ECUACIONES ALGEBRAICAS, POR MARIA A. GARCÍA ZURITA

Ecuaciones algebraicas: Una ecuación algebraica es una igualdad en la que hay una o varias cantidades desconocidas llamadas incógnitas y que solo se verifica la igualdad de la ecuación para determinados valores de la incógnita.

Las **Incógnitas** de una ecuación son representados por las ultimas letras del alfabeto como ser: x, y, z, w, etc.

Una ecuación algebraica esta compuesto por 2 miembros y una igualdad

Transposición de términos: Consiste en cambiar los términos de una ecuación de un miembro a otro, para realizar estos cambios se deben cumplir las siguientes reglas:

1. Toda expresión que este sumando en un miembro; pasa a restar al otro miembro.
2. Toda expresión que este restando en un miembro; pasa a sumar al otro miembro.
3. Toda expresión que este multiplicando en un miembro, pasa al otro miembro a dividir.
4. toda expresión que este dividiendo en un miembro, pasa al otro miembro a multiplicar.

Raíces o solución de una ecuación: LA maíces de una ecuación son valores que reemplazados en las incógnitas o variables satisfacen la igualdad de la ecuación. Una ecuación tiene uno, dos o mas soluciones esto dependerá del grado de la ecuación.

Grado de una ecuación: Las ecuación pueden ser lineales o de primer grado, cuadráticas o de segundo grado y polinomicas de grado mayores a 3. El grado de la ecuación es el mayor exponente que tienen la variable o exponente.

Ecuaciones lineales: Son aquellas ecuaciones que tienen grado uno; para resolver este tipo de ecuación solo se debe despejar la variable o incógnita.

Ejemplo:

a) Resolver la siguiente ecuación lineal: $3x-3=9$

$$3x-3=9$$

$$3x=9+3$$

$$x=\frac{12}{3} \qquad \Rightarrow \qquad x=4$$

Ecuaciones cuadráticas: Son aquellas ecuaciones que tienen grado dos, las ecuaciones cuadráticas tienen la siguiente forma: $\mathbf{a\,x^2 + b\,x + c = 0 \;; \quad a \neq 0}$

Las raíces o soluciones de las ecuaciones cuadráticas se obtienen aplicando la fórmula:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Una ecuación cuadrática tiene solución real solo si: $\mathbf{(b^2 - 4\,a\,c) \geq 0}$ esta expresión es denominado **discriminante** de la ecuación.

NATURALEZA DE LAS RAÍCES: Sea la ecuación: $a\,x^2 + b\,x + c = 0$, con a , b y c números reales y $a \neq 0$. x_1 y x_2 sus raíces, entonces:

$\mathbf{b^2 - 4\,a\,c > 0} \iff x_1$ y x_2 son reales y distintas

$\mathbf{b^2 - 4\,a\,c = 0} \iff x_1 = x_2$ y además son reales

$\mathbf{b^2 - 4\,a\,c < 0} \iff x_1$ y x_2 no son reales, son complejas conjugadas

CUESTIONARIO WORK PAPERS 2

Operaciones Algebraicas

Resuelve las siguientes operaciones algebraicas:

a) (3a + 2b – c) + (2a + 3b + c)
b) 3X + (-2X) + 5
c) $31X^2 Y - 46 X^2 Y$
d) $x^2 - 4x - 5x + x^2$
e) (2X – 3Y) – (X-2Y)
f) 2a + {3b – [c - 4 - (4a + 5b + 5c) – 3a – 4] + 6b} – 3
g) 5X + 5 – {5X – 4 -[-2X +5- (2 – X)] – 2X }
h) 3X - 2(X - 5)
i) 4X- (-2X+3X-2)
j) $-3X^2 + 4X\{2X - 7 -[-(3X +2)(2 - X)] - 2X^2 \}$
k) 4XY - 2{3X – 4[-6XY +5X - 2Y(3 – 5X)] – 7XY
l) (3X +1) – [-4X + 5 - (2 – 8X)] – 5X
m) $\frac{1}{2}a - \frac{2}{3}b\left(\frac{2}{5}a^2\right)$
n) (3X - 1)(-2X -4)
o) $(x^4 + 2x - 3)(-3ax)$
p) (2Y +5)(–3X – 4)(5X – Y)
q) $(a^2 - 2ab - b^2)(-ab)$
r) $(a^x - a^{x+1} + a^{x+2})(a+1)$
s) $X^5 + Y^5$ entre $X + Y$
t) $X^4 - 2X^2 + 4X - 6$ entre $X^2 + 5$
u) $-3X^2 + 4X - 2$ entre $6X - 3$

Resuelve los siguientes ejercicios de Fracciones Algebraicas

a. $\frac{x}{xy - y^2} - \frac{1}{y}$ Rpta: $\frac{1}{x-y}$

b. $\frac{3x}{y} + \frac{4x}{y-1} - \frac{2}{y^2-1}$ Rpta: $\frac{7xy^2 + 4xy - 3x - 2}{y(y^2-1)}$

c. $\frac{y+2x}{3x} - \frac{4xy+3}{2xy}$

d. $\frac{2}{3mn^2} - \frac{1}{2m^2n}$

e. $\frac{x-1}{3} - \frac{x-2}{4} - \frac{x+3}{6}$

f. $\frac{2}{x+x^2} - \frac{1}{x-x^2} + \frac{1-3x}{x-x^3}$

g. $\dfrac{1}{a^2-ab}+\dfrac{1}{ab}-\dfrac{a^2+b^2}{a^3b-ab^3}$

h. $\dfrac{1}{x-4}-\dfrac{1}{x-3}$

i. $\dfrac{2}{a+1}+\dfrac{a}{(a+1)^2}+\dfrac{a+1}{(a+1)^3}$

j. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{1+x}{x(1-x)}$

k. $\dfrac{3a^2b}{5x^2}\div\dfrac{a^2b^3}{x}$

l. $\dfrac{a^3-25a}{2a^3+8a^2-10a}$

m. $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+2xy+y^2}$

Resuelve los siguientes ejercicios de productos notables.

