DEFINICION DE FUNCION Y TERMINOS RELACIONADOS, POR MAURO H. HENRIQUEZ

3. FUNCIONES

3.1DEFINICION DE FUNCION Y TERMINOS RELACIONADOS CON LA DEFINICION

> **DEFINICION:** Una función **f**, es una correspondencia entre dos conjuntos X y Y, de tal manera que a cada elemento $x \in X$, le corresponde un único elemento $y \in Y$.
> X se lama **"dominio de la función f"**
> Y se llama **"codominio de la función f"**
> El conjunto de elementos $y \in Y$ que están en correspondencia con algún $x \in X$, se llama **"recorrido (o rango) de la función f"**

El valor de f en **x** (que es "y") depende de la elección de **x**, por lo que se llama **"variable dependiente"** mientras que a la **"x"** la denominaremos **"variable independiente".**

RESTRICCION: En general el dominio, y el codominio de una función f no necesitan ser conjunto de números reales. Sin embargo consideraremos únicamente funciones en las que ambos son subconjuntos de números reales; es decir, consideraremos únicamente **"funciones reales de una variable real"**

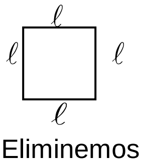
Para especificar una función, conociendo una descripción de ella, es suficiente establecer
a) su dominio y
b) su regla de correspondencia, es decir una regla para evaluarla.

NOTAS
1. La regla de correspondencia que define a una función, usualmente es una fórmula o una ecuación.
2. Llamamos **"dominio natural de una función"** al conjunto de todos los valores de la variable independiente para los que la fórmula (o ecuación) origine un número real. Decimos que la función f está definida en un conjunto S, cuando S está contenido en el dominio natural de f.
3. Si se da la regla de correspondencia y no se especifica el dominio, se sobreentiende que éste, es su dominio natural.

EJEMPLOS ILUSTRATIVOS

1. Encuentre una fórmula que exprese el área de un cuadrado en función de su perímetro.

SOLUCION
A: el área del cuadrado (variable dependiente)
P: el perímetro del cuadrado (variable independiente)



A= ℓ^2 $\quad$ ℓ : longitud del lado (variable no deseada)
p=4 ℓ

Eliminemos la variable no deseada del sistema de ecuaciones (por sustitución)

A= ℓ^2 y p=4 ℓ

A= ℓ^2 y $\frac{p}{4} = \ell$

Entonces: A=$\left(\frac{p}{4}\right)^2 = \left(\frac{p^2}{16}\right)$

$\therefore \; A_{(p)} = \dfrac{p^2}{16}$, D= $]0,+\infty[$

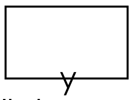
Así $A_{(4)} = \dfrac{4^2}{16}$ =1 es el valor del área de un cuadrado que tiene un perímetro de 4 unidades

2. Un hombre dispone de 40 pies de malla de alambre para cercar un jardín rectangular, utilizando como muro un lado de su casa. Encuentre una fórmula que exprese el área del jardín en función de x (la longitud de uno de sus lados).

SOLUCION
A: el área del rectángulo (variable dependiente)
x: longitud de un lado del rectángulo (variable independiente)

casa A= xy (aquí "y" es una variable no deseada)

x 40=2x + y



y

Eliminamos la variable no deseada del sistema de ecuaciones por el método de sustitución así:

A= xy y P=4 ℓ

AQ-2x= y

Entonces A: =x (40-2x) = 40x – 2 x^2

El mayor valor de x será cuando y=0; es decir si 40-2x = 0 o bien x=20

$\therefore \; A_{(x)} = 40x - 2x^2$, D= $]0,20[$

VERIFICANDO SU COMPRENSION

1. Con una hoja cuadrada de cartón, de 50 cms por lado, se hará una caja sin tapa, recortando un cuadrado en cada una de sus
esquinas y luego doblando los bordes hacia arriba. Expresar:

a) El área de la base y b) El volumen de la caja,
en función de la longitud "x" del lado del cuadrado recortado.

2. Un cable de 100 cms de longitud se corta en dos pedazos. Con un pedazo que tiene x cms de longitud se construye un cuadrado y con el otro un rectángulo cuya base es el doble de la altura. Expresar la suma de las áreas (del cuadrado y rectángular) en función de x.

3.2 GRAFICA DE UNA FUNCION

DEFINICION: La gráfica de una función **f**, es el conjunto de puntos en el plano cartesiano, cuyas coordenadas satisfacen la fórmula (o ecuación) que defina **f**"

En símbolos: Gráfica de $f = \{(x,y) \in R^2 / x \in D_f \quad \Lambda \quad y = f(x)\}$

EJEMPLO ILUSTRATIVO

1. Sea **f** la función definida por $f(x) = x^2$ en $]-1,4]$

Entonces

(0,0) $\notin$ gráfico de f. ¿Porqué? (2,4) $\in$ gráfico de f. ¿Porqué?

(-1,1) $\notin$ gráfico de f. ¿Porqué? (4,16) $\in$ gráfico de f. ¿Porqué?

VERIFICANDO SU COMPRENSION

2. Sea g la función definida por $g(x) = \dfrac{1}{x}$

a) ¿Cuál es el domino natural de g?

b) Si g está definida en $]0,5]$, determine puntos en la gráfica de g y puntos que no estén en la gráfica de g. Justifique su respuesta

PROCEDIMIENTO PARA GRAFICA SU FUNCION
Para construir la gráfica de una función se sugieren tres pasos.
PASO 1: Obtener las coordenadas de unos puntos que satisfagan la ecuación que define a la función. Presentar estos puntos en una tabla de valores
PASO 2: Ubicar en el plano los puntos de la tabla de valores y
PASO 3: Unir los puntos mediante una curva de trazo contínuo

NOTA: Al construir la gráfica de una función definida en un intervalo $[a,b]$ o $]a,b[$, conviene comenzar la tabla de valores con el punto con abscisa "a" y terminar con el punto con abscisa "b". Cuando el intervalo es abierto, se eliminan los puntos terminales de la gráfica, dejando en su lugar un hueco.

