

# Elementos de Mecánica Celeste

## Elements of Celestial Mechanics

Alexander Moreno Sánchez

Centro Colombiano de Cosmología y Astrofísica

Bogotá. D. C, Colombia.

amorenosa@unal.edu.co

Recibido 01-03- 2013; Aceptado 30 - 03- 2013; Publicado en línea 10 - 05 - 2013

---

### Resumen

Siendo la mecánica celeste uno de los grandes capítulos de las ciencias físicas, de gran belleza y de enorme sentido organizacional, se presenta una corta introducción de algunos elementos propios de la misma, se muestran algunas ecuaciones generales que fundamentan las deducciones analíticas y las predicciones fabulosas que permite hacer la mecánica celeste.

**PACS:** 45.50.Pk, 95.10.Ce

**Palabras Claves:** Mecánica newtoniana, leyes de Kepler, ecuaciones orbitales, integrales de movimiento.

### Abstract

Celestial mechanics being one of the greatest chapters in the physical sciences, of great beauty and enormous organizational sense, we present a short introduction to some elements of it, are some general equations underlying analytical deductions and predictions fabulous which allows celestial mechanics.

**PACS:** 45.50.Pk, 95.10.Ce

**Keywords:** Newtonian mechanics, Kepler's laws, orbital equations, integrals of motion.

©2013. Centro Colombiano de Cosmología y Astrofísica. Todos los derechos reservados.

---

## 1 Introducción

En estos días que se investiga, se pública, se anuncia y se desarrollan grandes proyectos científicos; a mi parecer, nos olvidamos de algunos campos de la ciencia que han contribuido de forma sin igual a la comprensión y al desarrollo de la humanidad, sabemos de los grandes adelantos en materia espacial, de lo importante que resultan los satélites artificiales para mejorar y construir nuestra tecnología moderna, y ahora que nos intimada una posible colisión con un cuerpo espacial, sí que toma mayor importancia recordar, y para aquellos estudiosos comprender, como es que se mueven los cuerpos en el espacio, la causa y efecto de su movimiento, la descripción física de las órbitas, en fin, por ello es previsible, que la mecánica celeste tome mayor importancia, por lo menos en los centros de estudio, ya que sin éste importante campo de las ciencias físicas, quizá, no seamos capaces de sobrevivir en el futuro próximo.

Este corto y escueto trabajo no pretende sustituir los principios teóricos completos, ya que existen portentosos tratados sobre esta ciencia los cuales permiten alcanzar un nivel de comprensión único en este campo de estudio, solo se muestran algunos desarrollos importantes, se tocan algunos temas muy especiales y se intenta dar una visión de las complejidades propias de los sistemas gravitantes. Ahora bien, si el lector se interesase de forma especial por algún tema particular deberá acudir a la literatura especializada, ya que aquí simplemente se desea crear cierta motivación hacia estos temas[1][2][3].

## 2 Dinámica Fundamental

La mecánica celeste conjuga de manera única y elegante la teoría mecánica newtoniana y la teoría matemática clásica analítica, para describir grácilmente el movimiento planetario alrededor del sol, los satélites alrededor de sus planetas, los pares estelares, el movimiento de cometas y asteroides, entre otros muchos cuerpos que gravitan de manera elegante en el universo.

Desde el punto de vista histórico, se considera como punto de partida las conocidas y clásicas leyes de Kepler para el movimiento planetario

1. La órbita de cada planeta es una elipse con el sol en uno de sus focos.
2. El radio vector que une el sol con el planeta barre áreas iguales en intervalos de tiempo iguales.
3. La razón entre los cuadrados de los periodos de dos planetas cualesquiera es igual a la razón entre los cuadrados de su distancia media desde el sol.

Además desde el punto de vista fundamental, la única, elegante y hermosa ley de la gravitación universal, concebida por Newton, establece que si dos partículas de masa  $m_1$  y de masa  $m_2$  están situadas a una distancia  $r$  de separación mutua, cada partícula atrae a la otra con una fuerza definida por  $Gm_1m_2/r^2$ , donde  $G$  es una constante universal y las fuerzas reciprocas actúan sobre la línea que une las partículas[1].

## 3 Movimiento bajo una fuerza central

Cuando la fuerza resultante sobre una partícula causa un movimiento acelerado alrededor de un punto fijo, el movimiento se llama de fuerza central, en donde dicho punto fijo se conoce como centro de fuerzas, este tipo de movimiento es bastante frecuente en muchos tipos de sistemas planetarios y estelares, los planetas se mueven en órbitas tales que la fuerza de atracción debido al sol siempre pasa a través del mismo punto; por ejemplo, en un sistema de dos estrellas, una de ellas gira alrededor de la otra bajo la acción de la fuerza gravitacional.

Ahora bien, se pueden derivar varias propiedades importantes del movimiento producido por una fuerza central, las cuales son independientes de la forma analítica precisa de la ley de fuerzas, en particular muchas aplicaciones astronómicas involucran la ley del cuadrado inverso de Newton. En consecuencia tenemos los siguientes resultados[1][10]

### 3.1 Ley de las Áreas

Entonces, considérese una partícula de masa  $m$  en una posición  $r$ , relativo a un origen fijo  $o$ , y si la partícula describe una curva  $c$ , bajo la acción de una fuerza central  $F$ , la cual puede estar dirigida hacia el centro  $o$  o hacia afuera del centro  $o$ , por lo tanto para una masa constante la segunda ley de Newton puede establecerse como[1][7][10]

$$m\dot{v} = Fu_r, \quad (1)$$

considerando, el producto vectorial con el vector de posición  $r$

$$r \times m\dot{v} = r \times Fu_r = 0. \quad (2)$$

Ahora, podemos considerar la velocidad areal (razón de cambio del área barrida con el tiempo), definida como

$$\dot{A} = \frac{1}{2}r \times v = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}u_A, \quad (3)$$

donde  $u_A$  es un vector unitario perpendicular a  $r$  y  $v$ , es decir perpendicular al plano instantáneo definido por estos vectores, entonces se concluye que una partícula de masa  $m$  que se mueve bajo una fuerza central describe una órbita la cual yace en un plano.

Si la magnitud de la velocidad areal es  $\frac{1}{2}h$ , entonces el área descrita en un tiempo  $t$  está dada por

$$A = \frac{1}{2}ht + c, \quad (4)$$

de lo anterior se concluye, que para cualquier fuerza central, la segunda ley de Kepler del movimiento planetario se mantiene, es decir

$$\dot{A} = cte, \quad (5)$$

la cual es la segunda ley de Kepler, "en periodos iguales se barren áreas iguales", el área barrida por el radio vector es directamente proporcional al tiempo, el inverso de esto también es cierto, si el área barrida por el radio vector es directamente proporcional al tiempo, la fuerza es una fuerza central. Asumiendo  $A = pt + q$ , tenemos  $\dot{A} = p$  entonces  $r^2\dot{\theta} = 2p$ , por lo tanto

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} = 0, \quad (6)$$

es decir  $2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta}$  expresión que corresponde a la aceleración la cual es cero, quiere decir esto que no hay aceleración, por lo tanto no hay ninguna fuerza perpendicular a  $r$ , en consecuencia la órbita yace sobre un plano.

### 3.2 Velocidades Lineales y Angulares

Otros resultados cinemáticos se siguen del movimiento bajo una fuerza central. De tal modo que si  $p$  denota la distancia perpendicular del origen  $o$  a una tangente  $T$  sobre la trayectoria de la partícula, tenemos[1][7]

$$2\dot{A} = r \times v = hu_A, \quad (7)$$

con la cual se puede obtener

$$v = \frac{h}{p}, \quad (8)$$

donde  $p = r \sin \alpha$ , y  $v$  la velocidad lineal de una partícula moviéndose bajo la acción de una fuerza central, es inversamente proporcional a la distancia perpendicular desde  $o$  a la tangente instantánea a la órbita, por lo tanto

$$\dot{A} = \frac{1}{2}r \times v, \quad (9)$$

de tal forma que la velocidad angular de la partícula en  $p$  está dada por

$$\dot{\theta} = \frac{h}{r^2}, \quad (10)$$

por lo tanto se puede establecer que

$$r^2\dot{\theta} = 2p. \quad (11)$$

De este modo puede decirse que la velocidad angular de una partícula moviéndose bajo la acción de una fuerza central varía inversamente proporcional con el cuadrado de la distancia desde el origen a la partícula, así que

$$\dot{A} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}u_A. \quad (12)$$

### 3.3 Integrales de momentum angular y energía

De la segunda ley de Newton deducimos las ecuaciones de movimiento de una masa  $m$  que son[1][7][10]

$$m\dot{v} = F u_r , \quad (13)$$

$$\dot{L} = r \times m\dot{v} = r \times F u_r = 0 , \quad (14)$$

esto implica que el momentum angular  $L$  de una partícula moviéndose bajo una fuerza central permanece constante en magnitud y dirección, esto implica que el momentum angular es perpendicular al plano orbital

$$L = r \times mv = mr^2\dot{\theta}u_A . \quad (15)$$

Entonces la integral de la ecuación de movimiento de la partícula implica que el momentum angular es constante y vale  $mh$ , ahora,  $mv \cdot \dot{v} = Fv \cdot u_r$ , pero  $v \cdot \dot{v} = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}v \cdot v) = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}v^2)$  , así que  $u_r$  es perpendicular a  $u_\theta$ , en consecuencia

$$vu_r = (\dot{r}u_r + r\dot{\theta}u_\theta)u_r = \dot{r} , \quad (16)$$

por lo tanto tenemos

$$\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}mv^2) = F \frac{dr}{dt} , \quad (17)$$

y suponiendo que  $F$  solo depende de la longitud del radio vector  $r$  , es decir  $F = F(r)$ , de tal forma que integrando obtenemos

$$\frac{1}{2}mv^2 = \int F(r)dr + E , \quad (18)$$

esto quiere decir que el trabajo hecho por  $F$  en el cambio de posición es la integral a lo largo de la órbita.