a. $(7-3X)^2$
b. $(4a^2b+5ab^2)^2$
c. $(X^2-XY)^2$
d. $(2X^2+5X)^2$
e. $(X^2-3)^2$
f. $(9-X^2)$
g. $(a^3b+3)^2$
h. (X^2-64)
i. (a^2-25)
j. $(2-X)^3$
k. $(x^2y-xy^2)^3$
l. $\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{b^2}{c^9}\right)$
m. $\left(\dfrac{x}{y}-\dfrac{1}{5}\right)\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{1}{5}\right)$

Realizar los siguientes cocientes notables.

n. $\dfrac{a^6-b^6}{a+b}$

o. $\dfrac{25-36X^4}{5+6X^2}$

p. $\dfrac{a^4-1}{1+a^2}$

q. $\dfrac{27X^6+1}{3X^2+1}$

Resuelve los siguientes ejercicios de Factorización:

a) $5m^2 + 15m^3$ Rpta: $5m^2(1+3m)$

b) $2x^2 - 3xy - 4x + 6y$

c) $3x^2 - 6x$

d) $a^2 - 2a + ab - 2b$

e) $(a+3)(a+1) - 4(a+1)$

f) $\frac{1}{4} - \frac{b}{3} + \frac{b^2}{9}$

g) $6m - 9n + 21nx - 14mx$

h) $x - x^2 + x^3 - x^4$ Rpta: $(1-x)(x+x^3)$

i) $a^{20} - a^{16} + a^{12} - a^8 + a^4 - 1$ Rpta: $(a^4 - 1)(a^{16} + a^8 + 1)$

j) $ax + x - a - 1$ Rpta: $(x-1)(a+1)$

k) $3x^3 - 9ax^2 - x + 3a$ Rpta: $(3x^2 - 1)(x - 3a)$

l) $4X^{2n} - 9$

m) $9y^2 - 1$

n) $\frac{a^2}{4} - \frac{b^4}{9}$

o) $b^4y^2 - \frac{1}{25}$

p) $36x^2y^4 - 121$

q) $X^2 + 7X + 10$

r) $x^4 - 5x^2 - 50$

s) $X^2 - 5X - 36$

t) $2X^2 + 11X + 5$

u) $18b^2 - 13b - 5$

v) $6X^2 - 7X - 3$

Resuelve los siguientes ejercicios de ecuaciones algebraicas:

a) $x - 3 = 3x + 5$

b) $6x - (2x+1) = -\{-5x + [-(-2x-1)]\}$

c) $(x+1)^3 - (x-1)^3 = 6x(x-3)$

d) $(x-2)^2 - 3x = 2(x-3) + x^2$

e) $\frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3} = 2$

f) 3(a-4x)+7(2x-a)-5(3x+2a)+a = 0

g) $a(x+2)=2$

h) $\dfrac{(x-2)^2}{(x+4)^2}=1$

i) $x^2-8x+15=0$

j) $4x-5x^2=-12$

k) $x^2=2(x+3)$

l) $3x^2-5x+2=0$

m) $x^2+11x=-24$

n) $x^2=5(x+3)$

o) $4x^2+19x=5$

p) $2x^2-10x=0$

Lógica matemática: La lógica matemática es la disciplina que trata de métodos de razonamiento. En un nivel elemental, la lógica proporciona reglas y técnicas para determinar si es o no valido un argumento dado. El razonamiento lógico se emplea en matemáticas para demostrar teoremas; en ciencias de la computación para verificar si son o no correctos los programas; en las ciencias física y naturales, etc.

Proposiciones y operaciones lógicas: Una proposición o enunciado es una oración que puede ser falso o verdadero pero no ambas a la vez. La proposición es un elemento fundamental de la lógica matemática.

A continuación se tienen algunos ejemplos de proposiciones válidas y no válidas, y se explica el porqué algunos enunciados no son proposiciones. Las proposiciones se indican por medio de una letra minúscula, dos puntos y la proposición propiamente dicha.

p: La tierra es plana.

q: -17 + 38 = 21

r: x > y-9

s: Oriente Petrolero será campeón en la presente temporada de Fútbol.

t: Hola ¿como estas?

w: Lava el coche por favor.

Los incisos **p** y **q** sabemos que pueden tomar un valor de falso o verdadero; por lo tanto son proposiciones validas. El inciso **r** también es una proposición valida, aunque el valor de falso o verdadero depende del valor asignado a las variables **x** y **y** en determinado momento. La proposición del inciso **s** también esta perfectamente expresada aunque para decir si es falsa o verdadera se tendría que esperar a que terminara la temporada de fútbol. Sin embargo los enunciados **t** y **w** no son válidos, ya que no pueden tomar un valor de falso o verdadero, uno de ellos es un saludo y el otro es una orden.

Conectivos lógicos y proposiciones compuestas: Existen conectores u operadores lógicas que permiten formar proposiciones compuestas (formadas por varias proposiciones). Los operadores o conectores básicos son: Negación, Conjunción, Disyunción, Implicación o condicional, Doble implicación o Bicondicional y diferencia Simétrica.

Negación: Esta operación se la realiza con el operador Not (**~**); la función de este operador es negar la proposición; la negación significa que sí alguna proposición es verdadera y se le aplica el operador Not se obtendrá su complemento o negación (falso).

Tabla de valores de verdad del operador NOT (~)

p	**~p**
V	F
F	V

La negación se trata de una operación unitaria, pues a partir de una proposición se obtiene otra que es su negación.

