m/\ s^2\ t^2$$

$$V_f = 10\ m/s - 10\ m/s\ t$$

Haciendo lo mismo que en el caso anterior me queda

$$(y=0) \ \Rightarrow \quad 0 = 20\,m + 10\frac{m}{s} \cdot t - 5\frac{m}{s^2} t^2$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{5\frac{m}{s^2}}_{a} \cdot t^2 - \underbrace{10\frac{m}{s}}_{b} \cdot t \underbrace{-20\,m}_{c} = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

$$\Rightarrow \; t_{1,2} = \frac{10\,\frac{m}{s} \pm \sqrt{\left(10\,\frac{m}{s}\right)^2 - 4.5\;\frac{m}{s^2}.(-20\,m)}}{2.5\;\frac{m}{s^2}}$$

$\Rightarrow$ <u>t_{caida} = 3,236 seg</u>

Igual que antes, anulé la solución negativa porque no tiene significado físico. Para calcular la velocidad con que la piedra toca el piso hago:

$$V_f = 10\ m/s - 10\ m/s \times 3{,}236\ s$$

$\rightarrow$ <u>V_f = - 22,36 m/s</u>

Ahora fijate esto: en los casos b) y c) el tiempo de caída no dio lo mismo. Eso es lógico. En un caso estoy tirando la piedra para arriba y en el otro para abajo. Cuando la tiro para arriba tiene que tardar mas. Pero en los casos b) y c) la velocidad de la piedra al tocar el piso... ¡ dio lo mismo ! (surprise)
Hummmmm....
¿ Estará bien eso ?
Esto me estaría diciendo que al tirar una piedra con una velocidad inicial "ve cero" para arriba o para abajo, la piedra toca el piso con la misma velocidad. (Raro).
¿ Podrá ser eso ?...
<u>Rta:</u> <u>Sí</u>.
No es que "puede ser que sea así".
<u>TIENE</u> que ser así. (Pensalo).

Fin Teoría de Caída
Libre y Tiro Vertical

PROBLEMAS SACADOS DE PARCIALES

1) - MARCAR LAS 2 AFIRMACIONES CORRECTAS. DESPRECIANDO LA INFLUENCIA DEL AIRE, CUANDO SE LANZA VERTICALMENTE HACIA ARRIBA UN CUERPO:

a) El tiempo de subida hasta la altura máxima es menor que el tiempo de caída hasta la posición inicial.
b) La intensidad de la velocidad inicial es mayor que la intensidad de la velocidad cuando pasa bajando por la misma posición inicial.
c) El tiempo de subida hasta la altura máxima es mayor que el tiempo de caída hasta la posición inicial.
d) La intensidad de la velocidad inicial es igual que la intensidad de la velocidad cuando pasa bajando por la misma posición inicial.
e) La aceleración es un vector vertical hacia abajo cuando el cuerpo sube y hacia arriba cuando baja.
f) La aceleración es la misma cuando sube y cuando baja, pero es cero en la altura máxima.
g) La aceleración es la misma cuando sube, cuando baja y en la altura máxima.

▢ a y b ▢ d y e ▢ a y g ▢ b y f ▢ d y g ▢ c y f

Veamos algunas cosas sobre el tiro vertical:

- Si despreciamos el efecto del aire, la única fuerza que actúa es el peso. Entonces, la aceleración es la de la gravedad hacia abajo, en todo instante.
- Las ecuaciones horarias para este movimiento son:

$$V(t) = V_0 - g.t$$

$$\text{y} \quad h(t) = V_0.t - \tfrac{1}{2}.g.t^2$$

Si elevamos la expresión para la velocidad al cuadrado y reemplazando, llegamos a: $V^2 = V_0^{\,2} - 2.g.h$. Es decir que la velocidad sólo depende de la posición: es la misma las dos veces que pasa por la posición inicial: cuando sube y cuando baja. Como la aceleración es siempre la misma, el tiempo que tarda en frenarse desde la velocidad inicial V_0 hasta 0 (tiempo de subida) es igual al que tarda en acelerarse de vuelta desde el reposo hasta V_0, o sea hasta la posición inicial de vuelta (tiempo de caída.

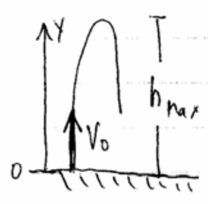
O sea que la combinación de respuestas correctas son la ● **d y g**

2) - UN PROYECTIL ES LANZADO VERTICALMENTE HACIA ARRIBA CON CIERTA VELOCIDAD INICIAL QUE LE PERMITE ALCANZAR UNA ALTURA MÁXIMA H. EN EL INSTANTE EN QUE SU VELOCIDAD SEA LA MITAD DE LA VELOCIDAD INICIAL HABRÁ ALCANZADO UNA ALTURA h TAL QUE:

▢ h = ½ H ▢ h = ¼ H ▢ h = 3/4 H ▢ h = 1/3 H ▢ h = 4/5 H ▢ h = 7/8 H

SOLUCIÓN

En este problema los datos están todos con letras. Yo lo voy a resolver con letras. Si te resulta muy complicado podés darle valores. (Por ejemplo, H_{MAX} = 100 m)
Hagamos un dibujito.



⇦ ESQUEMA DEL TIRO VERTICAL

Planteo la ecuación complementaria para la velocidad. $V_F^2 - V_O^2 = 2\,a\,(Y_F - Y_0)$
La ecuación complementaria es de MRUV, pero un tiro vertical también es un MRUV, así que también se puede usar. Me queda :

$$\overset{0}{\cancel{V_F^2}} - V_0^2 = 2g\,h_{max} \Rightarrow H_{max} = \frac{-V_0^2}{2g}$$

$$\text{Si } V_F = \frac{V_0}{2} ; \Rightarrow V_0^2 = \ominus\, 2 H_{max}\, g \quad (1)$$

Ahora hago algunas cuentas:

$$V_F^2 - V_0^2 = 2gh \Rightarrow \left(\frac{V_0}{2}\right)^2 - V_0^2 = 2gh$$

$$\frac{V_0^2}{4} - V_0^2 = 2gh \Rightarrow -\frac{3V_0^2}{4} = 2gh \Rightarrow h = \frac{-3V_0^2}{8g}$$

$$\text{Por } (1) \quad V_0^2 = \ominus\, 2H_{max}\, g \Rightarrow h = \cancel{\ominus}\, 3\,\frac{(\cancel{-2}\, H_{max}\, \cancel{g})}{8\cancel{g}}$$

$$\Rightarrow \boxed{h = \frac{3}{4} H_{max}}$$

3) - PARA MEDIR LA ATRACCIÓN GRAVITATORIA DE UN PLANETA SIN ATMÓSFERA SE DEJA CAER UN OBJETO DESDE CIERTA ALTURA h. ÉSTE TARDA 16 s EN LLEGAR AL SUELO, CON UNA VELOCIDAD DE 40 m/s. ENTONCES, LA ACELERACIÓN DE LA GRAVEDAD EN ESE PLANETA ES, EN m/s^{2}:

a) 0,80 b) 0,40 c) 5,00 d) 10,00 e) 1,25 f) 2,50

El problema dice "se deja caer". Quiere decir que es una caída "caída libre", o sea, un MRUV con velocidad inicial CERO. Escribo las ecuaciones horarias, tomando y_0 = 0, y sistema de referencia positivo hacia abajo:

$$\boxed{h = \tfrac{1}{2}.g.(16s)^2} \quad (1)$$

$$\text{y} \quad \boxed{40\, {}^{m}\!/\!_{s} = g.16s} \quad (2).$$

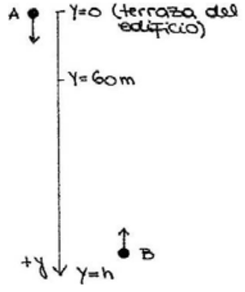
Con la segunda ecuación me alcanza para calcular la aceleración de la gravedad. Ésta es: $\boxed{\mathbf{g = 2{,}5\ m/s^2}}$. **Entonces, la respuesta correcta es la f).**

---

4 - SE DEJA CAER UNA PIEDRA <u>A</u> DESDE LA TERRAZA DE UN EDIFICIO. CUANDO LA PIEDRA PASA POR UNA VENTANA UBICADA A 60 m POR DEBAJO DEL NIVEL DE LA TERRAZA, SE ARROJA VERTICALMENTE DESDE EL PISO OTRA PIEDRA <u>B</u> CON UNA VELOCIDAD INICIAL DE 20 m/s. AMBAS PIEDRAS SE ENCUENTRAN CUANDO LA PIEDRA <u>B</u>, LLEGA A SU PUNTO MÁS ALTO.

a) ¿ CUÁNTOS METROS DE ALTURA TIENE EL EDIFICIO ?

b) REPRESENTE LA ALTURA EN FUNCIÓN DEL TIEMPO PARA AMBAS PIEDRAS EN UN MISMO GRÁFICO, (EN m Y s), TOMANDO t = 0 CUANDO PARTE LA PIEDRA (A), Y UN EJE DE REFERENCIA VERTICAL CON ORIGEN EN EL PUNTO DE PARTIDA DE LA PIEDRA (A), CON SENTIDO POSITIVO HACIA ABAJO. INDICAR EN EL GRÁFICO LOS VALORES EN TODOS LOS PUNTOS SIGNIFICATIVOS.



Este es un problema de encuentro en Caída libre y tiro vertical. Hay que pensarlo un poco. Voy a tomar sistema de referencia positivo para abajo. Primero voy a calcular el tiempo que tarda A en alcanzar los 60 m:

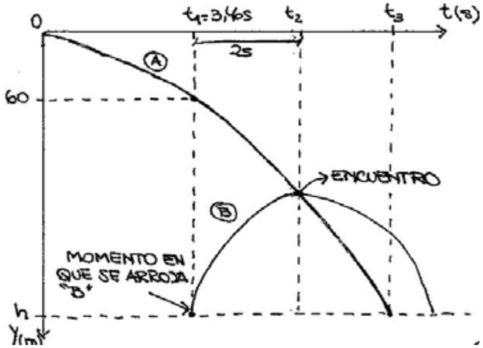
$$y_A = \tfrac{1}{2}\ 10\ {}^{m}\!/\!_{s^2}.t^2$$

Reemplazando es: t = 3,46 s. Calculemos la velocidad de la piedra en esa posición: $\boxed{v_A = 10\,{}^{m}\!/_{s^2}\,.t}$, resulta: v_A = 3,46 m/s. Ahora vamos a tomar como punto de partida para A los 60 m, y vamos a empezar a contar el tiempo desde que se tira B. Escribo las ecuaciones horarias de las 2 piedras:

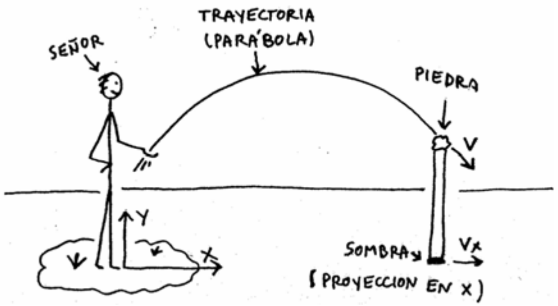
$$\boxed{y_A = 60m + 34{,}6\,{}^{m}\!/_{s}\ {}^{1}\!/_{2}10\,{}^{m}\!/_{s^2}\,.t^2} \text{ y } \boxed{v_A = 34{,}6\,{}^{m}\!/_{s} + 10\,{}^{m}\!/_{s^2}\,.t} \text{ para A}$$

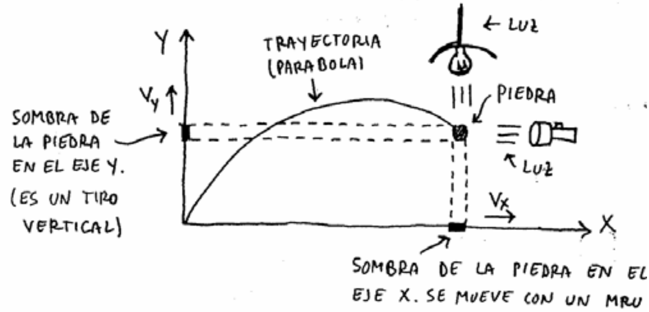
$$\boxed{y_B = h - 20\,{}^{m}\!/_{s} + {}^{1}\!/_{2}10\,{}^{m}\!/_{s^2}\,.t^2} \text{ y } \boxed{v_B = -20\,{}^{m}\!/_{s} + 10\,{}^{m}\!/_{s^2}\,.t} \text{ para B}$$

El enunciado dice que las piedras se encuentran cuando B llega a su altura máxima. Significa que en el momento del encuentro v_B = 0. Calculemos el tiempo que tarda en suceder esto. Uso la segunda ecuación de B. Me da: t_e = 2 s. Ahora calculemos la altura a la que se encuentran, usando la primera ecuación de A: y_e = 149,2 m. Con este dato y el del tiempo de encuentro puedo calcular h. Me da: $\boxed{\textbf{h = 169 m}}$. Hago el gráfico:



TIRO OBLICUO





EJE X:

$$X = X_0 + V_x\, t$$

EJE Y:

$$Y = Y_0 + V_{0y}\, t + \frac{1}{2} g\, t^2$$

$$V_{FY} = V_{0Y} + g\, t$$

TIRO OBLICUO - Advertencia.

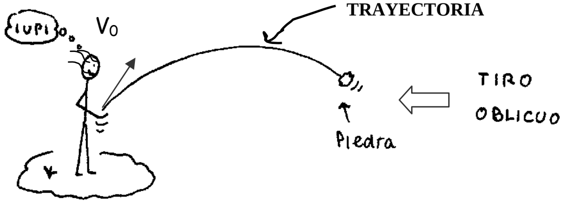
Tiro oblicuo no es un tema fácil. Los conceptos no son fáciles de entender. Las ecuaciones no son simples. Los problemas tienen sus vueltas. Encima para poder entender tiro oblicuo y para poder resolver los problemas hay que saber bien-bien tiro vertical, caída libre, MRUV y también MRU. Esto no es mala onda. Esto **es así**.
¿ Sugerencia ?. Resolvé miles de problemas. (¡ Oh ! ¿ miles ?!)
Esa es toda la cuestión.
Haciendo muchos problemas uno termina agarrándole la mano perfectamente y el tema pasa a ser una pavada. Pero hay que hamacarse. (Y eso lleva tiempo, que es lo que vos no tenés). Por ese motivo yo te voy a explicar tiro oblicuo ahora en un minuto y lo vas a entender perfectamente.

Pero por favor, repito, (Y esto constituye un gran error por parte de los chicos): no te pongas a hacer problemas de tiro oblicuo **hasta que no hayas entendido perfectamente MRU, MRUV, Caída libre y tiro vertical.**
¿ Fui claro ?

Por este motivo es también que a los profesores les encanta tomar tiro oblicuo en parciales y finales. Tiro oblicuo, dicen ellos, es un tema que combina los 3 temas anteriores. De manera que si el alumno te resuelve bien el problema de tiro oblicuo, se puede considerar que el tipo conoce bien MRU, MRUV, caída libre y tiro vertical... (A grandes rasgos esta afirmación es cierta).
Tiro oblicuo no es imposible. Lee con atención lo que sigue.

¿ QUÉ ES UN TIRO OBLICUO ?

Rta : Un tiro oblicuo es esto:



Es decir, en vez de tirar la cosa para arriba como en tiro vertical, ahora la tiro en forma inclinada, oblicua.

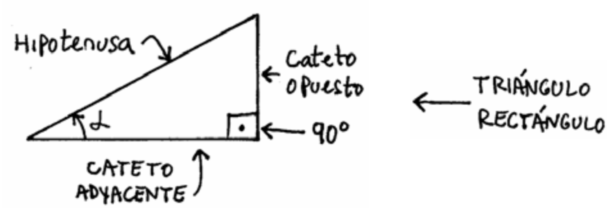
Antes, el vector velocidad inicial iba así ↑ y ahora va inclinado así ↗

Antes de seguir con esto necesito que veas 2 temas que son de matemática. Estos temas son trigonometría y proyección de un vector sobre un eje. Los pongo acá porque probablemente no te los hayan explicado bien en el colegio. Muchos profesores saltean estos 2 temas cuando explican tiro oblicuo. Los dan por " sabidos " . Esto confunde a la gente. Por eso te recomiendo que leas lo que sigue con atención.

TRIGONOMETRÍA

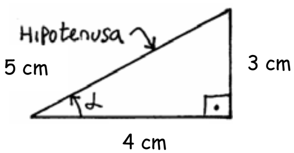
FUNCIONES SENO, COSENO y TANGENTE de un ÁNGULO

La palabra trigonometría significa medición de triángulos. A grandes rasgos la idea es poder calcular cuánto vale el lado de un triángulo sin tener que ir a medirlo con una regla. Para hacer esto, los tipos inventaron las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente de un ángulo. Estas funciones se usan cuando uno tiene un triángulo que tiene un ángulo de 90° (rectángulo). Para un triángulo rectángulo, se definen las funciones seno, coseno y tg así:



$$\operatorname{Sen}\alpha = \frac{op}{hip} \; ; \; \cos\alpha = \frac{ady}{hip} \; ; \; tg\,\alpha = \frac{op}{ady}$$ ⇦ **FUNCIONES TRIGONOMETRICAS**

Ejemplo: Calcular el valor de las funciones trigonométricas para un triángulo rectángulo de lados 3, 4 y 5.



Para calcular los valores de seno, coseno y tangente de alfa, hago las cuentas.
Las funciones trigonométricas para el ángulo alfa valen:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{3\,\text{cm}}{5\,\text{cm}} = 0{,}6$$

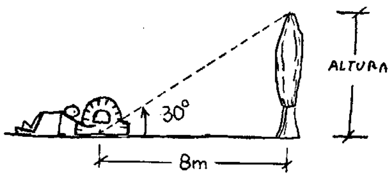
$$\cos\alpha = \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{4\,\text{cm}}{5\,\text{cm}} = 0{,}8$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}} = \frac{3\,\text{cm}}{4\,\text{cm}} = 0{,}75$$

Para cada ángulo alfa estas funciones toman distintos valores. Conviene recordar los valores que más se usan :

$\alpha \longrightarrow$	0°	30°	45°	60°	90°
Sen α	0	0,5	0,707	0,866	1
Cos α	1	0,866	0,707	0,5	0
Tg α	0	0,577	1	1,732	∞

Es un poco largo de explicar cuáles son todos los usos de las funciones trigonométricas pero puedo darte un ejemplo:
Suponé que vos querés saber la altura de un árbol pero no tenés ganas de subirte hasta la punta para averiguarlo. Lo que se podría hacer entonces es esto: 1ro te parás en un lugar y medís la distancia al árbol. Suponé que te da 8 m. Después con un buen transportador medís al ángulo α hasta la punta del árbol. Suponé que te da 30°. Esquemáticamente sería algo así:



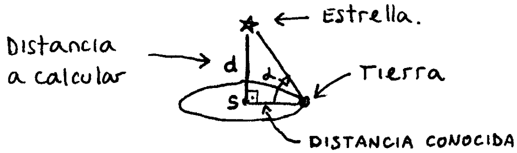
Ahora, usando la fórmula de tangente de un ángulo : $\text{tg}\ \alpha = \frac{\text{Op}}{\text{Ady}}$. Entonces:

$$\text{tg}\ 30° = \frac{\text{Altura del árbol}}{8\ \text{m}}$$

$$\Rightarrow \quad \text{Altura} = 8\ \text{m} \times \overbrace{\text{tg } 30}^{0,577}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\text{Altura} = 4,61\ \text{m}} \qquad \leftarrow \quad \text{Altura del árbol}$$

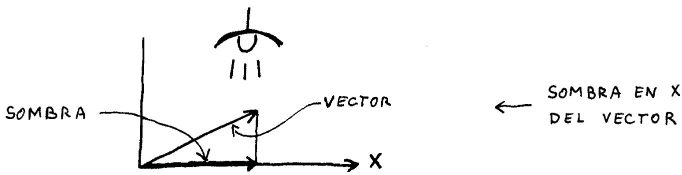
De esta manera se pueden calcular distancias (= lados de un triángulo) en forma teórica. Es decir, sin tener que dibujar el triángulo y medirlo. (Se puede hacer, pero es mucho lío y no da exacto). Es más hay veces que hay distancias difíciles de medir. Por más que uno quiera, no puede ir hasta ahí y medirla. En esos casos, la única forma de calcularla es usar trigonometría. Por ejemplo acá te pongo un caso difícil: la distancia a una estrella. ¿ Cómo harías para medirla ?
Rta: Pensalo. A ver si este dibujito te ayuda un poco.