EJEMPLO ILUSTRATIVO

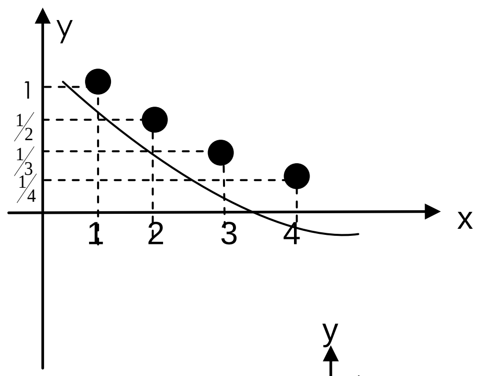
Construir la gráfica de $g(x)=\frac{1}{x}$ en

a) $[1,4]$ b) $]1,4[$

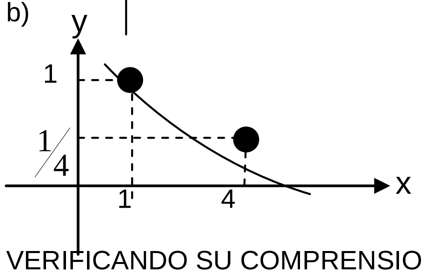
SOLUCION

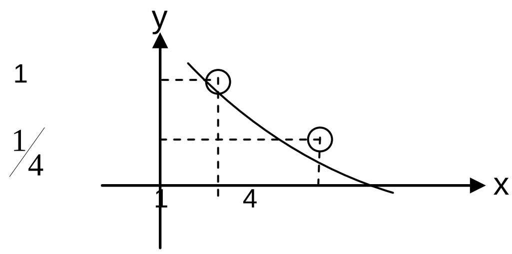
a)

x	$g(x)$
1	1
2	$1/2$
3	$1/3$
4	$1/4$



b)





VERIFICANDO SU COMPRENSION

Construya la gráfica de $f(x)=x^2$ en

a) $[-1,2]$ b) $]-1,2[$ c) $]-,2]$ d) $[-1,2[$

3.3 FUNCIONES ESPECIALES Y SUS GRAFICAS

3.3.1. FUNCIONES POLINOMIALES

DEFINICION: Una función polinomial es cualquier función **f**, que tenga como regla de correspondencia una expresión de la forma

$$f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots\ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Donde los coeficientes $a_0 + a_1 \ldots\ldots a_n$, son números reales y los exponentes son enteros no negativos

Particularmente, una función polinomial

- De grado 0, $f(x) = a_0$, se llama “función constante”.
- De grado 1, $f(x) = ax + b$, se llama “función lineal”.
- De grado 2, $f(x) = ax^2 + bc + c$, se llama “función cuadrática”
- De grado 3, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, se llama “función cúbica”

CASO A: FUNCION LINEAL Y SU GRAFICA

Graficar en el intervalo $[-1,5[$ la función f

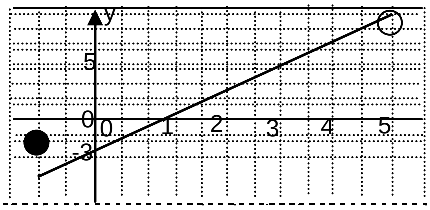
a) Si $f(x) = 2x - 1$ o y= 2x-1 b) Si $f(x) = -2x - 1$ o y= -2x-1

SOLUCION

En ambos casos, la tabla de valores constará de dos puntos, porque como pronto veremos, la gráfica de una función líneal es una línea recta y toda recta está determinada por dos puntos de ella.

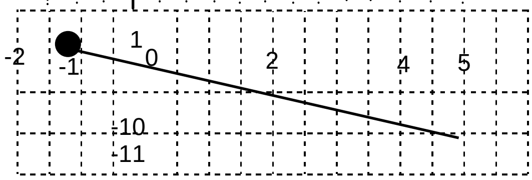
a)

x	y
-1	-3
5	9



b)

x	y
-1	1
5	-11



Advierta: cuando en la ecuación que define a una línea recta, la variable dependiente está despejada:

- La recta sube si el coeficiente de la variable independiente es positivo; es decir, el valor **“y”** crece al crecer el valor de **“x”**.
- La recta baja si el coeficiente de la variable independiente es negativo; es decir, el valor de **“y”** decrece al aumentar el valor de **“x”**.

NOTA: Si c es una constante, entonces
y=c representa una recta horizontal y
x=c representa una recta vertical

DEFINICION: Si una línea recta no es vertical y P(x,y) con $Q(x_2, y_2)$ son puntos distintos de la recta, entonces la “pendiente de la recta” es

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{diferencia\ \ de\ ordenadas}{diferencia\ \ de\ abscisas}$$

c = 0, de modo $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{0}$ y la división entre cero no está permitida.

NOTA 2. La pendiente de una recta horizontal es cero ya que $y_2 - y_1$ = c – c = 0, y $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = 0$.

EJEMPLOS ILUSTRATIVOS

Encuentre la pendiente de la recta representada por la ecuación
a) y = 2x – 4 b) y = -2x + 4

SOLUCION
En cada caso necesitamos dos puntos (cualesquiera) que pertenezcan a la gráfica de la ecuación dada.

Para a)

x	y
0	-1
2	0

$$m = \frac{-1-0}{0-2} = 2$$

Para b)

x	y
0	4
2	0

$$m = \frac{4-0}{0-2} = -2$$

Advierta: en cada caso, la pendiente de la recta es el coeficiente de la variable independiente, cuando la variable dependiente está despejada. Consecuentemente

m > 0, indica que la recta sube
m< 0, indica que la recta baja
m = 0, ni sube ni baja

VERIFICANDO SU COMPRENSION

Encuentre de dos maneras distintas, la pendiente de la recta representada por la ecuación.
a) 3x – 2 = 4y b) 3 – 2y = x

Para obtener la ecuación que define a una recta se tienen las siguientes alternativas

PRIMERA FORMA: PUNTO PENDIENTE

Si (x_1,y_1) es un punto específico de una recta no vertical, (x,y) es cualquier otro punto situado sobre la recta y m es la pendiente, entonces la ecuación se puede escribir como: $y - y_1 = m(x - x_1)$, que es la forma punto pendiente de la ecuación de la recta que pasa a través del punto (x_1,y_1) y cuya pendiente es m.

Particularmente, si en la forma punto pendiente $(x_1,y_1) = (0,b)$, donde b se llama intersección "y" y es la ordenada del punto donde la recta cruza el eje y, se tiene y-b = m(x-0) = mx o bien y = mx + b.

y = mx + b es la fórmula "pendiente-intersección" de la ecuación de la recta.

EJEMPLOS ILUSTRATIVOS

1. Determine la ecuación de la recta que pasa por (1,3) con pendiente 6.

SOLUCION
Tomando $(x_1,y_1) = (1,3)$ y m=6 en la forma punto pendiente se obtiene
y – 3 = 6 (x-1)
y – 3 = 6x – 6
y = 6x – 3

2. Calcule la pendiente y la intersección "y" de 2x+3y+6 = 0
SOLUCION
Despejando y: y = $-\frac{2}{3}x - 2$

Por tanto m = $-\frac{2}{3}$ es la pendiente y b = -2 es la intersección "y"
VERIFICANDO SU COMPRENSIÓN
1. Determine la ecuación de la recta que pasa por (-1,-3) con pendiente -1.

2. Calcule la pendiente y la intersección "y" de y-2x+1=0

SEGUNDA FORMA: DOS PUNTOS
Si (x_1,y_1) y (x_2,y_2) son puntos específicos de una recta no vertical y (x,y) es cualquier otro punto situado sobre la recta, entonces $\frac{y-y_1}{x-x_1}$ y $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ son expresiones de la pendiente, por lo tanto

$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$=m o bien $y - y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$

Esta última igualdad recibe el nombre de **Forma de dos puntos de la ecuación de la recta que pasa a través de los puntos** (x_1,y_1) y (x_2,y_2).