Ejemplo:

p : Todo hombre es honesto
~p : No todo hombre es honesto
~p : Hay hombres que no son honestos
~p : Existen hombres deshonestos

Conjunción: Esta operación se la realiza con el operador AND ($\wedge$); la función de este operador es de conectar dos proposiciones que se deben cumplir para que se pueda obtener un resultado verdadero. Su símbolo es ($\wedge$) y se lee (p y q); a esta operación también se la conoce como la multiplicación lógica:

Tabla de valores de verdad del operador AND ($\wedge$)

p	**q**	**$p \wedge q$**
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Ejemplo:

p : El coche enciende cuando tiene gasolina en el tanque.
q : El coche enciende cuando hay corriente la batería.
$p \wedge q$: "El coche enciende cuando tiene gasolina en el tanque y tiene corriente la batería"

Disyunción: Esta operación se la realiza con el operador OR ($\vee$); la función de este operador es de conectar dos proposiciones que solo una de ellas se debe cumplir para que se pueda obtener un resultado verdadero. Su símbolo es ($\vee$) y se lee (p ó q); a esta operación también se la conoce como la suma lógica:

Tabla de valores de verdad del operador OR ($\vee$)

p	**q**	**$p \vee q$**
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Ejemplo:

p : Una persona puede entrar al cine si compra su boleto.

q : Una persona entra al cine si obtiene un pase.

$p \vee q$: Una persona puede entrar al cine si compra su boleto ó obtiene un pase

Implicación o condicional: Una proposición condicional, es aquella que está formada por dos proposiciones simples (o compuesta) p y q. La cual se indica de la siguiente manera:

$p \rightarrow q$ Se lee "Si p entonces q"

Las proposiciones p y q se llaman antecedente y consecuente de la implicación o condicional; la tabla de valores de verdad de la condicional dice "si el antecedente es **V** y el consecuente es **F** entonces la implicación será falsa; caso contrario será verdadera.

Tabla de valores de verdad del operador condicional ($\rightarrow$)

p	**q**	**$p \rightarrow q$**
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Ejemplo:

El candidato del NFR dice "Si salgo electo presidente de la República recibirán un 50% de aumento en su sueldo el próximo año". Una declaración como esta se conoce como condicional.

p : El NFR salió electo Presidente de la República.

q : El pueblo recibirá un 50% de aumento en su sueldo el próximo año.

$p \rightarrow q$: Si el NFR salio electo presidente de la republica entonces el pueblo recibirá un 50% de aumento en su sueldo el próximo año.

Doble implicación o bicondicional: Sean dos proposiciones p y q; la proposición bicondicional tiene siguiente manera:

$p \leftrightarrow q$ Se lee "p si solo si q"

Tabla de valores de verdad del operador bicondicional ($\leftrightarrow$)

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Esto significa que la operación bicondicional es verdadera (si p y solo si q es también verdadera) o bien (si p es falsa si y solo si q también es falsa).

Ejemplo:

P : Erlan es buen estudiante.

Q : Erlan tiene promedio de diez.

$p \leftrightarrow q$: Erlan es buen estudiante si solo si tiene promedio diez

La doble implicación puede definirse como la conjunción de una implicación y su reciproca de la siguiente manera: $p \leftrightarrow q = (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

p	q	$p \leftrightarrow q$	$(p \rightarrow q)$	$(q \rightarrow p)$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V

Diferencia simétrica: Sean las proposiciones p y q; la diferencia simétrica $p \veebar q$ (p o q en sentido excluyente) tiene la siguiente tabla de valores de verdad.

Tabla de valores de verdad del operador diferencia simétrica ($\veebar$)

p	q	$p \veebar q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

La tabla de valores de verdad de p $\underline{\vee}$ q esta caracterizado por la verdad de una y solo una de las proposiciones en donde: p $\underline{\vee}$ q equivale a decir ~(p $\leftrightarrow$ q)

Clasificación de las formulas proposicionales: Las formulas proposicionales se clasifican en:

Tautología o verdad lógica

Contradicción o falsedad lógica

Contingencia o indeterminada

Tautología: Es aquella proposición (compuesta) que es cierta para todos los valores de verdad de sus variables. Un ejemplo típico es la contrapositiva cuya tabla de verdad se indica a continuación.

p	**q**	**~ p**	**~ q**	**p $\rightarrow$ q**	**~q $\rightarrow$ ~p**	**(p$\rightarrow$q)$\leftrightarrow$(~q$\rightarrow$~p)**
V	V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

Note que en las tautologías para todos los valores de verdad el resultado de la proposición es siempre **V**. Las tautologías son muy importantes en lógica matemática ya que se consideran leyes en las cuales nos podemos apoyar para realizar demostraciones.

Contradicción es aquella proposición que siempre es falsa para todos los valores de verdad, una de las mas usadas y mas sencilla es (p$\wedge$~p). Como lo muestra su correspondiente tabla de verdad.

p	**~p**	**p $\wedge$ ~p**
V	F	F
F	V	F

Ejemplo: p: La puerta es verde.

La proposición (p $\wedge$ ~p) equivale a decir que "La puerta es verde y la puerta no es verde". Por lo tanto se esta contradiciendo o se dice que es una falsedad. Una proposición compuesta cuyos resultados en sus deferentes líneas de la tabla de verdad, dan como resultado **F** se le llama contradicción.

Contingencia: Una proposición compuesta cuyos resultados en sus deferentes líneas de la tabla de verdad, dan como resultado **V** o **F** se le llama contingencia.

Equivalencia Lógica: Dos proposiciones f_1 (p, q, r, s …) y f_2 (p, q, r, s …) son lógicamente equivalentes si y solo si para valores de verdad cualesquiera de p, q, r, s.., reproducen idénticos valores de verdad para las formulas f_1 (p, q, r, s …) y f_2 (p, q, r, s …).

Leyes lógicas: En el cálculo proposicional se utilizan las siguientes leyes o tautológicas cuyas demostraciones se reduce a la confección de una correspondiente tabla de verdad.

