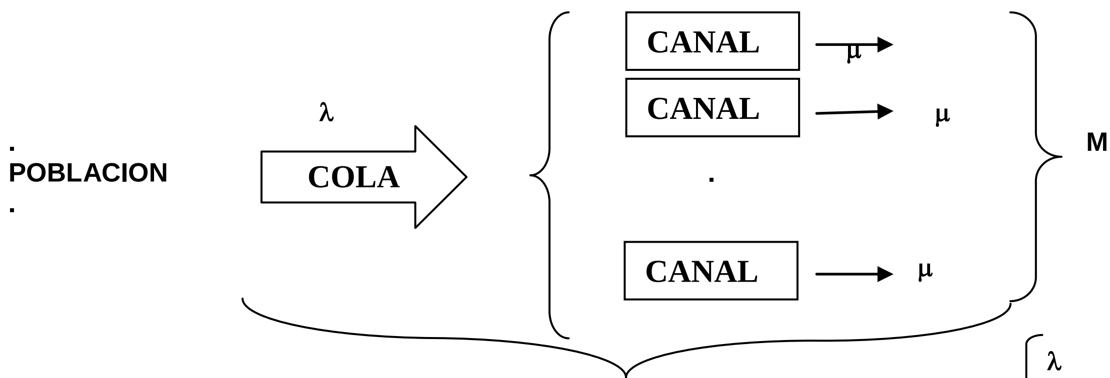
CÁLCULOS DE LOS SISTEMAS Y DE LOS MODELOS

1) SISTEMA CON M > 1 CANALES SIMILARES DE ATENCION EN PARALELO DE IGUAL μ Y COLA INFINITA ($N \to \infty$).



Datos N

$\mu \begin{cases} \lambda \\ M \end{cases}$

Se cumple

. $N \longrightarrow \infty$

$\lambda(n) = \lambda = cte$

$\mu(n) = n\,\mu \quad n = 1, 2, \ldots, M-1$

$\mu(n) = M\mu \quad n = M, M+1, M+2, \ldots$

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{Ta = \dfrac{1}{\lambda}} \\ \boxed{Ts = \dfrac{1}{\mu}} \end{array}\right\} \quad \boxed{\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}}$$

- para $n < M$

$$\boxed{p(n) = \frac{\lambda\ .\ \lambda\ \ldots\ \lambda}{\mu\ \ 2\mu\ \ \ldots\ \ n\mu}\ p(0) = \frac{(\lambda)^{n}}{n!\ (\mu)^{n}}\ p(0) = \frac{(\rho)^{n}}{n!}\ p(0)}$$

para $n \geq M$

$$p(n) = \frac{\lambda\ .\ \lambda\ \ldots\ \lambda\ \ldots\ \lambda\ \ldots\ \lambda\ \ldots\ \lambda}{\underbrace{\mu\ \ 2\mu\ \ \ldots\ \ M\mu}_{M}\ \ \underbrace{M\mu\ \ldots\ M\mu}_{n-M}}\ p(0) = \frac{\lambda^{n}}{(\mu)^{n}\ \ M!\ \ (M)^{n-M}}\ p(0) = \frac{\rho^{n}}{M!\ \ (M)^{n-N}}\ p(0) \qquad \textbf{(20)}$$

i=0

seria geométrica para que sea convergente debe cumplirse que: **(22)**

$$p(0) = \left[\sum_{n=0}^{M-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^M}{M!} \frac{1}{(1 - \rho / M)} \right]^{-1}$$

$$\boxed{\rho < M}$$

$$p(0) = \left[\sum_{n=0}^{M-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^M}{M!} \frac{1}{(1 - \rho / M)} \right]^{-1}$$

Se puede calcular la probabilidad p(n)

Calculo de Lc

$$Lc = \sum_{n=M}^{\infty} (n - M)\ p(n)$$

reemplazando y operando se llega a:

$$Lc = \frac{\rho^{M+1}}{M!\ M} \frac{1}{\left(1 - \frac{\rho}{M}\right)^2} p(0) \qquad \textbf{(23)}$$