NOTA: En la forma **dos puntos** de la ecuación de la recta, a cualquiera de los dos puntos se puede elegir como (x_1,y_1).

EJEMPLO ILUSTRATIVO

Halle la ecuación de la recta que pasa a través de los puntos (6,-4) y (1,-1).

SOLUCION

Tomando (x_1,y_1) = (6,-4)

$y-(-4) = \frac{-1-(-4)}{1-6}(x-6)$

$y+4 = \frac{3(x-6)}{1-6}(x-6)$

-5(y+4) = 3(x-6)
-5y – 20 = 3x – 18
0 = 3x + 5y + 2

Tomando (x_1,y_1) = (1,-1)

$y-(-1) = \frac{-4-(-1)}{6-1}(x-1)$

$y+1 = \frac{-3(x-1)}{5}$

5(y+1) = -3(x-1)
5y + 5 = -3x + 3
3x + 5y + 2 = 0

VERIFICANDO SU COMPRENSION
Halle la ecuación de la recta que para a través de los puntos (-6,4) y (-1,1).

RECTAS PARALELAS Y PERPENDICULARES: Dos rectas paralelas o perpendiculares entre sí, pueden caracterizarse por medio de sus pendientes

RECTAS PARALELAS: Dos rectas no verticales $y=m_1x+b_1$ y $y= m_2x + b_2$ son paralelas si y sólo si tienen la misma pendiente $(m_1 = m_2)$

RECTAS PERPENDICULARES: Las dos rectas $y=m_1x+b_1$ y $y= m_2x + b_2$ son perpendiculares si y sólo si el producto de sus pendientes es -1 $(m_1m_2= -1)$ (aquí se supondrá, por supuesto, que $m_1 \neq 0$ y= $m_2 \neq 0$), por lo tanto, ninguna de las dos rectas es horizontal o vertical.

EJEMPLO ILUSTRATIVO
Los siguientes pares de recta ¿son paralelas, perpendiculares o ninguno de los casos?
a) Pasa a través de (2,5) y (4,9) y a través de (3,-1) y (6,5)
b) Pasa a través de (4,0) y (2,-1) y a través de (2,5) y (5,1)
c) Pasa a través de (12,5) y (10,4) y a través de (-1,0) y (0,-2)

SOLUCION

a) $m_1 = \frac{9-5}{4-2} = \frac{4}{2} = 2$, $m_2 = \frac{5-(-1)}{6-3} = \frac{6}{3} = 2$

$m_1 = m_2$ $\therefore$ son paralelas

b) $m_1 = \frac{0-(-1)}{4-2} = \frac{1}{2}$, $m_2 = \frac{5-11}{2-5} = \frac{-6}{-3} = 2$

$\therefore$ ninguna de las dos

c) $m_1 = \frac{5-4}{12-10} = \frac{1}{2}$, $m_2 = \frac{-2-0}{0-(-1)} = -2$

$m_1m_2 = -1 \quad \therefore$ son perpendiculares

VERIFICANDO SU COMPRENSION

Los siguientes pares de rectas, ¿son paralelas, perpendiculares o ninguno de los casos?

a) $6x + 3y = 4$ b) $8x - 2y = 5$

$2x + y = -5$ $x + 4y = 15$

CASO B: FUNCION CUADRATICA Y SU GRAFICA

Recordamos: una función polinomial, f, de grado 2, definida por $f(x)=ax^2+bx+c$, donde a,b y c son números reales, $a\neq0$, se llama función cuadrática.

La ecuación, $y = ax^2+bx+c$, que define a una función cuadrática se llama **ecuación cuadrática** (escrita en forma estándar).

Así: $y = 3x^2-x+4$ y $y + x = x^2 - 5$ son ecuaciones cuadráticas, pero sólo la primera función está en forma estándar.

- Se dice que una ecuación cuadrática es completa si tiene un término en x^2, un término en x y un término independiente de x. Así, las ecuaciones.

a) $x^2 = 2x - 5 + y$ b) $x^2 + 3x - 8 = y$ c) $x^2 - x = 3y - 4$

Son ecuaciones cuadráticas completas (solo b) está en forma estándar).

- Se dice que una ecuación cuadrática es incompleta si es de la forma:

$y = ax^2 + c$ (carece del término en x) o de la forma

$y = ax^2 + bx$ (carece del término independiente)

A la abscisa **a** del punto (a,0), donde la gráfica de f cruza al eje x (la intersección x) se llama

- Cero de la función cuadrática, o bien
- Raíz de la ecuación cuadrática

DEFINICIÓN: Las raíces de una ecuación cuadrática son los valores de la incógnita (x en nuestro caso) que satisface la ecuación)

NOTA 1: Resolver una ecuación cuadrática es hallar las raíces de la ecuación. Si estamos interesados solo en los valores reales, pueden ocurrir tres casos: que la cuadrática tenga dos raíces reales, una sola raíz real o que carezca de solución real.

EJEMPLOS ILUSTRATIVOS

La ecuación $y = (x-1)(x+2)$ tiene dos raíces reales: x=1 y x=-2. En efecto $0 = (x-1)(x+2)$.

Si x = 1, se cumple $0 = 0\ (x+2) = 0$

Si x = 1, se cumple $0 = 0\ (x+2) = 0$

La ecuación $y = (x-4)^2$ tiene una solución real única: x=4.

En efecto $0 = (x-4)^2$, Si x = 4, se cumple $0 = (4-4)^2 = 0$

La ecuación $y=x^2+4$ carece de solución real porque $0=x^2+4$ es lo mismo que $x^2=-4$ y cualquier potencia para de un número real es un número negativo.

NOTA 2: Hallar los ceros de una función cuadrática es hallar las raíces de la ecuación (cuadrática) que la define. Así:

- Los ceros de $f(x) = (x-1)(x+2)$ son las raíces de la ecuación $y=(x-1)(x+2)(1y-2)$.
- La función $f(x) = (x-4)^2$ tiene un cero único, porque la ecuación $y=(x-4)^2$ tiene una raíz real única (x=4)

- La función $f(x) = x^2+4$, carece de ceros, porque la ecuación $y = x^2+4$ no tiene raíces reales.

METODOS PARA RESOLVER ECUACIONES CUADRATICAS

Existen métodos para resolver ecuaciones cuadráticas incompletas y varios métodos para resolver ecuaciones cuadráticas completas; sin embargo, utilizaremos únicamente el método de la **fórmula general** que igual sirve para los distintos tipos de ecuaciones cuadráticas.