1.- Doble negación.

a) $\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$

2.- Leyes conmutativas.

a) $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$

b) $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$

c) $(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \leftrightarrow p)$

d) $(p \veebar q) \Leftrightarrow (q \veebar p)$

3.- Leyes asociativas.

a) $[(p \wedge q) \wedge r] \Leftrightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$

b) $[(p \vee q) \vee r] \Leftrightarrow [p \vee (q \vee r)]$

4.- Leyes distributivas.

a) $[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$

b) $[p \vee (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$

c) $[p \rightarrow (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)]$

d) $[p \rightarrow (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)]$

5.- Leyes de idempotencia.

a) $(p \wedge p) \Leftrightarrow p$

b) $(p \vee p) \Leftrightarrow p$

6.- Leyes de Morgan

a) $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$

b) $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$

c) $(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim(\sim p \vee \sim q)$

b) $(p \vee q) \Leftrightarrow \sim(\sim p \wedge \sim q)$

7.- Contrapositiva.

a) $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$

8.- Implicación.

a) $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$

b) $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow \sim (p \wedge \sim q)$

c) $(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \rightarrow q)$

d) $(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim (p \rightarrow \sim q)$

9.- Equivalencia

a) $(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$

b) $(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (\sim q \wedge \sim p)]$

10.- Leyes de Identidad

a) $(p \wedge V) \Leftrightarrow p$

b) $(p \wedge F) \Leftrightarrow F$

c) $(p \vee V) \Leftrightarrow V$

d) $(p \vee F) \Leftrightarrow p$

11.- Leyes de Complementación

a) $(p \vee \sim p) \Leftrightarrow V$

b) $(p \wedge \sim p) \Leftrightarrow F$

c) $\sim V \Leftrightarrow F$

d) $\sim F \Leftrightarrow V$

12.- Leyes de Absorción

a) $[p \wedge (p \vee q)] \Leftrightarrow p$

b) $[p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$

CUESTIONARIO WORK PAPERS 6

1. **Utilizando tablas de valores de verdad demostrar.**
   a) $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$
   b) $\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$
   c) $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
   d) $\sim p \vee q \Leftrightarrow p \rightarrow q$
   e) $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

2. **Utilizando las definiciones y las leyes de la lógica matemática demostrar.**
   a) $p \wedge \sim q \Leftrightarrow \sim (p \rightarrow q)$
   b) $\sim p \Leftrightarrow p \rightarrow (q \wedge \sim q)$
   c) $q \rightarrow (p \rightarrow r) \Leftrightarrow p \rightarrow (q \rightarrow r)$
   d) $p \wedge q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \leftrightarrow p$
   e) $p \vee q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \leftrightarrow q$
   f) $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow \sim p \leftrightarrow \sim q$
   g) $p \rightarrow (q \vee r) \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$
   h) $(p \wedge q) \rightarrow r \Leftrightarrow (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$

Conjunto: Es toda colección o agrupación de objetos relacionado con algún tema en común. La idea de conjunto es una idea intuitiva que se representa generalmente por una letra mayúscula.

A = { silla, gato, mesa, perro }

Elemento: Es cada uno de los objetos por los cuales esta conformado el conjunto. Por ejemplo el gato es un elemento del conjunto A.

Observación 1: En un conjunto dado ninguno de sus elementos debe aparecer repetido.

B = { a , a , b } ; debe escribirse : B = { a , b }.

Observación 2: Un conjunto formado por un solo elemento es conceptualmente distinto a dicho elemento.

C = { v } ; es distinto a : v.

Observación 3: Dos conjuntos son disjuntos si y solo si no tienen elementos comunes, es decir, su intersección es vacía.

$A \cap A' = \varnothing \quad \therefore \quad A$ y A' son disjuntos.

Relación de pertenencia ($\in$): Si un elemento está en un conjunto dado, se dice que pertenece a él y esto se indica mediante el símbolo $\in$.

Ejemplo:

Sea el conjunto C = { 1, 5 ,9 ,7}

El elemento 5 $\in$ C ; el elemento 8 $\notin$ C

Determinación de un conjunto: Un conjunto se puede determinar por extensión o por comprensión.

Conjunto por extensión: Se debe indicar cada uno de los elementos que lo forman.

D = { Gabriela Mistral , Pablo Neruda }.

Conjunto por comprensión: Se debe indicar algunas de sus propiedades que tienen todos los elementos de dicho conjunto.

D = { Poetas Bolivianos que han obtenido el Premio Nobel de Literatura }

Conjunto universo (U): Se nombra así al conjunto formado por todos los elementos de un tema dado.

U = { a , e , i , o , u } (Tema : vocales minúsculas del abecedario) .

Conjunto vacío ($\varnothing$): Es el conjunto que no tiene elementos. También puede decirse que ningún elemento del universo cumple la condición dada en él.

B = { Especies de insectos de 10 patas } = { } = $\varnothing$

Relación de igualdad (=): Dos conjuntos son iguales si y sólo si están formados por los mismos elementos. $A = B \Leftrightarrow \forall x\,(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$

A = { 1 , 2 , 3 } ; B = { 2 , 1 , 3 }

Relación de inclusión ($\subset$): Sean A y B dos conjuntos, entonces A está incluido en B, o bien A es un subconjunto de B, si y sólo si cada elemento de A lo es también de B .

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x\,(x \in A \Rightarrow x \in B)$$

Si A = { p , q } y B = { m , n , p , q , r } , entonces $A \subset B$.

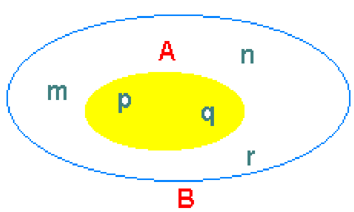


Diagrama de Venn - Euler

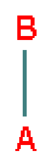


Diagrama lineal

Teorema de relación de inclusión:

Teorema 1: El conjunto vacío está incluido en cada conjunto.

$\varnothing \subset A$.

Teorema 2: Cada conjunto está incluido en su universo respectivo.

$A \subset U$.

Teorema 3: Cada conjunto está incluido en sí mismo.