Tenemos que  $F = F(r)u_r$  es una fuerza conservativa, por tanto, existe una energía potencial  $V(r)$  tal que  $F(r) = -\frac{dV}{dr}$ , de tal modo que se puede escribir

$$\frac{1}{2}mv^2 + V(r) = E , \quad (19)$$

la cual establece que la energía cinética más la energía potencial de una partícula moviéndose bajo la acción de una fuerza central es constante, ley de conservación de la energía, así que  $E$ , constituye una segunda integral de movimiento, que conduce a la siguiente expresión

$$v = \pm \sqrt{\frac{2(E - V(r))}{m}} , \quad (20)$$

y como la raíz solo depende de  $r$ , se observa que la velocidad para todas las órbitas que tienen la misma energía total, sin consideración de sus formas, es la misma a una distancia dada  $r$  desde el centro de fuerzas.

### 3.4 Ecuación de la órbita

Si se denota la fuerza por  $F(r)$ , entonces las ecuaciones de movimiento obtenidas de la segunda ley de Newton, en coordenadas polares son[1][7]

$$m[\ddot{r} - r\dot{\theta}^2] = F(r) , \quad (21)$$

$$mr^2\dot{\theta} = mh , \quad (22)$$

este conjunto de ecuaciones constituye un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden que debe conducir a cuatro constantes de integración, no obstante ya se han encontrado dos de ellas, según se mostró en los apartados anteriores, las cuales son las integrales de momento angular y de energía, las otras dos integrales se obtienen de la solución de las ecuaciones de movimiento, pero para ello se requiere fijar dos condiciones iniciales, las cuales permitan fijar la órbita completa.

Si definimos  $u = \frac{1}{r}$ , con lo cual,  $\dot{\theta} = hu^2$ ,  $\ddot{r} = -h^2u^2(\frac{d^2u}{d\theta^2})$ , en consecuencia obtenemos

$$m[-hu^2(\frac{d^2u}{d\theta^2}) - h^2u^3] = F(r), \quad (23)$$

la cual conduce a

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{1}{m}F(r) + \frac{h^2}{r^2}. \quad (24)$$

La ecuación diferencial obtenida para  $u$  como función de  $\theta$  conduce a la ecuación polar de la órbita, cuando la ley de fuerzas es conocida y si se realiza una expansión en términos de  $u$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{F(\frac{1}{u})}{mh^2u^2}, \quad (25)$$

ahora bien, si suponemos que la fuerza varía como  $F(r) = \alpha r^n$ , entonces  $F(\frac{1}{u}) = \alpha u^{-n}$ , con lo cual

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{\alpha u^{-n-2}}{mh^2}, \quad (26)$$

con algunas manipulaciones algebraicas, obtenemos

$$2\frac{d}{d\theta}[(\frac{du}{d\theta})^2 + u^2] = -(\frac{2\alpha}{mh^2})(-n-1)u^{-n-2}\frac{du}{d\theta}, \quad (27)$$

la cual se puede simplificar para obtener

$$\frac{d}{d\theta}[(\frac{du}{d\theta})^2 + u^2] = -\beta u^{-(n+2)}\frac{du}{d\theta}, \quad (28)$$

donde  $\beta$  es una constante, ahora integrando una vez, es decir

$$\int \frac{d}{d\theta}[(\frac{du}{d\theta})^2 + u^2]d\theta = -\int \beta u^{-(n+2)}\frac{du}{d\theta}d\theta, \quad (29)$$

obtenemos

$$(\frac{du}{d\theta})^2 + u^2 = \frac{\beta}{n+1}u^{-(n+1)} + c, \quad (30)$$

donde  $c$  es una constante de integración, por lo tanto se obtiene

$$\frac{du}{d\theta} = \pm \sqrt{c - u^2 + (\frac{\beta}{n+1})u^{-(n+1)}}, \quad (31)$$

y si se integra nuevamente

$$\int_{u_0}^u du [c - u^2 + (\frac{\beta}{n+1})u^{-(n+1)}]^{-1/2} = \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta, \quad (32)$$

obtenemos

$$\int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{c - u^2 + (\frac{\beta}{n+1})u^{-(n+1)}}} = \theta - \theta_0 \quad \text{con } n \neq -1, \quad (33)$$

donde  $u_0$  y  $\theta_0$  son puntos iniciales sobre la órbita.

Cuando se conoce  $n$ , la ecuación anterior define  $u$  como una función de  $\theta$ , ésta se conoce con el nombre de ecuación polar de la órbita. La integral anterior es de la forma

$$\int (a + bu^2 + cu^{-n-1})^{-1/2} du, \quad (34)$$

cuando  $n$  es un entero, resultaran funciones trigonométricas si  $n$  es menor de 2, de tal modo que  $n$  está restringido a  $n = -1$ ,  $n = -2$ ,  $n = -3$ , sin embargo,  $n = -1$  ya fue excluido, entonces solo queda  $n = -2$  y  $n = -3$ .

Si consideramos  $n = 1$ , la integral se convierte en

$$\int (a + bu^2 + cu^{-2})^{-1/2} du, \quad (35)$$

la cual se puede expresar como  $\int (au^2 + bu^4 + c)^{-1/2} u du$ , que con la sustitución  $v = u^2$  se obtiene

$$\frac{1}{2} \int (bv^2 + av + c)^{-1/2} dv, \quad (36)$$

al realizar la integral conduce a funciones trigonométricas. De este modo se puede concluir que cuando una fuerza central varía como  $r^n$ , cuando  $n = +1, -2, -3$ , la ecuación polar de la órbita puede ser expandida en términos de funciones trigonométricas. En el caso de potencias superiores de  $r$  esto conduce a soluciones en términos de funciones circulares. Puede mostrarse en general que cuando  $n = +5, +3, 0, -4, -5, -7$ , la ecuación polar de la órbita se expresa en términos de funciones elípticas[1].

### 3.5 Fuerza cuadrática Inversa

En muchas aplicaciones astronómicas se considerará la fuerza central como una fuerza inversa cuadrática, que como se conoce fue propuesta por Newton, la cual tiene la siguiente forma[1][7]

$$F(r) = -\frac{GMm}{r^2}, \quad (37)$$

donde  $G$  es la constante gravitacional de Newton, que junto con  $M$  constituyen la "potencia" o "intensidad" de la fuerza central, y  $m$  es la masa del cuerpo que está siendo acelerada, que en términos del cambio de variable propuesto anteriormente, se puede expresar como

$$F\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{GMm}{1/u^2}, \quad (38)$$

en consecuencia, esta forma de la ley de fuerzas conduce a la siguiente ecuación de movimiento

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{GM}{h^2}, \quad (39)$$

que sí se integra, permite obtener la siguiente solución

$$u = A \cos(\theta - \theta_0) + \frac{GM}{h^2}, \quad (40)$$

de tal modo que en términos de  $r$  tenemos

$$r = \frac{h^2/GM}{1 + \left(\frac{Ah^2}{GM}\right) \cos(\theta - \theta_0)}, \quad (41)$$

ésta es conocida como ecuación polar de la órbita.

Ahora bien, la ecuación estándar de una sección cónica, en coordenadas polares es

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)}, \quad (42)$$

donde  $e$  es la excéntrica,  $\frac{p}{e}$  es la distancia del foco a la directriz, entonces podemos relacionar de la siguiente manera

$$p = \frac{h^2}{GM}, e = \frac{Ah^2}{GM}, \quad (43)$$

de la geometría analítica se sabe que los parámetros  $p, e$  determinan la forma de la sección cónica, y entre otras cosas se sabe que si

$e < 1$ , la cónica es una elipse

$e = 1$ , la cónica es una parábola

$e > 1$ , la cónica es una hipérbola

Estos parámetros geométricos dependen de las constantes de integración  $A$  y de las constantes físicas del sistema  $h, G, M$ . Por lo tanto, podemos considerar la siguiente ecuación de movimiento

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 = \frac{2GMu}{h^2} + c, \quad (44)$$

el vector velocidad en la órbita se puede expresar como

$$\mathbf{v} = \dot{r}u_r + r\dot{\theta}u_\theta, \quad (45)$$

así que podemos obtener las siguientes expresiones  $\dot{r} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta} \dot{\theta} = -h \frac{du}{d\theta}$ ,  $r\dot{\theta} = hu$ , con esto obtenemos lo siguiente

$$v = \left[\left(h \frac{du}{d\theta}\right)^2 + h^2 u^2\right]^{1/2} \quad (46)$$

además tenemos que  $-\frac{GM}{r} = -GMu$  la cual corresponde a la energía potencial por unidad de masa, por lo tanto  $\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = \frac{\dot{r}^2}{h^2} = -\frac{1}{h} \frac{du}{d\theta}$ , con estas expresiones llegamos a

$$v^2 = 2GMu + ch^2, \quad (47)$$

y bajo algunos procedimientos algebraicos adicionales conduce a

$$\frac{1}{2}mv^2 - GMmu = \frac{1}{2}mch^2, \quad (48)$$

expresión que corresponde a la energía total de la partícula bajo una fuerza central de tipo inverso cuadrado, que se puede expresar como

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - GMmu, \quad (49)$$

así que podemos obtener el valor de la constante de integración  $c = \frac{2E}{mh^2}$ .

