Elementos de Relatividad Especial y General

Alexander Moreno Sánchez

Centro Colombiano de Cosmología y Astrofísica

Bogotá. D. C, Colombia.

amorenosa@unal.edu.co

Recibido 10-02- 2015; Aceptado 31 - 03- 2015; Publicado en línea 02 - 04- 2015

Resumen

En este breve trabajo se desea ilustrar algunos aspectos importantes de lo que se conoce como Teoría de la Relatividad, como es bien sabido esta es una enorme teoría que modifica las concepciones clásicas de espacio y tiempo, y además permite unificar los conceptos de gravedad y aceleración, todo ello dentro de un marco geométrico muy elegante, por lo tanto la pretención de este modesto trabajo es muy pobre frente a tan portentosa teoría, espero que este pequeño trabajo sea un punto de partida de aquellos que se interesan por seguir el desarrollo de la ciencia.

***PACS*:** 04.50.-h, 04.50.Kd, 14.70.Kv
***Palabras Claves*:** sistema coordenado, invarianza Lorentz, espaciotiempo, curvarura, gravedad.

Abstract

In this brief article is intended to illustrate some important aspects of what is known as Theory of Relativity, as is well known this is a huge theory that modifies the classical conceptions of space and time, and also unifies the concepts of gravity and acceleration all within a very elegant geometric frame, so the pretense of this modest work is very poor face as portentous theory, I hope this small work a starting point for those interested to follow the development of the science.

***PACS*:** 04.50.-h, 04.50.Kd, 14.70.Kv
***Keywords*:** coordinate system, Lorentz invariance, spacetime, curvarura, gravity.

1 Introducción

Nos encontramos frente a quizá, la mayor o una de las mayores teorías físicas existentes, se trata de la Teoría General de la Relatividad. Mucho se ha escrito sobre ella, y es muy seguro que se continue escribiendo sobre la misma. Es increíble como esta teoría atrapa, conjuga, enmarca, extiende y cubre una amplia cantidad de fenómenos y situaciones físicas diversas, su amplitud, su coherencia y su belleza es enigmática, asombrosa y paradigmática en el análisis y pensamiento científico de todos los tiempos. En este corto artículo se mostrará de forma compacta el marco teórico, es decir, matemático, que permite expresar las leyes físicas en términos relativistas, aún más, se ilustra la estructura matemática que sustenta dicha teoría, sin, por su puesto pretender ser un tratado, sólo es un bosquejo, un punto de partida. Igualmente, nos encontramos este año celebrando el centenario de la aparición de la Teoría General de la Relatividad y aunque no era mi propósito ni es mi pretención rendir homenaje a dicha teoría con este pequeño artículo, sí me parece que es muy importante recordar los principios básicos que la fundamentan, más hoy día, donde encontramos múltiples teorías que dan la sensación de haber perdido de vista el panórama inicialmente planteado por la Relatividad General o por lo menos sus aspectos experimentales y observacionales.

2 Relatividad General

En está sección se describirá lo concerniente con el modelo estándar de la gravedad, es decir, la Teoría General de la Relatividad de Einstein, la cual claramente debe ser incluida en cualquier descripción completa de las fuerzas de la naturaleza. Talvez, puede parecer sorprendente que hoy día tengamos un esquema teórico que unifica todas las fuerzas de la naturaleza pero que no incluye la gravedad. Por tanto es menester, encontrar un marco teórico consistente donde la gravedad sea incorporada en una teoría unificada. Existen varios índicios de que esto debe ser así, a saber

1. Ésta es, como se mostrará, una teoría gauge, con una estructura que es similar, aunque no idéntica a otras teorías.
2. Por sí misma, no proporciona una teoría de campos cuánticos renormalizable o finita.
3. Ésto surge naturalmente en alguna aproximación para ir más allá del modelo estándar, es decir, a travéz de una supersimetría local y de supercuerdas.
4. Su escala de masa básica, la así llamada masa de Planck, no es muy diferente de la escala de unificación de las otras fuerzas.
5. La relatividad general es una teoría muy elegante por lo cual la hace modelo para las otras fuerzas e interacciones de la naturaleza.
6. La relatividad general puede simplificarse para obtener los resultados clásicos y las predicciones convencionales.
7. Se define una entidad única llamada espaciotiempo, el cual se modela como una variedad matemática.