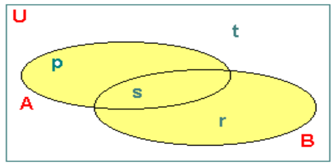
$A \subset A$.

Operaciones de conjuntos: Las operaciones que se pueden realizar con dos o mas conjuntos son: unión, intersección, diferencia, diferencia simétrica y complemento.

Unión de conjuntos ($\cup$): la operación unión de dos conjuntos ($A \cup B$) está formado por todos los elementos que pertenecen a A, o a B, o a ambos.

$$\mathbf{A \cup B = \{ x \,/\, x \in A \vee x \in B \}}$$

Sean los conjuntos $U = \{p, r, s, t\}$, $A = \{p, s\}$ y $B = \{r, s\}$.

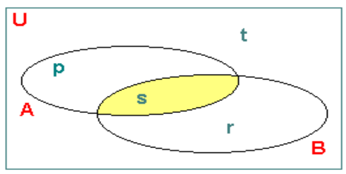


$$\mathbf{A \cup B = \{ p, s, r\}}$$

Intersección de conjuntos ($\cap$): La operación intersección de dos conjuntos es el conjunto ($A \cap B$) que está formado solamente por los elementos que pertenecen a A y a B simultáneamente.

$$\mathbf{A \cap B = \{ x \,/\, x \in A \wedge x \in B \}}$$

Sean los conjuntos $U = \{p, r, s, t\}$, $A = \{p, s\}$ y $B = \{r, s\}$.

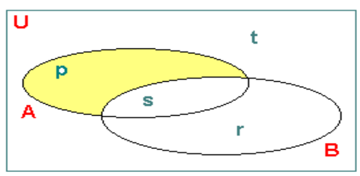


$$\mathbf{A \cap B = \{ s \}}$$

Diferencia de conjuntos (–): La operación diferencia de dos conjuntos es el conjunto (A–B) que está formado por todos los elementos que pertenecen a A, pero que no pertenecen a B.

$$\mathbf{A - B = \{ x \,/\, x \in A \wedge x \notin B \}}$$

Sean los conjuntos $U = \{p, r, s, t\}$, $A = \{p, s\}$ y $B = \{r, s\}$.

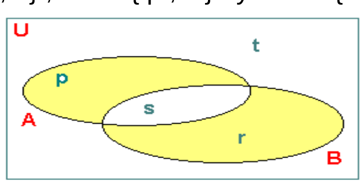


$$\mathbf{A - B = \{ p \}}$$

Diferencia simétrica de conjuntos (Δ): La operación diferencia simétrica de dos conjuntos es el conjunto ($A \,\Delta\, B$) que está formado solamente por todos los elementos que pertenecen a A o a B, pero no a ambos.

$$\mathbf{A \,\Delta\, B = \{ x \,/\, x \in A \oplus x \in B \}}$$

Sean los conjuntos $U = \{p, r, s, t\}$, $A = \{p, s\}$ y $B = \{r, s\}$.

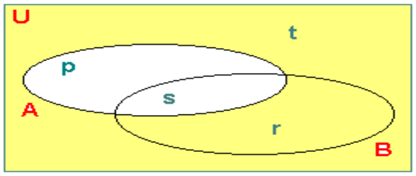


$$\mathbf{A \,\Delta\, B = \{ p, r \}}$$

Complemento de un conjunto (^{c}): Dado un conjunto universo **U** y un conjunto **A**, el complemento del conjunto **A** es el conjunto (A^c) está formado solamente por todos los elementos del U que no pertenecen a A.

$$A^c = \{ x / x \in U \wedge x \notin A \}$$

Sean los conjuntos U = { p , r , s , t } , A = { p , s } y B = { r , s } .



A^c = { r , t }

CUESTIONARIO WORK PAPERS 4

CONJUNTOS

1.- Dado los siguientes conjuntos, notarlo por comprensión y extensión

a) A = {a, e, i, o, u}
b) B = {Norte, Sur, Este, Oeste}
c) $A = \{x \in Z / 3x^2 = 48\}$
d) $A = \{x \in Z / x^2 - 3x - 28\}$
e) $A = \{x \in Z / x^2 = -1\}$
f) $A = \{x \in N / x = -1\}$
g) $A = \{x \in N / 6x - x^2 - 9 = 0\}$ y $B = \{x \in N / x = 3\}$

A y B tienen los mismos elementos?

2.- Sean los conjuntos: , A = {1, 2, 3, 4, 5, 7} B = {3, 4, 7, 8} C = {1, 4, 6, 7, 8}

Calcular y graficar utilizando el diagrama de Venn las siguientes operaciones:

a) A U B
b) A ∩ B
c) B Δ A
d) B - A
e) (A U B) U C
f) (A ∩ B) U C
g) (B – A) ∩ C

3.- Dado los conjuntos: A = { a,b, {a, b,}, c, e} ; B={b, e, {b, a}, {c, a}, f} C={b, d, f, a}

Hallar los conjuntos:

A – B =	;	(A – B) U C =
A ∩ B =	;	(A ∩ B) ∩ C =
B Δ A =	;	(C Δ A) ∩ A =

PAR ORDENADO.- Un par ordenado es una pareja de elementos que guardan un orden determinado:

Si: $(a,b)=(x,y) \Rightarrow a=x;\ \ b=y$

en donde; $x \rightarrow \text{Primer componente};\ \ y \rightarrow \text{Segundo componente}$

PRODUCTO CARTESIANO.- Dados dos conjuntos A y B, se llama producto cartesiano $A \times B$ al conjunto formado por todos los pares ordenado cuyo primer componente pertenece al conjunto A y el segundo componente pertenece al conjunto B; es decir:

$$A \times B = \{(x,y) \ / \ x \in A \ \wedge \ y \in B\}$$

Nota: Si A tiene "m" elementos y B tiene "n" elementos, el producto cartesiano $A \times B$ tendrá $m \times n$ elementos

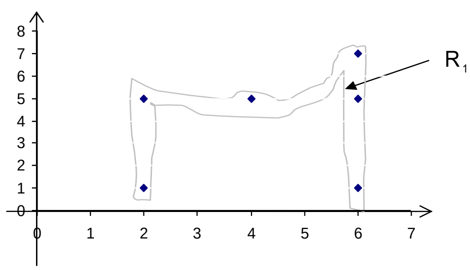
PLANO COORDENADO.- Es el producto cartesiano RxR donde R es el conjunto de todos los números reales, consecuentemente el plano coordenado es el conjunto de todos los pares ordenados de los números reales. Gráficamente un plano de coordenado esta formado por dos rectas perpendiculares entre si

RELACIONES.- Se llama relaciones a cualquier subconjunto de un producto cartesiano dado; es decir una relación es cualquier conjunto de par ordenado.