Para el eje transversal de la cónica  $\dot{r} = -h \frac{du}{d\theta} = 0$ , implica que

$$u^2 - \frac{2GMu}{h^2} - \frac{2E}{mh^2} = 0, \quad (50)$$

esto es una cuadrática en  $u$  cuya solución se puede expresar como

$$u = \frac{GM}{h^2} \left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{2Eh^2}{mG^2M^2}}\right], \quad (51)$$

esta expresión permite determinar los valores máximos y mínimos sobre el eje transversal de la cónica, de tal modo que estos valores son

$$u_{\max} = \frac{GM}{h^2} + A = \frac{GM}{h^2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2Eh^2}{mG^2M^2}}\right], \quad (52)$$

$$u_{\min} = \frac{GM}{h^2} - A = \frac{GM}{h^2} \left[ 1 - \sqrt{1 + \frac{2Eh^2}{mG^2M^2}} \right] , \quad (53)$$

de este modo tenemos

$$A = \frac{GM}{h^2} \sqrt{1 + \frac{2Eh^2}{mG^2M^2}} , \quad (54)$$

pero como  $e = \frac{Ah^2}{GM}$ , por lo tanto se llega a una relación fundamental entre la excentricidad y la energía total de la partícula, de tal forma se puede escribir como

$$e = \sqrt{1 + \frac{2Eh^2}{mG^2M^2}} , \quad (55)$$

y así se tiene que si

1.  $E = 0$ ,  $e = 1$ , la órbita es una parábola
2.  $E < 0$ ,  $e < 1$ , la órbita es una elipse
3.  $E > 0$ ,  $e > 1$ , la órbita es una hipérbola

### 3.6 Ecuación polar de la órbita

Si consideramos un punto fijo  $o$  y una línea fija  $AB$  a una distancia  $D$  de  $o$  y si suponemos que un punto  $P$  en el plano de  $o$  y  $AB$  se mueve de manera que la relación entre su distancia al punto  $o$  a su distancia a la recta  $AB$  es siempre igual a una constante positiva  $e$ . Por lo tanto, la curva que describe  $P$  expresada en coordenadas polares  $(r, \theta)$  está dada por [1][10]

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta} , \quad (56)$$

donde el punto  $o$  se llama foco, la línea  $AB$  directriz, y el radio  $e$  es la excentricidad. La curva frecuentemente se llama sección cónica debido a que puede obtenerse por la intersección de un plano y un cono a diferentes ángulos, y como se anotó anteriormente existen tres cónicas según el valor de la excentricidad.

1. Parábola :  $E = 0$ ,  $e = 1$ .

La ecuación de la parábola se puede expresar como

$$r = \frac{p}{1 + \cos \theta} , \quad (57)$$

ahora si  $q$  denota la distancia del foco al vértice, tenemos

$$p = \frac{h^2}{GM} = 2q , \quad (58)$$

así que obtenemos la ecuación de la órbita

$$r = \frac{2q}{1 + \cos(\theta - \theta_0)} , \quad (59)$$

y la velocidad en la órbita a una distancia  $r$  desde el centro de fuerzas es

$$v_p = \sqrt{\frac{2GM}{r}} , \quad (60)$$

se conoce como velocidad de escape del centro de fuerzas.

2. Elipse:  $E < 0$ ,  $e < 1$

Si  $C$  es el centro de la elipse y  $CV = CU = a$  es la longitud del semieje mayor, entonces la ecuación de la elipse puede escribirse como



$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta} , \quad (61)$$

Nótese que el eje mayor es la recta que une los vértices  $V$  y  $U$  de la elipse con una longitud  $2a$ , si  $b$  es la longitud del semieje menor y si  $c$  es la distancia  $CO$  desde el centro al foco, entonces tenemos el siguiente resultado

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = ea , \quad (62)$$

y como en el caso anterior si  $q$  denota el radio vector del vértice de la elipse cerca del origen, y si  $q'$  denota el radio vector a la distancia máxima desde el origen, de hecho el origen es el foco, pero como el semieje mayor es  $2a$ , entonces

$$q = \frac{p}{1 + e} , \quad q' = \frac{p}{1 - e} , \quad (63)$$

de este modo

$$q + q' = 2a , \quad (64)$$

por lo tanto para la elipse se encuentra que  $p = a(1 - e^2)$ , así que la ecuación de la elipse puede escribirse como

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)} , \quad (65)$$

de otra parte como  $p = \frac{h^2}{GM}$ , la velocidad areal que es constante está dada por

$$h = \sqrt{GMa(1 - e^2)} , \quad (66)$$

de esta forma se puede encontrar una expresión para la energía, la cual es

$$E = -\frac{GMm}{2a} , \quad (67)$$

también se puede encontrar la velocidad a una distancia  $r$  desde el centro de fuerzas, dada por

$$v^2 = GM \left[ \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right] , \quad (68)$$

Según los resultados anteriores se puede deducir una expresión para el período en una órbita elíptica. Si  $A$  denota el área barrida por el radio-vector en un tiempo  $t$ , entonces tenemos

$$A = \frac{1}{2} \sqrt{GMa(1 - e^2)} t + c , \quad (69)$$

donde  $c$  es una constante de integración. Así que, en un período  $\tau$  el radio vector barre una área

$$\pi ab = \pi a^2 \sqrt{1 - e^2} = \frac{1}{2} \sqrt{GMa(1 - e^2)} \tau , \quad (70)$$

donde el semieje menor es  $b = a\sqrt{1 - e^2}$ , entonces el período está dado por

$$\tau = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{GM}} . \quad (71)$$

Lo anterior corresponde a la tercera ley de Kepler. Aquí  $M$  es cercanamente la misma para cada planeta y es aproximadamente la masa del Sol.

### 3. Hipérbola $E > 0$ , $e > 1$

La hipérbola consta de dos ramas, que son asintóticas a dos rectas llamadas asíntotas que se cortan en un punto llamado centro denotado por  $C$ , la distancia  $CV = a$  del centro al vértice  $V$  se llama semieje mayor, y el

eje mayor es la distancia entre los vértices  $V$  y  $U$ . De tal modo que la ecuación de la hipérbola puede escribirse como

$$r = \frac{a(e^2 - 1)}{1 + e \cos \theta} , \quad (72)$$

también, puede decirse que una elipse puede definirse como el lugar o trayectoria de todos los puntos cuya suma de las distancias, desde dos puntos fijos es una constante.

En términos de lo anotado anteriormente, tenemos que  $2a$  denota el eje transversal de la cónica, en consecuencia la geometría de la órbita indica que  $p = a(e^2 - 1)$ , de tal modo que

$$r = \frac{a(e^2 - 1)}{1 + \cos(\theta - \theta_0)} , \quad (73)$$

y como en los casos anteriores la velocidad areal es constante, dada por

$$h = \sqrt{GMa(e^2 - 1)} , \quad (74)$$

y la energía total dada por

$$E = \frac{GMm}{2a} , \quad (75)$$

de igual forma podemos determinar la velocidad a una distancia  $r$  desde el centro de fuerzas, dada por

$$v^2 = GM \left[ \frac{2}{r} + \frac{1}{a} \right] , \quad (76)$$

Como se había mencionado anteriormente, en lo deducido anteriormente, está implícita la primera ley de Kepler[1].

## 4 El Problema de los dos Cuerpos

En física este es una de los problemas paradigmáticos, se tienen resultados clásicos y cuánticos, pero aquí, se considerará la solución clásica apropiada para consideraciones de mecánica celeste, de tal forma que se asumirá que las masas involucradas son esféricamente simétricas y homogéneas en capas concéntricas, en consecuencia se atraen las masas una a otra como si la masa de cada una estuviese concentrada en el centro de la esfera, de forma más simple es como si se tuviesen dos partículas con masa a una distancia igual a la distancia entre los centros, igualmente se resalta que las dos masas están suficientemente aisladas de otras masas, en consecuencia únicamente tenemos una fuerza cuadrática inversa de atracción mutua a lo largo de la línea que une los centros.