Bueno, lo mencionado anteriormente, es un elemento de indiscutible importancia dentro de la comprensión del mundo físico, pero no es el único, la gravedad sigue siendo una fuerza o interacción determinate, en el origen y evolución del universo, es aún una fuerza misteriosa, evocativa, sorprendente, por ello la preponderancia que tiene la relatividad general como la mejor aproximación a la gravedad o la mejor descripción actual. Evidentemente, nos encontramos frente a un singular aspecto de la naturaleza, la gravedad, considero que ésta es solo un elemento o constituyente natural, que quizá, en el futuro se revelen propiedades desconocidas de esta misteriosa interacción, o más inquietantemente que encontremos interacciones semejantes a la interacción gravitacional o descubramos leyes y principios que no conocemos de ella.

En lo siguiente se desarrollaran algunos aspectos teóricos, basados en el formalismo de las tetradas[1] [2] [3].

3 Principio de Equivalencia

La gravedad es única entre las fuerzas conocidas de la naturaleza debido a que ésta tiene el mismo efecto sobre todos los cuerpos de la naturaleza. Esto se infiere de la proporcionalidad existente entre la fuerza gravitacional sobre un objeto y la masa de los objetos, un hecho que es algunas vecés establecido como la igualdad de la "masa gravitacional" y la "masa inercial". Pruebas precisas de esta igualdad fueron hechas por Eötvös[3], cuyos experimentos muestran que una amplia variedad de cuerpos experimentan la misma aceleración en un campo gravitacional dado sin consideración de su masa o composición. Una consecuencia de está igualdad es que el efecto de cualquier campo gravitacional constante puede ser eliminado trabajando en un sistema coordenado acelerado adecuado, por ejemplo un "ascensor callendo libremente", esto es llamado el "principio de equivalencia débil" . La simetría fundamental del modelo estándar gravitacional es precisamente éste principio o PED, la prueba más precisa de la manifestación del PED es la universalidad de la caída libre o por sus siglas en iglés UFF, aunque a la fecha no se ha detectado ninguna violación del UFF, existen fuertes razones para considerar que una teoría cuántica de la gravedad viola está simetría para alguna escala de longitud. Puede resumirse la situación diciendo que casi todas las aproximaciones para extender el marco de trabajo actual de la física (modos Kaluza-Klein, teoría de cuerdas, supercuerdas, supergravedad, p-branes, branes, supersimetrías,.....) predicen la existencia de nuevas interacciones mediadas por campos escalares o vectoriales que violan la UFF. El principio de equivalencia débil, también se puede expresar de la siguiente manera: el movimiento de cualquier partícula de prueba callendo libremente es independiente de su composición o estructura, donde una partícula de prueba es definida como un cuerpo que es electricamente neutro, que tiene una energía de ligadura gravitacional despreciable comparada con su energía en reposo, con un momentum angular despreciable, y que sea suficientemente pequeño para que las inhomogenéidades del campo gravitacional dentro de su volumen tenga efectos despreciables sobre su movimiento[1] [2] [3].

De forma más general, podemos escoger sistemas coordenados tal que localmente el campo gravitacional puede ser eliminado, esto se conoce como el "principio de equivalencia fuerte" o PEF, el cual asegura, que en una región suficientemente pequeña de espacio los campos gravitacionales y los marcos de referencia acelerados tienen efectos idénticos (equivalencia aceleración-gravedad). Desde la perspectiva de la física de partículas, concerniente con el estudio de fuerzas, es probablemente mejor pensar el principio de equivalencia no como una manera de eliminar la gravedad, sino como el medio que nos permite usar cualquier sistema coordenado, no sólo inercial, es decir sistemas no acelerados, para lo cual estamos restringidos si la gravedad es excluida. Igualmente, se tiene que en un marco callendo libremente no local se puede detectar la existencia de un campo gravitacional, considerando el movimiento de partículas de prueba como en el principio de equivalencia débil, o desde cualquier otro fenómeno de física relativista especial, por lo cual se puede establecer que para cada evento puntual del espaciotiempo, existe una vecindad suficientemente pequeña, tal que en cada marco local callendo libremente en esta vecindad, todas las leyes físicas no gravitacionales obedecen las leyes de la relatividad especial. Además si se reemplaza en el enunciado todas las leyes físicas no gravitacionales por todas las leyes físicas, se obtiene el así llamado principio de equivalencia fuerte[3] [4].