Ejemplo:

Graficar las siguientes relaciones obtenidas del anterior ejemplo $A \times B$

$$R_1 = \{(2,1),(2,5),(4,5),(6,1),(6,5),(6,7)\}$$



FUNCIONES.- Es el conjunto de pares ordenados (x,y) entre los cuales no existe dos pares ordenados con el mismo primer componente, gráficamente una función es aquella grafica en don de una recta vertical corta en un solo punto a la función.

Ejemplo:

Determinar si las siguientes relaciones son funciones:

$R_1 = \{(1,1),(2,5),(4,5),(6,1),(8,5),(3,7)\}$ "Si es función"

$R_2 = \{(2,2),(3,5),(4,5),(6,1),(3,5)\}$ "No es función porque el primer componente 3 se repite"

$R_3 = \{(-2,1),(2,5),(5,5),(3,1),(-6,5),(6,7)\}$ "Si es función"

Dominio de una función.- Es el conjunto de los primeros componentes de los pares ordenados de una función, gráficamente el dominio de una función es la sombra que proyecta la grafica en el eje "x", el dominio se simboliza con D_f.

Dominio de Imagen.- Es el conjunto de los segundos componentes de los pares ordenados de una función, gráficamente el dominio de imagen de una función es la sombra que proyecta la grafica en el eje "y", el dominio de imagen se simboliza con DI_f.

Ejemplo: Dado la siguiente función calcular el Dominio, Dominio de imagen la siguiente función:

$$F = \{(2,1),(3,5),(4,7),(6,6),(-3,4)\}$$

$D_f = \{2,3,4,6,-3\}$

$DI_f = \{1,5,7,6,4\}$

CALCULO DE DOMINIO DE FUNCION: Si una función depende de una ecuación matemática, el dominio de esta función estará restringido por las siguientes operaciones:

- ✓ División $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$; $\rightarrow h(x)\neq 0$
- ✓ Radical $f(x)=\sqrt{g(x)}$; $\rightarrow g(x)\geq 0$

Para realizar el calculo de domino de una función que tiene restricción deberá resolver la inecuación y el conjunto de solución será el dominio de la función.

VARIABLES DEPENDIENTES: Son aquellas variables que como su nombre lo indica, dependen del valor que toma las otras variables Por ejemplo: ***f(x)= x***, *y* o *f(x)* es la variable dependiente ya que esta sujeta a los valores que se le subministre a *x*.

VARIABLE INDEPENDIENTE: Es aquella variable que no depende de ninguna otra variable, en el ejemplo anterior la x es la variable independiente ya que la y es la que depende de los valores de x.

VARIABLE CONSTANTE: Es aquella que no esta en función de ninguna variable y siempre tiene el mismo valor ejemplo: Y = 2, la constante gravitacional, entre otras.

ÁLGEBRA DE FUNCIONES: El desarrollo de las funciones nos lleva a generar una serie de reglas que permiten tomar decisiones acerca de los dominios y dominios de imagen, entre otros, esta combinación de operaciones algebraicas de las funciones:

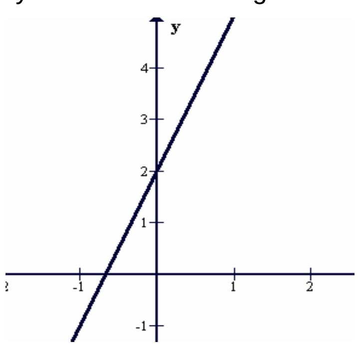
Sean *f* y *g* dos funciones, definimos las siguientes operaciones:

- ✓ Suma: (f + g)(x) = f(x) + g(x)
- ✓ Diferencia: (f - g)(x) = f(x) - g(x)
- ✓ Producto: (fg)(x) = f(x)g(x)
- ✓ Cociente: (f/g)(x) = f(x)/g(x)

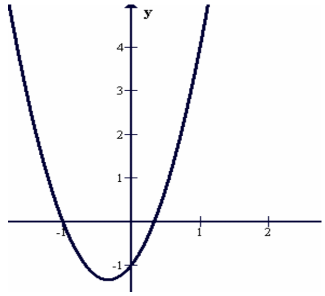
Los resultados de las operaciones entre funciones *f,g* nos conduce a analizar el dominio de las funciones, así para *f + g, f - g* y *fg el dominio es la intersección del dominio de f con el dominio de g.* En el caso del *cociente entre funciones e*l dominio de *f / g* es la intersección del dominio de f con el dominio de *g,* para los que *g(x) = 0.*

CLASIFICACIÓN DE FUNCIONES: Las funciones se clasifican en funciones: lineales, cuadráticas, cúbicas, polinomiales, racionales, irracionales, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas, valor absoluto, definidas por sección, etc.