Calculo de L

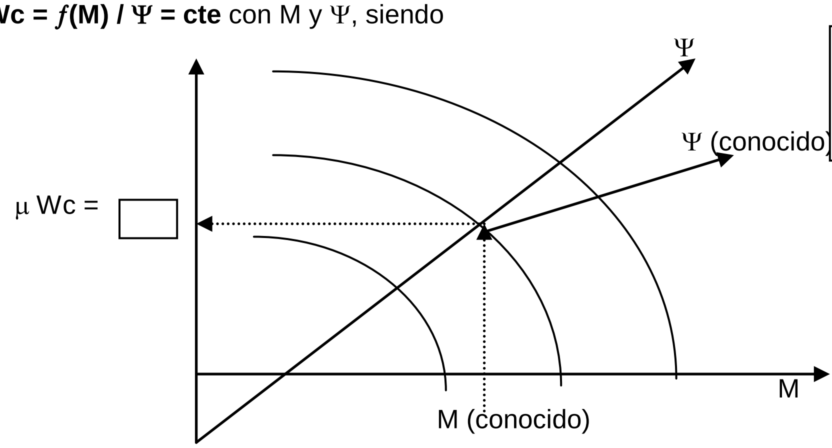
$$L = \sum_{n=0}^{\infty} (n)\ p(n) \qquad \boxed{L = Lc + \rho}$$

Calculo de Wc

$$Wc = Lc\ Ta = \frac{Lc}{\lambda} = W - Ts$$

Calculo de **Wc** utilizando ábacos. Con los datos básicos (λ, μ y M) se entra en el siguiente gráfico μ **Wc = *f*(M) / Ψ = cte** con M y Ψ, siendo

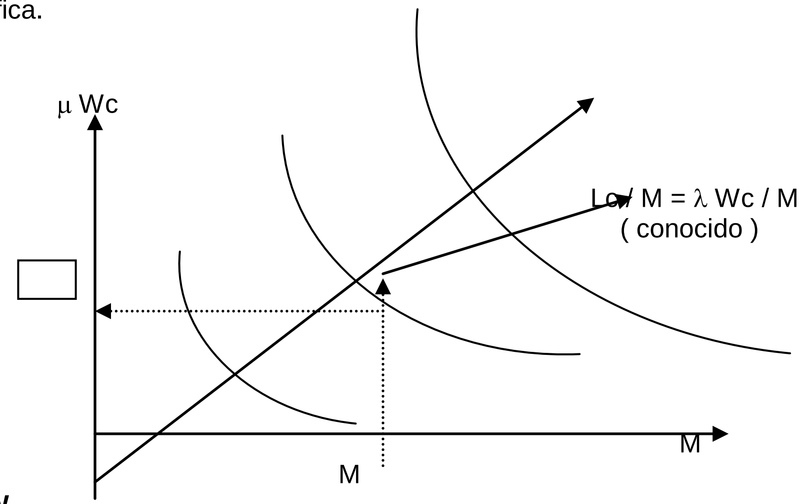
$$\Psi = \frac{\rho}{M}$$



También podemos calcular con la siguiente gráfica μ **Wc = *f*(M) / (Lc / M) = cte**
Mediante la ecuación Lc = Wc λ

Se calcula el cociente Lc/M = (λ Wc) / M

Entramos en la gráfica con Lc / M y M, determinando el valor de Wc λ, como se indica en la siguiente gráfica.