Por lo tanto, la dinámica del movimiento resultante permite evidenciar dos problemas relevantes para la mecánica celeste

1. Dada la posición y velocidad en el espacio de una masa puntual como función del tiempo, encontrar los elementos geométricos de la órbita
2. Dados los elementos orbitales, o parámetros, definir la forma y orientación del camino dinámico, para encontrar la posición de las masas en un instante dado[3][4][5]

### 4.1 Movimiento del centro de masa

Si imaginamos un sistema de referencia inercial con  $o$  como origen del sistema y dos masas localizadas por los vectores de posición  $r_1$ ,  $r_2$ , ahora, si consideramos que  $R$  es el vector de posición del centro de masa, y  $r$ , define el vector de posición de  $m_2$  relativo a  $m_1$ . Por lo tanto según la ley de gravitación universal, la fuerza sobre  $m_1$  debida a  $m_2$  está dada por

$$F_{12} = k^2 \frac{m_1 m_2}{r^2} u_r , \quad (77)$$

de igual forma se puede considerar la fuerza sobre  $m_2$  debida a  $m_1$  dada por

$$F_{12} = -k^2 \frac{m_2 m_1}{r^2} u_r , \quad (78)$$

en estas expresiones se considerará  $k^2$  como constante gravitacional universal, diferente a  $G$ , debido a consideraciones de tipo algebraico, ahora bien, podemos considerar las ecuaciones de movimiento para las masas, dadas por

$$m_1 \ddot{r}_1 = k^2 \frac{m_1 m_2}{r^2} \mathbf{r} , \quad (79)$$

$$m_2 \ddot{r}_2 = -k^2 \frac{m_2 m_1}{r^2} \mathbf{r} , \quad (80)$$

en consecuencia si realizamos la respectiva integración del sistema se obtiene

$$\int \int ((m_1 \ddot{r}_1 + m_2 \ddot{r}_2) dt) dt = m_1 r_1 + m_2 r_2 + c_1 t + c_2 t , \quad (81)$$

está integral debe ser nula, ya que la suma de las fuerzas gravitacionales es cero y además ninguna fuerza externa actúa sobre el sistema, por lo tanto, tenemos

$$m_1 r_1 + m_2 r_2 = c_1 t + c_2 t , \quad (82)$$

entonces, si el lado izquierdo es  $MR$  por la definición de centro de masa, se puede obtener

$$m_1 r_1 + m_2 r_2 = MR , \quad (83)$$

así que,

$$R = \frac{c_1}{M} t + \frac{c_2}{M} , \quad (84)$$

lo cual indica que el centro de masa se mueve sobre una línea recta en el espacio, donde  $M$  es la masa total del sistema [1][5][6]

## 4.2 Movimiento relativo

El movimiento de  $m_1$  y de  $m_2$  relativo al centro de masa se puede considerar de la siguiente manera

$$r_1 = R + r'_1 , \quad r_2 = R + r'_2 , \quad (85)$$

donde  $r'_1, r'_2$  denotan el vector de posición de  $m_1$  y de  $m_2$  respecto al centro de masas, entonces  $r = r'_2 - r'_1$  y como  $\ddot{R} = 0$ , tenemos que

$$m_1 \ddot{r}'_1 = m_1 \ddot{r}'_1 , \quad (86)$$

$$m_2 \ddot{r}'_2 = m_2 \ddot{r}'_2 , \quad (87)$$

por lo tanto

$$m_1 \ddot{r}'_1 + m_2 \ddot{r}'_2 = k^2 \frac{m_1 m_2}{r^3} (r'_2 - r'_1) - k^2 \frac{m_2 m_1}{r^2} (r'_2 - r'_1) , \quad (88)$$

así que después de algunas manipulaciones algebraicas podemos obtener lo siguiente

$$\ddot{r}'_1 = -k^2 \left( \frac{m_2^3}{M^2} \right) \frac{r'_1}{(r'_1)^3} , \quad (89)$$

$$\ddot{r}_2 = -k^2 \left( \frac{m_1^3}{M^2} \right) \frac{r_2'}{(r_2')^3} . \quad (90)$$

Esto corresponde a las aceleraciones de las masas  $m_1$ ,  $m_2$  relativas al centro de masa, por ende podemos conocer las respectivas posiciones en cualquier instante resolviendo las ecuaciones anteriores, pero nos encontramos con dos constantes de integración, las cuales no son conocidas, además no existe forma de determinarlas absolutamente, ya que ellas están definidas respecto a un origen fijo en el espacio, por ello, debemos restringirnos a una solución para el movimiento relativo de una masa respecto de la otra. Entonces, no podemos encontrar una solución absoluta, es decir conocer la posición de cada masa en todo tiempo, debido al desconocimiento de  $c_1, c_2$  surgidas de la integración de las ecuaciones de movimiento. Por lo tanto, si nos restringimos a considerar  $m_1$  en el origen del sistema de referencia, se obtiene

$$\ddot{r}_1 = -k^2 \left( \frac{m_2^3}{M^2} \right) \frac{r_1'}{(r_1')^3} = 0, \quad (91)$$

$$\ddot{r} = -k^2 \left( \frac{m_1^3}{M^2} \right) \frac{r_2'}{(r_2')^3} , \quad (92)$$

la cual bajo algunas operaciones algebraicas obtenemos

$$\ddot{r} = -k^2 \frac{M}{r^3} \mathbf{r} , \quad (93)$$

en consecuencia, el problema de dos cuerpos se redujo al problema de un cuerpo, ya que  $m_2$  es la masa que se mueve alrededor de  $m_1$ , esta expresión es la que nos permitirá determinar órbitas y parámetros. Bueno, solo que para algunos fines es conveniente expresar esta expresión en términos de coordenadas cartesianas, la cual es

$$(\ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} + \ddot{z}\hat{k}) = -kM(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) . \quad (94)$$

La solución de la ecuación anterior introduce doce constantes de integración, las cuales necesariamante se deben de fijar mediante las condiciones iniciales, pero ignorando el movimiento del centro de gravedad, se reduce el número a seis constantes de integración. Ahora bien, si conocemos la posición, es decir tres componentes de posición, y la velocidad, también tres componentes, se pueden encontrar las seis constantes de integración. Sin embargo, estas cantidades no están disponibles en aplicaciones astronómicas, para subsanar esto, se debe considerar las coordenadas geométricas de la masa durante al menos tres instantes diferentes y de allí deducirse las componentes de velocidad, esto quizá sea uno de los problemas de la teoría orbital[1][10].

### 4.3 Integral de las áreas

El movimiento relativo de  $m_2$  al rededor de  $m_1$  de forma estricta se considera como un movimiento bajo una fuerza central, por lo tanto la velocidad areal es constante, que según el tratamiento hecho anterior y siguiendo los desarrollos algebraicos convencionales, se puede expresar como

$$\frac{1}{2}(y\dot{z} - \dot{y}z) = \frac{1}{2}c_1 , \quad (95)$$

$$\frac{1}{2}(x\dot{z} - \dot{x}z) = \frac{1}{2}c_2 , \quad (96)$$

$$\frac{1}{2}(x\dot{y} - \dot{x}y) = \frac{1}{2}c_3 , \quad (97)$$

donde  $h = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}$  y si son dadas las coordenadas iniciales y las componentes de velocidad, se pueden determinar las constantes.

En lo mostrado anteriormente, se han ilustrado algunos elementos para la determinación matemática de las órbitas planetarias, la determinación de las constantes de movimiento, y los parámetros físicos relevantes, este

esquema teórico, de forma sistemática se programa en un entorno computacional el cual permite determinar, de forma precisa las órbitas, y condiciones necesarias en el movimiento de los cuerpos celestes, hoy día procedimiento rutinario en algunos centros, otrora trabajos de muchísimas horas.

En lo que sigue se reportaran algunos fenómenos físicos importantes, originados en el movimiento planetario, y cuyo fondo de estudio es la mecánica celeste[1][10].

## 5 Serie de movimientos de la Tierra

Se conoce de investigaciones seguidas durante mucho tiempo, que la Tierra posee alrededor de catorce movimientos, a saber[7][8][9]:

1. Rotación Oeste-Este, la cual toma 23 horas, 56 minutos, su efecto es la sucesión de los días y las noches, para ser precisos, se define el día solar medio como el promedio del día solar verdadero, que corresponde con el tiempo civil y que equivale a 86.400 segundos, unidad que actualmente se define a partir de propiedades atómicas muy precisas, lo cual permite medir las diferencias con el día solar verdadero. Es así como se denomina día al lapso que tarda la Tierra desde que el Sol está en el punto más alto sobre el horizonte hasta que nuevamente vuelva a estar en la misma localización, esto no es más que una forma de medir el tiempo, además se sabe de la observación astronómica que dependiendo de la referencia que se use para medir la rotación terrestre, se puede hablar de tiempo solar o de tiempo sidéreo, el primero toma como referencia al Sol y el segundo toma como referencia a las estrellas. Es convencional considerar el "día" como día solar medio, base del tiempo civil, que se divide en 24 horas, de 60 minutos, de 60 segundos, y dura, por tanto, 86.400 segundos. El día sidéreo o día sideral es el lapso transcurrido entre dos culminaciones, o tránsitos, sucesivos del primer punto de Aries, o equinoccio Vernal. Se podría definir igualmente respecto al primer punto de Libra. El día sidéreo es 4 minutos más corto que el día solar medio.