FORMULA GENERAL PARA RESOLVER ECUACIONES CUADRATICAS

Las raíces de la ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0$ son:

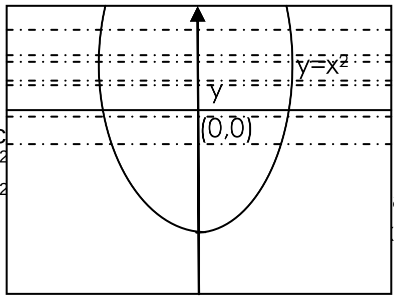
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$ **Fórmula general.**

EJEMPLOS ILUSTRATIVOS

Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas:
a) $2x^2 = 3 - 5x$ b) $x^2 + 9 = 6x$ c) $x^2 + 2x + 2 = 0$
d) $x^2 = 4$ e) $x^2 - 2x = 0$
SOLUCION
En cada caso, para identificar a,b y c de la fórmula general, la ecuación debe estar en forma estándar.
Así :
Para a) $2x^2 + 5x - 3 = 0$: $a = 2$, $b = 5$, y $c = -3$
Para b) $x^2 - 6x + 9 = 0$: $a = 1$, $b = 6$, y $c = 9$
Para c) $x^2 + 2x + 2 = 0$: $a = 1$, $b = 2$, y $c = 2$
Para d) $x^2 + 0x - 4 = 0$: $a = 1$, $b = 0$, y $c = -4$
Para e) $x^2 - 2x + 0 = 0$: $a = 1$, $b = -2$, y $c = 0$
En la fórmula cuadrática, la expresión $b^2 - 4ac$ que aparece dentro del signo radical se llama **discriminante de la ecuación cuadrática.** Al determinar el valor del discriminante se obtiene información acerca de la naturaleza de las raíces, sin tener que resolver realmente la ecuación.

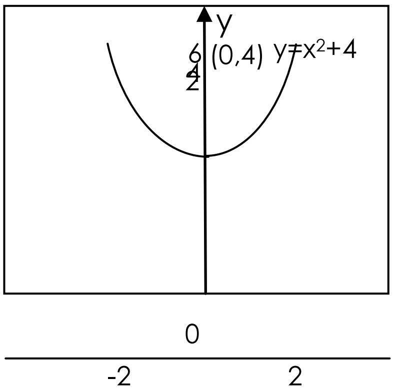
- Si $b^2 - 4ac > 0$ y tiene raíz exacta, habrá dos raíces distintas y racionales
- Si $b^2 - 4ac > 0$ y no tiene raíz exacta, habrá dos raíces distintas e irracionales
- Si $b^2 - 4ac = 0$, entonces, habrá una raíz única
- Si $b^2 - 4ac < 0$, la solución no es un número real.

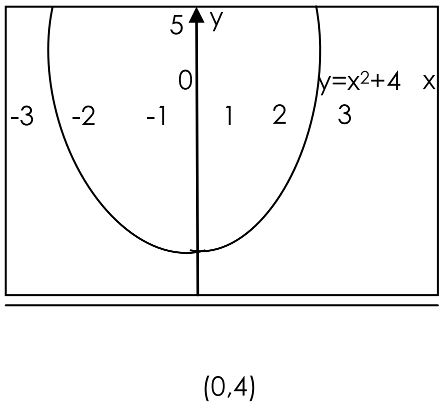
EJEMPLOS ILUSTRATIVOS
Determine la naturaleza de las raíces de la ecuación dada:
a) $3x^2 - 7x + 2 = 0$
b) $2x^2 = 4x - 1$
c) $25 = 10x - x^2$
VERIFICANDO SU COMPRENSION
Determine la naturaleza de las raíces de las ecuaciones
a) $6x^2 = 11x + 10$ b) $2x^2 = x - 3$
GRAFICA DE UNA FUNCION (ECUACION) CUADRATICA
PRIMERA FORMA: Usando deslazamientos y reflexiones de la gráfica de la ecuación $y = x^2$

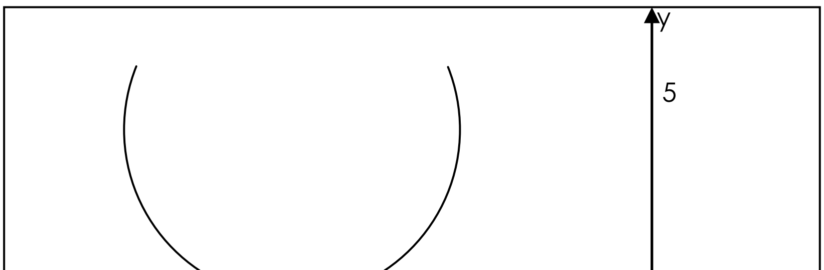


Para un número real c
- La gráfica de $y = x^2$ … lazada c unidades hacia arriba.
- La gráfica de $y = x^2$ … azada c unidades hacia abajo.
- La gráfica de y = … ^{2} desplazada c unidades hacia la izquierda.
- La gráfica de $y = (x - c)^2$, es la gráfica de $y = x^2$ desplazada c unidades hacia la derecha.