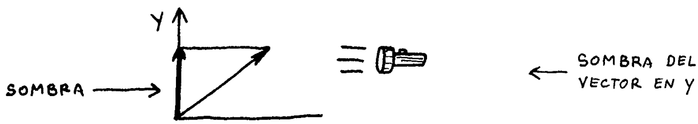
PROYECCIÓN DE UN VECTOR

Suponé que me dan un vector como éste:

Hallar la proyección del vector sobre el eje **x** significa ver cuánto mide la sombra de ese vector sobre ese eje. Es decir, lo que quiero saber es esto:



Hallar la proyección sobre el eje **y** es la misma historia:

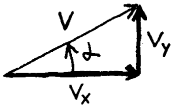


Para saber cuánto mide la proyección de un vector sobre un eje, en vez de andar midiendo sombras se usa la trigonometría:

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{op}{hip} \quad \Rightarrow \quad Op = hip \times \text{sen}\ \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{ady}{hip} \quad \Rightarrow \quad Ady = hip \times \cos \alpha$$

Es decir, si tengo un vector **v**, las proyecciones $\mathbf{v_x}$ y $\mathbf{v_y}$ van a ser:

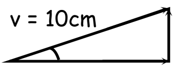


← PROYECCIONES DE UN VECTOR (CONVIENE ACORDARSE ESTO PORQUE SE USA MUCHO)

Ejemplo: **Hallar las proyecciones de un vector que mide 10 cm y forma un ángulo de 30 grados con el eje X.**

Tengo un vector de 10 cm con alfa = 30 °. Es decir, algo así :

$$\boxed{v_x = v \times \cos \alpha} \qquad \boxed{v_y = v \times \text{sen}\ \alpha}$$



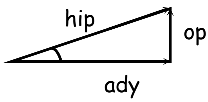
$$\leftarrow \quad V_y = 10\ cm \cdot \overbrace{sen\ \ 30°}^{0,5} = 5\ cm$$

$$v_x = 10\ cm \cdot \underbrace{\cos 30°}_{0,866} = 8,66\ cm$$

Entonces la proyección sobre el eje X mide 8,66 cm y la proyección sobre el eje Y mide 5 cm . Aprendete este procedimiento. Lo vas a usar todo el tiempo para calcular las velocidades iniciales en los ejes x e y. Es más, conviene memorizar las formulitas que puse recién. (V_x = ... , V_y =....). Es fácil : La V_y es V por seno y la V_x es V por coseno. Eso es todo.

PITÁGORAS

El teorema de Pitágoras sirve para saber cuánto vale la hipotenusa de un triángulo rectángulo sabiendo cuánto valen los 2 catetos.

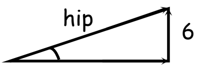


Si tengo un triángulo rectángulo se cumple que:

$$hip^2 = ady^2 + op^2$$ ⇐ **TEOREMA DE PITAGORAS**

<u>Ejemplo</u>: Tengo un triángulo de lados 6 cm y 8 cm. ¿ Cuánto mide su hipotenusa ?

<u>Rta.</u>: $hip^2 = (6\ cm)^2 + (8\ cm)^2$



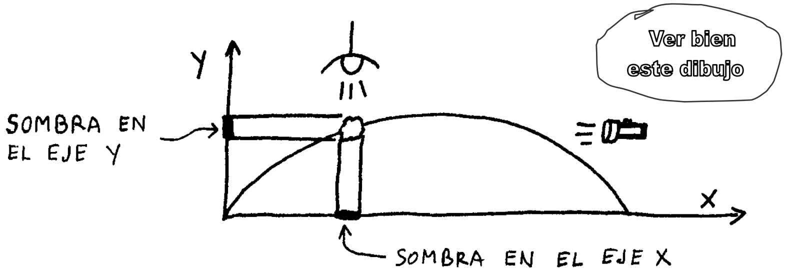
$h^2 = 100\ cm^2$

$\underline{h = 10\ cm}$

Hasta ahora todo lo que puse de tiro oblicuo fueron cosas de matemática. Ahora sí voy a empezar con el tema de tiro oblicuo propiamente dicho. Prestá atención :

<u>PRINCIPIO DE INDEPENDENCIA DE LOS MOVIMIENTOS</u>

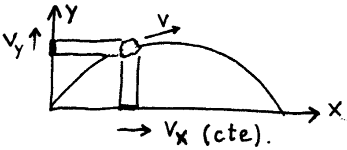
Este principio fue enunciado por el master Galileo. (Ídolo !). Lo que Galileo dijo fue que un tiro oblicuo podía considerarse como si estuviera compuesto por dos movimientos: uno rectilíneo y uniforme sobre el eje **x**, y otro uniformemente variado sobre el eje **y**. Mirá el dibujo :



Cada movimiento actúa como si el otro no existiera, es decir, la sombra en el eje **x** no sabe (ni le importa) lo que hace la sombra en el eje **y** . Y viceversa, la sombra en el eje **y** no sabe (ni le importa) lo que hace la sombra en el eje **x**. Es decir (y este es el truco):

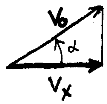
CADA MOVIMIENTO ACTÚA SIN ENTERARSE DE LO QUE ESTÁ HACIENDO EL OTRO.

¿ Captás la idea ? Cada movimiento es **INDEPENDIENTE** del otro y la superposición de estos 2 movimientos da el movimiento real. Es decir, tengo esto:



← PRINCIPIO DE SUPERPOSICION DE MOVIMIENTOS

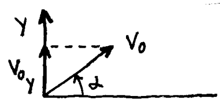
La sombra en el eje **x** se va moviendo todo el tiempo a la misma velocidad. Su movimiento será rectilíneo y uniforme y su velocidad será la proyección de la velocidad inicial sobre el eje **x**, es decir, V_x valdrá V_0 por cos α .



← LA PROYECCIÓN DE LA VELOCIDAD INICIAL SOBRE EL EJE HORIZONTAL ES V_x

La sombra en el eje **x** se mueve todo el tiempo con velocidad $V_x = V_0 . \cos \alpha$. Esta velocidad no se modifica en ningún momento. Es constante.

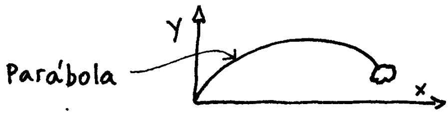
Voy ahora al eje vertical. Bueno, en **y** la sombra se mueve como si hiciera un tiro vertical. Su velocidad inicial será la proyección de v_0 sobre este eje:



← LA PROYECCIÓN DE V_0 EN $\underline{Y}$ DA V_{0y}.

Es decir, lo que pasa en el eje **y** es que la sombra sale con una velocidad inicial que vale $V_{0y} = V_0 . \operatorname{sen} \alpha$. Sube, sube, sube, llega a la altura máxima y ahí empieza a bajar. Exactamente como si fuera un tiro vertical. ¿ Ves como es la cosa ?

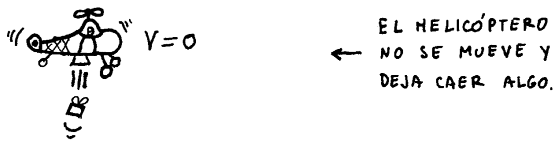
Galileo también se dio cuenta de que la trayectoria en el tiro oblicuo era una parábola. Es decir, si bien uno descompone el movimiento en dos para poder entenderlo, el movimiento en realidad es uno solo: la parábola de tiro oblicuo.



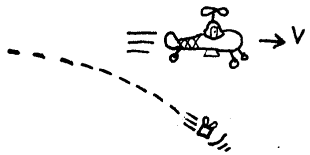
← TRAYECTORIA EN EL TIRO OBLICUO.

Ahora, este movimiento **puede entenderse** como si fuera una superposición de los otros dos. Esto es todo lo que tenés que saber. Éste es todo el concepto. Dos movimientos independientes, uno sobre cada eje, tales que combinados, **superpuestos**, dan el movimiento original. (= la parábola de tiro oblicuo).
Quiero que veas ahora unos ejemplos ejemplosos.

EJEMPLOS DE INDEPENDENCIA DE LOS MOVIMIENTOS (ver)
Imaginate un helicóptero que está quieto a una determinada altura y deja caer una cosa. Supongamos que la cosa tarda 20 segundos en caer (por ejemplo).



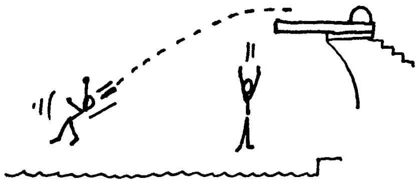
Supongamos ahora que el tipo empieza a avanzar en forma horizontal moviéndose a 50 km por hora en dirección equis. Te pregunto...
¿ Qué pasa si ahora deja caer el objeto ? ¿ Va a tardar más o menos en tocar el piso ?



Bueno la respuesta a esto parece fácil pero no es tan fácil. (Atento). El asunto es que teniendo el helicóptero velocidad horizontal, el paquete... ¡ **Va a tardar lo mismo que antes en tocar el suelo** ! ¿ Por qué pasa esto ? (Esta es una buena pregunta). Bueno, hay que tratar de imaginárselo un poco. El tiempo de caída es el mismo porque a lo que pasa en el eje **y** (caída libre), no le importa lo que pasa en el eje **x** (MRU). La caída libre se produce como si el movimiento en el eje **x** **no existiera** (Atençao con esto !).

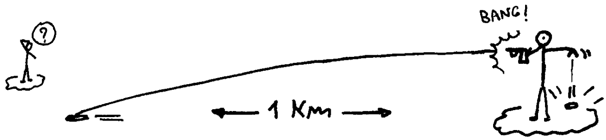
Mirá esta otra situación. Supongamos que un tipo viene corriendo y se tira de un trampolín. (Esto lo habrás hecho alguna vez). Y también supongamos que en el mismo momento otro tipo se deja caer parado...
Te pregunto: ¿ Cuál de los 2 llega primero al agua ?

¿ CUAL DE LOS DOS LLEGA MAS RAPIDO AL AGUA ?



<u>Rta</u>: Es lo mismo que antes. Los dos tocan el agua al mismo tiempo.
¿ Por qué esto es así ?
<u>Rta</u>: Por lo mismo de antes. El movimiento rectilíneo y uniforme que tiene en el eje **<u>x</u>** el que viene corriendo no afecta para nada sobre lo que pasa en el eje **<u>y</u>**.

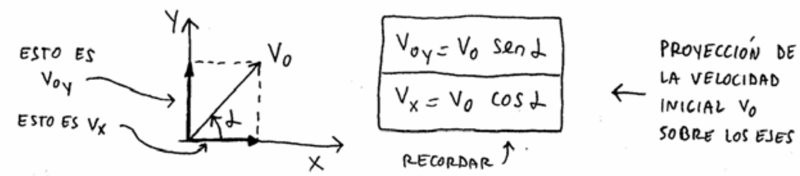
Vayamos ahora a este otro ejemplo bien maldito conocido como " ahí va la bala " . Suponete que un tipo dispara un revolver en forma horizontal y la bala cae a 1 kilómetro. Y supongamos también que exactamente en el mismo momento en que el tipo dispara, suelta con la otra mano una bala vacía. Te pregunto: ¿ Cuál de las 2 balas toca 1ro el suelo ?



La respuesta a esta pregunta es la misma de siempre. El tiempo que tardan las dos balas en tocar el suelo es el mismo. Las 2 llegan al mismo tiempo al piso. ¿ Por qué ?
<u>Rta</u>: Por el principio de independencia de los movimientos de Galileo Ídolo.

<u>ECUACIONES EN EL TIRO OBLICUO</u> (Leer)

Del principio de independencia de los movimientos surge que puedo descomponer el vector velocidad inicial en sus 2 componentes V_{ox} y V_{oy} . Entonces puedo decir que:



Tengo un tiro vertical en el eje y, de velocidad inicial V_{oy}, y un MRU de velocidad V_{ox}, en el eje **x**. Entonces las ecuaciones en el eje **x** van a ser las de MRU y las del eje **y,** van a ser las del tiro vertical. Es decir:

Eje x $\begin{cases} x = x_0 + v_{0x} \cdot t \\ v_x = v_{0x} = cte \\ a_x = 0 \end{cases}$ Eje y $\begin{cases} y = y_0 + v_{0y} \cdot t + \frac{1}{2}\, g \cdot t^2 \\ v_{fy} = v_{0y} + g \cdot t \\ a_y = cte = g \end{cases}$

↑ Ecuaciones para el movimiento de la sombra en el eje x (MRU)

↑ Ecuaciones para el movimiento dela sombra en el eje y (Tiro vertical)

En la práctica estas 6 ecuaciones pasan a ser estas tres :

VER BIEN ESTO →

EJE X : (MRU) → $X = X_0 + V_{0x} \cdot t$

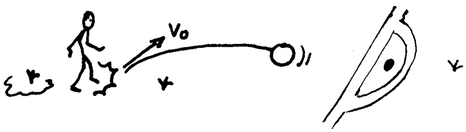
EJE Y : (MRUV) (TIRO VERTICAL) → $Y = Y_0 + V_{0Y}\, t + \frac{1}{2}\, g\, t^2$

$V_{FY} = V_{0Y} + g\, t$

← UNICAS TRES ECUACIONES QUE SE USAN PARA RESOLVER UN TIRO OBLICUO

¿ <u>CÓMO SE RESUELVEN LOS PROBLEMAS DE TIRO OBLICUO</u> ?

Supongamos que me dan un problema de tiro oblicuo en donde un tipo patea una pelota. (Típico problema de parcial).



Para resolver un problema de este estilo, hay que seguir una serie de pasos.
Lo que generalmente conviene hacer es lo siguiente : (Atención).

1-Tomo un sistema de referencia. Lo pongo donde yo quiero y como más me guste. (En general yo siempre lo suelo tomar así: y↑→ x).
Sobre este dibujo marco V_{0x}, V_{0y} y g , **cada una con su signo**. Si alguna de estas cantidades apunta al revés de como va el eje, es (-).

Por ejemplo, g apunta siempre así ,⇩ de manera que si yo tomo el eje **y** así ⇧, g va a ser (**-**). Es decir que al poner g en las fórmulas tengo que poner $-10\ m/s^2$.

2 - Escribo las ecuaciones horarias para el eje **X** y para el eje **Y** :

EJE X:
$$x = x_0 + v_x\, t$$

EJE Y:
$$y = y_0 + v_{0y}\, t + \frac{1}{2}\, g\, t^2$$
$$v_{fy} = v_{0y} + g\, t$$

3 - En estas ecuaciones reemplazo por los datos, pongo g <u>con su signo</u>, marco v_{0x} (= $V_0 . \cos\alpha$) y V_{0y} (= $V_0 . \operatorname{sen}\alpha$), <u>con su signo</u>. Una vez que tengo todas las ecuaciones con los valores numéricos despejo lo que me piden. Sólo se usan la 1ra ec. para el eje **x** y la 1ª y 2ª para el eje **y**. Con estas 3 ecuaciones se puede resolver cualquier problema.

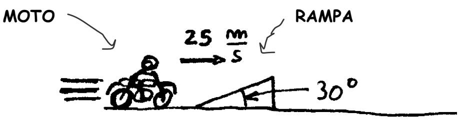
<u>Repito</u>: Sólo se usan **<u>TRES</u>** ecuaciones para resolver un tiro oblicuo. Tratar de inventar más ecuaciones es un error. Todo ejercicio de tiro oblicuo tiene que salir de ahí, de esas 3 ecuaciones.

<u>EJEMPLOS DE TIRO OBLICUO</u>

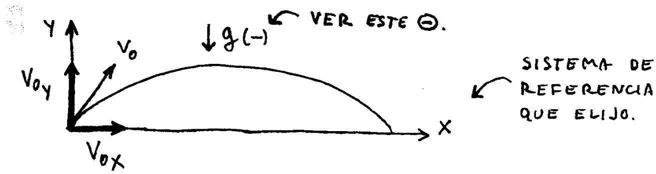
Un tipo que viene en moto a 90 por hora (25 m/s) sube una rampa inclinada 30°. Suponiendo que la rampa es muy corta y no influye en disminuir su velocidad, Calcular:

a) - A qué altura máxima llega.
b) - Cuánto tiempo está en el aire.
c) - A qué distancia de la rampa cae.

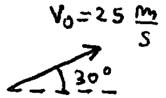
He aquí un típico problema de tiro oblicuo. Hagamos un dibujito aclarador :



Para resolver esto elijo un sistema de referencia. Marco en el dibujo todas las velocidades, la aceleración de la gravedad y todo eso.



A la velocidad V_0 la descompongo en las componentes horizontal y vertical.



⇦ Descompongo la Vo en Vo_x Y en Vo_y.

Me queda :

$$V_{0x} = V_0 \times \cos\ \alpha = 25\ \frac{m}{s} \times \cos 30° = 21{,}65\ \frac{m}{s}$$

$$V_{0y} = V_0 \times \text{sen}\ \alpha = 25\ \frac{m}{s} \times \text{sen}\ 30° = 12{,}5\ \frac{m}{s}$$

En el eje **X** la sombra de la moto tiene un MRU. La velocidad de este movimiento es constante y vale V_{0x} = 21,65 m/s. En el eje **y** la sombra de la moto se mueve haciendo un tiro vertical de V_{0y} = 12,5 m/s. Las ecuaciones horarias quedan así:

$$\text{Eje x} \quad \begin{cases} x = 0 + 21{,}65\ \frac{m}{s} \cdot t \\ v_x = v_{0x} = 21{,}65\ \frac{m}{s} \\ a_x = 0 \end{cases} \quad \leftarrow$$

Ecuaciones para el eje horizontal (MRU).

Para trabajar en el eje **y** voy a suponer g = 9,8 m/ s^2 . En el eje vertical las cosas quedan de esta manera:

$$\begin{matrix}\text{Eje y} \\ \text{(MRUV)}\end{matrix} \quad \begin{cases} Y = 0 + 12{,}5\ \frac{m}{s} \cdot t + \frac{1}{2}\left(-9{,}8\ \frac{m}{s^2}\right) \cdot t^2 \\ V_{fy} = 12{,}5\ \frac{m}{s} + \left(-9{,}8\ \frac{m}{s^2}\right) \cdot t \\ a_y = -9{,}8\ \frac{m}{s^2} = cte \end{cases} \quad ⇦$$

ECUACIONES PARA EL EJE VERTICAL

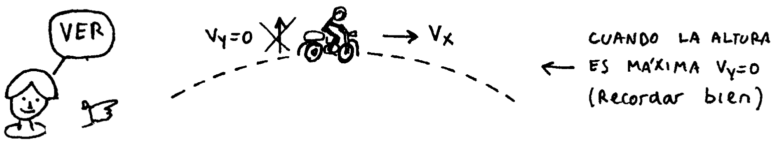
Todos los tiros oblicuos se resuelven usando solamente las primeras 2 ecuaciones en **Y** y la 1ª ecuación en **X** . (Tres en total). Las otras 3 ecuaciones igual las puedo poner porque son importantes conceptualmente. Lo que quiero decir es que:

$$\begin{cases} x = 21{,}65\,\dfrac{m}{s}\cdot t \\ y = 12{,}5\,\dfrac{m}{s}\cdot t - 4{,}9\,\dfrac{m}{s^2}\cdot t^2 \\ v_{fy} = 12{,}5\,\dfrac{m}{s} - 9{,}8\,\dfrac{m}{s^2}\cdot t \end{cases}$$

$\leftarrow$ Sólo estas ecuaciones se usan.

a) - Hallar la altura máxima

Cuando el tipo llega a la altura máxima, la sombra sobre el eje **y** ya no sigue subiendo más. (Tratá de imaginártelo). Exactamente en ese momento la velocidad en **y** tiene que ser <u>cero</u>. (cero). Atento, la que es **<u>CERO</u>** es la velocidad **<u>EN Y</u>** . En x el objeto sigue teniendo velocidad que vale V_x . (= 21,65 m/ s).



Entonces reemplazando la velocidad final en **y** por cero :

$V_y = 0 \rightarrow$ $$0 = 12{,}5\,\frac{m}{s} - 9{,}8\,\frac{m}{s^2}\cdot t$$

$$\Rightarrow\ 9{,}8\,\frac{m}{s^2}\cdot t = 12{,}5\,\frac{m}{s} \qquad \Rightarrow\ t = \frac{12{,}5\ m/s}{9{,}8\ m/s^2}$$

$$\boxed{t_{max} = 1{,}275 seg} \leftarrow$$ Tiempo que tarda la moto en llegar a la altura máxima.

b) - ¿ Cuánto tiempo está la moto en el aire ?

Si para subir el tipo tardó 1,275 seg, para bajar también va a tardar 1,275 seg. (Todo lo que sube tiene que bajar). Es decir, el tiempo total que el tipo está en el aire va a ser 2 veces el t de subida. Pero atención, esto vale en este caso porque la moto sale del piso y llega al piso.

$$t_{tot} = 2 \times t_{max} \qquad \Rightarrow \qquad t_{tot} = 2 \times 1{,}275 seg$$

$$\underline{t_{tot} = 2{,}55 seg} \quad \Leftarrow$$ TIEMPO TOTAL QUE LA MOTO ESTA EN EL AIRE

Esto mismo lo podés comprobar de otra manera. Cuando el tipo toca el suelo la posición de la sombra sobre el eje **y** es y = 0. Entonces, si reemplazo **y** por cero en :
$Y = 12{,}5\ m/s\,.\,t - 4{,}9\ m/s^2.t^2$, me queda :

$$12{,}5\ \frac{m}{s} \times t - 4{,}9\ \frac{m}{s^2} \times t^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 4{,}9\ \frac{m}{s^2} \times t^2 = 12{,}5\ \frac{m}{s} \times t$$

$$\Rightarrow \quad t = \frac{12{,}5\ m/s}{4{,}9\ m/s^2} = 2{,}55\ \ seg \quad (\text{ verifica }).$$

c) - Calcular a qué distancia de la rampa cae el tipo con la moto.

El tiempo total que el tipo tardaba en caer era 2,55 s. Para calcular en qué lugar cae, lo que me tengo que fijar es qué distancia recorrió la sombra sobre el eje **x** en ese tiempo. Veamos.