4 Coordenadas generales

Para expresar está idea en forma matemática, comenzamos escogiendo un conjunto de coordenadas tal que en cada punto del espaciotiempo podemos asignar un conjunto de valores dado por $\{x^\mu;\ \mu = 0, 1, 2, 3\}$. En efecto, ninguno de nuestros resultados será alterado si permitimos que el número de dimensiones espaciales se incremento con $d - 1 > 3$, y esto será importante para otros fines, pero aún más, el marco teórico de la relatividad general permite extender el número de dimensiones espaciales sin modificar sustancialmente sus principios y alcances[1].

En cada punto del espaciotiempo se define un conjunto de cuatro vectores (generalmente muchos más) n_μ , cada uno de los cuales está en la dirección de los ejes coordenados, además son vectores unitarios, en el sentido de que sus longitudes corresponden a incrementos unitarios de las coordenadas. Entonces, se puede obtener el incremento de los cuatro vectores desde el punto x^μ al punto adyacente o vecino $x^\mu + dx^\mu$ dado por

$$dx = dx^\mu n_\mu \ , \tag{1}$$

ahora, se define el tensor métrico como $g_{\mu\nu}$ asociado con estas coordenadas introduciendo un producto escalar

$$g_{\mu\nu} = n_\mu n_\nu = g_{\nu\mu} \ , \tag{2}$$

con esto, la "distancia" o intervalo espaciotemporal ds, entre los puntos x^μ y $x^\mu + dx^\mu$, está dada por el producto escalar

$$ds^2 = dxdx = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \ , \tag{3}$$

entonces en cada punto del espaciotiempo x^μ , se introduce un sistema coordenado local, es decir en términos del principio de equivalencia "un ascensor que cae libremente", por lo tanto un sistema en el cual no existe ninguna fuerza gravitacional. Se define este sistema por un conjunto de vectores e_n , con $n = 0, 1, 2, 3$ el cual satisface

$$e_m e_n = \eta_{mn} \ , \tag{4}$$

en donde η_{mn} es el tensor métrico del espacio plano de Minkowski,

$$\eta_{mn} = diag(+1, -1, -1, -1, ...) \ , \tag{5}$$

así, de este modo al conjunto de vectores e_n se le llama una tétrada, término apropiado sólo para $d = 4$. De esta forma se puede expresar cualquier miembro de una tetrada en términos de los vectores unitarios del sistema coordenado general, haciendo

$$e_n = e_n^{\mu} n_{\mu} \ , \tag{6}$$

por medio de la tétrada e_n^{μ} . La teoría de las tétradas es un caso especial para una variedad diferenciable cuatridimensional. Se aplica a la métrica de cualquier signatura, en cualquier dimensión, y para una seudo-geometría de Riemann, junto con una teoría de la conexión de Cartan, esto es un método alternativo en geometría diferencial. En diversos contextos también se ha llamado método del marco ortonormal, repère mobile, forma de soldaje, forma no holonómica ortonormal. Esta sección es un acercamiento a las tétradas, pero escrito en términos generales. En otras dimensiones distintas de 4, se han utilizado palabras como tríada, péntada, funfbein, elfbein, etc.. Vielbein cubre todas las dimensiones. Si se busca una notación de índice base-dependiente, ver tétrada (notación de índice).

Mediante la combinación adecuada de algunas expresiones anteriores se encuentra la siguiente relación[1]

$$g_{\mu\nu} e_m^{\mu} e_n^{\nu} = \eta_{mn} \ , \tag{7}$$

por lo tanto se espera que se puedan escoger los e_m para que varien continuamante de punto a punto del espaciotiempo, así, que los e_m^{μ} se consideran como una función diferenciable de x^{μ}. En cualquier región local este será el caso si se tiene un campo gravitacional sin discontinuidades. Sin embargo dependiendo de la topología de la variedad, tal escogencia puede no ser posible globalmente, o sobre toda la variedad espaciotemporal. Como ejemplo trivial de tal restricción topológica, recuérdese el hecho de que una superficie bidimensional de una esfera en tres dimensiones no es posible definir un campo vectorial unitario continuo sobre la superficie, por ello se divide la variedad en dos regiones que se sobrelapan, donde se definen tétradas variando continuamente en cada una de ellas.