2. Revolución Anual, la cual se da alrededor del Sol en 366.24 días siderales, como consecuencia tenemos la aberración de la luz, y el día solar se hace más largo que el sideral. El periodo de rotación de la Tierra es aproximadamente 24 horas ( exactamente  $23.9344 \text{ h} = 86.164 \text{ s} = 1 \text{ día sidéreo}$ )

3. Precesión de los Equinoccios, la cual toma 25.765 años aproximadamente, que corresponde a  $50''$  de arco por año, esto trae como consecuencia que, el año trópico dure 20 minutos de arco menos que el año sideral, que los signos del zodiaco no tengan una posición fija en las constelaciones y que los polos celestes cambien paulatinamente de posición. Se denomina año trópico o año tropical al tiempo preciso requerido para aumentar la longitud media del Sol en 360 grados sobre la eclíptica; es decir, en completar una vuelta completa. Su duración es de 365,242198 días de tiempo solar medio (365 días 5 h 48 m 45,9 s). Debido a la precesión de los equinoccios y a la nutación, este tiempo es distinto al que media entre dos pasos sucesivos del Sol por el equinoccio de primavera; es decir, entre dos pasos sucesivos por el llamado primer punto de Aries. Para comprender la diferencia con el año sidéreo se debe tener en cuenta la precesión de los equinoccios. Cuando se hace referencia a un equinoccio o a un solsticio, se habla del punto de la órbita terrestre en que el eje de rotación de la Tierra se alinea (solsticio) o se sitúa perpendicular (equinoccio) a la línea imaginaria Sol-Tierra. Resulta que ese eje, debido a la citada precesión de los equinoccios, da una vuelta sobre la perpendicular a la eclíptica en unos 26.000 años[11].

4. Nutación, causada por atracción de la Luna, que toma 18 años, 8 meses, ocasionando que el valor de la precesión de los equinoccios sufra ciertas oscilaciones, al igual que la diferencia entre el año trópico y el sideral, como también el cambio en la oblicuidad de la eclíptica.

5. Rotación de la línea de los ápsides, o sea, de la línea perigeo-apogeo, en una cantidad de  $11''5$  por año, de tal forma que en 55.000 años se invierte esta línea, y que en 110.000 años vuelva a estar en su primitiva posición. Para este movimiento cada ápside se manifiesta describiendo una circunferencia en el espacio, cuyo diámetro es aproximadamente de 300 millones de kilómetros.

6. Disminución de la Oblicuidad de la Eclíptica, que toma  $0.48''$  de arco cada año, este movimiento hace como si la órbita terrestre girase alrededor de la línea de los equinoccios, acercándose al ecuador, pero sin confundirse con él, ya que cuando llega a la inclinación de 1.21 minutos de arco la inclinación nuevamente vuelve a crecer.

7. Perturbaciones Planetarias, estas son debido al cambio de posición de los planetas, produciendo variaciones en la fuerza de atracción que éstos ejercen sobre la Tierra.

8. Variación de la excentricidad de la órbita terrestre, dicha variación se verifica en un periodo de 80.000 años, durante el cual la excentricidad pasa por un máximo de 0.02 y por un mínimo de 0.0003, actualmente el valor es de 0.01675 en descenso, calculándose que dentro de 24.000 años alcanzará el mínimo citado, y entonces la órbita de Tierra será casi circular, y a partir de esa época, se iniciará el proceso ascendente.

9. Desplazamiento del centro de gravedad del sistema solar, corresponde al centro determinado por el Sol y por las posiciones variables de los planetas, en torno del cual gira anualmente los planetas.

10. Movimiento mensual de la Tierra, se verifica el movimiento de la Tierra en torno del centro de gravedad del par Tierra-Luna, se sabe que el centro de gravedad está ochenta veces más cercano a la Tierra, que a la Luna.

11. Corrimiento de los polos terrestres, se da en forma espiral, y cuya amplitud no sobrepasa los 15 metros, el cual tiene su origen en la plasticidad del planeta, que tiene como consecuencia las ligeras variaciones en la latitud de todos los lugares del planeta.

12. Mareas de la corteza terrestre, consisten en el levantamiento del suelo dos veces por día en 30 cm a la latitud de 45 grados y en 50 cm en el ecuador.

13. Movimiento general de traslación del Sistema Solar, es decir del centro de gravedad del sistema, el cual se traslada hacia la estrella Vega de la Lira, a razón de 20 Km por segundo.

14. Movimiento general de traslación galáctico, el centro de gravedad del sistema galáctico también se traslada, el cual se desplaza hacia un punto de la constelación de Capricornio, a razón de 600 Km por segundo.

Como podrá observarse, el movimiento real y completo de nuestro planeta, es bastante más complejo de lo que usualmente pensamos, pero como siempre sucede en muchas campos de la ciencia, sólo se consideran aproximaciones o simplificaciones de un fenómeno o conjunto de fenómenos, para obtener resultados, o explicaciones coherentes como también predicciones que nos permitan profundizar en la comprensión de nuestro mundo físico, por ello no es muy frecuente encontrar teorías o desarrollos tecnológicos basados en esto que combinen todos los elementos anteriores en un único marco explicativo, es así como dependiendo del aspecto o interés particular se tomará uno o más elementos de los considerados anteriormente.

Por ello me parece de gran alcance, cómo pueblos primitivos podían determinar ciclos y fenómenos que con gran dificultad hoy podemos determinar, por ejemplo la civilización maya, y posiblemente los olmecas, usaban tablas complejas para predecir acontecimientos celestes como por ejemplo los eclipses, las alineaciones planetarias, los equinoccios, etc, por ejemplo es notable, su capacidad para predecir alineaciones planetarias, lo cual requería conocimientos de un orden diferente, se necesitaría haber conocido todo lo relacionado con la precesión de los equinoccios, cuyo problema principal es que es sumamente lenta, ya que tarda, como se mencionó, algo así como 25.765 años en completar un ciclo, el cual se puede determinar observando la posición del Sol en el equinoccio de primavera respecto a las estrellas del zodiaco, haciendo esto se descubre que la posición del Sol en el primer día de la primavera retrocede a través del zodiaco a un ritmo aproximado de un grado cada sesenta y dos años, entonces se debía contar con registros históricos para poder inferir este conocimiento, problema que los estudiosos han considerado y al que no le han dado una debida explicación.

## 6 Variaciones Orbitales

En esta sección y en las siguientes me referiré, sin entrar en los detalles o la descripción completa, a algunos aspectos de interés particular, como es la explicación de las eras glaciales, y de consideraciones climáticas, no obstante considerando que el sustento teórico de los mismos está basado en la descripción analítica rigurosa esquematizada anteriormente y en los estudios detallados que se han adelantado durante muchos años[1][6][7][8]. El Sistema Solar presenta perturbaciones mutuas entre los diferentes cuerpos que lo constituyen, en particular la órbita terrestre se encuentra perturbada, es decir que los otros cuerpos afectan la estabilidad de la órbita, sus elementos y la forma de la misma, dichas modificaciones tienen por su puesto sus consecuencias, conduciendo a lo que se conoce como variaciones o perturbaciones orbitales; entre los efectos producidos por ellas están, la aparición y desaparición de los periodos glaciales e interglaciales holocénicos (El Holoceno, del griego holos, todo, y kainos, reciente: la era totalmente reciente, una división de la escala temporal geológica, es la última y actual época geológica del período Cuaternario. Comprende los últimos 11.784 años, desde el fin de la última glaciación. Es un período interglaciar en el que la temperatura se hizo más suave y la capa de hielo se derritió, lo que provocó un ascenso en el nivel del mar. Esto hizo que Indonesia, Japón y Taiwán se separaran de Asia; Gran

Bretaña, de la Europa continental y Nueva Guinea y Tasmania, de Australia. Además, produjo la formación del estrecho de Bering)[11]. Si bien la luminosidad solar se mantiene prácticamente constante a lo largo de millones de años, no ocurre lo mismo con la órbita terrestre. Ésta oscila periódicamente, haciendo que la cantidad media de radiación que recibe cada hemisferio fluctúe a lo largo del tiempo. Son éstas variaciones las que provocan las pulsaciones o cambios glaciares llevando a veranos e inviernos de largo período. Son los llamados períodos glaciales e interglaciales. Hay que tener en cuenta varios factores que contribuyen a modificar las características orbitales haciendo que la insolación media en uno y otro hemisferio varíe aunque no lo haga el flujo de radiación global. La excentricidad, la inclinación axial, y la precesión de la órbita de la Tierra varía en el transcurso del tiempo produciendo las glaciaciones del Cuaternario cada 100.000 años. El eje de la Tierra completa su ciclo de precesión cada 25.765 años. Al mismo tiempo el eje mayor de la órbita de la Tierra gira, en unos 22.000 años. Además, la inclinación del eje de la Tierra cambia entre 22,1 grados a 24,5 grados en un ciclo de 41.000 años. El eje de la Tierra tiene ahora una inclinación de  $23,5^\circ$  respecto a la normal del plano de la eclíptica.