La ecuación de la posición de la sombra en equis era $X = 21{,}65\ m/s\,.t$, entonces reemplazo por 2,55 segundos y me queda:

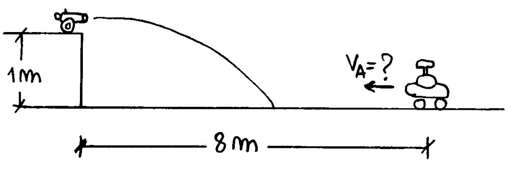
$$x_{caída} = 21{,}65 \frac{m}{s} \times 2{,}55 seg$$

$$\Rightarrow \quad \underline{x_{caída} = 55{,}2\ m} \quad \Leftarrow$$

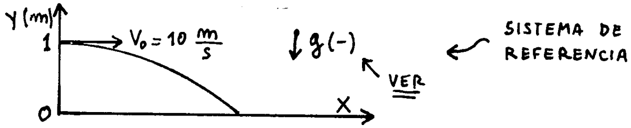
DISTANCIA A LA QUE CAE LA MOTO

<u>**OTRO EJEMPLO DE TIRO OBLICUO**</u>

El cañoncito de la figura tira balitas que salen horizontalmente con velocidad inicial 10 m/s. En el momento en que se dispara la balita sale el cochecito a cuerda que está a 8 m del cañón. ¿ A qué velocidad tendría que moverse el cochecito para que la balita le pegue ?



En realidad, éste no es un problema de tiro oblicuo sino de tiro horizontal. Los problemas de tiro horizontal son un poco más fáciles porque inicialmente no hay velocidad en **y**. Voy a tomar este sistema de referencia:



Este problema está bueno porque parece ser difícil pero no lo es. Es exactamente igual a cualquier otro problema de tiro oblicuo. Tiene la pequeña trampa de parecer un problema de encuentro. Pero no es un problema de encuentro. Fijate. Empiezo dándome cuenta que la velocidad inicial es horizontal. Sólo tiene componente en equis. Entonces mirando el dibujo:

$$v_x = v_{0x} = 10\,m/s$$

$$y\ \ V_{0y} = 0$$

La sombra de la balita en el eje **x** se mueve con un MRU. La sombra de la balita en el eje **y** se mueve en una caída libre. Las ecuaciones horarias para cada eje son:

$$\text{Eje x} \begin{cases} x = 0 + 10\,\frac{m}{s}\cdot t \\ v_x = v_{0x} = 10\,\frac{m}{s} \\ a_x = 0 \end{cases} \Leftarrow$$

PROYECCION SOBRE EL EJE HORIZONTAL (MRU , V_X = Constante)

Para el eje vertical considero la aceleración de la gravedad como g = 9,8 m/s^2

$$\text{Eje y} \begin{cases} Y = \underline{\underline{1\ m}} + 0\times t + \frac{1}{2}\left(-9{,}8\,\frac{m}{s^2}\right)\times t^2 \\ V_{fy} = 0 + (-9{,}8\,\frac{m}{s^2}).t \\ a_y = -9{,}8\,\frac{m}{s^2} = cte \end{cases} \Leftarrow$$

PROYECCION SOBRE EL EJE VERTICAL. (MRUV, a = 9,8 m/s^2)

De todas estas ecuaciones que son las 6 de tiro oblicuo, siempre se usan 3, una en equis y 2 en Y. Entonces sólo voy a usar las siguientes:

$$\begin{cases} X = 10\,\frac{m}{s}.t \\ Y = 1\,m - 4{,}9\,\frac{m}{s^2}.t^2 \\ V_{fy} = -9{,}8\,\frac{m}{s^2}.t \end{cases} \leftarrow$$

Unicas ecuacio - nes que voy a usar.

Lo primero que necesito saber es el tiempo que tarda la balita en tocar el suelo. Eso lo saco de la ecuación en y. Cuando la balita toca el piso, **y** es cero, entonces:

$$(Y = 0) \Rightarrow 0 = 1\text{m} - 4{,}9\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\,.\,t^2$$

$$\Rightarrow \quad 4{,}9\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\,.\,t^2 = 1\text{m}$$

$$\Rightarrow \boxed{t_{caída} = 0{,}45\ \text{seg}} \quad \leftarrow \quad \text{TIEMPO QUE TARDA EN CAER}$$

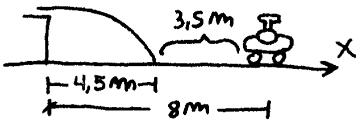
El lugar donde toca el suelo lo saco de la ecuación en x. Sé que llega al piso en 0,45 segundos. Entonces reemplazo t = 0,45 segundos en la ecuación de equis:

$$X = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \times 0{,}45\ \text{seg}$$

$$\Rightarrow \boxed{X_{caída} = 4{,}5\ \text{m}} \quad \Leftarrow$$

DISTANCIA A LA QUE CAE LA BALITA

Es decir que si resumo lo que calculé hasta ahora tengo esto:



Entonces, en el tiempo que tarda la balita en caer (0,45 seg), el cochecito tendrá que recorrer 3,5 m hacia la izquierda. Entonces su velocidad va a ser:

$$V_A = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{3{,}5\ \text{m}}{0{,}45\ \text{s}}$$

$$\Rightarrow \underline{v_A = 7{,}77\ \text{m/s}} \quad \Leftarrow$$

VELOCIDAD QUE TIENE QUE TENER EL AUTO (HACIA LA IZQUIERDA)

Fin teoría de Tiro Oblicuo.

TIRO OBLICUO - EJERCICIOS SACADOS DE PARCIALES

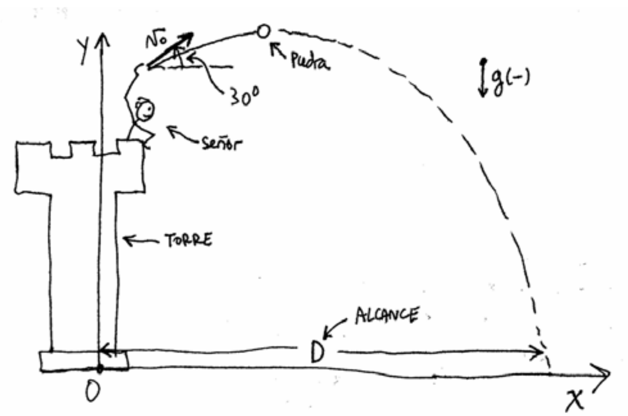
Pongo acá algunos ejercicios que saqué de algunos examenes.

PROBLEMA 1

Desde una torre de 40 m de altura se lanza una piedra con una velocidad inicial de 30 m/s, formando un ángulo de 30° hacia arriba respecto a la horizontal.

Calcular:
a) El módulo y dirección de la velocidad al cabo de 1 segundo.
b) ¿A qué distancia horizontal de la base de la torre impactará la piedra?

Hago un dibujito de lo que plantea el problema. Tomo sistema de referencia positivo para arriba. La gravedad entonces es negativa.



Si le llamamos x a la posición horizontal e y a la posición vertical, tenemos las siguientes ecuaciones horarias:

* Dirección horizontal: (Eje x)

$$x(t) = x_0 + V_H \cdot t \quad \Rightarrow \quad x(t) = V_H \cdot t$$

$$V_H(t) = V_H \quad \Rightarrow \quad \text{velocidad horizontal constante}$$

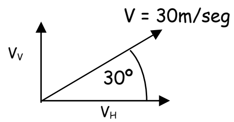
* Dirección vertical: (Eje Y) $\quad y(t) = y_0 + V_V \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$

La gravedad vale – 10 m/s^2. Entonces, reemplazando :

$$\Rightarrow \quad y(t) = 40\ m + V_V\ .\ t - 5\ m/s^2.t^2$$

$$V_V(t) = V_V + a\ .\ t = V_V - 10\ m/seg^2.t$$

Una vez que tenemos las ecuaciones horarias podemos resolver cualquier cosa que nos pidan, porque sabemos en que posición y la velocidad de la piedra a cada instante t. Todavía nos faltan la velocidad inicial: su componente vertical (V_V) y la horizontal (V_H). Eso no es tan grave, porque nos dicen que inicialmente la piedra sale con una velocidad de 30 m/seg y formando un ángulo de 30° hacia arriba. O sea, es algo así:



$$V_H = V\ .\ \cos 30 = 30\ m/seg\ .\ 0{,}866 = 25{,}98\ m/seg$$

$$V_Y = V\ .\ \text{sen}\ 30 = 30\ m/seg\ .\ 0{,}5 = 15\ m/seg$$

O sea, que tenemos: $x(t) = 25{,}98\ m/seg\ .\ t$; $V_H(t) = 25{,}98\ m/seg$

$$y(t) = 40\ m + 15\ m/seg.t - 5\ m/s^2\ .\ t^2$$

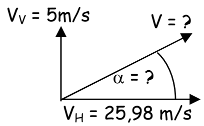
$$V_V(t) = 15\ m/s - 10\ m/s^2\ .\ t$$

Ahora veamos qué nos piden. Lo que sea, lo podemos calcular con estas 2 fórmulas:

a) La velocidad después de un segundo. Todo lo que hay que hacer es poner t = 1 seg. en las fórmulas de velocidad que vimos recién

$$V_{H(t\,=\,1\,seg)} = 25{,}98\ m/seg. \qquad V_{V(t\,=\,1\,seg)} = 5\ m/seg$$

Pero estas son las componentes horizontal y vertical. Nos piden el módulo y la dirección. Bueno, para eso todo lo que hay que hacer es formar el vector a partir de éstas dos:



$V^2 = V_H^{\ 2} + V_V^{\ 2} = 5^2 + 25{,}98^2$ **V = 26,46 m/seg.**

$\mathrm{tg}\ \alpha = V_V / V_H = 0{,}1924 \Rightarrow$ **α = 10,9º**

b) Si queremos saber cuando choca contra el piso la piedra, estamos buscando el tiempo t para el cual vale y = 0. Entonces, todo lo que hay que hacer es resolver esta ecuación:

$$y_{(t\,=\,?)} = 0$$

$$\Rightarrow \quad 40\ m + 15\ m/seg.t - 5\ m/s^2\ .\ t^2 = 0$$

Esta es una ecuación cuadrática (o sea de la forma $at^2 + bt + c = 0$). Entonces :

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-15 \pm \sqrt{15^2 - 4.(-5).40}}{2.(-5)}$$

$$\Rightarrow \quad t = -\ 1{,}7\ seg. \quad ó \quad t = 4{,}7\ seg.$$

Como casi todas las ecuaciones cuadráticas, tiene dos soluciones. Pero sólo una tiene sentido, porque no puede ser un tiempo negativo. Entonces, sabemos que la piedra choca contra el piso a los 4,7 segundos. Y ahora que conocemos ese tiempo, podemos calcular a qué distancia horizontal de la torre cae, así:

$$x_{(t\,=\,4{,}7\ seg)} = D = 25{,}98\ m/seg\ .\ 4{,}7\ seg = 122{,}1\ m$$

⇒ **<u>la piedra cae a D = 122,1 m</u>**.

PROBLEMA 2

Desde un buque se dispara un misil que a los 24 segundos se encuentra a 9.600 m en dirección horizontal y a 4.320 m de altura sobre el nivel del mar.

Calcular:

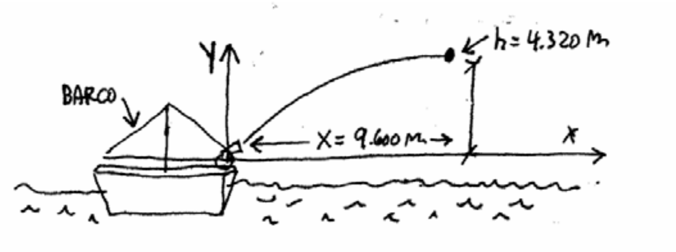
a) El alcance máximo sobre el mar

b) La altura máxima alcanzada sobre el nivel del mar.

SOLUCIÓN :

Este es un típico problema de tiro oblicuo: La única fuerza que actúa es el propio peso del misil, la aceleración será la de la gravedad. La gravedad va para abajo y vale $g = -\ 10\ m/s^2$. La velocidad horizontal se mantiene constante (M.R.U.), mientas que habrá un movimiento uniformemente variado en el eje vertical (M.R.U.V.).

El misil tiene una cierta velocidad horizontal inicial V_{0x} hacia adelante y una velocidad vertical V_{0y} hacia arriba. Tomo que la posición inicial es 0. Las velocidades, aceleraciones y posiciones son positivas hacia arriba y hacia adelante.
Mi sistema de referencia es este:



Las ecuaciones horarias quedan:

<u>Dirección horizontal x)</u> $x(t) = x_0 + V_{0x} \cdot t = V_{0x} \cdot t$

$$V_x = V_{0x}$$

<u>Dirección vertical y)</u> $y(t) = y_0 + V_{0y} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a\, t^2 = V_{0y} \cdot t - 5\ m/s^2 \cdot t^2$

$$V_y(t) = V_{0y} + a \cdot t = V_{0y} - 10\ m/s^2 \cdot t$$

Hay un pequeño inconveniente: no conocemos las velocidades iniciales V_{0x} y V_{0y}. Bueno, pero para eso nos dicen el dato de donde se encuentra el misil a los 24 segundos. Si reemplazamos esos datos en las ecuaciones horarias:

$$x(t = 24\ seg) = V_{0x} \cdot 24\ seg = 9600\ m$$

$$\Rightarrow\ V_{0x} = 400\ m/s$$

$$y(t = 24\ seg) = V_{0y} \cdot 24\ s - 5\ m/s^2 \cdot (24\ s)^2 = 4320\ m$$

$$\Rightarrow\ V_{0y} = 300\ m/s$$

Ahora sí, con estos datos ya conocemos por completo las ecuaciones horarias y tenemos las herramientas para realizar cualquier cálculo que nos pidan:

a) El alcance máximo sobre el mar es la distancia horizontal máxima que puede

recorrer el misil antes de volver a caer al mar, o sea antes de llegar a y = 0.
Para poder calcular esta distancia, antes necesitamos saber cuándo cae al mar:

$$y(t) = 300\ m/s\ .\ t - 5\ m/s^2\ .\ t^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad t = 0 \quad ó \quad t = 60 \text{ segundos}$$

La solución t = 0 es bastante obvia, porque sabemos que en el instante inicial estaba al nivel del mar. Lo que nos interesa es la otra solución: el misil vuelve a caer al mar después de 1 minuto. Y la distancia horizontal que puede recorrer en ese tiempo de vuelo la calculamos directamente reemplazano en la ecuación horaria:

$$x_{máx} = x(t = 60\ seg) = 400\ m/s\ .\ 60\ seg = 24.000\ m$$

⇒ El alcance máximo del misil sobre el mar es de 24 km

b) La altura máxima la alcanza cuando la velocidad vertical es cero; y esto se da para

$$V_y(t) = 300\ m/s - 10\ m/s^2\ .\ t = 0$$

$$\Rightarrow t = 30 \text{ segundos.}$$

Y la altura que corresponde a este instante la calculamos así:

$$y_{máx} = y_{(t\,=\,30\ seg)} = 300\ m/s\ .\ 30\ s - 5\ m/s^2\ .\ (30s)^2$$

$$\rightarrow \quad y_{máx} = y(t = 30\ seg) = 4.500\ m.$$

⇒ El misil alcanza una altura máxima de 4,5 km a los 30 segundos del disparo

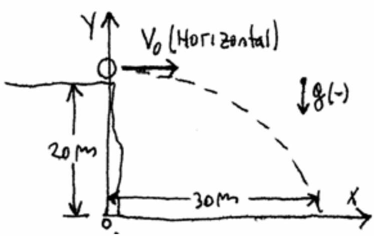
---

PROBLEMA 3

Desde el borde de un acantilado de 20 metros de altura se lanza una piedra en forma horizontal. Bajo el acantilado hay 30 metros de playa (medidos desde la base del acantilado hasta el agua).

3.a.- Determinar su velocidad V_0 mínima para que alcance el agua.
3.b.- Hallar la velocidad (módulo y dirección) en el instante del impacto.

Tiramos una piedra desde un acantilado en forma horizontal. Quiere decir que tengo un tiro en donde $V_{0Y} = 0$. Esto es lo que se llama TIRO HORIZONTAL. Hago un dibujito y pongo el sistema de referencia :



La velocidad horizontal es constante en equis. En la dirección vertical la aceleración es la de la gravedad: $g = -10\ m/s^2$. Las ecuaciones horarias quedan:

Dirección horizontal (M.R.U.) $x(t) = x_0 + V_{0x} \cdot t = V_0 \cdot t$

$V_x = V_0$

Dirección vertical (M.R.U.V.) $y(t) = y_0 + V_{0y} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = 20\ m - 5\ m/s^2 \cdot t^2$

$V_y(t) = V_{0y} + a \cdot t = -5\ m/s^2 \cdot t$

Queremos saber cuál es la velocidad mínima V_0 con que debemos lanzar la piedra para que alcance el agua (ubicada a 30 metros de distancia) antes de caer al suelo. Para eso, necesitamos conocer cuánto tiempo tarda en caer al suelo, o sea en llegar a $y = 0$.

$$y(t) = 0 = 20\ m - 5\ m/s^2 \cdot t^2 \Rightarrow t = 2 \text{ segundos}$$

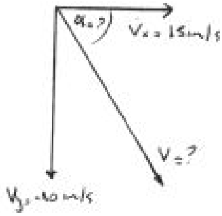
Y en ese tiempo recorre una distancia horizontal $x_{(t\,=\,2seg)} = V_0 \cdot 2$ Seg. Piden que esa distancia sea más grande que 30 metros, o sea:

$$V_0 \cdot 2s > 30\ m \Rightarrow V_0 > 30\ m / 2s$$

$$\Rightarrow \underline{\mathbf{V_0 > 15\ m/seg}}$$

Ahora, si tomamos $V_0 = 15\ m/s$, podemos calcular la velocidad en el momento del impacto; o sea a $t = 2$ seg $\Rightarrow$ $V_x = 15\ m/s$; $V_y = -10\ m/s$

O sea que como vector, tenemos:



V = $\sqrt{V_X^{\,2} + V_Y^{\,2}}$ = $\sqrt{(15m/s)^2 + (-10m/s)^2}$

$\Rightarrow$ **V = 18,07 m/s**

tang α = $-V_Y$ / V_x = 10/15 = 2/3 $\Rightarrow$ α = 33,7°

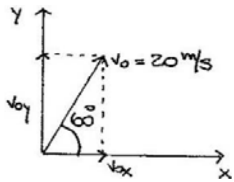
PROBLEMA 4

Un objeto se lanza desde el suelo con una velocidad inicial de 20 m/s que forma un ángulo de 60º con la horizontal. Si se arroja un segundo objeto bajo un ángulo de 30 º.
¿ cuál debería ser el valor de la velocidad inicial, en m/s, para que alcance la misma altura máxima que el primero ?

a) 8,7 b) 10 c) 11,5 d) 17,3 e) 34,6 f) 20

SOLUCIÓN:

Para que el objeto alcance la misma altura debe tener la misma velocidad inicial en "y". Hallemos primero la velocidad v_{0y} cuando v_0 = 20 m/s y α = 60 º.



En el dibujo se ve que: v_{0y} = v_0 . sen 60º. Haciendo la cuenta: v_{0y} = 17,3 m/s. Ahora cambiamos el ángulo, pero queremos que v_{0y} se mantenga. Entonces es: 17,3 m/s = v'_0 . sen 30º. Haciendo la cuenta nos queda: $\boxed{v'_0 = 34{,}6 \text{ m/s}}$
Entonces, la respuesta correcta es la e).

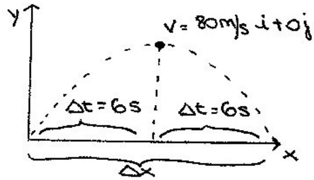
PROBLEMA 5

Un misil es disparado en el mar con una velocidad V_o y un ángulo β con respecto al plano horizontal mayor que cero. Al cabo de 6 seg. su velocidad es V = 80 m/s i, el alcance en el mar será de:

a) 80 m **b) 960 m** **c) 180 m**
d) Se debe conocer el valor numérico de V_o
e) Se debe conocer el ángulo β con que fue disparado el misil.

<u>SOLUCION</u>

A los 6 s la velocidad es v = 80 m/s en **i**, o sea, en la dirección horizontal. En ese momento la velocidad en "y" es cero, o sea, el tipo a los 6 seg está en la altura máxima. Hago un dibujito :



Sabemos que una parábola (como esta trayectoria) es simétrica respecto de una recta paralela al eje x que pase por el punto más alto. Entonces, si tardó 6 s en llegar al vértice, va a tardar otros 6 en volver al suelo. Además, en un tiro oblicuo la velocidad en "x" es siempre la misma. Por lo tanto, el alcance será: x = 80 m/s . (12 s). Haciendo la cuenta es: $\boxed{\mathbf{x = 960\ m}}$.

Entonces, la respuesta correcta es la b).

<u>PROBLEMA 6</u>

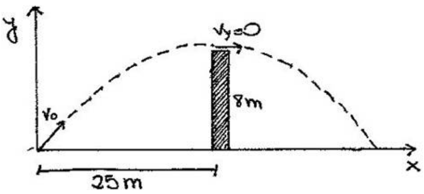
Se dispara un proyectil desde la superficie (x = 0, y = 0) de modo que supere una valla de h = 8 m de altura situada a una distancia horizontal D = 25 m del punto de lanzamiento.

a) ¿ Cuál debe ser el ángulo de disparo para que el proyectil pase en forma rasante por encima de la valla justo en el instante en el que alcanza su altura máxima ?
b) Calcular el módulo de la velocidad inicial del proyectil.

<u>SOLUCION</u>

Las ecuaciones horarias son: $\boxed{x = v_{0x}.t}$ (posición en x), $\boxed{y = v_{0y}.t - \frac{1}{2}.10\,\frac{m}{s^2}.t^2}$(posición y)

La ecuación de velocidad en Y es $\boxed{v_y = v_{0y} - 10\,{}^{m}\!/_{s^2}\,.t}$. Hagamos un dibujito y pongamos el sistema de referencia:



Sabemos que en la altura máxima $v_y = 0$. En la última ecuación reemplazamos y tenemos: $v_{0y} = 10\ m/s^2.\ t$.