Calculo de W

$$W = L\,Ta = \frac{L}{\lambda}$$

Calculo de H

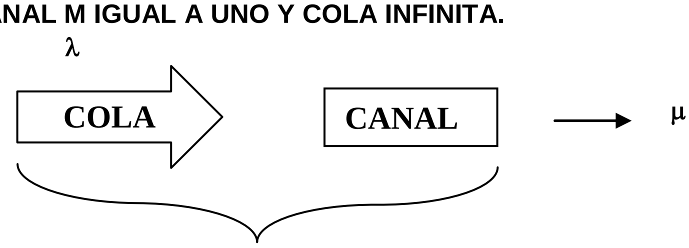
$$H = L - Lc = \rho$$

Porcentaje de ocupación

$$\%\,H = H / M = \rho / M$$

2) SISTEMA CON UN CANAL M IGUAL A UNO Y COLA INFINITA.

POBLACION

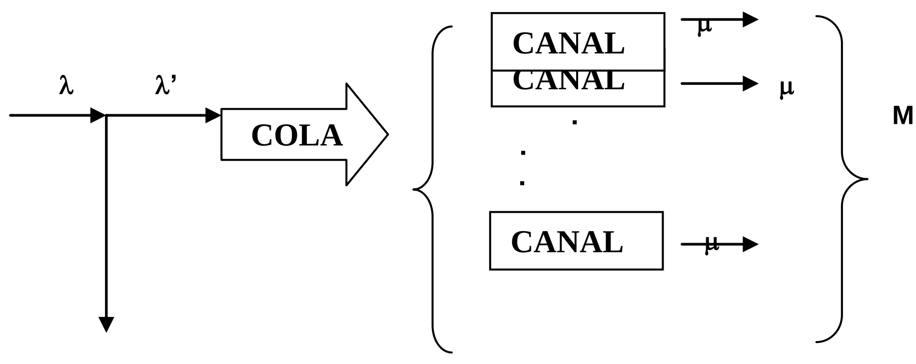


Datos
- λ
- μ

Incógnitas
- p(n), p(0)
- Lc L
- W Wc
- H p(t > 0)

3) SISTEMA CON M > 1 CANALES SIMILARES DE ATENCION EN PARALELO DE IGUAL μ Y COLA FINITA.

POBLACION



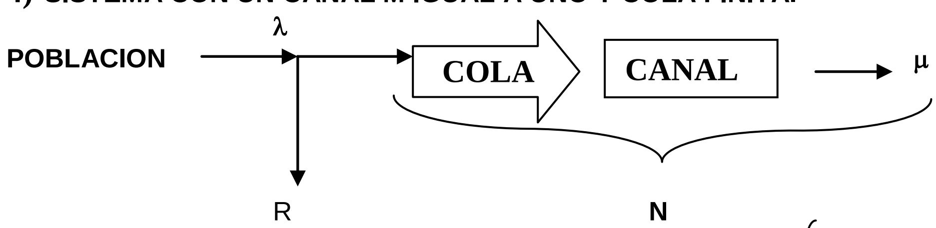
R

N (posiciones)

Datos
- λ (Ta)
- μ (Ts)
- M
- W
- Wc

Valores Características
- p(n)
- L
- Lc

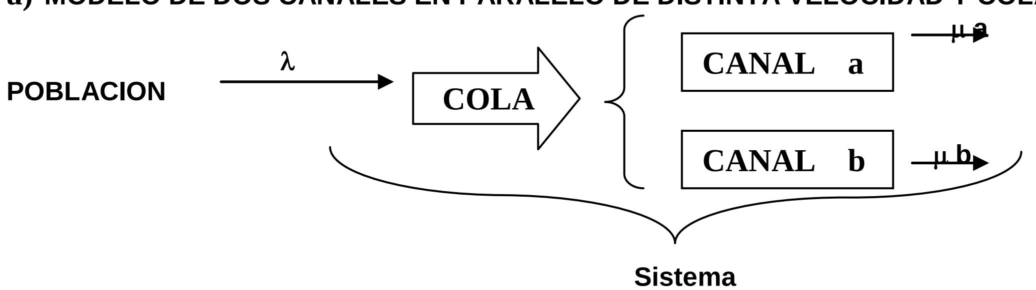
4) SISTEMA CON UN CANAL M IGUAL A UNO Y COLA FINITA.