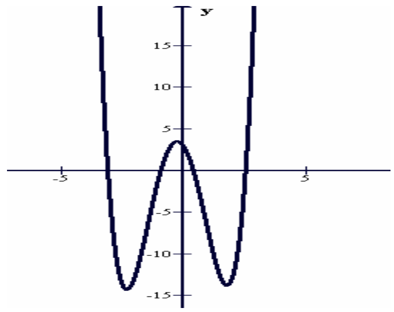
FUNCIONES LINEALES: Son aquellas funciones que tiene la forma $f(x)=mx+b$, el dominio de estas funciones son todos los reales y su dominio de imagen también es todos los reales



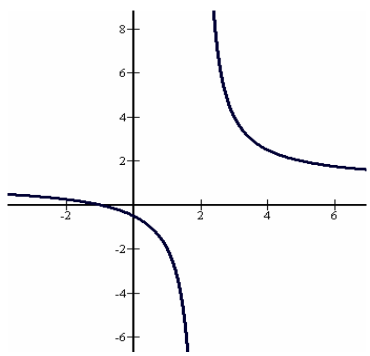
FUNCIONES CUADRÁTICAS: Son aquellas funciones que tiene la forma $f(x)=ax^2+bx+c$, el dominio de estas funciones son todos los reales y su dominio de imagen estará restringido por el radical.



FUNCIONES POLINOMIALES: Son aquellas funciones que dependen de un polinomio de la forma $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + ... + (n-1)x + n$, el dominio de estas funciones son todos los reales y su dominio de imagen dependerá del grado del polinomio que tenga.



FUNCIONES RACIONALES: Son aquellas funciones que tienen la forma $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$, el dominio de estas funciones están restringidos por la condición $h(x) \neq 0$ y su dominio de imagen dependerá de la función inversa.



CUESTIONARIO WORK PAPERS 5

1. Dadas las funciones; hallar el Dominio, Grafica y Dominio de Imagen:
   a) $Y = 2x + 5$
   b) $Y = -4x^2 - 3$
   c) $Y = x^3 - 2$
   d) $Y = -(x-2)^3 + 2$
   e) $Y = 5x^3 - 3x^2 - 2$

f) $Y = x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 2x - 2$

g) $Y = \dfrac{3}{x-3}$

h) $y = \dfrac{x}{x^2 - 4}$

i) $Y = \dfrac{x-6}{x+2}$

j) $Y = \dfrac{2}{x^2 + 1}$

k) $Y = \dfrac{x^2 + 3}{x^2 - 4}$

l) $Y = \sqrt{x-1} + 4$

m) $Y = \sqrt{\dfrac{x^2 - 2}{x^2 - 3}}$

MATRICES.

Una matriz es un arreglo rectangular de números ordenados en **m**-filas (horizontales) y **n**-columnas (verticales) encerrados entre paréntesis o corchetes.

La notación mas usada es **A = [a_{ij}]** donde **i** es el número de posición de la fila y **j** el de la columna.

El tamaño de la matriz se especifica usualmente escribiendo como subíndice “**mxn**”

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & - & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & - & a_{2n} \\ a_{31} & {}_{32} & a_{33} & - & a_{3n} \\ - & - & - & - & - \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & - & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

$$ejemplo \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 8 & -15 \\ -5 & 27 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

Cuando **m = n** se dice que la matriz es **cuadrada.**

Diagonal principal: Solo existe en matrices cuadradas y es la línea formada por los elementos **a_{ij}** tales que **i = j**

Traza de una matriz: es la suma de los elementos de la diagonal principal.

Traza (A) = $a_{11} + a_{22} + a_{33} + \ldots + a_{nn}$

TIPOS DE MATRICES

Matriz fila: Es una matriz de orden 1 x n.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 6 & -17 \end{bmatrix}$$

Matriz columna: Matriz de orden m x 1

$$A = \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Matriz nula: Es una matriz cuyos elementos son todos “0”

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz triangular superior: Es una matriz cuadrada cuyos elementos a_{ij} = o cuando i>j

$$U = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 0 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Matriz triangular inferior: Es una matriz cuadrada cuyos elementos a_{ij} = o cuando i<j

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 6 & 15 & 12 \end{bmatrix}$$

Matriz diagonal: Es una matriz cuadrada cuyos elementos a_{ij} = o cuando i ≠ j

$$D = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Matriz escalar: Es una matriz diagonal cuyos elementos a_{ij} = k(k ≠ 0) cuando i = j

$$E = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Matriz identidad: Es una matriz diagonal cuyos elementos a_{ij} = 1 cuando i = j

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz simétrica: Es una matriz cuadrada donde $a_{ij} = a_{ji}$ para i ≠ j

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -2 & 4 & -6 \\ 5 & -6 & 7 \end{bmatrix}$$

Matriz antisimétrica: Es una matriz cuadrada donde $a_{ij} = - a_{ji}$ para i≠j y a_{ij} = 0 para i=j

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 2 & 0 & -6 \\ -5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

OPERACIONES CON MATRICES

Matriz opuesta: Sea A = [a_{ij}] su opuesta es
– A = – [a_{ij}] = [– a_{ij}]

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 8 & -15 \\ -5 & 27 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow -A = \begin{bmatrix} -2 & -8 & 15 \\ 5 & -27 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz traspuesta: Sea A = [a_{ij}] de orden m x n su traspuesta se obtiene permutando las filas con las columnas y se denota A' o A^t = [a_{ji}] y es de orden n x m

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 8 & -15 \\ -5 & 27 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 3} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 8 & 27 \\ -15 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

Suma de matrices: Sean la matrices A = [a_{ij}] y B = [b_{ij}] su suma se obtiene sumando "elemento a elemento" A + B = [a_{ij} + b_{ij}] y es del mismo tamaño.
Nota: Solo se pueden sumar matrices del mismo tamaño.
Sean las matrices A y B realizar la suma A+B:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}_{2\times 2} \qquad B = \begin{bmatrix} -7 & 8 \\ 12 & 9 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 3} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 3 \\ -3 & 104 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} -5 & 13 \\ 18 & 6 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$C + D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 9 \\ 0 & 108 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

$$A + C = no\ existe$$

Multiplicación por un escalar: El producto de una matriz A = [a_{ij}] por un escalar "k" se obtiene multiplicando cada elemento de la matriz por dicho escalar k·A = [k·a_{ij}]
Nota: En el trabajo con matrices se acostumbra a llamar escalar las cantidades numéricas independientes.

$$Sean \quad las \quad matrices:$$

$$A=\begin{bmatrix}2 & 5\\ 6 & -3\end{bmatrix}_{2\times 2} \quad C=\begin{bmatrix}1 & 5 & -6\\ -3 & 4 & 2\end{bmatrix}_{2\times 3}$$

$$3\cdot A=\begin{bmatrix}6 & 15\\ 18 & -9\end{bmatrix}$$

$$-5\cdot C=\begin{bmatrix}-5 & -25 & 30\\ 15 & -20 & -10\end{bmatrix}$$

Multiplicación de matrices:
Nota El producto de dos matrices solo es posible cuando el número de filas de la segunda matriz es igual al número de columnas de la primera.