Reemplazando en la segunda ecuación, para y = 8 m, tenemos: <u>t = 1,26 s</u>. Usando este tiempo, calculamos v_{0y} y v_{0x}. Me da:

$$\underline{v_{0y} = 12{,}6\ m/s} \quad y \quad \underline{v_{0x} = 19{,}84\ m/s}.$$

Para calcular $|v_0|$ usamos:

$\boxed{|v_0| = \sqrt{(10\,{}^{m}\!/_{s})^2 + (-15\,{}^{m}\!/_{s})^2}}$, tenemos: $\boxed{\mathbf{|v_0| = 23{,}5\ m/s}}$.

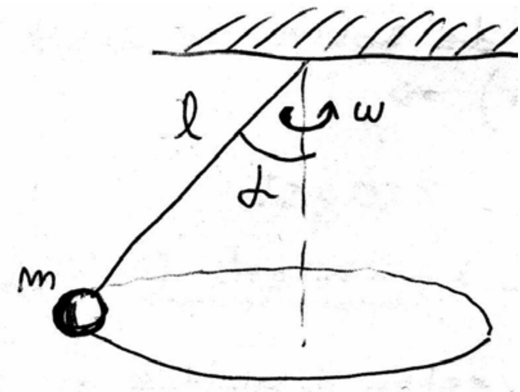
Ahora, para calcular el ángulo alfa planteo :

$$\boxed{tg\ \alpha = \frac{v_{0y}}{v_{0x}}} \rightarrow \boxed{\alpha = \mathbf{32{,}41°}}$$

FIN TIRO OBLICUO

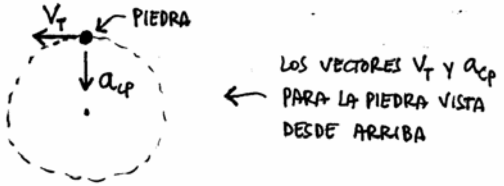
CINEMATICA DEL

MOVIMIENTO CIRCULAR



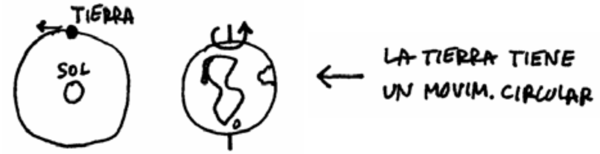
$$v_{Tang} = \omega \cdot r$$

$$a_{cp} = \omega^2 \cdot r = \frac{v_t^2}{r}$$



MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME (MCU)

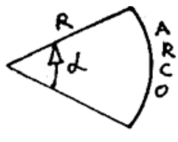
Una cosa que da vueltas tiene movimiento circular. Por ejemplo, un trompo, una calesita o las agujas del reloj. Si lo qué está girando da siempre el mismo número de vueltas por segundo, digo que el movimiento circular que tiene es **UNIFORME**. **(MCU)**
Podés encontrar muchas otras cosas que se mueven con movimiento Circular Uniforme. Por ejemplo un ventilador, un lavarropas, el plato de los viejos tocadiscos o la rueda de un coche que viaja con velocidad cte. También tenés el caso del planeta Tierra. La Tierra siempre da una vuelta sobre su eje cada 24 hs. Aparte de eso también gira alrededor del sol. Da una vuelta entera cada 365 días.



EL RADIAN

Si vos tenés un ángulo y querés saber cuanto mide, vas lo medís con el transportador. Esto te da el ángulo medido en grados. Este método viene de dividir la circunferencia en 360 °. Para usar la calculadora en grados tenés que ponerla en **DEG** (Degrees, que quiere decir grados en inglés). El sistema de grados sexagesimales es **UNA** manera de medir ángulos. Hay otros métodos. Por ejemplo, tenés el sistema francés que divide la circunferencia en 400 grados. Este sistema de Grados Franceses existe pero no se usa.

Ahora quiero que veas el asunto de medir los ángulos en RADIANES. Este es el sistema nuevo que tenés que aprender porque es el que se usa acá en movimiento circular. Fijate. Para medir un ángulo en radianes se hace así: Se mide el largo del arco abarcado por el ángulo. Esto lo podés hacer con un centímetro, con un hilito o con lo que sea.



Se mide el radio del círculo. Para tener el valor del ángulo medido en radianes hago esta cuenta:

$$\alpha_{(Rad.)} = \frac{ARCO}{RADIO}$$ ← ANGULO MEDIDO EN RADIANES.

Fijate que hacer la división del arco sobre radio significa ver cuantas veces entra el radio en el arco. Como el radio se mide en metros y el arco también, el radián resulta ser **un número sin unidades**.
Si Juan mide 2 metros y yo mido uno, quiere decir que entro 2 veces en Juan. Este 2 es un número sin dimensiones, sólo me dice cuantas veces entro yo en Juan. Con los radianes lo mismo. Lo que me dice el ángulo en radianes es cuántas veces entra el radio en el arco. Por ejemplo, si alfa es 3 radianes, eso significa que el radio entra 3 veces en el arco abarcado por ese ángulo. ¿ Ves como es la cosa ?

¿ A cuántos grados equivale un radián ?

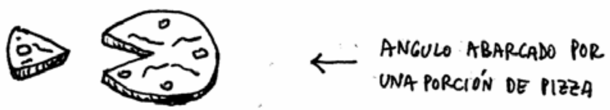
Veamos. Dibujo una circunferencia entera y hago una cuentita: Para una circunferencia entera, el arco es el perímetro, que vale 2 Pi por radio. Así que 360° equivalen a :

$$360° = \frac{2\pi \cdot \cancel{R}}{\cancel{R}} = 2\pi \ (rad)$$

$$\Rightarrow 1 rad = \frac{360°}{2\pi} = 57,295°...$$

$\boxed{57° \ 17'...}$ ← VALOR DE 1 RADIAN

Por lo tanto, 1 radian es un ángulo que es un poco mayor que una porción de una grande de muzzarella. (Pregunta: ¿ Cuál es el ángulo exacto de una porción de una grande de muzzarella ? ¿ Cuál es el ángulo de una porción de una chica ?)



Para que tengas una idea, acá te dibujo un ángulo que tiene 1 radian. Para hacer que sea de un radián traté de dibujarlo de manera que el arco midiera lo mismo que el radio.

UN ANGULO
DE 1 RADIAN

<u>Nota</u>: Para usar la calculadora en radianes hay que ponerla en " **RAD** "

LA VELOCIDAD ANGULAR OMEGA (ω)

Para tener una idea de la rapidez con que algo se está moviendo con movimiento circular, ellos definen la velocidad angular ω como el N^ro^ de vueltas que da el cuerpo por unidad de tiempo. Si un cuerpo tiene gran velocidad angular quiere decir que da muchas vueltas por segundo. Resumiendo: La velocidad en el movimiento circular es la cantidad de vueltas que un cuerpo da por segundo. Otra manera de decir lo mismo sería dar el ángulo girado por unidad de tiempo. Esto daría en grados por segundo o en rad por seg.

VELOCIDAD ANGULAR. $\boxed{\omega = \dfrac{\Delta\alpha}{\Delta t}}$ ← ANGULO GIRADO. ← tiempo empleado.

Una misma velocidad angular se puede poner de varias maneras diferentes. Por ejemplo, para los lavarropas o para los motores de los autos se usan las revoluciones por minuto (RPM). También a veces se usan las RPS (= Revoluciones por segundo). También se usan los grados por segundo y los radianes por segundo. Es decir, hay muchas unidades diferentes de velocidad angular. Todas se usan y hay que saber pasar de una a otra. No es muy complicado el pasaje. Hay que hacer regla de 3 simple.
Por ejemplo, fijate, voy a pasar una velocidad de 60 RPM a varias unidades diferentes:

$$60\ \text{R.P.M.} = 60\ \text{Revol. x min.}$$

$$60\ \text{R.P.M} = \frac{1\ \text{rev}}{\text{seg}} = \frac{360^\circ}{\text{seg}} = \frac{2\pi\ (\text{rad})}{\text{seg.}}$$

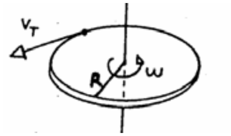
La más importante de todas las unidades de velocidad angular es la de radianes por segundo. Esta unidad es la que se usa en los problemas. Ahora, una aclaración importante: Los chicos dicen: Bueno entonces las unidades de la velocidad angular ω van a ser radianes sobre segundo. Esto es correcto. Pero hay un problema. Resulta que el radian es un número sin unidad. Y la palabra Radián suele no ponerse. De manera que las unidades que se suelen usar en la práctica son 1/seg . Conclusión:

$$[\ \omega\ ] = \frac{1}{\text{segundo}}$$ ⇦ UNIDADES DE LA VELOCIDAD ANGULAR

Este 1/seg a veces también lo ponen así: 1/s o así: s^{-1}. Muchas veces aparece en los parciales la velocidad angular en segundos a la $^{-1}$ y la gente no entiende lo que es.

LA VELOCIDAD TANGENCIAL ($\mathbf{V_t}$)

Imaginate un disco que esta girando. Sobre el borde del disco hay un punto que da vueltas con movimiento circular uniforme.



Ese punto tiene todo el tiempo una velocidad que es tg a la trayectoria. Esa velocidad se llama **velocidad tangencial**. Para calcular la velocidad tangencial se divide el espacio recorrido sobre la circunferencia por el tiempo empleado. El espacio recorrido es el arco recorrido, así que:

$$V_T = \frac{\text{ARCO}}{t} = \frac{\overbrace{\alpha_{(\text{rad})}}^{\omega} \cdot R}{t} = \omega \cdot R$$

$$\Longrightarrow \boxed{V_T = \omega \cdot R} \quad \text{VELOC. TGCIAL.}$$

Fijate que **ω** se mide en 1/seg y el radio se mide en metros. Así que las unidades de la velocidad tangencial van a ser m/s.

EL PERIODO T

Es el tiempo que tarda el cuerpo en dar una vuelta. Por ejemplo, el periodo de rotación de la tierra es 24 hs. El periodo de rotación de la aguja grande del reloj es de 1 hora. El período se mide en segundos. (O en hs, minutos, etc).

LA FRECUENCIA f

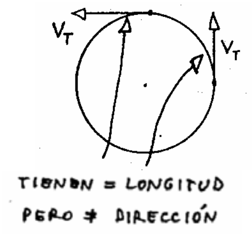
Es el N^{ro} de vueltas por segundo que da el cuerpo. (Por ejemplo, 3 vueltas por segundo, 5 vueltas por segundo.... etc.). Las unidades de la frecuencia son " 1 / seg " . A esta unidad se la llama **Hertz**. 1 Hertz = 1 / seg . A veces vas a ver puesto el Hz como seg^{-1} o s^{-1}. La frecuencia es la inversa del período :

$$\boxed{f = \frac{1}{T}} \leftarrow \text{frecuencia}$$

Fijate que si en vez de medir la velocidad angular ω en rad/seg o en grados/seg la medís en vueltas por segundo, la velocidad angular y la frecuencia coinciden. Por eso a la **ω** a veces se la llama " frecuencia angular ".

<u>ACELERACION CENTRIPETA</u> (Ojo con esto !!)

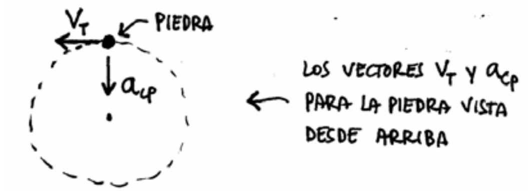
En el movimiento circular uniforme, el largo de la flecha que representa al vector velocidad tangencial no cambia. Esto quiere decir que el módulo de la velocidad tangencial es constante. Pero ojo !, lo que **sí** cambia es **<u>LA DIRECCION</u>** del vector velocidad. (Atento). Esto es un problema, porque cuando hay un cambio de velocidad tiene que haber una aceleración. Esa aceleración se llama centrípeta, y lo que la provoca es el <u>cambio de dirección del vector</u> <u>velocidad tangencial</u>. Mirá el siguiente dibujito:



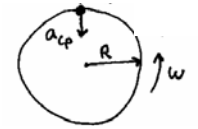
EL VECTOR VELOCIDAD TANGENCIAL CAMBIA DE DIRECCIÓN Y ESO PROVOCA LA APARICION DE UNA ACELERACION QUE SE LLAMA ACELERACION CENTRIPETA.

Esta aceleración centrípeta apunta siempre hacia el centro. Explicar por qué esto es así es un poco complicado. Aparte, confunde. Lo lógico sería decir que la a_{cent} apunta hacia fuera. Esto uno lo ve en la vida diaria, porque cuando un colectivo dobla uno tiende a irse " hacia afuera ", no hacia adentro.

Fijate como van los vectores Velocidad tangencial y aceleración centrípeta en este caso. Miremos todo desde arriba :



La velocidad tangencial siempre es tangente a la trayectoria. La aceleración centrípeta, siempre apunta hacia el centro.



LA ACELERACION CENTRIPETA APUNTA SIEMPRE HACIA EL CENTRO DE LA CIRCUNFERENCIA

La aceleración centrípeta se calcula por cualquiera de las siguientes 2 fórmulas :

$$\boxed{a_c = \frac{V^2}{R} = \omega^2 . R} \leftarrow$$

ACELERACIÓN CENTRÍPETA.

La demostración de cómo se deducen estas fórmulas también es algo complicada, así que tampoco la pongo.

<u>Resumiendo</u>:
Movimiento circular es un tema difícil. Básicamente lo que tenés que saber es que en un movimiento circular hay aceleración. Esta aceleración se llama " centrípeta " y apunta hacia el centro de la circunferencia. Explicar por qué esto es así es un poco complicado. Si te interesa entender mejor el asunto podés mirar un poco más adelante en el libro. Está un poco mejor explicado en la parte de dinámica del movimiento circular.
O sea, no es que yo no quiera explicártelo. Vení a mi clase y te lo muestro con una piedra atada a un hilo. Pero acá no puedo, sería muy largo.
Por cierto, no lo busques la explicación de esto en los libros porque no está. Tampoco se lo preguntes a tu primo porque no lo va a saber.

<u>OTRAS FORMULITAS QUE SE USAN EN MOVIMIENTO CIRCULAR</u>

La velocidad angular w era el ángulo girado dividido el tiempo empleado. Cuando el tiempo empleado sea justo un período (T), el ángulo girado será 2 PI . (= una vuelta). Entonces voy a poder calcular la velocidad angular w como:

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}} \longleftarrow$$

OTRA MANERA DE CALCULAR LA VELOCIDAD ANGULAR w

Pero como f = 1 / T, esta misma formula se puede poner como:

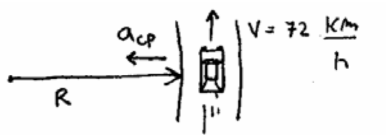
$$\boxed{\omega = 2\pi f}$$

RELACIÓN ENTRE LA VELOCIDAD ANGULAR Y LA FRECUENCIA

ALGUNOS PROBLEMAS RESUELTOS DE MOVIMIENTO CIRCULAR

1 - UN AUTOMÓVIL, CUYO VELOCÍMETRO INDICA EN TODO INSTANTE 72 km/h, RECORRE EL PERÍMETRO DE UNA PISTA CIRCULAR EN UN MINUTO. DETERMINAR EL RADIO DE LA MISMA. SI EL AUTOMÓVIL TIENE UNA ACELERACIÓN EN ALGÚN INSTANTE, DETERMINAR SU MÓDULO, DIRECCIÓN Y SENTIDO.

Hagamos un dibujito. Visto desde arriba el asunto se ve así:



⇦ EL AUTO VISTO DESDE ARRIBA

Si la punta es circular, la velocidad que tiene el auto es la velocidad tangencial. Si da una vuelta a la pista en un minuto, significa que su periodo es T es de un minuto. Ahora , w es 2 π sobre T , entonces:

$$W = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{60\ s} = 0{,}104\ \frac{1}{s} \quad \longleftarrow \text{Velocidad angular}$$

Por otro lado la velocidad tangencial es 20 m/s (= 72 km/h). Reemplazando:

$$V_T = w \times R$$

$$\rightarrow \quad R = \frac{V_R}{W} = \frac{20\ m/s}{0{,}104\ 1/s}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{R = 191\ m} \quad \longleftarrow \text{Radio de la pista}$$

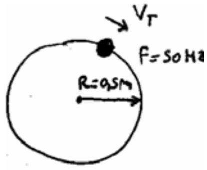
Pregunta: ¿El automóvil tiene aceleración ? Rta: Sí, tiene aceleración centrípeta de modulo:

$$a_{cp} = w^2\ R$$

$$\rightarrow \quad a_{cp} = (\ 0{,}104\ 1/s\ )^2 .\ 191\ m$$

$$\rightarrow \quad \boxed{a_{cp} = 2{,}09\ m/s^2}$$ (Apunta hacia el centro de la pista)

2 - UN AUTOMÓVIL RECORRE LA CIRCUNFERENCIA DE 50 cm DE RADIO CON UNA FRECUENCIA DE 10 Hz. DETERMINAR:
A- EL PERIODO.
B- LA VELOCIDAD ANGULAR.
C- SU ACELERACIÓN.



Una frecuencia de 50 hz es una frecuencia de 50 1/s. Acá sólo es cuestión de aplicar formulas. A ver si me seguís. W era $2\pi \times f$. Entonces:

$$W = 2\pi \times f = 2\pi \times 10\ 1/s = \boxed{62{,}8\ 1/s} \longleftarrow \text{velocidad angular}$$

El período T era 1/frecuencia:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{10\ 1/s} \Rightarrow \boxed{T = 0{,}1\ s} \leftarrow \text{Período}$$

$$V_t = w\ .\ R \rightarrow V_t = 62{,}8\ 1/s \times 0.5\ m$$

$$\boxed{V_r = 31{,}4\ m/s} \leftarrow \text{Velocidad tangencial}$$

Su aceleración va a ser la aceleración centrípeta, que siempre esta apuntando hacia el centro de la circunferencia. El módulo de esta aceleración se puede calcular por cualquiera de las siguientes 2 formulas: $a_{cp} = w^2\ R$ ó $a_{cp} = V_r^2 / r$. Usando la 1^{era}:

$$a_{cp} = (62{,}8\ 1/s)^2 \times 0{,}5m$$

$$\Rightarrow \underline{\mathbf{a_{cp} = 1973\ m/s^2}}$$

---

3 - CUÁL ES LA ACELERACIÓN QUE EXPERIMENTA UN CHICO QUE VIAJA EN EL BORDE DE UNA CALESITA DE 2m DE RADIO Y QUE DA VUELTA CADA 8 SEGUNDOS.

Para calcular la aceleración centrípeta es siempre lo mismo $a_{cp} = w^2 .\ R$. Si el tipo da una vuelta cada 8 segundos su velocidad angular va a ser :

$$w = \frac{2\pi}{8\ s} = 0{,}785\ 1/s$$

Entonces:

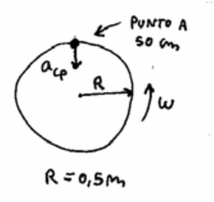
$$a_{cp} = (0{,}785\ 1/s)^2 .2m$$

$$\Rightarrow \boxed{a_{cp} = 1{,}23\ m/s^2} \longleftarrow \text{aceleración centrípeta del chico}$$

---

4 - CALCULAR LA VELOCIDAD ANGULAR Y LA FRECUENCIA CON QUE DEBE GIRAR UNA RUEDA PARA QUE LOS PUNTOS SITUADOS A 50 Cm DE SU EJE ESTÉN SOMETIDOS A UNA ACELERACIÓN QUE SEA 500 VECES LA DE LA GRAVEDAD.

Este problema no es difícil. Quiero que la aceleración centrípeta sea igual a 500 g. Para que tengas una idea 500 ge es el valor de una centrifugadora de laboratorio.



$$a_{cp} = 500 \cdot g = 500 \times 10\ m/s^2$$

$$a_{cp} = 5.000\ m/s^2$$

La velocidad angular para la cual se cumpla esto va a ser:

la frecuencia será: $w = 2\ \pi . f \Rightarrow f = w/2\pi = 100\ 1/s\ /\ 2\ \pi$

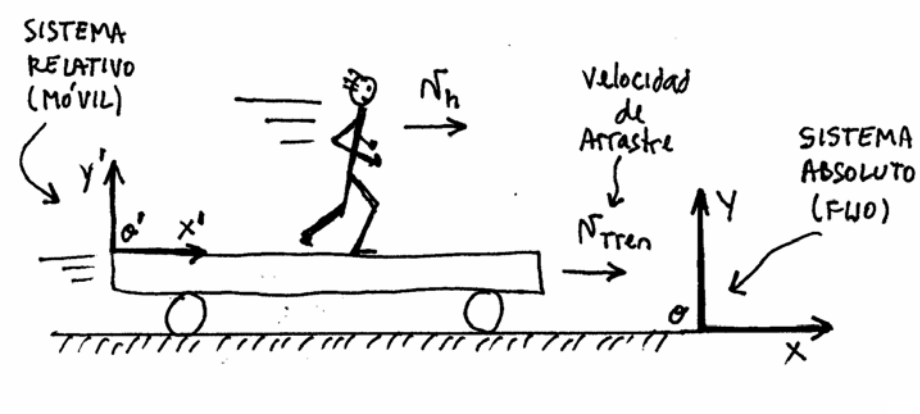
$$\Rightarrow \boxed{f = 15{,}9\ 1/s}$$

Ultima cosa sobre cinemática del Movimiento circular

Cinemática del movimiento circular no es un tema muy tomado en los parciales. Ellos prefieren tomar **dinámica** del movimiento circular. (Fuerza centrípeta y todo eso).
El motivo es que Dinámica del circular abarca también cinemática del circular.
O sea, para saber dinámica del circular tenés que saber primero cinemática del circular. Entonces tomando un problema de dinámica del circular, también se está tomando cinemática del circular... Es decir, 2 pájaros de un solo tiro.