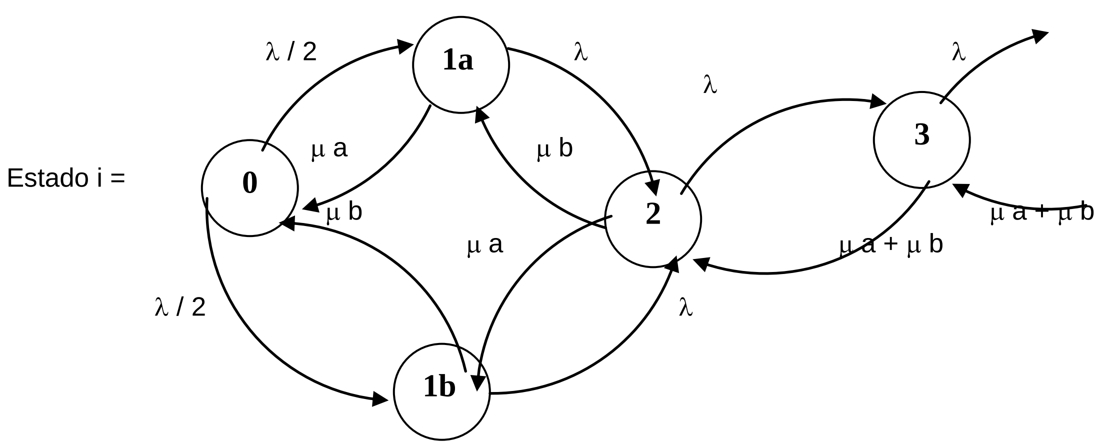


Datos
- λ (Ta = 1/ λ)
- μ (Ts = 1 / μ)
- M

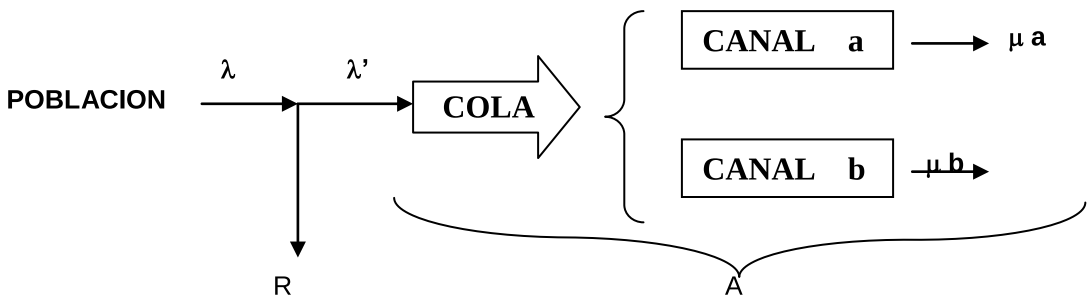
Valores Características
- p(n)
- L Lc
- W Wc
- R (Tasa de Clientes rechazados por hallarse el sistema completo)