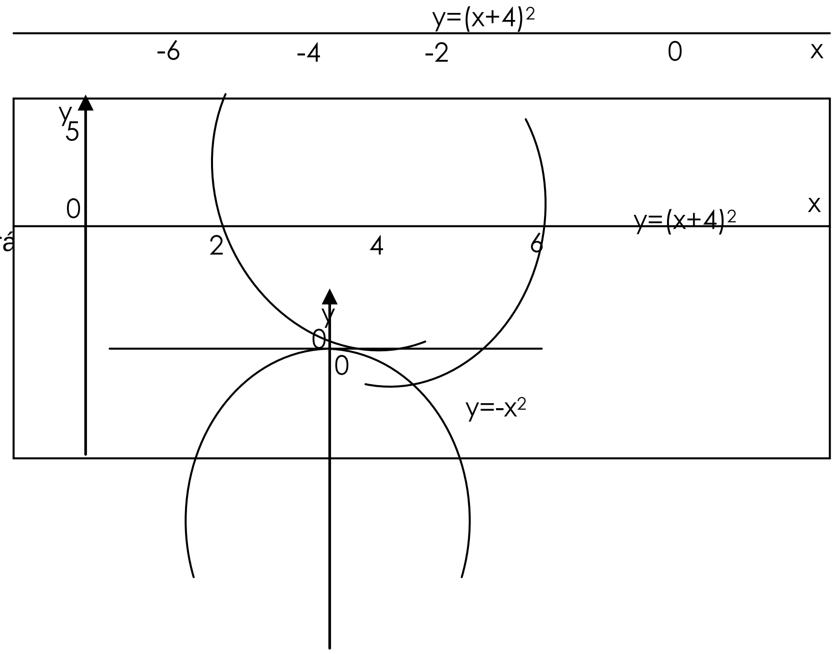
EJEMPLOS ILUSTRATIVOS



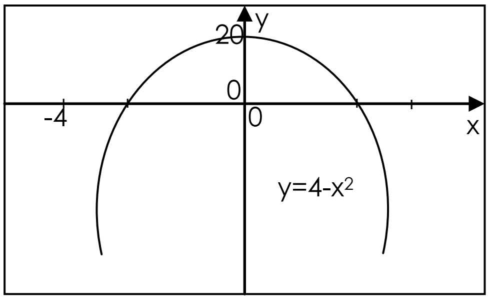


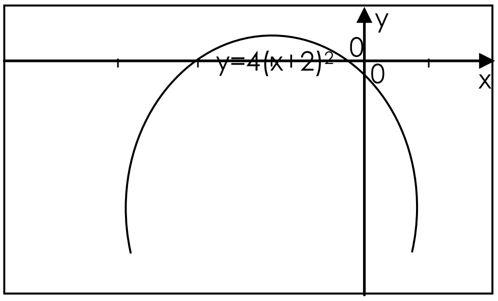


La grá



La gráfica de $y = 4 - x^2$, se obtiene de la gráfica de $y = x^2$ reflejándola y luego la reflexión se desplaza 4 unidades hacia arriba (cruza el eje de x en -2 y 2).
La gráfica de $y = 4 – (x+2)^2$, se obtiene de la gráfica de $y = x^2$ desplazándola 2 unidades hacia la izquierda; esta a su vez se refleja y la reflexión se desplaza 4 unidades hacia arriba (Corta al eje x en -4 y 0).





Advierta: Cuando en una función cuadrática la variable dependiente está despejada.

- Si el coeficiente de x^2 es positivo, la gráfica es cóncava hacia arriba
- Si el coeficiente de x^2 es negativo, la gráfica es cóncava hacia abajo

VERIFICANDO SU COMPRENSION
Construya mediante desplazamiento (y reflexiones) de la gráfica de $y=x^2$, las gráficas de las siguientes ecuaciones:

a) $y = (x-1)^2 – 1$ b) $y = 1-(x+2)^2$ c) $y = -1- (x-2)^2$

SEGUNDA FORMA: Usando las raíces de la ecuación

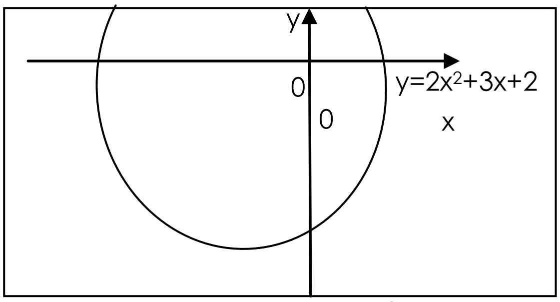
- Si la ecuación cuadrática tiene dos raíces reales, r_1 y r_2, se ubican en el plano los puntos $(r_1,0)$, $\left(\frac{r_1+r_2}{2}, f\left(\frac{r_1+r_2}{2}\right)\right)$ y $(r_2,0)$ y luego se unen con una curva de trazo continua

EJEMPLOS ILUSTRATIVOS
1. Construya la gráfica de la función f definida por $f(x) = 2x^2 + 3x - 2$
SOLUCION

f(x) = $2x^2 + 3x - 2 = 0$, cuando x = $\frac{1}{2}$ o x = -2 (verificarlo), si $r = \frac{1}{2}$ y r=-2, entonces

$\frac{r_1 + r_2}{2} = -\frac{3}{4}$ y $f\left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{25}{8}$

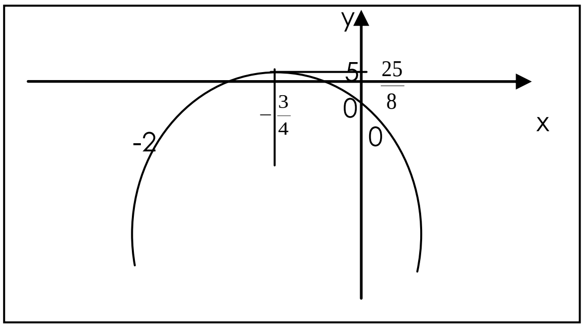
Los puntos a ubicar en el plano son (-2,0), $\left(-\frac{3}{4}, -\frac{25}{8}\right)$ y $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$



2. Construya la gráfica de la ecuación $y=-2x^2-3x+2$
SOLUCION
f(x) = $-2x^2-3x+2 = 0$, cuando x= $\frac{1}{2}$ o x=-2 (verificarlo), si $r = \frac{1}{2}$ y r=-2, entonces

$\frac{r_1 + r_2}{2} = -\frac{3}{4}$ y $f\left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{25}{8}$

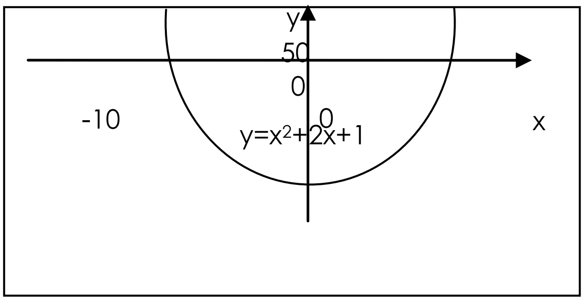
Los puntos a ubicar en el plano son (-2,0), $\left(-\frac{3}{4}, -\frac{25}{8}\right)$ y $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$



Si la ecuación cuadrática tiene una raíz real única, r entonces se ubica en el plano el punto (r,0) y la intersección y, (0,y) y luego se unen los puntos con una curva de trazo continuo.

- ✓ Cóncava hacia arriba, si el coeficiente de x^2 es positivo.
- ✓ Cóncava hacia abajo, si el coeficiente de x^2 es negativo.

EJEMPLOS ILUSTRATIVOS
1. Construya la gráfica de la ecuación f(x) = $x^2 + 2x + 1$
SOLUCION
y = $x^2 + 2x + 1 = 0$, únicamente si x=-1 (verifíquelo).
La intersección y es 1. Los puntos a ubicar en el plano son (-1,0), (0,1)



3.3.2 FUNCION RAIZ CUADRADA Y SU GRAFICA

DEFINICION DE FUNCION RAIZ CUADRADA: Una función "raíz cuadrada" **f**, se denota por el símbolo $\sqrt{\ }$ y se especifica así:

$f(x)=\sqrt{x}$ es el número no negativo cuyo cuadrado es x.

Tiene como dominio natural, el conjunto de todos los números reales no negativos.

Así $f(4)=\sqrt{4}=2$ porque $2^2=4$ (se dice la raíz cuadrada de 4 es 2)

$f(3)=\sqrt{9}=3$ porque $3^2=9$ (se dice la raíz cuadrada de 9 es 3)

Advierta $f(-4)=\sqrt{-4}$ no está definida?