FIN CINEMATICA DEL MOVIMIENTO CIRCULAR

MOVIMIENTO RELATIVO



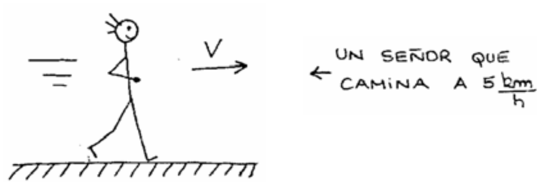
$$V_{ABS} = V_{rel} + V_{arrastre}$$

MOVIMIENTO RELATIVO

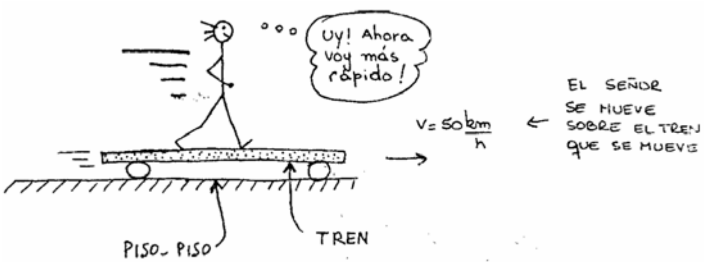
(= Movimiento de cosas que se mueven sobre cosas que se mueven)

Tengo un problema de Movimiento Relativo cuando hay algo que se mueve sobre algo que se mueve. Ejemplo: Un señor que camina sobre un tren que avanza o una persona que camina sobre un barco que navega. También tengo movimiento relativo en el caso de un bote que es arrastrado por el agua. Lo mismo pasa para un avión que vuela y es arrastrado por el viento.

Hay unas fórmulas complicadas para resolver los problemas de movimiento relativo. Se pueden hacer los problemas con esas fórmulas, pero es un lío. Yo quiero que veas una manera de resolver los ejercicios de movimiento relativo pero sin usar ecuaciones complicadas, sino pensando un poquito. Fijate: Supongamos que una persona camina a 5 km/h:



Acá uno dice que la velocidad del tipo es 5 km/h y no hay problema. Pero...
¿ Qué pasa si el tipo se mueve sobre algo que a su vez se mueve ? A ver si nos entendemos. Supongamos que el tipo sigue caminando a 5 por hora pero ahora está adentro de un tren que va a 50 por hora.



Pregunto: ¿ Cuál es ahora la velocidad del hombre ? ¿ 5 por hora ? ¿ 50 por hora ?
¿ 55 por hora ?

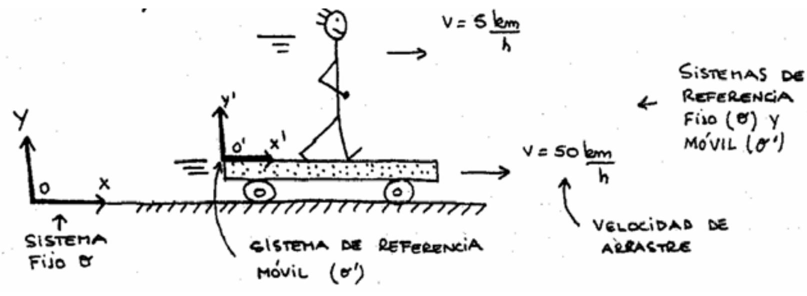
La respuesta es la siguiente: La velocidad del hombre es 5 km/h con respecto al tren, y 55 km/h con respecto a la tierra.

Es decir, 2 de las respuestas pueden ser válidas: 5 por hora y 55 por hora. Todo depende desde dónde uno esté mirando las cosas. Si uno está sentado en el tren, ve que el tipo camina a 5 km por hora. Si uno está parado en el andén, lo ve moverse a 55 por hora.
¿ Ves como es la cosa ? El movimiento es algo **RELATIVO**. Cuando digo que la velocidad de un objeto vale tanto, tengo que indicar con respecto a qué estoy midiendo esa velocidad.
Ese es el concepto y eso es lo que tenés que entender. Ahora vamos a poner todo en forma física que es como les gusta a ellos:

Voy a tomar un sistema de referencia fijo a la tierra y otro fijo al tren. Los voy a llamar **o** y **o'** (o prima). El sistema de referencia fijo a la Tierra-Tierra se llama sistema fijo o sistema absoluto. El sistema de referencia fijo al piso del tren que se mueve se llama sistema móvil o sistema relativo.

VELOCIDAD RELATIVA, VELOCIDAD ABSOLUTA Y VELOCIDAD DE ARRASTRE

El sistema **o'** está pegado al tren, entonces se mueve con la misma velocidad que el tren, es decir a 50 km/h. Esta velocidad que tiene es sistema móvil se llama **Velocidad de arrastre**. Se la llama así porque es la velocidad con la que el tren "arrastra" al sistema **o'**.



Ahora ellos dicen lo siguiente: la velocidad del hombre con respecto al sistema **o'** (5 km/h) se llama **Velocidad Relativa**.
La velocidad del hombre con respecto al sistema **o** (55 km/h) se llama **Velocidad Absoluta**.

Entonces:

VER

Velocidad Absoluta: Es la velocidad del objeto respecto a la Tierra –Tierra.
Velocidad Relativa: Es la velocidad del objeto respecto del móvil que lo arrastra.
Velocidad de arrastre: Es la velocidad con la que es arrastrado el sistema móvil.
Puedo decir que 55 km/h = 5 km/h + 50 km/h, o lo que es lo mismo:

$$\boxed{\textbf{Velocidad Absoluta = Velocidad Relativa + Velocidad de Arrastre}} \leftarrow \text{VER ESTO}$$

De la misma manera, si quiero saber la posición del hombre (el lugar donde está) puedo decir:

Posición Absoluta = Posición Relativa + Posición de Arrastre.

La posición absoluta será la posición del objeto que se mueve referida al sistema **o**. (O sea, la posición del objeto respecto del sistema de referencia que está pegado a la Tierra – Tierra). La posición relativa será la posición del objeto referida al sistema **o'**. La posición de arrastre será la posición del sistema móvil (**o')** respecto del sistema fijo (**o**).

Los problemas de Movimiento relativo se parecen más a problemas de ingenio que a problemas de física. Es más fácil resolverlos razonando y pensando un poco que planteando ecuaciones complicadas. O sea, hay fórmulas para resolver los problemas de movimiento relativo. Pero si yo te las pongo acá, ahí sí que no entenderías un pepino. Es más fácil de resolver los problemas de relativo pensando un poco que usando ecuaciones choclazas.

Fijate en los problemas que siguen y te vas a dar cuenta.

Si de todas maneras insistís y querés tener una fórmula para los problemas de movimiento relativo, entonces quedate con esta:

$$\boxed{V_{abs} = V_{rel} + V_{arr}} \longleftarrow$$

LA VELOCIDAD ABSOLUTA ES LA VELOCIDAD RELATIVA + LA DE ARRASTRE

No hay otras fórmulas que te pueda servir. (O sea, hay, pero creeme que esas ecuaciones pueden llegar a complicarte la existencia). Vamos ahora a los problemas

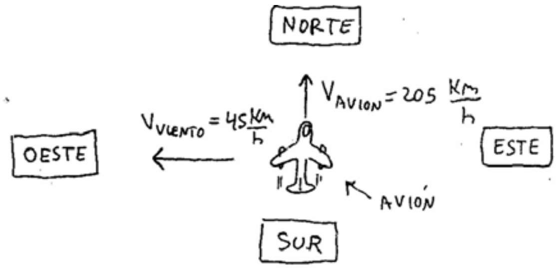
Fin teoría de movimiento relativo

MOVIMIENTO RELATIVO - PROBLEMAS RESUELTOS

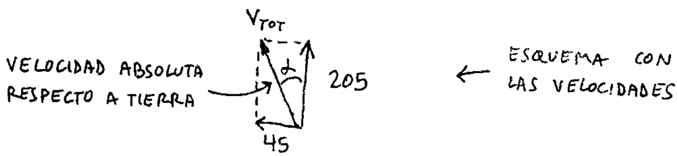
Problema 1.
Una avioneta, cuya velocidad respecto del aire es 205 km/h, pasa sobre la ciudad A, dirigiéndose hacia la ciudad B situada 400 km al Norte de A. La oficina meteorológica en tierra le informa que sopla viento en dirección Este - Oeste, a 45 km/h

a) - Determinar la dirección en que se desplaza la avioneta en estas condiciones
b) - Hallar el ángulo que debe desviar su rumbo, para desplazarse efectivamente hacia B, suponiendo que se mantienen constantes las velocidades.
c) - Hallar cuánto tarda en llegar

a) Hago un esquema para entender mejor lo que dice el enunciado: Me dicen que la velocidad de la avioneta es de 205 km/h respecto del aire. Esto significa que si el aire estuviera quieto su velocidad sería de 205 km/h respecto de la tierra. Esto es lo que pasaría si no hubiera viento.
Pero hay viento. El viento sopla así: ⟵ a 45 kilómetros por hora. De manera que lo que tengo es esto:



Conclusión: La avioneta intenta volar así : ↑ , pero el viento la empuja así: ←
Entonces en definitiva volará así: ↖ (inclinada). Calculo la velocidad real respecto de Tierra y el ángulo de inclinación. Hago un dibujito poniendo todos los vectores velocidad. Ojo, prestale atención a este esquema porque todos los problemas de Relativo se resuelven de la misma manera. Todos tienen un dibujito parecido. El diagrama vectorial de velocidades es la clave para entender este problema y todos los problemas de Movimiento Relativo. (Conste que te lo dije). Entonces:



Planteo Pitágoras: $V_{ABSOLUTA} = \sqrt{(\ 205\ km/h\ )^2 + (\ 45\ km/h\ )^2}$

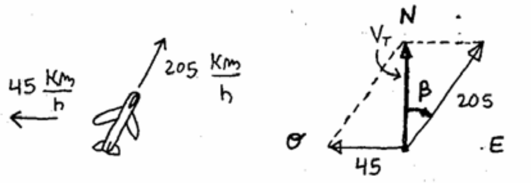
$$\boxed{V_{TOT} = 209{,}88\ \frac{Km}{h}}$$ ← VELOCIDAD TOTAL (ABSOLUTA) DE LA AVIONETA RESPECTO A TIERRA

Para sacar el ángulo puedo usar la tangente:

$$Tg\ \alpha = 45 / 205 = 0{,}2195 \Rightarrow$$

$$\boxed{\alpha = 12{,}38^{\circ} = 12^{\circ}\ 23'}$$ ← ANGULO QUE FORMA EL AVIÓN (HACIA EL NOROESTE)

b) Piden hallar el ángulo que tiene que desviarse el avión hacia la derecha para volar justo - justo hacia el norte. Uno podría decir que ese ángulo tiene que ser 12,38 ° ... pero <u>NO.</u> Fijate por qué no. (Atento). El triángulo de velocidades quedaría así:



← NUEVO DIAGRAMA DE VELOCIDADES

Otra vez, el ángulo puedo calcularlo por trigonometría.

$$Sen\ \beta = 45/205 = 0{,}2195 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\beta = 12{,}68^{\circ} = 12^{\circ}\ 41'}$$

c) - ¿ Cuánto tardará en llegar de la ciudad <u>A</u> a la <u>B</u> ? Bueno, para calcular eso tengo que saber la velocidad total que tiene. Mirando el dibujito planteo Pitágoras:

$$v_t^{\,2} + 45^2 = 205^2 \quad \Rightarrow$$

$$v_t = \sqrt{205^2 - 45^2}$$

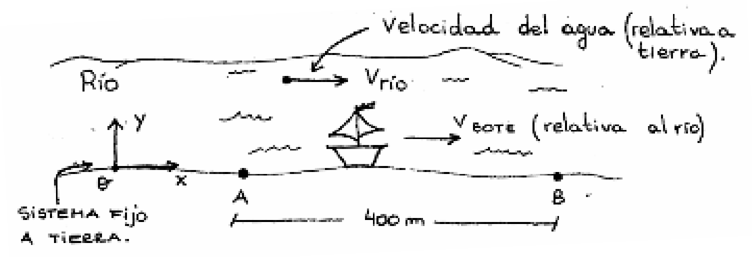
➔ <u>V_{ABS} = 200 km/h</u>

Como la distancia entre las ciudades A y B es de 400 km ⇒ **<u>Tardará 2 hs</u>**

Problema 2

Entre los muelles A y B que están en la misma orilla de un canal rectilíneo hay una distancia de 400 m. Un bote de remos tarda 40 segundos en ir de A hasta B y 50 segundos en regresar. Considerando constante los módulos de las velocidades del bote respecto del agua y de la corriente respecto de la orilla, hallar el valor de las mismas.

Hago un esquema de la situación. El bote puede ir o volver navegando por el río a favor o en contra de la corriente. Cuando va a favor de la corriente tarda 40 segundos. Cuando va en contra, tarda 50.



Llamo: $V_{río}$ = Velocidad del agua del río respecto a la orilla
V_{bote} = Velocidad que tiene el bote respecto al agua de río.
(= velocidad que tendría el bote en un lago con agua quieta)

La velocidad absoluta del bote con respecto a la tierra será la suma de las velocidades cuando va a favor de la corriente, y la resta cuando va en contra. Por lo tanto:

$$V_{abs\ bote}\ (\text{corriente a favor}) = V_{bote} + V_{río}$$

$$V_{abs}\ \text{bote (corriente en contra)} = V_{bote} - V_{rio}$$

Como la distancia son 400 m, puedo escribir :

$$V = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{400\ m}{\Delta t}\ . \quad \text{Entonces:}$$

$$- V_{a\ la\ ida} = \frac{400\ m}{40\ seg} = 10\ \frac{m}{s}$$

$$- V_{a\ la\ vuelta} = \frac{400\ m}{50\ seg} = 8\ \frac{m}{s}$$

Por lo tanto: $\begin{cases} 10\,\frac{m}{s} = V_{río} + V_{bote} & (1) \\ 8\,\frac{m}{s} = V_{bote} - V_{río} & (2) \end{cases}$

Esto es un sistema de ecuaciones con dos incógnitas. Lo resuelvo por cualquier método. Por ejemplo, si sumo las ecuaciones:

$$18 \text{ m/s} = 2\ V_{bote}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\mathbf{V_{bote} = 9\ m/s}}$$

Reemplazando en cualquiera de las ecuaciones:

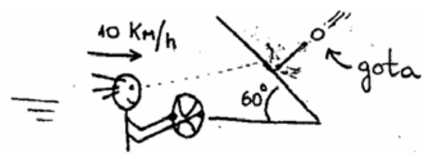
$$10 \text{ m/s} = V_{rio} + 9 \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\mathbf{V_{rio} = 1\ m/s}}$$

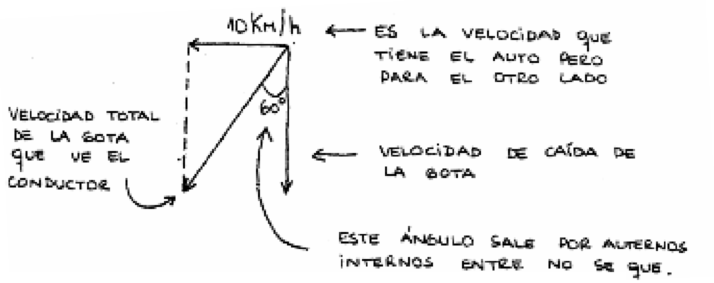
Problema 3

En un día de verano que no hay viento se descarga un chaparrón, de modo tal que las gotas de agua siguen trayectorias verticales. El conductor de un automóvil que marcha a 10 km/h ve que las gotas llegan en dirección perpendicular al parabrisas. Sabiendo que el parabrisas forma un ángulo de 60 º con la horizontal, hallar la velocidad con que descienden las gotas de lluvia vistas desde tierra, y con qué velocidad golpean al parabrisas.

Hay que tratar de entender lo que dice el enunciado. Si el que maneja ve que las gotas pegan justo en forma perpendicular, lo que tengo es esto:



Como el conductor esta quieto respecto al auto, él ve venir las gotas hacia él. En realidad, las gotas caen en forma perfectamente vertical (respecto a tierra). Desde el punto de vista del conductor, lo que ve es esto:



Mirando el triangulito, y aplicando la función seno: $\text{sen}\ \alpha = \dfrac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}}$

$$\text{Sen } 60° = \frac{10 \text{ km/h}}{V_{total}} \Rightarrow V_{total} = \frac{10 \text{ km/h}}{\text{sen } 60°}$$

$$\Rightarrow \boxed{V_{total} = 11{,}54 \text{ km/h}} \leftarrow$$

VELOCIDAD CON QUE LA GOTA GOLPEA EL VIDRIO

Planteando la tangente en el mismo ángulo:

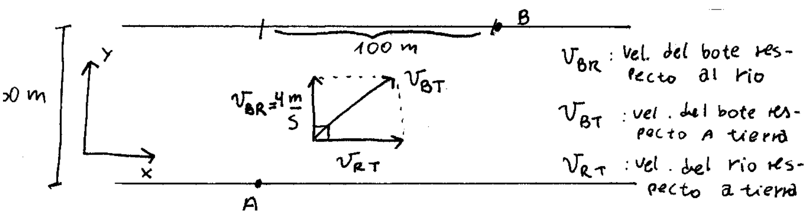
$$\text{tg } 60° = \frac{10 \text{ km/h}}{V_{caida}} \Rightarrow V_{caida} = \frac{10 \text{ km/h}}{\text{tg } 60°} \Rightarrow$$

$$\boxed{V_{caída} = 5{,}77 \frac{\text{km}}{\text{h}}} \Leftarrow$$

VELOCIDAD VERTICAL QUE TIENEN LAS GOTAS AL CAER.

Problema 4

Un bote cruza un río de 60 m. de ancho con una velocidad de 4 m/s respecto del agua, orientada de tal forma que, si las aguas estuvieran quietas, cruzaría perpendicularmente a las orillas. El bote parte de un punto A ubicado sobre una de las márgenes y llega a otro punto B en la margen opuesta, distante 100 m del punto que está enfrente de A. ¿Cuánto tarda en cruzar el río ? ¿ Cuál es la velocidad del bote respecto de tierra ?



Hallemos primero el tiempo que tarda el bote en recorrer los 60 m de distancia ente una orilla y la otra:

$$60\ m = v_{BR} \cdot t \qquad \text{con } v_{BR} = 4\ \frac{m}{s}$$

$$\Rightarrow t = \frac{60\ m}{4\ m/s} \quad \Rightarrow \boxed{t = 15\ s} \longleftarrow$$ TIEMPO QUE TARDA EN CRUZAR

Por otro lado, durante esos 15 seg, el bote se movió horizontalmente debido a la corriente del río. Hallemos la velocidad de la corriente del río con respecto a tierra sabiendo que el bote recorrió 100 m en 15 seg.

$$\Rightarrow V_{rt} = 100\ m / 15\ seg \quad \Rightarrow \quad V_{rt} = 6{,}66\ m/s$$

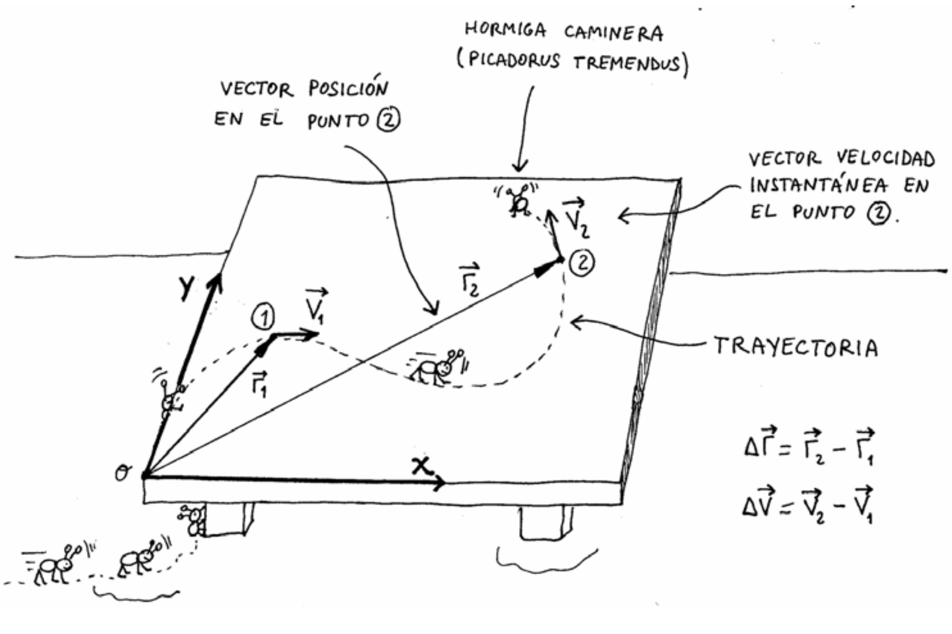
Finalmente, el módulo de la velocidad es:

$|V_{bt}| = \sqrt{V_{br}^{\,2} + V_{rt}^{\,2}}$ $\Rightarrow$ Reemplazamos $V_{br} = 4\ m/s$ y $V_{rt} = 6{,}66\ m/s$

$$\Rightarrow \ |V_{bt}| = \sqrt{(\,4m/s\,)^2 + (\,6{,}66m/s^2)} = \sqrt{16m^2/s^2 + 44{,}39\ m^2/s^2}$$

Hacemos la cuenta $\Rightarrow$ $\boxed{|V_{bt}| = 7{,}76\ m/s}$ $\Leftarrow$ **MÓDULO DE LA VELOCIDAD DEL BOTE RESPECTO A TIERRA**

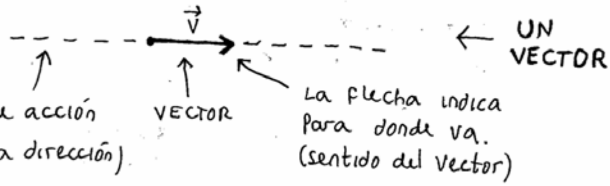
CINEMÁTICA VECTORIAL



CINEMÁTICA VECTORIAL – TEORÍA

VECTORES

Un vector se representa por una flecha de la siguiente manera:



Cuando uno ve un dibujito de este tipo tiene que darse cuenta de que la flecha que llaman **V** es un $\boxed{\textbf{VECTOR}}$.
Para destacar esto ellos le ponen una flechita arriba. ($\vec{V}$).
La magnitud $\vec{V}$ se lee vector ve o ve vector.
En física los vectores que vos vas a ver serán casi siempre posiciones, velocidades, aceleraciones o fuerzas. Hay otras cosas que también son vectores pero se usan menos.
Para saber si algo es vector tenés que fijarte si apunta para algún lado. Si apunta para algún lado es vector. Si no, no.
Fijate por ejemplo el caso de la velocidad:

EL VECTOR VELOCIDAD

Al largo del vector se lo llama $\boxed{\text{MÓDULO}}$. Más grande es el vector, mayor será su módulo. Por ejemplo, se supone que al vector $\vec{V}_1 = 20$ Km/h habría que dibujarlo más largo que al vector $\vec{V}_2 = 10$ Km/h. (Porque el módulo es mayor).