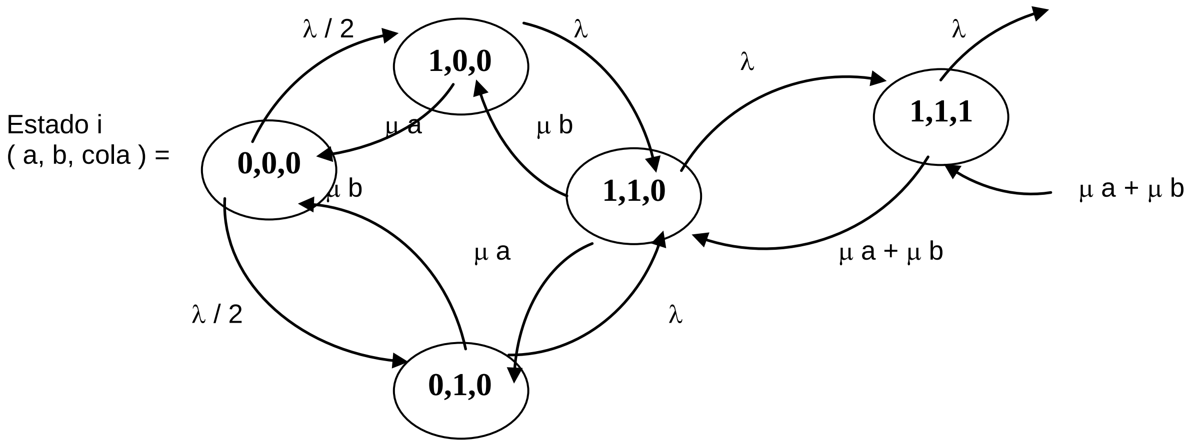
a) MODELO DE DOS CANALES EN PARALELO DE DISTINTA VELOCIDAD Y COLA INFINITA.



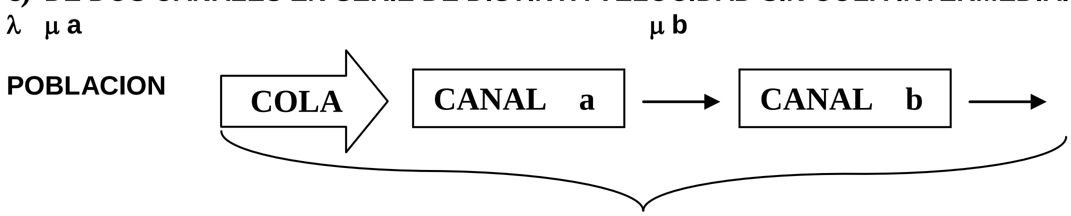


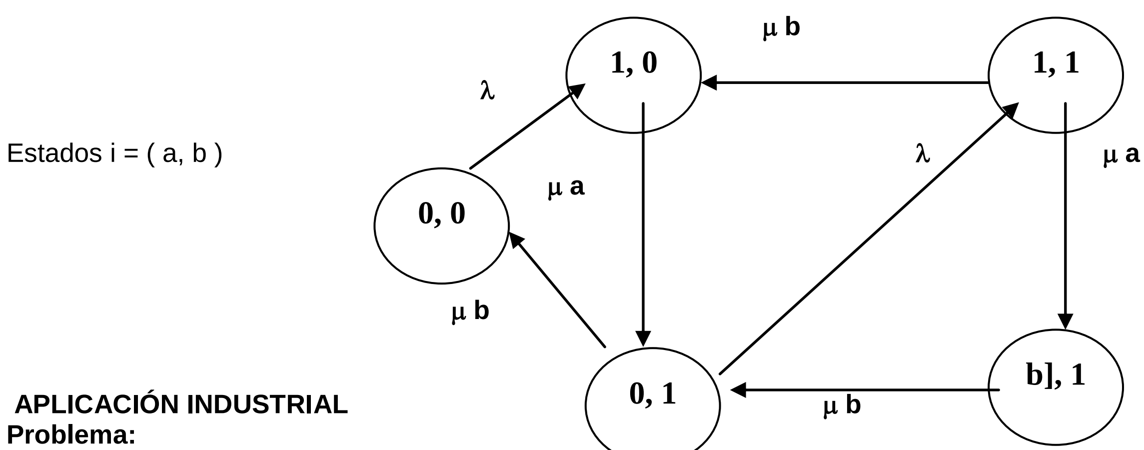
b) MODELO DE DOS CANALES EN PARALELO DE DISTINTA VELOCIDAD Y COLA FINITA.





c) DE DOS CANALES EN SERIE DE DISTINTA VELOCIDAD SIN COLA INTERMEDIA.