### 6.1 Precesión de los equinoccios

La precesión de los equinoccios es el cambio en la dirección del eje de giro terrestre, más o menos dura 25.765 años alrededor del eje de la eclíptica. En 1842 el matemático francés Joseph Adémar postuló que la precesión del eje terrestre llevaría a una precesión de los equinoccios y solsticios que los harían desplazarse a lo largo de la órbita coincidiendo unas veces cerca del afelio y otras del perihelio. Esto es debido a que el cambio en la dirección del eje de rotación causa una variación del punto Aries o corte del ecuador y la eclíptica y por tanto cambia el inicio de la primavera y en consecuencia el ángulo que forma con la línea de los ápsides, lo cual tiene incidencia en el momento en que la Tierra en su traslación alrededor del Sol alcanza el perihelio y el afelio. Adémar pensó que esto explicaría la última glaciación que terminó hace 10.000 años. Cuando el punto Aries se alinea con la dirección de la línea de los ápsides de la órbita de la Tierra (perihelio), un hemisferio tendrá una diferencia mayor entre las estaciones mientras el otro hemisferio tendrá las estaciones más benignas. El hemisferio que está en verano en el perihelio recibirá un aumento en la radiación solar, pero ese mismo hemisferio estará en invierno en el afelio y tendrá un invierno más frío. El otro hemisferio tendrá un invierno relativamente más caluroso y el verano más fresco. Cuando el punto Aries es perpendicular a la línea de los ápsides los hemisferios norte y sur tendrán los contrastes similares en las estaciones. En la actualidad el verano del hemisferio sur ocurre durante el perihelio y su invierno durante el afelio. Así las estaciones del hemisferio sur deben tender a ser algo más extremas que las estaciones del hemisferio norte. Este efecto queda en parte compensado por el hecho de que el norte tiene más Tierra y el sur mucho más océano y es conocido que el efecto del mar es suavizar las máximas y elevar las mínimas[7][8][9][11].

### 6.2 Excentricidad orbital

Un factor importante que tuvo en cuenta el inglés James Croll basándose en los cálculos elaborados manualmente y desarrollados por Urbain Le Verrier. Se trata de la variación en la forma de la órbita debida a la atracción del resto de planetas del Sistema Solar. La forma de la órbita de la Tierra, varía de ser casi circular (excentricidad, baja de 0,005) a ser ligeramente elíptica (excentricidad alta de 0,058) y tiene una excentricidad media de 0,028. El componente mayor de estas variaciones ocurre en un período de 413.000 años. También hay ciclos de entre 95.000 y 136.000 años, siendo el ciclo más conocido de unos 100.000 años. La excentricidad actual es 0,017 y por tanto la diferencia entre el mayor acercamiento al Sol (perihelio) y la mayor distancia (afelio) es sólo 3,4% (5,1 millones de km). Esta diferencia supone un aumento del 6,8% en la radiación solar entrante. El perihelio ocurre actualmente alrededor del 3 de enero (En 2013, por ejemplo, esto ocurrió el 2 de enero a las 5 UTC.), mientras el afelio es alrededor del 4 de julio (ocurrirá en julio 5 en 2013). Cuando la órbita es muy elíptica, la cantidad de radiación solar en el perihelio sería aproximadamente 23% mayor que en el afelio. Según Croll los periodos de gran excentricidad serían "eras glaciales" mientras que los momentos de órbita casi circular como el actual serían "épocas interglaciales". El hecho es que la insolación global una vez más permanecería constante pero no así la de cada hemisferio por separado. Según Croll el efecto de albedo realimentaría los inviernos crudos y los hielos avanzarían pero esta hipótesis se reveló incompleta cuando se demostró que durante la última glaciación, hace tan solo 10.000 años, la excentricidad de la órbita terrestre era casi igual que la actual[3][4].

### 6.3 Inclinación del eje

Pero aun hay un tercer factor clave para explicar los ciclos glaciales. Fue Milutin Milanković quien propuso por primera vez su influencia. El eje de giro de la Tierra cambia su inclinación lentamente con el tiempo, (oblicuidad de la eclíptica). La amplitud del movimiento es de 2,4 grados. Esta precesión del eje sigue un ciclo de aproximadamente 41.000 años. Cuando la inclinación aumenta a 24,5 grados, los inviernos son más fríos y los veranos son más calurosos. Cuando la inclinación es menor (22,1 grados), los inviernos son más apacibles y los veranos más frescos. Actualmente el eje de rotación de la Tierra tiene una inclinación de 23,5 grados sobre el eje de la órbita. Para Milankovic no eran los inviernos rigurosos sino los veranos suaves los que desencadenan un período glacial. La teoría afirma que siempre nieva suficientemente en las regiones polares como para hacer crecer los glaciares pero la diferencia determinante está en la cantidad de hielo que se funde en los veranos. Si la fusión es insuficiente, crecerán; si es excesiva, retrocederán. Se observó entonces que un efecto no era determinante sin la participación del otro. Es decir que ni las variaciones de excentricidad ni las de inclinación son, por sí solas, suficientes para producir una glaciación pero que, en conjunto podían superponerse sus efectos y desencadenar un período glacial[3][4][5].

### 6.4 La oscilación del plano de la eclíptica

La variación en la inclinación de la órbita de la Tierra tiene un período de aproximadamente 70.000 años y fue estudiada por Milankovitch. Recientes investigaciones observaron que el plano de la órbita de la Tierra se mueve por la influencia de los demás planetas. El principal perturbador es el planeta Júpiter y la eclíptica oscila alrededor del plano de la órbita de Júpiter que es el plano que permanece aproximadamente invariable. La oscilación de la eclíptica es de unos 100.000 años respecto al plano invariable. Este ciclo de 100.000 años es el ciclo predominante en las edades de hielo. Se ha propuesto que un disco de polvo y otros desperdicios están en el plano invariable, y esto afecta el clima de la Tierra a través de varios medios. La Tierra se mueve actualmente a través de este plano alrededor del 9 de enero y el 9 de julio, serán los momentos en que se intercepten, también recientemente se ha observado por radar un aumento de meteoros[4].

### 6.5 La combinación de los cuatro factores

La conclusión final de todo esto es que cada cierto tiempo los cuatro factores se alían o combinan para producir un período glacial. Estos períodos son mucho más largos (unos 100.000 años) que los breves intervalos interglaciales. Ninguno de ellos por sí solo podría desencadenar quizá una glaciación pero cuando confluyen las condiciones favorables entonces se inicia el proceso. Pero aun así los cálculos no salen, es decir no coinciden con los datos observacionales. Las variaciones orbitales son demasiado leves. Lo que ocurre es que hay que tener en cuenta dos retroalimentaciones positivas: el aumento del albedo terrestre y el aumento de  $CO_2$ . La intuición nos diría que los inviernos rigurosos deberían regir los pulsos glaciales pero parece ser que son los veranos suaves los que lo hacen. La inclinación es aun de 23,4 grados pero sigue disminuyendo. Cuanto menor sea ésta, menor será la insolación en los veranos. Aun con toda la complejidad con que se ha estudiado el problema sigue sin establecerse aún una explicación total para los ritmos glaciales y es que hay que tener en cuenta otros factores no explicados por las variaciones astronómicas. A pesar de todo sí se puede afirmar que, en gran medida, el ciclo climático vienen regido por las variaciones orbitales[2][3][4].

Es importante mencionar, que hoy día hay quienes afirman que nos dirigimos hacia un nuevo período glacial, por lo cual el calentamiento global no correspondería propiamente al aumento de  $CO_2$ , ya que el aumento desproporcionado de  $CO_2$  producidos por las emanaciones volcánicas, superan con creces las producidas por el hombre, es decir que el  $CO_2$  no es el causante del calentamiento global, bueno esto último lo dejamos como una hipótesis, hasta tener unos estudios concluyentes sobre este tema tan interesante, claro está que de confirmarse esto, mostraría que el movimiento planetario es en realidad el causante de tan drásticos cambios.



## 7 Estabilidad del Sistema Solar

El Sistema Solar muestra una disposición claramente regular, con un objeto estelar central, el Sol, donde se concentra la mayor parte de la masa del sistema y los planetas girando en su entorno. Estos últimos se dividen en dos tipos principales[9][10][11]: los de tipo terrestre tienen menos masa, presentan una superficie sólida y una fina atmósfera; y más al exterior se encuentran los planetas gigantes, de gran masa y gaseosos en la mayor parte de su volumen. En esta sección trataremos de explicar las razones de esta disposición y su posible estabilidad durante un período prolongado de tiempo. Para ello se considerará una breve exposición histórica. El trabajo de Newton dejó claro que las leyes de Kepler toman en cuenta únicamente la interacción Sol-Planeta a la hora de calcular el movimiento del mismo. Las interacciones originadas por el resto de los planetas, aunque muy pequeñas, producen unas perturbaciones en las perfectas órbitas elípticas de Kepler, y no está claro si su efecto, a largo plazo, puede ser la de destruirlas. De hecho Newton se dio cuenta de éste problema y pensó que sería Dios el que entre tiempo y tiempo tendría que reajustar el movimiento de los planetas para que se mantuviera la estabilidad de las órbitas. En la mecánica desarrollada en el siglo XVIII las relaciones entre el movimiento elíptico de los distintos planetas eran calculadas mediante series perturbativas, en las cuales se confiaba debido a su fidelidad, a pesar de que nadie había demostrado de su convergencia.