Al módulo del vector $\vec{V}$ se lo pone así $|\vec{V}|$ o así V (sin la flechita). Conviene siempre ponerlo así $|\vec{V}|$ porque sinó ellos pueden pensar que quisiste poner $\vec{V}$ pero te olvidaste la flechita.

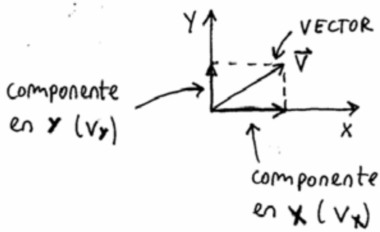
Hay cosas que no son vectores. Se llaman ESCALARES. Por ejemplo el tiempo es un escalar porque no apunta para ningún lado. El tiempo no va para allá → ni para ← allá. Así que no tiene dirección ni sentido y NO es vector.

← EL TIEMPO NO ES VECTOR.

En algunos vectores se habla de punto de aplicación. (caso de las fuerzas, por ejemplo). El punto de aplicación de una fuerza es el lugar donde se ejerce esa fuerza.

COMPONENTES DE UN VECTOR

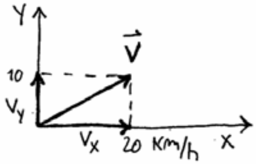
Cuando un vector está inclinado se toma un par de ejes X-Y y se lo pone así:



← COMPONENTES DE UN VECTOR

V_X y V_Y forman al vector y por eso se llaman componentes.

Supongamos por ejemplo que el vector $\vec{V}$ es una velocidad y que sus componentes son: $V_x = 20$ Km/h y $V_y = 10$ Km/h.
En ese caso lo que tengo es:



← EL VECTOR $\vec{V}$ ESTÁ COMPUESTO POR V_x y V_y.

Para poner esto en forma matemática ellos dijeron así: Tenemos que dar a entender que es un vector que mide 20 Km/h en X y 10 Km/h en Y. Vamos a escribir esto de alguna manera para que el que lo lea pueda entender. Por ejemplo:

$$\vec{V} = 20\ \frac{Km}{h}\ \text{En el eje X}\ \ y\ \ 10\ \frac{Km}{h}\ \text{En el eje Y}.$$

Todo esto es muy lindo pero es un poco largo. De manera que reemplazaron a la frase "en el eje x" por la letra i y a la frase "En el eje Y" por la letra j. (Eligieron 2 letras cualquiera). Así que el vector $\vec{V}$ quedó:

$$\vec{V} = 20\ \frac{Km}{h}\ i\ \ y\ \ 10\ \frac{Km}{h}\ j$$

La letra y queda un poco fea en el medio, así que la reemplazaron por un signo + que queda más matemático.
El vector $\vec{V}$e queda finalmente:

$$\boxed{\vec{V} = 20\ \frac{Km}{h}\ i + 10\ \frac{Km}{h}\ j}$$

← EXPRESIÓN DEL VECTOR $\vec{V}$

Los chicos se confunden cuando ven una cosa como $\vec{V} = 20 \frac{Km}{h}\, i + 10 \frac{Km}{h}\, j$. Dicen: ¿qué es la i? ¿Qué es la j? ¿Por qué están sumando ambas cantidades?

Repito: La letra i no significa nada. Sólo reemplaza a la frase "En el eje x". Lo mismo va para la letra j. En cuanto al asunto de que las cantidades están sumando... **NO**, las cantidades no están sumando. El (+) se usa para $\boxed{\text{separar}}$ la componente en x de la componente en y. Se podría poner una coma también, por ejemplo. Es más, a veces ellos ponen al vector $\vec{V}$ como $\vec{V} = \left(20 \frac{Km}{h} ; 10 \frac{Km}{h}\right)$.

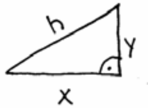
Trabajando en letras, que es como les gusta a ellos, te digo que todo vector de componentes V_x y V_y se puede poner como:

$$\boxed{\vec{V} = V_x\, i + V_y\, j}$$

← FORMA GENERAL DE ESCRIBIR UN VECTOR DE COMPONENTES V_x Y V_y

FORMA DE CALCULAR EL MÓDULO

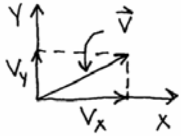
Si me dan **las** componentes de un vector puedo calcular el módulo usando Pitágoras. Acordate, cuando tenías un triángulo rectángulo de lados x e y, vos podías calcular el valor de la hipotenusa haciendo la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los catetos. Es decir:



$$h = \sqrt{x^2 + y^2}$$ ← PITÁGORAS

Lo mismo se puede hacer acá. Ahora los catetos son las componentes V_x y V_y y la hipotenusa será el módulo de $\vec{V}$.

¿Me seguiste?



$$\boxed{|\vec{V}| = \sqrt{V_x^{\,2} + V_y^{\,2}}} \quad \leftarrow$$

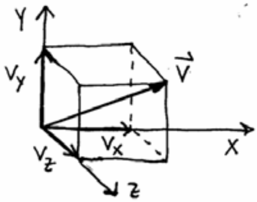
MÓDULO DE UN VECTOR.

Por ejemplo, para el vector que tenía antes que era $\vec{V} = 20\ \frac{Km}{h}\ i + 10\ \frac{Km}{h}\ j$, su módulo será:

$$|\vec{V}| = \sqrt{\left(20\ \frac{Km}{h}\right)^2 + \left(10\ \frac{Km}{h}\right)^2} = \underline{22{,}36\ \frac{Km}{h}}$$

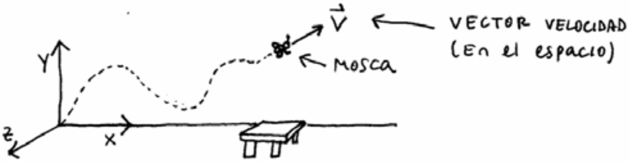
VECTORES EN EL ESPACIO

Los vectores que puse antes estaban todos en el plano. Pero uno podría tener también una cosa así:



← UN VECTOR EN EL ESPACIO. SUS 3 COMPONENTES SON V_x, V_y y V_z.

(Medio complicado, no?). Este caso podría ser el de una mosca que está volando...



Ahora el vector tendría 3 componentes que serían V_x, V_y y V_z. Por ejemplo, podría ser algo así:

$$\vec{V} = 10\ \frac{Km}{h}\ i + 30\ \frac{Km}{h}\ j + 5\ \frac{Km}{h}\ K$$

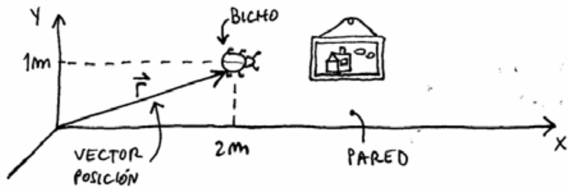
En el caso general un vector en el espacio se pone igual que antes:

$$\vec{V} = V_x\, i + V_y\, j + V_z\, K$$

Ahora la letra K reemplaza a la frase "En el eje z".
No te preocupes por esto de vectores en el espacio. Nunca lo toman.

VECTOR POSICIÓN

La posición de una cosa es el lugar donde la cosa está. Por ejemplo suponete un bicho que camina por una pared:

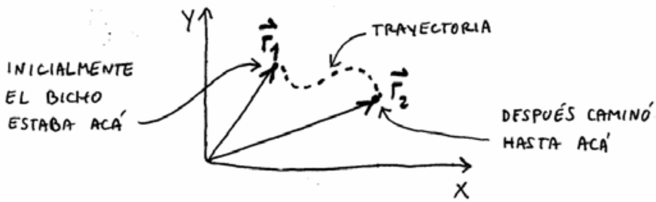


Si las coordenadas del coso son X = 2m e Y = 1m, puedo decir que el vector posición ($\vec{r}$) va a ser:

$$\vec{r} = 2m\, i + 1m\, j \quad \leftarrow \text{POSICIÓN DEL BICHO.}$$

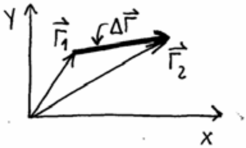
VECTOR DESPLAZAMIENTO ($\Delta\vec{r}$)

Suponé que una cosa pasa de una posición a la otra.



ES DECIR, al principio el tipo tiene un vector $\vec{r}_1$ y al final un vector $\vec{r}_2$.

El vector desplazamiento va a ser el vector que va de la punta de $\vec{r}_1$ a la punta de $\vec{r}_2$. (se lo define así).
Se lo llama VECTOR DESPLAZAMIENTO o también DELTA ERRE ($\Delta\vec{r}$).



← VECTOR $\Delta\vec{r}$ (DESPLAZAMIENTO)

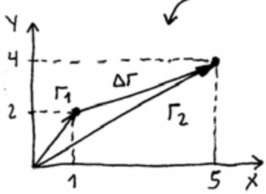
se lo llama desplazamiento porque si el bicho hubiera caminado de $\vec{r}_1$ a $\vec{r}_2$ en línea recta, el módulo del vector $\Delta\vec{r}$ daría el espacio recorrido por el chobi, es decir, lo que se desplazó.
Esto en realidad puede no pasar porque al coso se le puede ocurrir ir caminando siguiendo una trayectoria cualquiera como la curva punteada que puse en la hoja anterior
Si uno tiene los vectores $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ el vector $\Delta\vec{r}$ se calcula como la resta de los vectores $\vec{r}_2$ menos $\vec{r}_1$. (Esto también es una definición). Es decir:

$$\boxed{\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1}$$ ← VECTOR DESPLAZAMIENTO

EJEMPLO

UN BICHO CAMINA DE LA POSICIÓN $X_1 = 1\,m$, $Y_1 = 2\,m$ A LA POSICIÓN $X_2 = 5\,m$, $Y_2 = 4\,m$. CALCULAR EL VECTOR $\Delta\vec{r}$.

Lo que tengo es esto:



$$\begin{cases} \vec{r}_1 = 1m\,i + 2m\,j \\ \vec{r}_2 = 5m\,i + 4m\,j \end{cases}$$

$$\Delta\vec{r} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1 = \underline{4m\,i + 2m\,j}$$ ← VECTOR DESPLAZAMIENTO

Lo que hice acá fue restarle el vector $\vec{r}_1$ al vector $\vec{r}_2$. Eso se hace restando componente a componente. Es decir, todo lo que tiene la letra i menos todo lo que tiene la letra i y todo lo que tiene la letra j menos todo lo que tiene la letra j.
Supongo que todo esto no se entiende mucho, pero... que le vas a hacer. La vida es así. Son definiciones. Hay que hacer lo que dice la definición y chau. Si la fórmula dice: a $\bar{r}_2$ réstele $\bar{r}_1$, hago $\vec{r}_2$ menos $\vec{r}_1$ y listo.

VECTOR VELOCIDAD MEDIA ($\vec{V}_M$)

Si el bicho tardó un tiempo Δt en ir de una posición a la otra, el vector velocidad media se calcula haciendo la cuenta $\Delta\bar{r}$ sobre Δt.
No lo tomes a mal pero esto también es una definición.

$$\boxed{\vec{V}_M = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}} \quad \leftarrow \text{VECTOR VELOCIDAD MEDIA}$$

EJEMPLO

CALCULAR EL VECTOR VELOCIDAD MEDIA DEL BICHO DEL EJEMPLO ANTERIOR SUPONIENDO QUE PARA IR DE $\bar{r}_1$ a $\bar{r}_2$ tardó un TIEMPO $\Delta t = 2$ segundos.

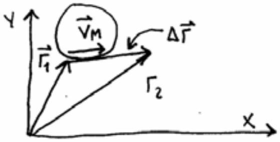
El vector posición del ejemplo anterior había dado: $\Delta\bar{r} = 4\,m\, i + 2\,m\, j$. Si divido a este vector por $\Delta t = 2$ segundos obtengo el vector velocidad media que es:

$$\bar{V}_M = \frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t} = \frac{4\,m\, i + 2\,m\, j}{2\,seg}$$

$$\Rightarrow \underline{\vec{V}_M = 2\,\frac{m}{s}\, i + 1\,\frac{m}{s}\, j} \quad \leftarrow \text{VECTOR VELOCIDAD MEDIA}$$

VELOCIDAD INSTANTÁNEA

La velocidad vectorial media vendría a ser algo así como una especie de velocidad "promedio" que tiene el bicho al ir de la posición inicial a la posición Final. (ojo, algo así).

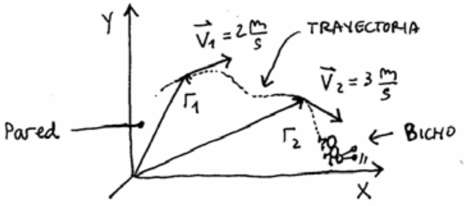


REPRESENTACIÓN DE LA VELOCIDAD VECTORIAL MEDIA

Es decir, el vector velocidad media me dio $\vec{V}_M = 2\frac{m}{s}i + 1\frac{m}{s}j$.
Si yo saco el módulo de este vector tengo:

$$|\vec{V}_M| = \sqrt{\left(2\frac{m}{s}\right)^2 + \left(1\frac{m}{s}\right)^2} = 2{,}23\ \frac{m}{s}$$

Esta es la velocidad media que tiene el bicho si camina de $\vec{r}_1$ a $\vec{r}_2$ en línea recta. Pero el bicho puede tener una velocidad en $\vec{r}_1$ (Por ej 2 m/s) y otra velocidad en $\vec{r}_2$ (Por. ej $3\frac{m}{s}$). Quiere decir que la velocidad vectorial media <u>NO ES</u> la velocidad que tiene el tipo al pasar por un punto determinado.
Si yo quiero saber que velocidad tenía el tipo $\boxed{\text{exactamente}}$ al pasar por $\vec{r}_1$ (o por $\vec{r}_2$), tendría que conocer la velocidad que tenía exáctamente en ese instante. No antes ni después, sinó <u>justo</u> en ese momento. A esa velocidad se la llama <u>VELOCIDAD INSTANTÁNEA</u>. El dibujito correspondiente sería este:



$\vec{V}_1$ Y $\vec{V}_2$ SON LAS VELOCIDADES INSTANTÁNEAS

Lo más importante que hay que saber de la velocidad instantanea es que siempre es TANGENTE A LA TRAYECTORIA. ESO sí tenés que acordártelo. ES decir:

LA VELOCIDAD INSTANTÁNEA ES SIEMRE tg A LA TRAYECTORIA

Resumiendo. Si vos vas en un auto que está acelerando y en un momento determinado el velocímetro marca 60 por hora, esa será la velocidad instantánea.

¿Por qué?

Por que la velocidad instantánea es la velocidad que tiene el objeto $\boxed{\text{justo}}$ en un momento determinado y eso es exáctamente lo que marcan los velocímetros de los autos.

Para poder calcular la velocidad instantánea de una cosa que se mueve tenés que poder obtener de alguna manera el vector velocidad expresado en función del tiempo. Si no podés obtener $\vec{V} = \vec{V}_{(t)}$ no podés calcular la velocidad instantánea.

No me mires con esa cara de "¿Este de qué habla?!". Este asunto de la velocidad media e instantánea no es cosa fácil.

Lo vas a entender mejor cuando hagas algunos ejercicios y también después cuando veas movimiento rectilíneo uniforme y uniformemente variado. (MRU y MRUV).

Ahora seguí que ya terminás con la teoría y podés empezar con los problemas.

Título: Aceleración Media e instantánea.

ACELERACIÓN MEDIA E INSTANTANEA

Si una cosa que se mueve tiene en un momento un vector velocidad $\vec{V}_1$ y después otro vector velocidad $\vec{V}_2$, quiere decir que su velocidad cambió. Al principio era $\vec{V}_1$ y al final es $\vec{V}_2$.

El vector que indica el cambio de velocidad va a ser la velocidad final menos la velocidad inicial. Es decir:

$$\Delta\vec{V} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1 \qquad \leftarrow \text{VECTOR CAMBIO DE VELOCIDAD.}$$

Suponiendo que ese cambio de velocidad se realizó en un intervalo Δt, ellos definen el vector aceleración media como:

$$\boxed{\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}} \qquad \leftarrow \text{VECTOR ACELERACIÓN MEDIA}$$

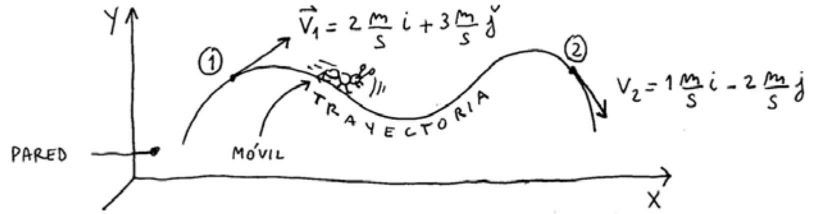
Para entender bien lo que es la aceleración vas a tener que esperar hasta que lleguemos a MRUV. Ahí lo vas a ver mejor. Por ahora te recomiendo que si te piden calcular la aceleración media, te limites a usar la formula que recuadré. Es decir, agarrás el vector $\vec{V}_2$, le restás el vector $\vec{V}_1$ y a todo eso lo dividís por el tiempo que pasó. El resultado de esa cuenta choclaza va a ser el vector $\vec{a}_m$.

EJEMPLO:

UN CUERPO PASA POR LOS PUNTOS ① y ② CON LAS VELOCIDADES QUE SE INDICAN EN LA FIGURA. SABIENDO QUE TARDÓ 2 seg PARA IR DE UN PUNTO AL OTRO, CALCULAR:

a) - La ACELERACIÓN MEDIA EN ESE INTERVALO.

b) - La ACELERACIÓN INSTANTÁNEA PARA $t = 1$ seg.



Las velocidades en los puntos 1 y 2 son dato, por lo tanto la aceleración será:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} = \frac{\vec{V}_2 - \vec{V}_1}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow \vec{a}_m = \frac{(1\,m/s\; i - 2\,m/s\; j) - (2\,m/s\; i + 3\,m/s\; j)}{2\text{ seg}}$$

$$\Rightarrow \vec{a}_m = \frac{-1\,m/s\; i - 5\,m/s\; j}{2\text{ seg}}$$

$$\Rightarrow \vec{a}_m = -0{,}5\,\frac{m}{s}\,i - 2{,}5\,\frac{m}{s}\,j \quad \leftarrow$$

VECTOR ACELERACIÓN MEDIA

Con respecto a la aceleración instantánea te digo lo siguiente: La aceleración instantánea es la aceleración que tiene el cuerpo en un momento determinado. Para poder calcularla hay que tener la función que me da la aceleración en función del tiempo. Si no tenés $\vec{a} = \vec{a}_{(t)}$ NO podés calcular la aceleración en $t = 1$ seg.

Dejame decirte una última cosa. Probablemente te cueste bastante entender este tema. Este no es un problema personal tuyo. El error está en que ellos ponen cinemática vectorial $\boxed{\text{ahora}}$, cuando deberían ponerlo $\boxed{\text{DESPUÉS}}$, en un curso más avanzado de Física. (opinión personal).

FIN TEORÍA DE CINEM. VECTORIAL

CINEMÁTICA VECTORIAL - PROBLEMAS

1.1 - La población A de nuestra provincia de Buenos Aires está situada 160 km al Este y 120 km al Norte, con respecto a la ciudad M. La población B se sitúa 90 km al Este y 120 km al Sur, también con respecto a M.

a - Adoptar un sistema de referencia y determinar el vector posición de las tres localidades.

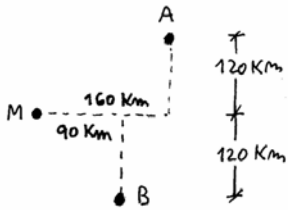
b - Una avioneta sale de A a las 07:00 h, y llega a B a las 09:00 h. Determinar su vector desplazamiento.

c - Hallar el vector velocidad media de la avioneta, en su viaje de A hasta B, y calcular su módulo.

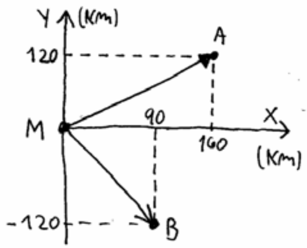
d - A las 09:30 h la avioneta despega de B, y aterriza en M a las 11:00 h. Carga mercaderías y combustible, y parte a las 15:00 h, para llegar a la población A a las 16:40 h. Hallar el vector velocidad media de la avioneta en cada uno de los intervalos indicados, y también para todo el viaje. (Desde las 07:00 h hasta las 16:40 h).

e - En un esquema del lugar, dibujar dos trayectorias posibles diferentes, para cumplir el mismo viaje total. ¿Cuántas hay?.