APLICACIÓN INDUSTRIAL

Problema:

Una máquina de clavar pone cuatro clavos igualmente espaciado de un solo golpe. Cada una de las cuatro cabezas golpeadoras debe tener su clavo que introducir, pues si uno no ha entrado es preciso colocarlo a mano, con gran gasto. Para reducir a un mínimo esta falla, todas las cabeceras golpeadoras estrán provistas de tubos que contengan diez clavos cada uno. Cada uno de estos tubos contiene (10-1) = 9 clavos después de cada golpe introductor de 4 clavos y, por lo tanto, puede aceptar un clavo proveniente de la tolva. Se pide optimizar el sistema de tal manera que a cada cabezal correspondiese un tubo con capacidad para 4 clavos. Se asigna valores de tal modo que:

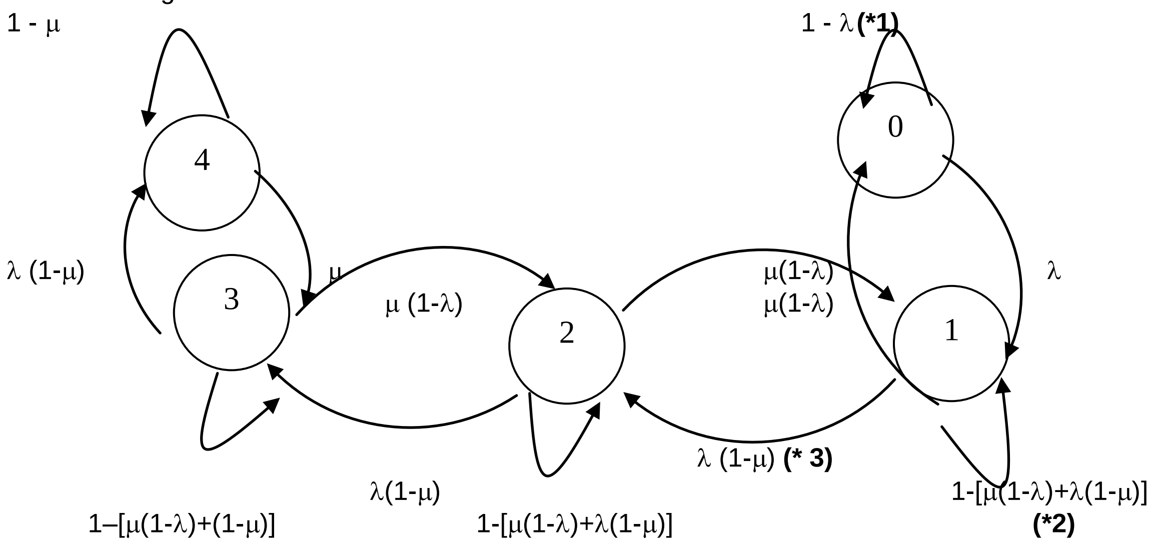
λ = Probabilidad (que un clavo entre en el tubo) = coeficiente medio de llegada se expresa como una probabilidad.

1 - λ = Probabilidad (que un clavo no entre en el tubo).

μ = Probabilidad (que haya golpe de la máquina y el clavo salga del tubo) = coeficiente medio de partida de clavos expresada como probabilidad.
1 - μ = Probabilidad (que el golpe no se produzca: cero partidas).
λ (1 - μ) = Probabilidad conjunta de: (llegada) (ningún golpe) – la fila aumenta en uno.
μ (1 - λ) = Probabilidad conjunta de: (golpe) (no llega ninguno) – la fila disminuye en uno.
1 – [μ (1 - λ) + λ (1 - μ)] = Probabilidad conjunta = (la fila sigue igual).
Se construye la matriz de transición y se realiza el gráfico de transición.