Poincaré (a fines del siglo XIX), en su trabajo "Sobre el problema de tres cuerpos y las conexiones con la dinámica", distingue los siguientes aspectos: La estabilidad tiene que estar relacionada con la periodicidad del movimiento orbital, los argumentos dinámicos se pueden convertir en argumentos topológicos, es decir considerar elementos teóricos sofisticados, el problema de Hill restringido (una partícula de masa despreciable moviéndose perpendicularmente a un plano donde están situadas dos masas que se mueven en órbitas elípticas alrededor de un foco común)

Debido a que la masa del cuerpo más pequeño, por ejemplo un cometa, se puede hacer despreciable el movimiento kepleriano de los planetas no se ve alterado y puede construirse una descripción topológica representando la velocidad del cometa frente al tiempo cada vez que éste atraviesa el plano planetario, por lo tanto, para ciertas condiciones se encuentra que este movimiento es periódico, aunque inestable, de forma que el planeta cruza el plano a intervalos regulares.

Cuando Poincaré examinó en el espacio de fases el movimiento que tiene lugar en la vecindad del punto fijo correspondiente a éste movimiento, encontró una situación similar a los puntos de equilibrio inestable del péndulo. Así habrá trayectorias que se separan rápidamente de él mientras que las otras lo hacen, pero cuando invertimos el tiempo, es decir cuando va hacía atrás. Existía una diferencia importante entre el resultado del péndulo simple y lo que encontró Poincaré; en el primero, la separatriz cuando se propagaba la rama emergente y la rama incidente coincidían de forma perfecta cuando se cruzaban, pero esto no era así cuando consideramos un caso con perturbación, donde la rama emergente cruza la rama incidente en lo que hemos llamado punto homoclínico primario y a partir de allí tienen lugar infinitos cruces. Además la rama va haciendo una serie de oscilaciones, que reciben el nombre de oscilaciones homoclínicas, que se van complicando.

Esta complicación surge de dos hechos, por un lado, como el mapa de Poincaré es un mapa que conserva el área, el área de la parte superior del lóbulo tiene que coincidir con la del lóbulo inferior, y por otra parte, una rama no puede cortarse a sí misma, de tal forma que sucesivos cortes tienen que ir haciendo figuras cada vez más complicadas. El resultado es una maraña de una complejidad formidable, imagen de la dinámica caótica subyacente.

Poincaré demostró que las series de la mecánica celeste, deducidas por Lagrange y Laplace, no son en general convergentes por lo que puede existir caos en un sistema considerado desde siempre tan regular y estable como el sistema solar. Años más tarde, mediante el teorema KAM (Kolmogórov-Arnold-Moser) se demostró el mecanismo de destrucción de órbitas regulares por efecto de las perturbaciones no lineales. Pero éste teorema no alcanza para dar una respuesta concluyente al problema de la estabilidad del sistema solar. Sussman y Wisdom (1984) mediante simulaciones, encontraron que el movimiento de Plutón es caótico, con un coeficiente de Lyapunov de 20 millones de años. Pero la influencia de este planeta sobre el resto del sistema solar es pequeña.

Laskar deduce una dinámica aproximada de todo el sistema solar y encuentra que el movimiento de los planetas interiores (Mercurio, Venus, Tierra, Marte) es caótico, con un exponente de Lyapunov de 5 millones de años. Éste resultado no nos asegura que en los próximos 100 millones de años vaya a tener lugar un evento catastrófico para la Tierra, tal como una colisión con Marte o Venus, sino que los métodos tradicionales de

la mecánica celeste son incapaces de predecir si uno de éstos acontecimientos va a suceder. Analizando sus resultados, Laskar fue capaz de explicar el origen del caos del sistema solar. Los responsables son dos resonancias; una que involucra Marte y la Tierra, y la otra que involucra los movimientos de Mercurio, Venus y Júpiter. Las resonancias destruyen la predictibilidad porque amplifican los efectos gravitatorios al juntar periódicamente a los cuerpos implicados.

Sussman y Widson confirmaron los resultados de Laskar. El caos que encontraron en el sistema solar tiene dos componentes; la primera asociada al ángulo o fase que determina la posición del planeta en su órbita, y la segunda tiene que ver con la forma de ésta, la cual puede medirse con la excentricidad.

El caos asociado a la fase, como el que ocurre con el caso de Plutón, es bastante benigno pues sólo significa que con el tiempo perdemos la capacidad de predecir su posición, pero el planeta sigue su curso en la misma zona del espacio.

En cambio, el caos asociado a la forma, que es importante en el caso de Mercurio y Marte, implica que las perturbaciones de su movimiento son más importantes, y en el caso de Mercurio, puede significar la expulsión del sistema solar. La conclusión de todos estos trabajos y el papel que juega el caos en la dinámica del sistema solar todavía no está totalmente entendido. De hecho, el Sistema Solar ha sobrevivido con más o menos su forma actual durante 100 millones de años, tiempo mucho más largo de lo que sugiere el exponente de Lyapunov calculado, entonces que sucede o el sistema es muy complejo y somos incapaces de determinar todo su comportamiento o nuestras teorías adolecen de elementos que permitan estudiar de forma completa estos sistemas[6][7].

## 7.1 Oblicuidad de los planetas

La oblicuidad, ángulo del eje de rotación respecto del plano de la eclíptica es fácilmente caótica. En general impediría el desarrollo de la vida al imposibilitar el ciclo día noche. La luna, vía el efecto de las mareas juega un importante rol, el de eliminar el caos en la oblicuidad terrestre. Responsable de las estaciones climáticas en la Tierra. El plano del ecuador terrestre y el de la eclíptica, se cortan en una línea que tiene en un extremo el punto Aries, y en el diametralmente opuesto el punto Libra. Cuando el Sol cruza el punto Aries se produce el equinoccio de primavera (alrededor del 20-21 de marzo, iniciándose la primavera en el hemisferio norte y el inicio del otoño en el hemisferio sur), y a partir del cual el Sol se encuentra en el hemisferio norte terrestre; hasta que alcanza el punto Libra, en el equinoccio de otoño (alrededor del 22-23 de septiembre, iniciándose el otoño en el hemisferio norte y la primavera en el hemisferio sur). La oblicuidad en 2010 fue de  $23^{\circ} 26' 16''$  ( $23.4377^{\circ}$ ). En 1907 fue exactamente de  $23^{\circ} 27'$ . Está disminuyendo actualmente a razón de  $0.47''$  por año, debido al movimiento terrestre denominado nutación[4][5][6][7], como se ha dicho anteriormente, entonces por ello se afirma al comienzo que la variación del ángulo de rotación se puede hacer caótico, en los últimos tiempos se ha logrado trazar mapas del cambio del polo norte terrestre, se observa una fuerte variación sin seguir un patrón definido.

## 7.2 Balanceo caótico de Hiperión (satélites de Saturno)

En otros sistemas de cuerpos celestes como en el caso de Hiperión, el más externo de los satélites mayores de Saturno, también se ha observado movimiento caótico, su masa es unas 10 veces menor que la de la Luna, su forma es análoga a una pelota de rugby irregular, sus dimensiones aproximadas son 380 Km x 290 Km x 230 Km. Es importante y bastante curioso por la orientación de su eje de rotación respecto al planeta Saturno. Se estudió la dinámica de sus movimientos, en 1984, llegando a la conclusión siguiente: Aunque su movimiento orbital elongado es estable gracias a la influencia del satélite gigante Titán, su movimiento de balanceo es caótico, encontrándose en una zona de caos en el espacio de fases, es decir en su diagrama topológico. Así se puede predecir donde se encontrará el satélite Hiperión en una fecha futura, pero es imposible predecir cual será su orientación. Esto se corroboró por observaciones astronómicas midiendo la variación de su brillo, hechas en Chile, en las que no se encontró que dicho balanceo se ajustara a ninguna función con un único período[9], en pocas palabras su orientación es caótica.