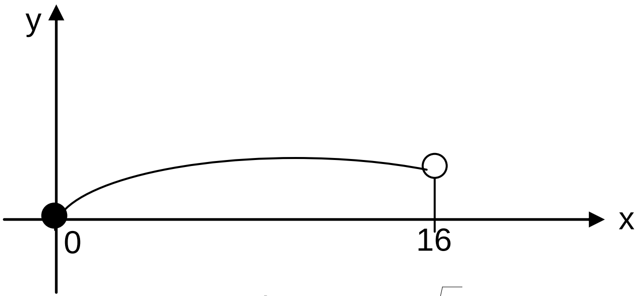
GRAFICA DE UNA FUNCION RAIZ CUADRADA (SUS DESPLAZAMIENTOS Y REFLEXIONES)

EJEMPLOS ILUSTRATIVOS

1. Gráficar $y=\sqrt{x}$ $x\in[0,16[$

SOLUCION

x	y
0	0
1	1
4	2
9	3
16	4



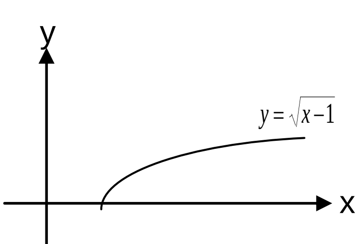
2. La gráfica de $y=\sqrt{x-1}$, se obtiene desplazando la gráfica de $y=\sqrt{x}$, una unidad hacia la derecha.

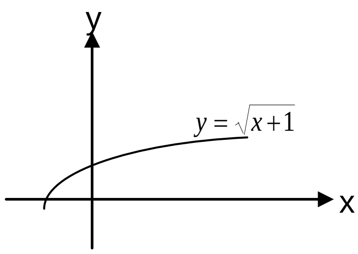
3. La gráfica de $y=\sqrt{x+1}$, se obtiene desplazando la gráfica de $y=\sqrt{x}$, una unidad hacia la izquierda.

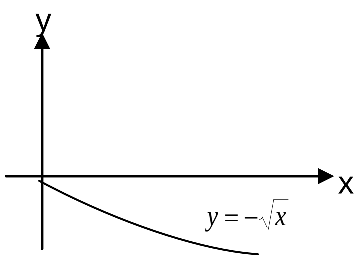
4. La gráfica de $y=-\sqrt{x}$, se obtiene reflejando la gráfica de $y=\sqrt{x}$.

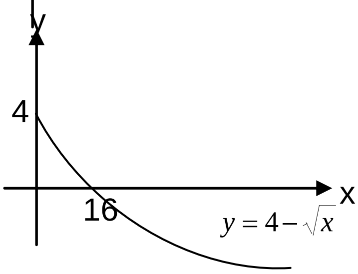
5. La gráfica de $y=4-\sqrt{x}$, se obtiene reflejando la gráfica de $y=\sqrt{x}$, y luego desplazando esta reflexión 4 unidades hacia arriba.

Así.



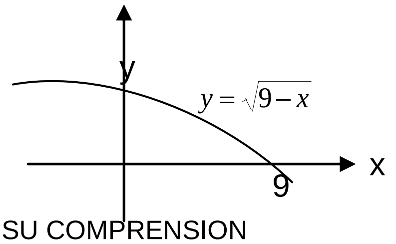






6. Graficar $y = \sqrt{9 - x}$

Puesto que el dominio natural de una función raíz cuadrada es el conjunto de los números reales no negativos, la función dada esta definida para los valores de x que hacen el radicando, 9 – x no negativo; es decir 9 – x ≥ 0, o bien 9 ≥ x. Así, la gráfica de la función dada es



VERIFICANDO SU COMPRENSION

Graficar.

a) $f(x) = \sqrt{4 - x}$ b) $f(x) = 2 - \sqrt{4 - x}$ c) $f(x) = -2 - \sqrt{1 - x}$

3.3.3 FUNCIONES EXPONENCIALES Y SUS GRAFICAS

Las funciones (como las polinomiales y las raíces cuadradas) cuya regla de correspondencia es una expresión algebraica, se llama “funciones algebraicas”.

Las funciones que no son algebraicas se llaman “funciones trascendentes”. Entre ellas tenemos las funciones exponenciales, que estudiamos a continuación. Con tal propósito recordamos la potenciación.

POTENCIACION

1. CONCEPTO DE POTENCIA CON EXPONENTE ENTERO Y POSITIVO.

Al hacer cálculos matemáticos con frecuencia encontramos que algunos involucran productos de varios factores iguales, de tal manera que es conveniente tener una forma abreviada para expresarlos y establecer las reglas que permitan realizar operaciones con ellos en su forma abreviada. En esta sección nos ocupamos de ambos aspectos. Comenzamos con un caso en el cual el factor repetido es un número, luego es un monomio y finalmente un binomio.

DEFINICION: Si n es un entero positivo y “a” es cualquier número real, entonces la “n-ésima potencia de a”, representada por a^n, es el resultado de tomar el número “a” n veces como factor; esto es

a^n = a.a.a.a.a…..a, n veces

En el símbolo a^n, “a” se llama “la base” y “n”, el “exponente” de la potencia. a^n se lee “la n-ésima potencia de a” o “a elevada a la n”. Al proceso para encontrar las potencias de un número se le llama “potenciación”. Advierta que la primera potencia de cualquier número “a” es el mismo número; es decir; $a^1 = a$; por ello, cuando no se escribe exponente, debe entenderse que éste es uno.

2. Signos de las potencias.

a) Potencias de un número positivo

3^2 = (3)(3) = 9 (la segunda potencia de 3 es 9)

3^3 = (3)(3)(3) = 27 (la tercera potencia de 3 es 27)

3^4 = (3)(3)(3)(3) = 81 (la cuarta potencia de 3 es 81)

Para recordar: cualquier potencia de un número positivo es un número positivo.

b) Potencias de un número negativo

$(-3)^2$ = (-3)(-3) = 9

$(-3)^3$ = (-3)(-3)(-3) = -27

$(-3)^4$ = (-3)(-3)(-3)(-3) = 81

$(-3)^5$ = (-3)(-3)(-3)(-3)(-3) = -243

Recuerde: Toda potencia par de un número negativo es un número positivo, y toda potencia impar de un número negativo es un número negativo.

CUIDADO $(-3)^2 = 9$ y $-3^2 = -9$; por lo tanto, $(-3)^2 \neq -3^2$

ACTIVIDADES

1. Determine, por simple inspección, si la potencia dada es un número positivo o negativo.

a) $(17)^{36}$ b) $(17)^{37}$ c) $(-17)^{40}$ d) $(-17)^{45}$

2. Evalúe cada una de las expresiones siguientes

a) $(3)^5$ c) -3^5 e) $2^3(-2)^3$ g) $2^3+(-2)^3$

b) $(-3)^5$ d) $-(-3)^5$ f) $\dfrac{-32}{2^5}$ h) $2^3-(-2)^3$

3. Reglas para trabajar con potencias

En esta sección elaboramos una lista de las reglas que se aplican al trabajar con potencias. En éstas asumimos que:

- Los exponentes, m y n, son enteros positivos;
- Las bases, a y b, son números reales, y
- Los denominadores no pueden valer cero.