Según lo que dice el enunciado lo que tengo es esto:



a)_ Adopto un sistema de referencia colocado en la ciudad M. Los vectores posición me quedan:



VECTORES POSICIÓN

$\vec{r}_M = 0$

$\vec{r}_A = 160\,Km\,i + 120\,Km\,j$

$\vec{r}_B = 90\,Km\,i - 120\,Km\,j$

b)- Para hallar el vector desplazamiento de un avión que sale de A y llega a B hago $\vec{r}_B - \vec{r}_A$, es decir:

$$\Delta \vec{r}_{A-B} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$$

$$\Delta \vec{r}_{A-B} = (90\,Km\,\hat{i} - 120\,Km\,\hat{j}) - (160\,Km\,\hat{i} + 120\,Km\,\hat{j})$$

$$\boxed{\Delta \vec{r}_{A-B} = -70\,Km\,\hat{i} - 240\,Km\,\hat{j}} \leftarrow$$ VECTOR DESPLAZAMIENTO ENTRE A Y B

c)- Para calcular el vector velocidad media divido el desplazamiento por el tiempo empleado. Dicen que tardó 2 hs. Tonces:

$$\vec{V}_{M(A-B)} = \frac{\Delta \vec{r}_{A-B}}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow \vec{V}_{m(A-B)} = \frac{-70\,Km\,\hat{i} - 240\,Km\,\hat{j}}{2hs}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{V}_{m(A-B)} = -35\,\frac{Km}{h}\,\hat{i} - 120\,\frac{Km}{h}\,\hat{j}} \leftarrow$$ VECTOR VELOCIDAD MEDIA.

Para calcular el módulo de esta velocidad aplico pitágoras:

$$|\vec{V}_m| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$$

$$\Rightarrow |\vec{V}_m| = \sqrt{\left(-35\,\frac{Km}{h}\right)^2 + \left(-120\,\frac{Km}{h}\right)^2}$$

$$\boxed{|\vec{V}_m| = 125\,\frac{Km}{h}} \leftarrow$$ MÓDULO DE LA VELOCIDAD MEDIA ENTRE A y B.

d)- Una avioneta sale de B a las 9^{30} y llega a M a las 11 hs

Quiere decir que el intervalo de tiempo que estuvo volando vale $\Delta t = 1{,}5$ hs. Al ir de B a M el vector desplazamiento será:

$$\Delta\vec{r}_{B-M} = \vec{r}_M - \vec{r}_B = 0 - (90\ Km\ i - 120\ Km\ j)$$

$$\Rightarrow \Delta\vec{r}_{B-M} = -90\ Km\ i + 120\ Km\ j$$

Dividiendo por $\Delta t = 1{,}5$ hs tengo el vector velocidad media:

$$\boxed{\vec{V}_{m\,(B-M)} = -60\ \frac{Km}{h}\ i + 80\ \frac{Km}{h}\ j} \leftarrow$$

VELOCIDAD MEDIA EN EL TRAMO DE B a M

Dice el problema que después sale a las 15 de M y llega a A a las 16 y 40 HS. Quiere decir que estuvo volando 1 h y 40 minutos, es decir, $1{,}\hat{6}$ hs (ojo, $1{,}\hat{6}$ hs, NO 1,4 hs).

El vector desplazamiento al ir de M a A lo calculo como antes:

$$\Delta\vec{r}_{M-A} = \vec{r}_A - \vec{r}_M$$

$$\Rightarrow \Delta\vec{r}_{(M-A)} = (160\ Km\ i + 120\ Km\ j) - (0)$$

$$\Rightarrow \Delta\vec{r}_{(M-A)} = 160\ Km\ i + 120\ Km\ j$$

(Me queda el mismo vector porque el avión sale del origen).

Dividiendo este desplazamiento por $\Delta t = 1{,}\hat{6}$ hs:

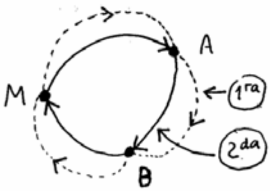
$$\boxed{\vec{V}_{M(M-A)} = 96\ \frac{Km}{h}\ i + 72\ \frac{Km}{h}\ j} \leftarrow$$

VECTOR VELOCIDAD MEDIA AL IR DE M a A

Para calcular el vector velocidad media de todo el viaje, tengo que considerar que el coso salió de A y llegó otra vez a A. (ojo) quiere decir que el vector desplazamiento va a ser CERO (sería $\vec{r}_A - \vec{r}_A$). Entonces la velocidad media de todo el viaje a ser también CERO. Por lo tanto:

$$\boxed{\vec{V}_{m\,(\text{TODO EL VIAJE})} = 0}$$ ← VELOCIDAD MEDIA PARA TODO EL VIAJE.

e)- Piden que dibuje 2 trayectorias posibles. Bueno, el tipo fue de A a B, de B a M y de M otra vez a A. Así que podrían ser estas:



← DOS TRAYECTORIAS PARA IR DE A a B, DE B a M y de M a A.

Preguntan también cuantas trayectorias posibles hay. Bueno, creo se ve que hay infinitas. (Podría hacer infinitos dibujos parecidos).

1.2 - La casa de Diego se encuentra a 15 cuadras (1,5 km) al Este y 20 cuadras (2 km) al Sur de la casa de Silvia.
Cierta tarde deciden ir juntos al cine, cuya función comienza a las 19:30 h, y que está ubicado a 30 cuadras (3 km) al Este y 40 cuadras (4 km) al Norte de la casa de Diego.
Diego pasa a buscar a Silvia: para eso toma un colectivo que lo traslada desde su casa hasta la de ella con un vector velocidad media $\vec{v}_m$ = -6 km/h i + 8 km/h j (i hacia el Este; j hacia el Norte). Debe esperar 10 minutos hasta que Silvia termine de maquillarse, y luego toman un taxi que los lleva al cine en 15 minutos.

a - Elegir un sistema de referencia, y determinar el vector posición de ambas casas, y del cine.

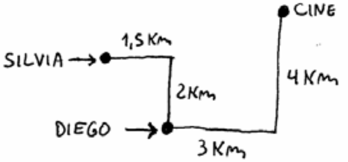
b - Hallar los vectores desplazamiento y velocidad media del taxi.

c - Sabiendo que llegaron al cine 5 minutos después de comenzada la función, calcular a qué hora salió Diego de su casa.

d - Determinar el vector velocidad media de Diego, y su módulo, en el viaje desde su casa hasta el cine.

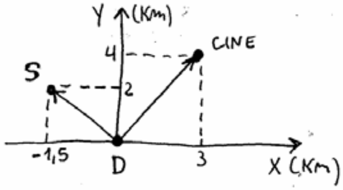
Lo primero que tengo que hacer en este problema es ubicar las posiciones de las casas de Diego de Silvia y del cine.

según lo que entiendo del enunciado, eso queda más o menos así:



POSICIONES DEL CINE Y DE LAS CASAS

a)- Elijo un sistema de referencia puesto en la casa de Diego. Los vectores posición quedan:



VECTORES POSICIÓN

$\vec{r}_D = 0$

$\vec{r}_S = -1{,}5\,Km\,\check{\imath} + 2\,Km\,\check{\jmath}$

$\vec{r}_C = 3\,Km\,\check{\imath} + 4\,Km\,\check{\jmath}$

b)- El taxi que toman en lo de S los lleva hasta C en 15 min. El vector desplazamiento al ir de S a C es:

$$\Delta\vec{r}_{S-C} = \vec{r}_C - \vec{r}_S \Rightarrow$$

$$\Delta\vec{r}_{S-C} = (3\,Km\,\check{\imath} + 4\,Km\,\check{\jmath}) - (-1{,}5\,Km\,\check{\imath} + 2\,Km\,\check{\jmath})$$

$$\boxed{\Delta\vec{r}_{S-C} = 4{,}5\,Km\,\check{\imath} + 2\,Km\,\check{\jmath}}$$

← VECTOR DESPLAZAMIENTO P/ EL TAXI.

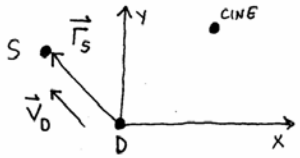
Dividiendo este vector por $\Delta t = 15$ minutos tengo la velocidad media. 15 minutos equivalen a 0,25 hs. (Dividí por 60). Entonces:

$$\vec{V}_{m\,Taxi} = \frac{4{,}5\,Km\,\check{\imath} + 2\,Km\,\check{\jmath}}{0{,}25\ hs}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{V}_{m\,TAXI} = 18\ \frac{Km}{h}\,\check{\imath} + 8\ \frac{Km}{h}\,\check{\jmath}}$$

← VECTOR VELOCIDAD MEDIA P/ EL TAXI.

c)_ Piden calcular a que hora salió D de su casa. Para eso tengo que calcular cuanto tardó el colectivo para llevarlo desde su casa hasta la de S. Para esto conviene trabajar con el módulo de los vectores. Veamos:



$$\vec{r}_S = -1{,}5\ Km\ i + 2\ Km\ j$$

$$\vec{V}_D = -6\ \frac{Km}{h}\ i + 8\ \frac{Km}{h}\ j \quad \text{(Dato)}$$

Para calcular la distancia de D a S hallo el módulo de $\vec{r}_S$:

$$|\vec{r}_S| = \sqrt{(-1{,}5\ Km)^2 + (2\ Km)^2} = \underline{2{,}5\ Km} \leftarrow \text{DISTANCIA DE D a S}$$

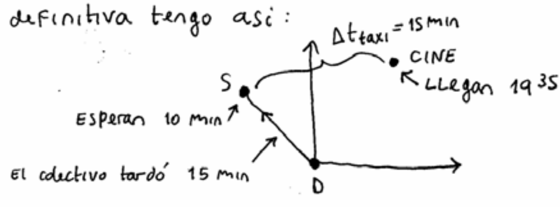
Para calcular cuanto tardó el colectivo en llegar calculo el módulo de su velocidad:

$$|\vec{V}_D| = \sqrt{\left(-6\ \frac{Km}{h}\right)^2 + \left(8\ \frac{Km}{h}\right)^2} = \underline{10\ \frac{Km}{h}} \leftarrow \text{MÓDULO DE LA VELOCIDAD MEDIA DEL COLECTIVO.}$$

quiere decir que recorrió 2,5 Km yendo a 10 $\frac{Km}{h}$. Eso significa que tardó:

$$\Delta t_D = \frac{2{,}5\ \cancel{Km}}{10\ \cancel{Km}/h} = \underline{0{,}25\ hs} \leftarrow \text{TIEMPO QUE TARDÓ DIEGO EN LLEGAR } (0{,}25 hs \equiv 15\ min)$$

En definitiva tengo así:



$$\Delta t_{total} = 15' + 10' + 15' = \underline{40\ min} \leftarrow \text{TIEMPO QUE DURÓ EL VIAJE TOTAL}$$

Por lo tanto, si llegaron al cine a las 19^{35} y Diego tardó 40 min en llegar...

$$\boxed{t_0 = 18^{55}\ hs} \leftarrow \text{HORA A LA QUE SALIÓ EL PIBE DE SU CASA.}$$

d)- Para calcular el vector velocidad media de Diego, considero que la posición inicial es la casa de Diego y la posición final es el cine. Entonces el vector Desplazamiento va a ser:

$$\Delta\vec{r}_D = \vec{r}_C - \vec{r}_0 = \vec{r}_C - 0 = \vec{r}_C$$

$$\Rightarrow \underline{\Delta\vec{r}_D = 3\ Km\ i + 4\ Km\ j} \leftarrow \text{DESPLAZAMIENTO DE DIEGO.}$$

El tiempo que tardó son 40 minutos, es decir $0,\hat{6}$ hs (Dividí x 60)

$$\Rightarrow \vec{V}_{M_D} = \frac{\Delta\vec{r}_D}{\Delta t} = \frac{3\ Km\ i + 4\ Km\ j}{0,\hat{6}\ hs}$$

$$\boxed{\vec{V}_{m_D} = 4,5\ \frac{Km}{h}\ i + 6\ \frac{Km}{h}\ j.} \leftarrow \text{VELOCIDAD MEDIA DEL PIBE EN TODO EL TRAYECTO.}$$

El módulo de este vector es:

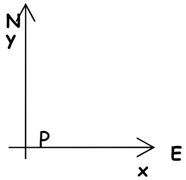
$$|\vec{V}_{m_D}| = \sqrt{\left(4,5\ \frac{Km}{h}\right)^2 + \left(6\ \frac{Km}{h}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\left|\vec{V}_{m_D}\right| = 7,5\ \frac{Km}{h}} \leftarrow \text{MÓDULO DEL VECTOR VELOCIDAD MEDIA.}$$

PROBLEMAS DE PARCIALES

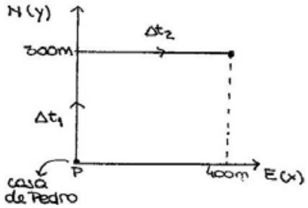
PROBLEMA 1

Pedro sale de su casa (P) y camina 3 cuadras hacia el norte con velocidad constante de 1,2 m/s y luego 4 cuadras hacia el este con velocidad constante de 0,8 m/s (cada cuadra mide 100 m). Entonces la velocidad vectorial media será:



a) 0,8 m/s i + 1,2 m/s j b) 1,2 m/s i + 0,8 m/s j
c) 0,6 m/s i + 0,8 m/s j d) 0,53 m/s i + 0,35 m/s j
e) 0,53 m/s i + 0,4 m/s j

Veamos primero un gráfico del movimiento de Pedro. Recordá que la velocidad media, v_m, se define como: $\boxed{v_m = \frac{\Delta r}{\Delta t}}$



Primero hay que calcular el tiempo que Pedro tarda en hacer todo el recorrido, sabiendo que: $\Delta t = \frac{\Delta r}{v}$ (surge de reacomodar la ecuación anterior).
Reemplazando en esa ecuación los datos de desplazamiento y velocidad que da el problema para cada tramo del recorrido, obtenemos Δt_1 y Δt_2: $\underline{\Delta t_1 = 250\ s}$ y $\underline{\Delta t_2 = 500\ s}$. Ahora, reemplazando en la ecuación de velocidad media tenemos: $v_m = \frac{400mi + 300mj}{750s}$, me queda:

$$\boxed{v_m = 0{,}53\ m/s\ i + 0{,}4\ m/s\ j}$$

Entonces, la respuesta correcta es la e).

<u>PROBLEMA 2</u>

Un automóvil se desplaza en un plano horizontal con aceleración cero.
Su posición inicial es 40 m i + 3 m j y su velocidad es 15 m/s i - 20 m/s j.
Su posición será 130 m i - 90 m j a los:

a) 6 s b) 3 s c) - 6 s d) 3,5 s e) 2 s f) 5s

<u>**SOLUCION**</u>

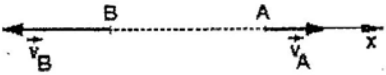
Nos dan la velocidad media, que se define: $\boxed{v_m = \frac{\Delta r}{\Delta t}}$. El desplazamiento lo calculo con los datos que nos dan. Haciendo la cuenta: $\underline{\Delta r = 90\ m\ \mathbf{i} - 120\ m\ \mathbf{j}}$.

Ahora reemplazamos los datos en la ecuación de velocidad media (puedo tomar sólo una componente, por ejemplo, la x, verificalo). Da: $\boxed{\mathbf{t = 6\ s}}$.

Entonces, la respuesta correcta es la a).

PROBLEMA 3

Un móvil se desplaza por una trayectoria rectilínea. En el instante inicial se encuentra en el punto A con velocidad de módulo 4 m/s,



y 5 segundos después se encuentra en el punto B (distante 40 m de A) con velocidad de módulo 8 m/s. Entonces la aceleración vectorial media en este intervalo será:

a) 1,2 m/s^2 (- i)   b) 0,8 m/s^2 (-i)   c) 1,2 m/s^2 i   d) 2,4 m/s^2 i   e) 2,4 m/s^2 (-i)

SOLUCION

La aceleración vectorial media es: $\boxed{a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}}$. En este caso: v_B = - 8 m/s i,

v_A = 4 m/s i y Δt = 5 s. Haciendo la cuenta: a_m = - 2,4 m/s^2 i. O también:

$\boxed{\mathbf{a_m = 2,4\ m/s^2\ (-i)}}$.

Entonces, la respuesta correcta es la e).

FIN CINEMATICA VECTORIAL

RESUMEN DE FORMULAS

Pongo ahora un resumen de toda la teoría y de las principales ecuaciones que necesitás para resolver los problemas. Si ves que falta alguna fórmula o que algo no está claro, mandame un mail.

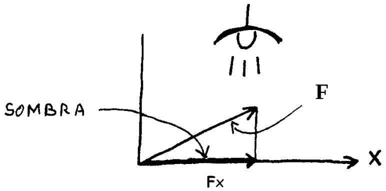
RESUMEN DE ESTATICA

FUERZAS CONCURRENTES o COPUNTUALES

Cuando TODAS las fuerzas que actúan sobre un cuerpo PASAN POR UN MISMO PUNTO, se dice que estas fuerzas son concurrentes o que son copuntuales. Fuerzas concurrentes son fuerzas que **concurren** a un mismo **punto**.

DESCOMPOSICION DE UNA FUERZA EN 2 DIRECCIONES

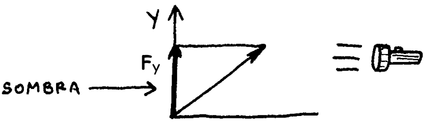
Para calcular la proyección de una fuerza sobre el eje horizontal tomo el ángulo que forma la fuerza con el eje equis. Hago $F_x = F.\cos\alpha$.



$$\boxed{F_x = F.\cos\alpha}$$

SOMBRA DE LA FUERZA EN X (F_x)

Para calcular la proyección de cada fuerza sobre el eje vertical hago $F_y = F.\operatorname{sen}\alpha$.



$$\boxed{F_Y = F_x \operatorname{sen}\alpha}$$

SOMBRA DE LA FUERZA EN Y (F_y)

METODO PARA RESOLVER LOS PROBLEMAS DE FUERZAS COPUNTUALES

1 - Se descompone cada fuerza en 2 componentes F_x y F_y .

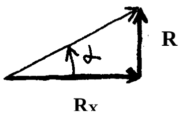
2 – Se suma la proyección de cada fuerza sobre el eje horizontal y se calcula R_x.

3 – Se suma la proyección de cada fuerza sobre el eje vertical y se calcula R_y.

$R_x = \Sigma F_x$	⟵	SUMATORIA EN **X**
$R_y = \Sigma F_y$	⟵	SUMATORIA EN **y**

⟵ RESULTANTES EN X y en Y.

4 - Saco el valor de la resultante componiendo R_x y R_y por Pitágoras.



$$\boxed{R^2 = R_x^2 + R_y^2}$$ ⟵ **PITAGORAS**

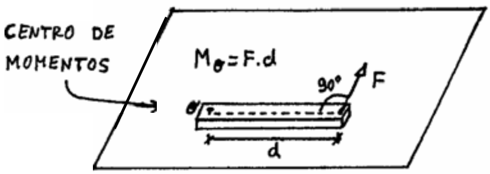
5 - Calculo el ángulo alfa que forma la resultante con el eje x haciendo la cuenta :

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha_R = R_y / R_x}$$

FUERZAS NO COPUNTUALES

Si las fuerzas aplicadas al cuerpo <u>no pasan por el mismo punto</u> se dice que son NO CONCURRENTES o NO COPUNTUALES.

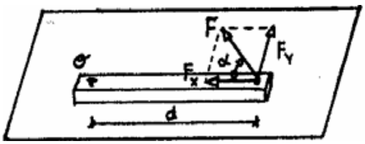
MOMENTO DE UNA FUERZA



$$\boxed{M_{ó} = F \times d}$$

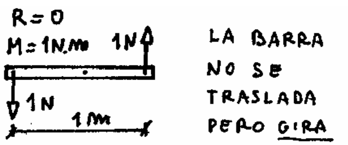
Momento de una fuerza con respecto al punto ó.

La distancia perpendicular que va del punto a la fuerza se llama **d** . F es la componente de la fuerza en forma perpendicular a d . Si la fuerza está inclinada el momento de la fuerza con respecto a O vale $M_o = F_y \cdot d$ (F_y es la componente de la fuerza perpendicular a d).



CONDICIÓN DE EQUILIBRIO PARA FUERZAS NO CONCURRENTES

Para los casos en donde las fuerzas <u>NO PASAN POR UN MISMO PUNTO</u> , puede ser que la resultante sea cero, pero el cuerpo podría estar girando.



CUPLA
(O PAR

Entonces cuando las fuerzas aplicadas no pasan por un mismo punto, hay que agregar una nueva ecuación.

Esta ecuación es la que dice que el momento total que actúa sobre el cuerpo debe ser **CERO**. Se pone $\sum M_{ó} = 0$ y se la llama ecuación de momentos. ENTONCES:

PARA QUE ESTÉ EN EQUILIBRIO UN CUERPO QUE TIENE UN MONTÓN DE FUERZAS APLICADAS QUE NO PASAN POR UN MISMO PUNTO, DEBE CUMPLIRSE QUE :

$\sum F_x = 0$	Garantiza que no hay traslación en x.
$\sum F_y = 0$	Garantiza que no hay traslación en y.
$\sum M_{ó} = 0$	Garantiza que no hay rotación.