### 7.3 Huecos en un cinturón de asteroides. Anillos de Saturno

La existencia de huecos en el cinturón de asteroides es uno de los casos más singulares de caos y resonancia. La fórmula de Titius-Bode determina la posición de los planetas del sistema solar, buena ley empírica ya que no se conoce los principios que la fundamentan. Ésta fórmula es corroborada para todos los planetas excepto para uno existente entre Marte y Júpiter. Allí se observó una multitud de asteroides (1.000.000), a la que se denominó cinturón de asteroides. Debido a la inmensa cantidad de cuerpos interactuando, ésta es una zona caótica la mayor parte del tiempo con excentricidades estables (no se debe pensar en un escenario en que se estén chocando constantemente entre sí, ya que la distancia media entre asteroides es de varios Km). Es previsible entre ellos una dinámica complicada. Las fuerzas gravitatorias debidas al Sol y a Júpiter se incrementan en forma periódica a medida que los asteroides recorren sus órbitas. Los asteroides se mueven bajo la acción del Sol, con períodos de revolución que dependen de su distancia, pero están sometidos a la perturbación debida a Júpiter. Por tanto, según el teorema KAM, el teorema de Kolmogórov-Arnold-Moser, obtenido en el estudio de sistemas dinámicos y cuyo marco principal es el estudio de la persistencia de movimientos cuasiperiódicos, dicho teorema resuelve el problema de los divisores pequeños, los cuales originan los problemas de convergencia en sistemas con múltiples frecuencias, desde el punto de vista topológico, el movimiento en un sistema integrable está confinado a una superficie toroidal, donde diferentes condiciones iniciales del sistema originan diferentes toros en el espacio fásico. El teorema KAM establece que, si un sistema está sometido a una pequeña perturbación no lineal, algunos toros serán deformados y otros destruidos. Los que sobreviven son aquellos que tienen un cociente de frecuencias suficientemente irracional. Es decir, se destruyen aquellos cuyo cociente de frecuencias se acerca más a un número racional, dados por la relación, algunos de sus movimientos son regulares y otros caóticos. Si se gráfica el número de asteroides versus el cociente entre sus frecuencias y la de Júpiter, aparecen huecos notables en aquellos cuyo cociente es un número racional, pues los que faltan estarían en resonancia con el planeta, cuyo efecto, al cabo de muchos ciclos, acaba por sacarles de su órbita. Algo parecido ocurre con Saturno, donde la perturbación debida a algunos satélites es la causa de los huecos entre los anillos[9][11].

## 8 Conclusiones

Se ha hecho una corta presentación de algunos aspectos de la mecánica celeste, sin pretender reemplazar a los fabulosos tratados existentes sobre esta materia, igualmente, se puede observar que la descripción de los sistemas planetarios es bastante compleja y que por lo mismo solo se hacen ciertas aproximaciones ya que son muchos y variados los elementos involucrados en un sistema de cuerpos gravitantes; las soluciones aceptadas hoy día y consideradas con rigor son las obtenidas mediante simulaciones numéricas ya que es la mejor forma de la que disponemos para resolver y predecir los elementos propios de los sistemas gravitantes, sus comportamientos y las predicciones; como en el caso del estudio del caos en sistemas planetarios, ya que no poseemos en este momento una herramienta lo suficientemente exacta y versátil para determinar el comportamiento total y completo de un sistema planetario, por ello se recurre a simulaciones y predicciones teóricas, no quiero decir con esto que la teoría del caos sea incompleta o incoherente. A pesar de todas estas limitaciones se han logrado grandes avances en el conocimiento del sistema solar como también en materia de viajes espaciales, de predicciones y observaciones planetarias, etc. Bueno, de eso se trata de encontrar las descripciones más completas y exactas para todos aquellos sistemas naturales.

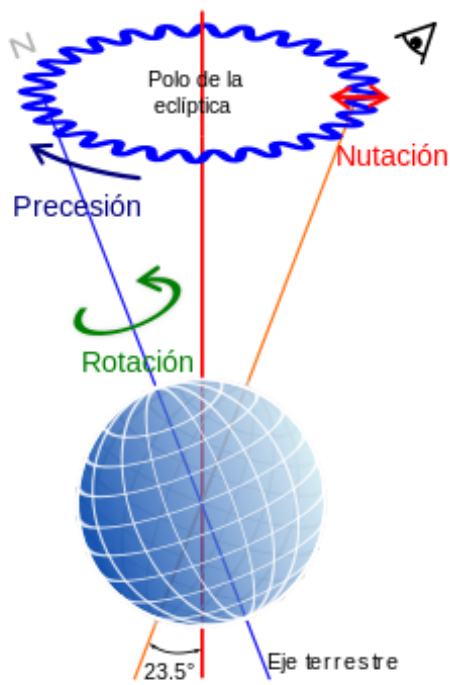
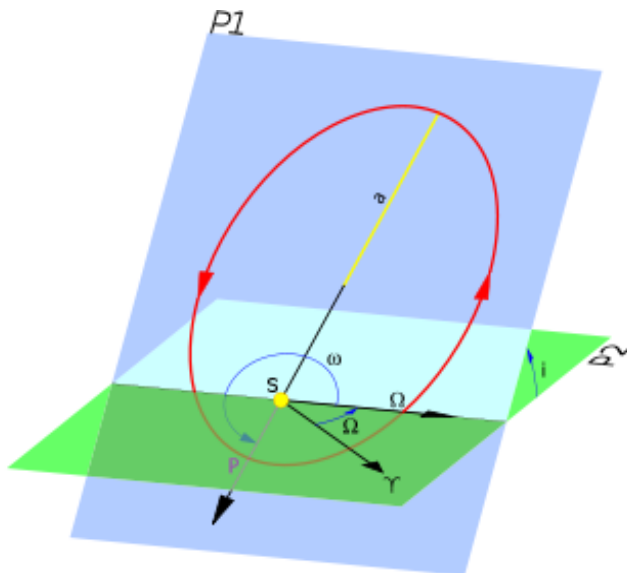


Imagen que ilustra la precesión y nutación terrestre. (Google Imágenes)



Elementos orbitales, es decir aquellos parámetros necesarios para describir una órbita celeste.(Google Imágenes)

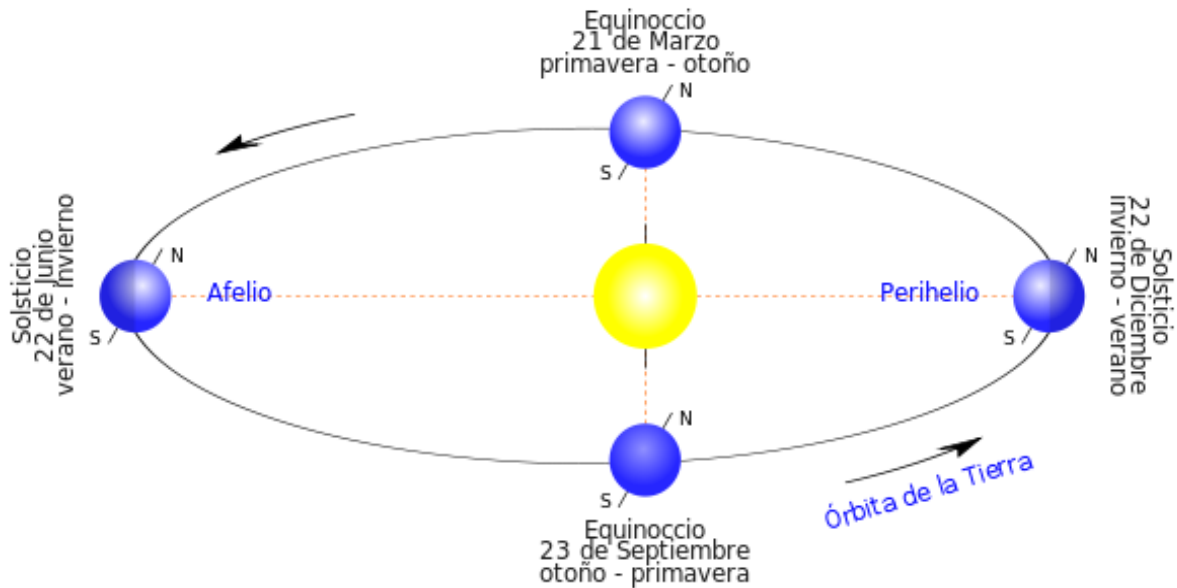


Imagen que muestra el movimiento orbital terrestre, con algunos nombres e identificaciones especiales.  
(Google Imágenes)

## References

- [1] S. W. McCuskey, Introduction to Celestial Mechanics, 1963.
- [2] D. L. Otálora, F. J. Poveda, Solución para un planeta rotante, 05 de Abr.2006.
- [3] José Luis Pérez Díaz, Astronomía, mecánica celeste y exploración espacial, Departamento de Ingeniería Mecánica. Universidad Carlos III de Madrid.
- [4] Seminario de Astronomía y Geodesia, Universidad Complutense, publicación 132, 1983.
- [5] Christian Nitschelm, Mecánica celeste, ecuaciones de movimiento, Julio del 2011.
- [6] Ernesto Pérez Chavela, El sistema Solar bajo la Mecánica Celeste, U. A. M. , 1999.
- [7] Andres Esteban de la Plaza, Cálculo de órbitas Planetarias, 2012.
- [8] Abel Gutarra, Introducción a la Mecánica Celeste, Facultad de Ciencias-UNI, 1997.
- [9] Sebastián Ferrer, Mecánica Celeste el problema de n-cuerpos, misiones espaciales y nuevos sistemas planetarios, Universidad de Murcia 2009.
- [10] Murray R. Spiegel, Mecánica Teórica, 1976
- [11] Wikipedía, sistemas caóticos, 2013.