	(0)	(1)	(2)	(3)	(4)
(0)	1 - λ	λ	0	0	0
(1)	μ (1 - λ)	1-[μ(1-λ)+λ(1-μ)]	λ (1 - μ)	0	0
(2)	0	μ (1 - λ)	1-[μ(1-λ)+λ(1-μ)]	λ(1-μ)	0
(3)	0	0	μ (1 - λ)	1-[μ(1-λ)+μ(1-λ)]	λ (1 - μ)
(4)	0	0	0	μ	1 - μ

Se realiza el gráfico de transición



(*1) [Prob. de que la cadena empiece en cero y siga en cero despues de un paso]

(* 2) [Prob. de que la fila siga igual]

(* 3) [Prob. de pasar del estado uno al estado dos en un solo paso]

Resumen:

- Sólo tiene lugar movimientos unitarios.
- No hay forma de ir del estado 3 al estado 1 en un solo paso.
- Es una cadena de Markov que se caracteriza de la siguiente forma:
- Tubo vacío y no llega clavo: 0 → 0
- Tubo vacío y llega clavo: 0 → 1
- El tubo contiene 2 clavos, la máquina hace recorrido, el clavo no entra en el tubo, el total de clavos disminuye en uno: 2 → 1
- No hay golpe y no hay llegada el total de clavos en el tubo permanece igual: 2 → 2.
- No hay golpe hay llegada, el total de clavos aumenta en uno: 2 → 3.
- Golpe el clavo no puede llegar a causa de estar el tubo lleno anteriormente: 4 → 3.
- No hay golpe, no hay llegada, el tubo sigue lleno: 4 → 4.

Supongamos que un tubo tiene 2 clavos; buscamos 2 en el gráfico se ve que hay 3 rutas que describen lo que puede ocurrir en la siguiente unidad de tiempo. ***Una ruta retrocede a un solo clavo, la otra salta 2 y, por lo tanto, sigue como estaba, y la última va a 3***; Lo cual indica que la existencia de clavos a aumentado en uno. En las rutas están las probabilidades de los diversos acontecimientos. Por consiguiente, el hecho de ir de 2 a 3 en un solo paso tiene la probabilidad de **λ (1 - μ)**. Para ir en dos pasos del estado 2 al estado 3, la probabilidad es:

$$\text{Prob. } 2^{2} \longrightarrow 3 = \{[1-\mu(1-\lambda)+\lambda(1-\mu)]\}\,[\lambda(1-\mu)] + [\lambda(1-\mu)]\,\{1-[\mu(1-\lambda)+\lambda(1-\mu)]\}$$

$$\text{Prob. } 2^{2} \longrightarrow 3 = 2\,\{1-[\mu(1-\lambda)+\lambda(1-\mu)]\}\,[\lambda(1-\mu)]$$

otra manera es: $P^{1}\ P^{1} = P^{2}$ $\quad P^{1}\ P^{2} = P^{3}$ $\quad P^{1}\ P^{3} = P^{4}$

$$\boxed{P^{1}\ P^{n-1} = P^{n}}$$

Cuando todas las filas tienen los mismos valores llegamos a que la matriz de transición se encuentra en el estado estacionario. El tamaño de la ***fila es coronado***. De este modo, con una ***limitación del largo de la fila no existe restricción relativa a ρ***. En cualquier modelo de colas, a medida que **μ** crece con relación a **λ*, aumenta la probabilidad y tiende a cero unidades en el sistema***.
Para **μ** con valores muy grande y **λ** con valores muy pequeños por ejemplo.

Para **μ >>** y **λ<<** p.e. $\dfrac{\lambda}{\mu} = \dfrac{3}{4 \cdot 10^{12}}$ será P(0) $\longrightarrow$ 1

Cuando **λ/μ > 1** (en los casos de colas en general) la fila aumenta sin límite. Sin embargo esto no rige para el problema que estamos analizando pues el tamaño de las filas está coronada (limitado) a cuatro. Por lo tanto, a medida que **λ / μ** se agranda,

p.e. = $\dfrac{3 \cdot 10^{21}}{4}$, entonces p(4) $\longrightarrow$ 1,

donde p(nc) $\longrightarrow$ 1 siendo ***p(nc) = Prob. cuando n es coronada.***

Ejemplo: $\dfrac{\lambda}{\mu} < 1$

Datos: $\lambda = \dfrac{5}{100} = 0.05$ (cinco clavos, de un centenar están debidamente alineados al dispositivo de alimentación).