Sean las matrices A = $[a_{ij}]_{mx\mathbf{p}}$ y B = $[b_{ij}]_{\mathbf{p}xn}$ el producto es pasible porque el número de filas de B es **p** y es igual al número de columnas de A. La matriz resultante C es del orden m x n C = A·B = $[c_{ij}]_{mxn}$ y sus elementos se obtienen multiplicando los elementos de **las filas de A** por los elementos correspondientes de **las columnas de B** y sumando estos productos.

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} \mathrm{a}_{\mathrm{ik}} \cdot \mathrm{b}_{\mathrm{kj}}$$

$$A=\begin{bmatrix}1 & 6 & 5\\ 2 & 0 & 3\\ 3 & 4 & 2\end{bmatrix}_{3\times 3} \quad B=\begin{bmatrix}4 & -8\\ -1 & 0\\ 7 & 2\end{bmatrix}_{3\times 2}$$

$$C = A\cdot B=\begin{bmatrix}33 & 2\\ 29 & -10\\ 22 & -20\end{bmatrix}_{3\times 2}$$

CUESTIONARIO WORK PAPERS 6
MATRICES

1. Considerando las siguientes matrices:

$$A=\begin{bmatrix}3 & 0\\ -1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix}4 & -1\\ 0 & 2\end{bmatrix} \quad E=\begin{bmatrix}6 & 1 & 3\\ -1 & 1 & 2\\ 4 & 1 & 3\end{bmatrix} \quad F=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3 & 5\\ 4 & -3 & 0 & 7\end{bmatrix}$$

$$G=\left[g_{i\,j}\right]_{4\,x\,3} / \quad g_{i\,j}=i\cdot j$$

$$H=\left[h_{i\,j}\right]_{2\,x\,3} / \quad h_{i\,j}=i^{\,j}$$

$$C=\begin{bmatrix}1 & 4 & 2\\ 3 & 1 & 5\end{bmatrix} \quad D=\begin{bmatrix}1 & 5 & 2\\ -1 & 0 & 1\\ 3 & 2 & 4\end{bmatrix}$$

2. Determine cuando sea posible y justifique su respuesta cuando no lo sea.

a) 3C – D
b) (AB)C
c) (4B)C + 2B
d) D + E2
e) $GH^T - 2F^T$
f) $(3H + {}^1/_2C) - BA^T$

3. Generar las siguientes matrices:
   a) Matriz identidad de 4*4
   b) Matriz escalar de 5*5
   c) Matriz triangular inferior de 3*3
   d) Matriz nula

1. Según el estudio del álgebra y de las operaciones algebraicas, reflexionar y discutir en grupo las aplicaciones: mencionar mínimo 5 aplicaciones

2. Identifique los distintos métodos para resolver sistemas ecuaciones y desarróllelos mediante un ejemplo.

CONCLUSIONES (Sintetizar la opinión del grupo)

COMENTARIOS (Sintetizar la opinión del grupo)

INTEGRANTES (Máximo cuatro)

Ap. Paterno	Ap. Materno	Nombres	Firma

1.- Las ecuaciones matemáticas son herramientas, que permiten el análisis relacionados con su especialidad, investigue indicando las aplicaciones prácticas de su carrera.

CONCLUSIONES (Sintetizar la opinión del grupo)

COMENTARIOS (Sintetizar la opinión del grupo)

INTEGRANTES (Máximo cuatro)

Ap. Paterno Ap. Materno Nombres Firma

1.- Las operaciones que se pueden realizar con dos o más conjuntos son: unión, intersección, diferencia, complemento Analicé y explique cada una de estas operaciones y de un ejemplo en cada caso.

CONCLUSIONES (Sintetizar la opinión del grupo)

COMENTARIOS (Sintetizar la opinión del grupo)

INTEGRANTES (Máximo cuatro)

Ap. Paterno Ap. Materno Nombres Firma

Utilizando los apuntes analizar, relacionar y debatir el tema, analizando las variables y constantes de Dichas ecuaciones, indicar a que tipo de función corresponden cada tipo de grafica

CONCLUSIONES (Sintetizar la opinión del grupo)

COMENTARIOS (Sintetizar la opinión del grupo)

INTEGRANTES (Máximo cuatro)

Ap. Paterno	Ap. Materno	Nombres	Firma

ECUACIONES ALGEBRAICAS, POR MARIA A. GARCÍA ZURITA

Enviado por:
Ing.+Lic. Yunior Andrés Castillo S.
"NO A LA CULTURA DEL SECRETO, SI A LA LIBERTAD DE INFORMACION"®
www.monografias.com/usuario/perfiles/ing_lic_yunior_andra_s_castillo_s/monografias
Página Web: yuniorandrescastillo.galeon.com
Correo: yuniorcastillo@yahoo.com
yuniorandrescastillosilverio@facebook.com
Twitter: @yuniorcastillos
Celular: 1-829-725-8571
Santiago de los Caballeros,
República Dominicana,
2015.
"DIOS, JUAN PABLO DUARTE Y JUAN BOSCH – POR SIEMPRE"®