Reglas de la multiplicación.

R1. $a^m.a^n = a^{m+n}$ (cuando las bases son iguales, los exponentes se suman)

Ejemplos $\begin{cases} 2^5.2^4 = 2^{5+4} = 2^9 \\ (-3)^5.(-3)^4 = (-3)^{5+4} = (-3)^9 \end{cases}$

R2. $a^m.b^n = (ab)^n$ (cuando las bases no son iguales, las bases se multiplican)

Ejemplos $\begin{cases} 2^2.3^2 = (2.3)^2 = 6^2 = 36 \\ (-2)^2.(-3)^2 = [(-2).(-3)]^2 = 6^2 = 36 \end{cases}$

Regla de la potencia de una potencia.

R3. $(a^m)^n = a^{mn}$ (los exponentes se multiplican)

Ejemplos $\begin{cases} (2^2)^3 = 2^{2x3} = 2^6 = 64 \\ [(-3)^2]^3 = (-3)^{2x3} = (-3)^6 = 729 \end{cases}$

CUIDADO Evite el siguiente error usual $(2^2)^3 = 2^{2+3} = 2^5$

(los exponentes deben multiplicarse, no sumarse)

REGLA DEL COCIENTE (UN CASO PARTICULAR).

R4. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ (cuando las bases son iguales y m > n, los exponentes se restan)

Ejemplos $\begin{cases} \dfrac{3^5}{3^2} = 3^{5-2} = 3^3 = 27 \\ \dfrac{(-2)^4}{(-2)^3} = (-2)^{4-3} = (-2)^1 = -2 \end{cases}$

Advierta que en esta regla faltan por considerar dos casos: cuando m=n y m<n, pero los estudiaremos en la siguiente sección.

R5. $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$ (Cuando las bases no son iguales las bases se dividen)

Ejemplos $\begin{cases} \dfrac{12^3}{3^2} = \left(\dfrac{12}{3}\right)^3 = 4^3 = 64 \\ \dfrac{(-3)^2}{3^2} = \left(\dfrac{-3}{3}\right)^2 = (-1)^2 = 1 \end{cases}$

ACTIVIDADES

1. Clasifique cada aseveración como falsa o verdadera. Si es falsa, corrija el lado derecho de la igualdad para obtener una expresión verdadera.

a) $5^2 5^4 = 5^8$
d) $(-2)^3 = (-3)^2$
g) $\dfrac{10^6}{10^2} = 10^3$

b) $2^5 2^2 = 4^1$
e) $-4^3 = (-4)^2$
h) $\dfrac{4^5}{9^3} = \left(\dfrac{4}{9}\right)^2$

c) $(5^2)^6 = 5^8$
f) $3^4 + 3^4 = 3^8$
g) $12^3\left(\dfrac{1}{6}\right)^3 = 8$

2. Evalúe cada una de las expresiones siguientes.

a) $-\left(\dfrac{1}{3}\right)^5$
d) $\dfrac{8}{27} - \left(-\dfrac{2}{3}\right)^3$
g) $\dfrac{2^2.8^3}{(-4)^2}$

b) $2^3(-2)^3$
e) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 8^3$
h) $\dfrac{(-2)^3 + 3^{^2}}{3^3 - 2^2}$

c) $\dfrac{8}{27} + \left(-\dfrac{2}{3}\right)^3$
f) $\dfrac{(-12)^3}{3^3}$
g) $\dfrac{(-3)^5}{-(3)^5}$

3. Extensión del concepto de potencia para el caso de un exponente entero cualquiera

Nuestro estudio sobre las potencias ha estado limitado al uso de exponentes enteos positivos y nada más. Sabemos que 3^2 es el resultado de considerar el 3 dos veces como factor; sin embargo, carece de sentido decir que 3^0 es el resultado de tomar el 3 cero veces como factor, o que 3^{-2} es el resultado de considerar el 3 menos dos veces como factor.

Por tal motivo, ahora se extenderá la definición de potencia para permitir que el exponente (n) pueda ser cero o un entero negativo. La extensión se hará de tal manera que las reglas de las potencias, ya citadas puedan aplicarse a cualquier tipo de exponente entero. Para que R1 sea válida, es necesario definir $a^0 = 1$ y asumir que a≠ 0 (luego $a^m \neq 0$. En efecto,

$a^m a^0 = a^{m+0}$ (por R1)
$a^m a^0 = a^m$ (obvio)
$a^0 = \dfrac{a^m}{a^m}$ (despejando a^0)
$a^0 = 1$ (el cociente de cualquier cantidad, diferente de cero, entre ella misma es 1)

Para que R4 sea válida es necesario definir $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$, ya que $\dfrac{a^0}{a^n} = a^{0-n} = a^{-n}$. Pero $a^0 = 1$, luego debe ser $\dfrac{1}{a^n} = a^{-n}$

Los dos resultados anteriores nos permiten formular la definición siguiente.

DEFINICIÓN

a) Si a es un número real diferente de cero, entonces

$$a^0 = 1$$

b) Si a es un número real diferente de cero y n es un entero positivo (-n<0),

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Según (a) 0^0 queda sin definir.

Según (b) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$, ya que $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{b}{\left(\frac{a}{b}\right)^b} = \frac{b}{a}$

En palabras: Una fracción elevada al exponente -1 es el recíproco de la propia fracción.
Con la definición anterior es posible generalizar R4 para los casos en que m=n y m<n

R4. (generalizada) $\frac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n}, & si \quad m > n \\ a^0, & si \quad m = n \\ \frac{1}{a^{n-m}}, & si \quad m < n \end{cases}$

Ejemplos $\frac{a^m}{a^n} = \begin{cases} \frac{7^3}{7} = 7^{3-1} = 7^2 = 49 \\ \frac{7^3}{7^3} = 7^0 = 1 \\ \frac{7}{7^3} = \frac{1}{7^{3-1}} = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{49} \end{cases}$

ACTIVIDADES

1. Clasifique cada aseveración como falsa o verdadera. Si es falsa, corrija el lado derecho de la igualdad para obtener una expresión verdadera.

a) $\frac{20^{-4}}{10^{-4}} = 2^{-4}$ d) $\frac{1}{3^{-2}} = -3^2$ g) $(3^0)^2 = 3^2$

b) $5^{-6} + 5^{-6} = 10^{-6}$ e) $(2+a)^{-2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{a^2}$ h) $\frac{7^{-4}}{7^2} = 7^{-2}$

c) $5^{-6} + 5^{-6} = 5^{-12}$ f) $(m+n)^0 = m+1$ g) $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)^0 = 1$

2. Evalúe cada una de las expresiones.

a) -7^5 d) $\left(\frac{3}{2}\right) + \left(\frac{3}{2}\right)^0$ g) $3^{-4}3^2 3^3$