$\lambda = \dfrac{12}{100} = 0.12$ (la máquina tiene una capacidad de 100 golpes por minuto, pero sólo se utilizan doce).

	(0)	(1)	(2)	(3)	(4)
(0)	0.950	0.050	0	0	0
(1)	0.114	0.842	0.044	0	0
(2)	0	0.114	0.842	0.044	0
(3)	0	0	0.114	0.842	0.044
(4)	0	0	0	0.120	0.880

El vector solución de la matriz, cuando llega a ***estado estacionario*** se determina mediante la siguiente expresión:

$$v = \text{Vector} \cong \frac{(\mu - \lambda)}{4}\ [1 - p,\ p,\ p^{2},\ p^{3},\ (1-\lambda)\,p^{4}]$$

$\mu (1 - \lambda) - \lambda (1 - \mu) p$

Dando:

$$p = \frac{\text{Prob de incremento de Fila por uno}}{\text{Prob. de decremento de Fila por uno}} = \frac{\lambda (1 - \mu)}{\mu (1 - \lambda)}$$

Este vector dará para p los siguientes valores:

v= Vector = (p(0), p(1), p(2), p(3), p(4))

Por consiguiente, mediante sustitución:

$$p = \frac{\lambda (1 - \mu)}{\mu (1 - \lambda)} = \frac{0.044}{0.114} = 0.38596$$

$p^2 = 0.14897 \quad p^3 = 0.05750 \quad p^4 = 0.00222$

y el vector solución es $v \cong \dfrac{0.07000}{0.10560 – 0.04750 (0.00222)} *$

[0.880, 0.385960, 0.14896, 0.05749, 0.00222 (0.950)]

Vsol $\cong$ (0.58392, 0.25610, 0.09885, 0.03815, 0.00140)

p(0) $\cong$ 0.584 (el tubo está vacío).
p(1) $\cong$ 0.256 (en el tubo hay un clavo).
p(2) $\cong$ 0.099 (en el tubo hay dos clavos).
p(3) $\cong$ 0.038 (en el tubo hay tres clavos).
p(4) $\cong$ 0.001 (el tubo está vacío).

A estos valores también se llega partiendo de la matriz **A** multiplicando por si mismo hasta llegar al estado permanente lo que implica que todas las filas son iguales esto es: $\boxed{\mathbf{A}^{64}}$

BIBLIOGRAFÍA:

1) Métodos y Modelos de Investigación de Operaciones, A. Kufmann. CECSA.
2) Fila de Espera, A. Kufman y Cruon, CECSA.
3) Introducción a la Investigación de Operaciones. Hillier y Lieberman. Mc. Graw Hill.
4) Procesos Estocásticos , Parzen , Limusa.
5) Investigación de Operaciones. Un enfoque fundamental Shamblin y Stevens. Mc Graw hill.
6) Teoría de las Colas, J. A. Panico. Ed. Economía y Empresa.
7) Elementos de la Teoría de Colas, Saaty. Aguilar.
8) Investigación de Operaciones Serie Schaum. Mc. Graw Hill.
9) Investigación de Operaciones Aplicaciones y Algoritmos. W. L. Winston. Grupo Ed. Iberoamérica.

Correo: yuniorcastillo@yahoo.com
yuniorandrescastillosilverio@facebook.com
Twitter: @yuniorcastillos
Celular: 1-829-725-8571
Santiago de los Caballeros,
República Dominicana,
2015.
“DIOS, JUAN PABLO DUARTE Y JUAN BOSCH – POR SIEMPRE”®