VER

Resumiendo, para resolver los problemas de estática en donde las fuerzas NO pasan por un mismo punto hay que plantear tres ecuaciones. Estas ecuaciones van a ser dos de proyección ($\sum F_x$ y $\sum F_y$) y una de momentos ($\sum M_{ó} = 0$). Resolviendo las ecuaciones que me quedan, calculo lo que me piden.

ACLARACIONES:

* Recordar que el sentido positivo para los momentos lo elige uno.

* Siempre conviene tomar momentos respecto de un punto que anule alguna incógnita. Generalmente ese punto es el apoyo.

* No siempre va a haber que usar las tres ecuaciones para resolver el problema. Depende de lo que pidan. Muchas veces se puede resolver el problema usando sólo la ecuación de momentos.

* Para resolver un problema no necesariamente uno está obligado a plantear $\sum F_x$, $\sum F_y$. A veces se pueden tomar dos ecuaciones de momento referidas a puntos distintos. (Por ejemplo, los 2 apoyos de una barra).

FIN RESUMEN DE ESTATICA

CINEMATICA - RESUMEN DE FORMULAS

MRU - MOVIMIENTO RECTILÍNEO Y UNIFORME

El tipo se mueve en línea recta todo el tiempo a la misma velocidad. Recorre espacios iguales en tiempos iguales.

POSICIÓN (x): Lugar del eje equis donde se encuentra el objeto.
VELOCIDAD (v): Rapidez con la que se mueve el objeto. Es Cte en el MRU.

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Δx ← Espacio recorrido.
Δt ← Tiempo empleado.

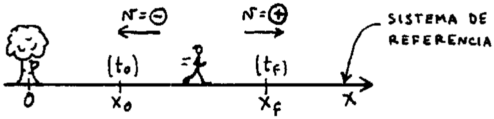
$$v = \frac{x_f - x_0}{t_f - t_0}$$

← Velocidad en el MRU.

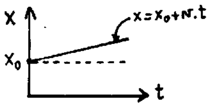
ACELERACIÓN (a): Rapidez con la que cambia (varía) la velocidad del objeto. La aceleración siempre vale cero en el MRU .

ECUACIONES HORARIAS

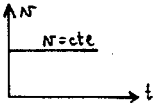
$$x = x_0 + v.t$$
$$v = cte$$
$$a = 0$$



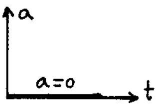
GRÁFICOS PARA EL MRU



La pendiente de esta recta es la velocidad



La velocidad es constante.



La aceleración es cero.

MRUV - MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORMEMENTE VARIADO

En el MRUV la velocidad aumenta (o diminuye) lo mismo por cada segundo que pasa.

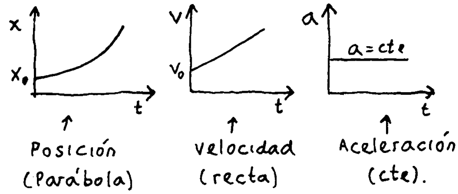
ECUACIONES HORARIAS

Dan la posición, velocidad
Y aceleración del objeto .

$$\begin{cases} x = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2 \\ v_f = v_0 + a \cdot t \\ a = cte \end{cases}$$

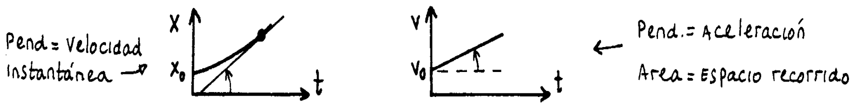
ECUACIÓN COMPLEMENTARIA : $\longrightarrow$ $V_f^2 - V_o^2 = 2 \cdot a \cdot (X_f - X_o)$

GRAFICOS DEL MRUV



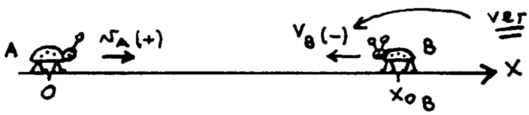
PENDIENTES Y ÁREAS

La pendiente del gráfico posición en función del tiempo $X_{(t)}$ me da la velocidad instantánea. (Importante).
La pendiente del gráfico velocidad en función del tiempo me da la aceleración.
El área bajo el gráfico de velocidad me da el espacio recorrido.



ENCUENTRO:

Dos cosas se encuentran si pasan al mismo tiempo por el mismo lugar.



Para resolver los problemas conviene seguir estos pasos:

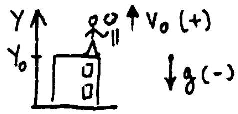
1) - Hago un dibujo de lo que pasa. Elijo un sistema de referencia y marco las posiciones iniciales y las velocidades <u>con su signo</u> (ojo).
2) - Planteo las ecuaciones horarias para los móviles A y B.
3) - Escribo la condición de encuentro: $x_A = x_B$, si $t = t_e$
4) - Igualo las ecuaciones y despejo lo que me piden.
5) - Hago el gráfico de posición en función del tiempo. (Conviene).

CAÍDA LIBRE-TIRO VERTICAL

Caída libre y tiro vertical son casos de MRUV. Para resolver los problemas hay que aplicar todo lo mismo que en MRUV. Esto lo hago para un eje vertical que llamo **y**. Para resolver los problemas conviene hacer esto :

1- Tomo un sistema de referencia. Marco Y_0, V_0 y g con su signo .(ojo !). El eje y puede ir para arriba o p/abajo. Si va para arriba, g es negativa.

Sistema de referencia ⟹



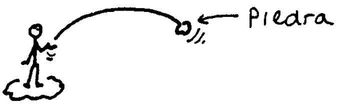
2 – Planteo las ecuaciones horarias:

$$\begin{cases} \mathbf{Y = Y_o + V_o\,t + \frac{1}{2}\,g\,t^2} \\ \mathbf{V_f = V_o + g\,t} \\ \mathbf{a = Cte\ (= g)} \end{cases}$$

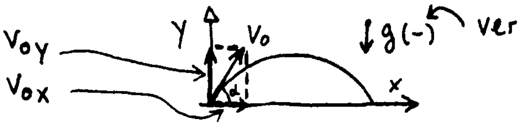
3 **-** Reemplazo en las ecuaciones los valores de y_0, v_0 y g con sus signos y de ahí despejo lo que me piden.

TIRO OBLICUO

Cuando uno tira una cosa en forma inclinada tiene un tiro oblicuo. Ahora el vector velocidad forma un ángulo alfa con el eje x. (Angulo de lanzamiento).



Para resolver los problemas uso el principio de superposición de movimientos, que dice esto: La sombra de la piedra en el eje **x** hace un MRU. La sombra de la piedra en el eje **y** hace un tiro vertical. C/u de estos movimientos es independiente del otro. Lo que pasa en **x** no influye sobre **y** (y viceversa).
Tomo un sistema de referencia. Sobre él marco V_{0x}, V_{0y} y g. C/u **con su signo**.



Calculo las velocidades iniciales en equis y en Y multiplicando por seno o por coseno.

$$V_{0x} = V_0 \cos \alpha$$
$$V_{0y} = V_0 \operatorname{sen} \alpha$$

Planteo las ecuaciones horarias para las proyecciones (= las sombras) en cada uno de los ejes. En equis voy a tener un MRU y en Y un tiro vertical.

$$\text{EN X :} \begin{cases} x = x_0 + v_x . t \\ v_x = cte \\ a = 0 \end{cases} \qquad \text{EN Y:} \begin{cases} Y = Y_o + V_o\, t + \frac{1}{2}\, g\, t^2 \\ V_f = V_o + g\, t \\ a = Cte\ (= g\ ) \end{cases}$$

Despejando de estas ecuaciones calculo lo que me piden. Ojo. De las 6 ecuaciones solo se usan 3, la de X, la de Y y la de V_{fy}.. Todo problema de tiro oblicuo tiene que poder resolverse usando solamente esas 3 ecuaciones. (Atención).

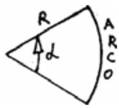
MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME (MCU)

Una cosa que da vueltas tiene movimiento circular. Por ejemplo, un trompo, una calesita o las agujas del reloj. Si lo qué está girando da siempre el mismo número de vueltas por segundo, digo que el movimiento circular es **UNIFORME**. **(MCU)**

ÁNGULO MEDIDO EN RADIANES

El radián es **un número sin unidades**. Lo que me dice el ángulo en radianes es cuántas veces entra el radio en el arco. Por ejemplo, si alfa es 3 radianes, eso significa que el radio entra 3 veces en el arco abarcado por ese ángulo. Un radián equivale aproximadamente a 57,29578 grados

$$\alpha_{(Rad.)} = \frac{ARCO}{RADIO} \leftarrow \text{ANGULO MEDIDO EN RADIANES.}$$



VELOCIDAD ANGULAR OMEGA (**ω**)

Es el N^ro^ de vueltas que da el cuerpo por segundo. Si un cuerpo tiene gran velocidad angular quiere decir que gira muy rápido.

$$\text{VELOCIDAD ANGULAR.}\ \boxed{\omega = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t}} \begin{matrix} \leftarrow \text{ANGULO GIRADO.} \\ \leftarrow \text{tiempo empleado.} \end{matrix}$$

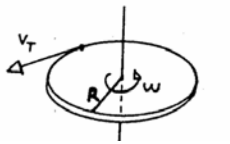
Hay muchas unidades diferentes de velocidad angular. Todas se usan. La más importante es radianes por segundo. Esta unidad es la que se usa en los problemas.

$$[\,\omega\,] = \frac{\text{Radianes}}{\text{segundo}}$$

También se usan las revoluciones por minuto (RPM). A veces se usan las RPS (= Revoluciones por segundo). Como el radian es un número sin unidad, la palabra Radián suele no ponerse. De manera que las unidades que se suelen usar en la práctica son 1/seg . Este 1/seg a veces también lo ponen así: 1/s o así : s^{-1}

<u>VELOCIDAD TANGENCIAL</u> (**V_t**)

Si tengo un disco que esta girando, sobre el borde del disco habrá un punto que da vueltas con movimiento circular uniforme. La velocidad tangencial se calcula con:



$$\boxed{V_T = \omega \,.\, R}$$ VELOC. TGCIAL.

Ese punto tiene todo el tiempo una velocidad que es tg a la trayectoria. Esa velocidad se llama **<u>velocidad tangencial</u>**. Las unidades son m/s.

<u>EL PERIODO T:</u>

Es el tiempo que tarda el cuerpo en dar una vuelta. Por ejemplo, el periodo de rotación de la tierra es 24 hs. El período se mide en segundos. (O en hs, minutos, etc).

<u>LA FRECUENCIA f</u>

Es el N^{ro} de vueltas por segundo que da el cuerpo. (Por ejemplo, 3 vueltas por segundo, 5 vueltas por segundo.... etc.). Las unidades de la frecuencia son " 1 / seg " . A esta unidad se la llama **Hertz**. 1 Hz = 1 / seg . A veces vas a ver puesto el Hz como seg $^{-1}$ o s $^{-1}$). La frecuencia es la inversa del periodo :

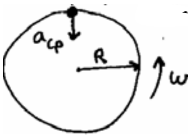
$$\boxed{f = \frac{1}{T}}$$ ← frecuencia

A veces a ω se le dice "frecuencia angular " cuando uno mide la velocidad angular ω en vueltas por segundo, la velocidad angular y la frecuencia coinciden.

ACELERACION CENTRIPETA

En el movimiento circular uniforme, el largo de la flecha que representa al vector velocidad tangencial no cambia. Esto quiere decir que el módulo de la velocidad tangencial es constante. Pero lo que **sí** cambia es **LA DIRECCION** del vector de la velocidad. Cuando hay un cambio de velocidad tiene que haber una aceleración. Esa aceleración se llama centrípeta. Lo que la provoca es el cambio de dirección del vector velocidad tangencial. La $a_{centrípeta}$ apunta siempre hacia el centro.

LA ACELERACION CENTRIPETA APUNTA SIEMPRE HACIA EL CENTRO DE LA CIRCUNFERENCIA. ⇨



La aceleración centrípeta se calcula por cualquiera de las siguientes dos maneras:

$$\boxed{a_c = \frac{V^2}{R} = w^2 \cdot R} \leftarrow$$ ACELERACIÓN CENTRÍPETA.

OTRAS FORMULITAS QUE SE USAN EN MOVIMIENTO CIRCULAR

Se puede calcular la velocidad angular w como:

$$\boxed{w = \frac{2\pi}{T}} \longleftarrow$$ OTRA MANERA DE CALCULAR LA VELOCIDAD ANGULAR w

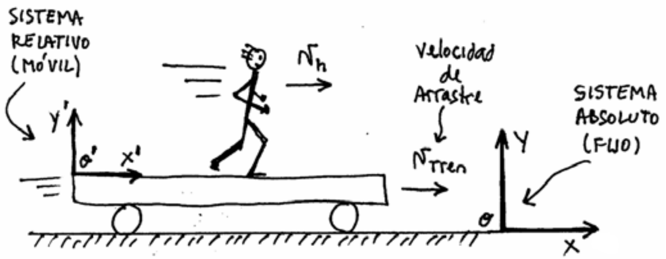
Pero como f = 1 / T, esta misma formula se puede poner como:

$$\boxed{w = 2\pi f}$$

MOVIMIENTO RELATIVO - RESUMEN

Tengo un problema de Movimiento Relativo cuando hay algo que se mueve sobre algo que se mueve. Ejemplo: Un señor que camina sobre un tren que avanza o una persona que camina sobre un barco que navega. También tengo movimiento relativo en el caso de un bote que es arrastrado por el agua. Lo mismo pasa para un avión que vuela y es arrastrado por el viento.

Para plantear los problemas de relativo conviene tomar 2 sistemas de referencia: Uno es el sistema que está fijo a la tierra. (Sistema fijo o absoluto). El otro es el sistema que está fijo al objeto que se mueve. (Sistema Relativo o móvil).



No hay ecuaciones para resolver estos problemas. Los ejercicios de Movimiento Relativo se resuelven pensando como si fueran problemas de ingenio. La única fórmula que se puede usar a veces es :

$$\boxed{V_{abs} = V_{rel} + V_{arr}} \longleftarrow$$

LA VELOCIDAD ABSOLUTA ES LA VELOCIDAD RELA. TIVA + LA DE ARRASTRE

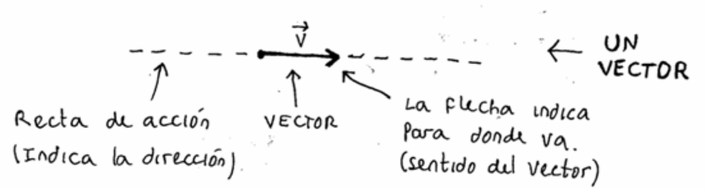
En esta fórmula:

Velocidad Absoluta: Es la velocidad del objeto respecto a la Tierra –Tierra.
Velocidad Relativa: Es la velocidad del objeto respecto del móvil que lo arrastra.
Velocidad de arrastre: Es la velocidad con la que es arrastrado el sistema móvil.

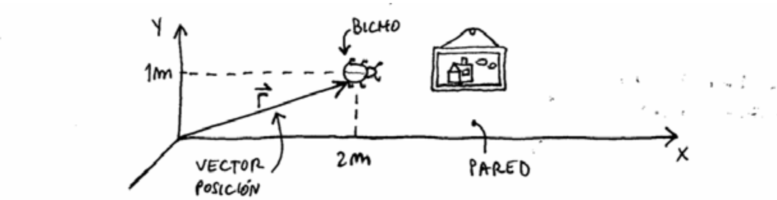
CINEMÁTICA VECTORIAL - RESUMEN

Vectores

Un vector se representa por una flecha de la siguiente manera:



Cuando uno ve un dibujito de este tipo tiene que darse cuenta de que la flecha que llaman v es un **vector**. Para destacar esto, ellos le ponen una flechita arriba ($\vec{v}$). La magnitud $\vec{v}$ se lee "vector ve" o "ve vector". La posición, la velocidad y la aceleración son vectores. Mirá el dibujito:

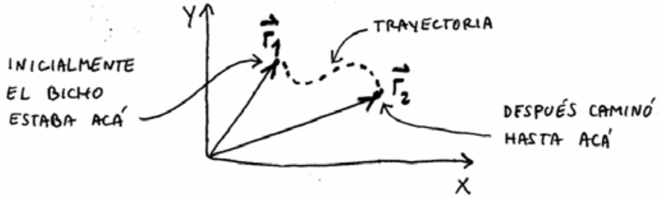


Si las coordenadas del coso son X=2m e Y=1m, puedo decir que el vector posición ($\vec{r}$) va a ser:

$$\vec{r} = 2m\ i + 1m\ j$$ ← POSICIÓN DEL BICHO.

VECTOR DESPLAZAMIENTO ($\Delta\vec{r}$)

Suponé que una cosa pasa de una posición a la otra.

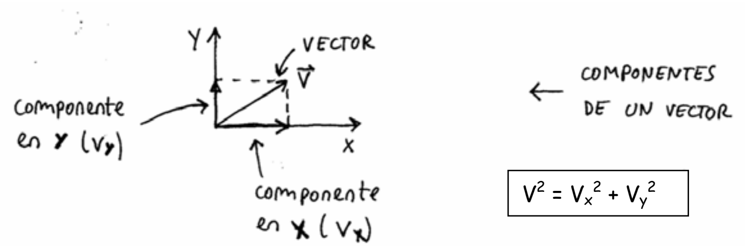


El vector desplazamiento va a ser el vector que va de la punta de $\vec{r}_1$ a la punta de $\vec{r}_2$
Se lo llama vector desplazamiento o también delta erre (Δr)

Al largo del vector se lo llama **módulo**. Más grande es el vector, mayor será su módulo.

Componentes de un vector

Un vector V se puede descomponer en sus componentes en el eje x y en el eje y. Se las llama V_x y V_y . Con las componentes puedo sacar el módulo del vector usando Pitágoras.



$$\boxed{V^2 = V_x^2 + V_y^2}$$

Supongamos que tengo un vector velocidad que mide 20 Km/h en x y 10 Km/h en y.
En forma vectorial esto se escribe así:

$$V = 20 \text{ Km/h } i + 10 \text{ Km/h } j$$

La letra " i " indica la componente sobre el eje x. La letra " j " indica la componente sobre el eje Y. También se puede escribir el vector con las componentes separadas por comas así:

$$V = (\ 20 \text{ Km/h}\ ,\ 10 \text{ Km/h}\ )$$

Vector velocidad media.
Si el móvil tarda un tiempo Δt en ir de una posición a la otra, el vector velocidad media se calcula haciendo la cuenta $\Delta\vec{r}$ sobre Δt.

$$\boxed{\vec{V}_M = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}} \quad \leftarrow \text{Vector velocidad media}$$

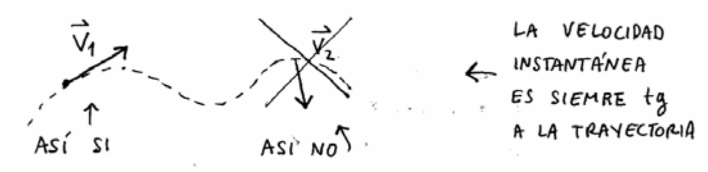
OPERACIONES CON VECTORES

Los vectores se suman componente a componente. Es decir, si tengo el vector $V_1 = 10\ i + 20\ j$ y el vector $V_2 = 30\ i + 40\ j$ la suma de $V_1 + V_2$ va a dar $40\ i + 60\ j$.

Para sumar vectores gráficamente se usa la regla del paralelogramo.

VELOCIDAD INSTANTANEA

Es la velocidad que tiene el móvil en un momento determinado. La velocidad instantánea es la que marca el velocímetro del auto. IMPORTANTE: El velocidad instantánea es siempre tangente a la trayectoria.



Aceleración media e instantánea

Si una cosa que se mueve tiene en un momento un vector velocidad $\vec{V}_1$ y después otro vector $\vec{V}_2$, quiere decir que su velocidad cambió. Al principio es $\vec{V}_1$ y al final es $\vec{V}_2$. El vector que indica el cambio de velocidad va a ser la velocidad final menos la velocidad inicial. Es decir:

$$\Delta\vec{V} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1 \qquad \leftarrow \text{ vector cambio de velocidad}$$

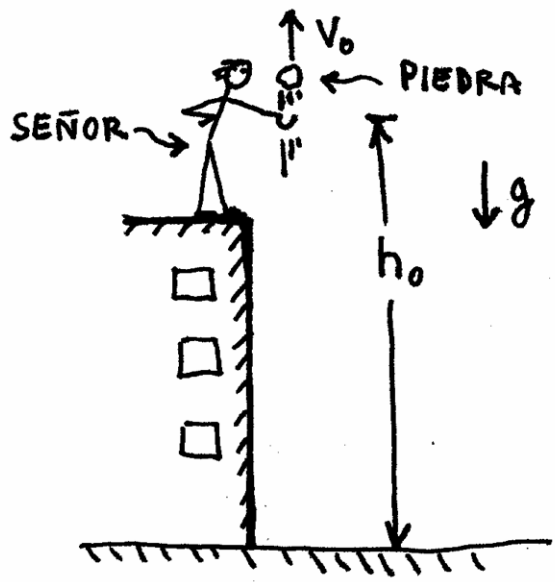
Suponiendo que este cambio de velocidad se realizó en un intervalo Δt, ellos definen el vector aceleración media como:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} \qquad \leftarrow \text{ vector aceleración media}$$

FIN RESUMEN DE FORMULAS

INDICE

Página



$$\begin{cases} y = y_0 + v_{0y}\, t + \frac{1}{2} g\, t^2 \\ v_f = v_0 + g\, t \\ a = cte = g \end{cases}$$

⇦ ECUACIONES HORARIAS PARA CAIDA LIBRE Y TIRO VERTICAL