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} + \left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$ e) $\frac{13}{13^0}$ h) $\frac{5^3 5^{-9}}{5^{-4}5^{11}5^{-2}}$

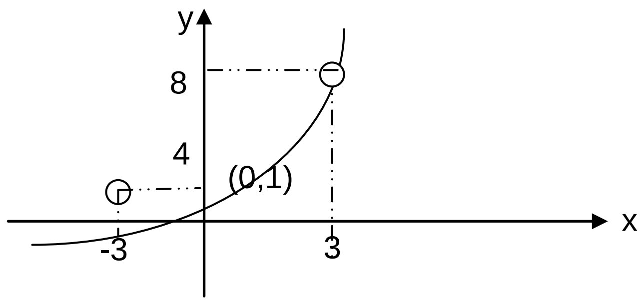
c) $\left[(-5)^2(-3)^2\right]^{-1}$ f) $\frac{5^{-3}}{6^{-3}}$ g) $\frac{2^3 4^{-2}}{4^5 8^{-2}}$

FUNCION EXPONENCIAL Y SUS GRAFICAS

Una función exponencial como $f(x) = b^x$ que tiene la variable independiente como exponente se conoce con el nombre de “función exponencial”. Su dominio natural son todos los números reales.

Estudiaremos este tipo de funciones con la suposición de que la base numérica b>0.
Graficar $y = 2^x$ en $[-4,3[$

x	y
-3	2^{-4} =0.125
-2	2^{-2} = 0.25
-1	2^{-1} = 0.5
0	2^{0} = 1
1	2^{1} = 2
2	2^{2} = 4
3	2^{3} = 8



NOTA 1. Todas las funciones exponenciales de la forma $y = f(x) = b^x$, donde b > 1 tiene la misma forma de la función $y = 2^x$.

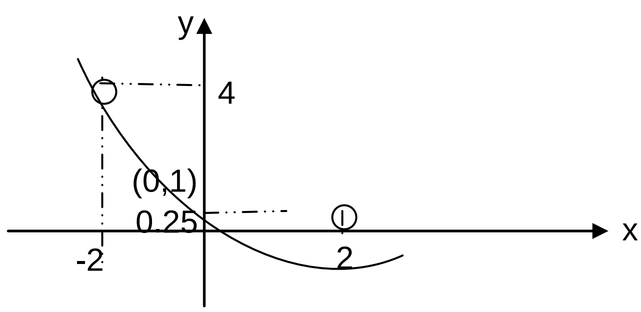
- Su intersección "y" es 1;
- Son crecientes
- Su rango es el conjunto de todos los reales positivos; es decir $b^x > 0$ para todo valor de **x** y
- Su gráfica es cóncava hacia arriba

NOTA 2. Para b = 1, $y = b^x = 1^x = 1^x$ para todo valor x. Como en este caso se trata de una función constante, f(x) = 1, no usamos la base b=1 en la clasificación de las funciones exponenciales.

Graficar $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ en $]-4,3]$

SOLUCION

x	y
-4	$\left(1/2\right)^{-4}$ = 16
-2	$\left(1/2\right)^{-2}$ = 4
-1	$(-1)^{-2}$ = 1
0	$\left(1/2\right)^{0}$ = 1
1	$\left(1/2\right)^{1}$ = 0.5
2	$\left(1/2\right)^{2}$ = 0.25



NOTA 3: Todas las funciones exponenciales de la forma $f(x) = b^x$ donde 0<b<1, tiene la misma forma de la función $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$:

- Su intersección "y" es 1;
- Son decrecientes
- Su rango es el conjunto de todos los reales positivos ($b^x > 0$) y
- Su gráfica es cóncava hacia arriba

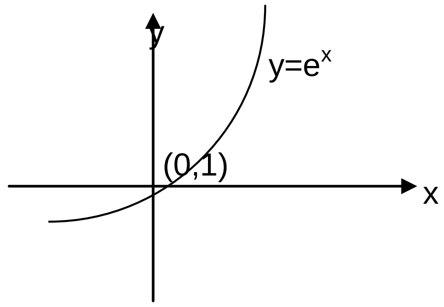
Graficar

a) $y = 2^{x-3}$ b) $y = 2^{x+3}$ c) $y = -2^{x-3}$

SOLUCION

- La gráfica de $y = 2^{x-3}$ se obtiene desplazando la gráfica de $y = 2^x$, tres unidades hacia la derecha
- a gráfica de $y = 2^{x+3}$, se obtiene desplazando la gráfica de $y = 2^x$, tres unidades hacia la izquierda.
- La gráfica de $y = -2^{x-3}$, es el reflejo en el eje x de la gráfica de $y = 2^{x-3.}$

Particularmente importante por sus aplicaciones, es la función exponencial $y = b^x$ cuando b = e (Euler). Es decir $f(x) = e^x$. Aquí se satisface la condición $2<e<3$; $e≈2.71828$



PROPIEDADES DE $f(x) = e^x$

- Dominio: todos los números reales
- Rango: R^+; es decir $e^x > 0$
- $0 < e^x < 1$, para $x<0$
- $e^0 = 1$
- $e^x > 1$ para $x > 0$
- La gráfica es cóncava hacia arriba

CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO EXPONENCIAL

En muchos fenómenos naturales, hay cantidades que crecen o decrecen a una razón proporcional a su tamaño. Por ejemplo.

- El número de bacterias de un cultivo
- La masa de una sustancia radioactiva

Las únicas funciones que describen tales fenómenos son las funciones exponenciales de base e.

$y = f(x) = ce^{kt}$, donde c y k son constantes por determinar.

Si $k>0$ se habla de crecimiento exponencial

Si $k<0$ se habla de crecimiento exponencial

EJEMPLOS ILUSTRATIVOS

1. Un cultivo de bacterias empieza con 10 bacterias y al cabo de 2 horas hay 30. Suponiendo que el cultivo crece a una razón proporcional a su tamaño, establezca la población al cabo de 4 horas.
2. Una sustancia radioactiva decrece a una razón proporcional a su tamaño. Si la cantidad inicial es de 10 gramos y después de 5 años quedan 8 gramos, calcule la cantidad restante a los 10 años.

DEFINICION DE FUNCION Y TERMINOS RELACIONADOS, POR MAURO H. HENRIQUEZ

Enviado por:
Ing.+Lic. Yunior Andrés Castillo S.
“NO A LA CULTURA DEL SECRETO, SI A LA LIBERTAD DE INFORMACION”®
www.monografias.com/usuario/perfiles/ing_lic_yunior_andra_s_castillo_s/monografias
Página Web: yuniorandrescastillo.galeon.com
Correo: yuniorcastillo@yahoo.com
yuniorandrescastillosilverio@facebook.com
Twitter: @yuniorcastillos
Celular: 1-829-725-8571
Santiago de los Caballeros,

República Dominicana,
2015.
“DIOS, JUAN PABLO DUARTE Y JUAN BOSCH – POR SIEMPRE”®