Bien, ahora se introduce la tétrada inversa, e_{ν}^{m} mediante

$$e_m^{\mu} e_{\nu}^{m} = \delta_{\nu}^{\mu} \ , \tag{8}$$

donde δ_{ν}^{μ} es el delta de Kronecker. Por lo tanto $e_n = e_n^{\mu} n_{\mu}$ lo cual conduce a

$$n_{\nu} = e_{\nu}^{n} e_n \ , \tag{9}$$

si multiplicamos esto por e_m^{ν} se puede deducir que

$$e_m^{\nu} e_{\nu}^{n} = \delta_m^n \ , \tag{10}$$

de tal forma que se puede encontrar que

$$g_{\mu\nu} = e_{\mu}^{m} e_{\nu}^{n} \eta_{mn} \ , \tag{11}$$

por lo tanto en este sentido, la tétrada e_{μ}^{m} puede ser considerada como "la raíz cuadrada" de la métrica $g_{\mu\nu}$, así que el conocimiento completo de la tétrada determina completamente la métrica.

Es útil ahora introducir la métrica plana η^{mn} , la cual se define numéricamente idéntica a η_{mn}, por consiguiente claramente se tiene la idéntidad

$$\eta^{np} \eta_{mp} = \delta_m^n \ , \tag{12}$$

la cual permite subir índices con η^{mn} o bajar índices con η_{mn} , por ejemplo se puede definir

$$e^{m\mu} = \eta^{mn} e_n^{\mu} \ . \tag{13}$$

Similarmente, para coordenadas espaciales generales es conveniente introducir el tensor métrico inverso, $g^{\mu\nu}$, definido por

$$g^{\mu\lambda} g_{\nu\lambda} = \delta^{\mu}_{\nu} \ , \tag{14}$$

de forma similar se puede subir o bajar índices, por ejemplo

$$e^{m}_{\mu} = g_{\mu\nu} e^{m\nu} \ , \ \ x_{\mu} = g_{\mu\nu} x^{\nu} \ , \tag{15}$$

con lo cual se puede mostrar que

$$g^{\mu\nu} = e^{\mu}_{m} e^{\nu}_{n} \eta^{mn} \ . \tag{16}$$

Hasta este momento, se ha hecho una descripción matemática sobre el espaciotiempo, pero la "física" entra a travéz de la hipótesis de la invarianza de las leyes físicas: en partícular de que las leyes de la física deben ser invariantes bajo una transformación general de coordenadas (TCG), y bajo una transformación de Lorentz local (TLL), es decir, bajo rotaciones de las tétradas. En otros términos, la validéz de las ecuaciones fundamentales no debe depender de la escogencia o asignación de las coordenadas x^{μ} , o de las tétradas e_n. Este es el hecho por el cual la escogencia de tétradas puede hacerse independiente de cada punto del espaciotiempo, tal que suministre un vínculo entre la gravedad y las teorías gauge[3] [4] [5].

5 Transformación local de Lorentz

Se considera, primero los efectos de una transformación local de Lorentz (TLL), esto es una rotación de la tétrada, lo cual se expresa como[1] [4]

$$e_m \rightarrow \acute{e}_m = \Lambda^{n}_{m} e_n \ , \tag{17}$$

que según lo mencinado anteriormente, se cumple que

$$\acute{e}_m \acute{e}_n = \eta_{mn} \ , \tag{18}$$

lo cual implica que

$$\Lambda^{p}_{m} \Lambda^{q}_{n} \eta_{pq} = \eta_{mn} \ , \tag{19}$$

notése que si el factor η fuera reemplazado por el $\delta-$de Kronecker esta ecuación nos diría que Λ^{n}_{m} seria una matriz ortogonal. Los facotores η se presentan porque Λ^{n}_{m} es una representación del grupo $O(1,3)$ además de $O(4)$, entonces podemos escribir la última expresión como

$$\Lambda^{kp} \Lambda_{np} = \delta^{k}_{n} \ \ . \tag{20}$$

Un ejemplo frecuente de una transformación local de Lorentz son los llamados "boots", definido mediante una velocidad v a lo largo de los tres ejes coordenados, donde la correspondiente matriz de "rotación" es

$$\Lambda^{n}_{m} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \ , \tag{21}$$

donde, como es usual tenemos $\beta = \frac{v}{c}$ y $\gamma = (1-\beta)^{-1/2}$. De este modo para encontrar la correspondiente regla de transformación para las componentes de un vector se considera, por ejemplo,

$$x = x^{m} \hat{e}_m \ , \tag{22}$$

de tal forma que este vector en el sistema coordenado transformado, se puede expresar como

$$x = x'^m \hat{e}'_m = x'^m \Lambda^n_m \hat{e}_n \ , \tag{23}$$

además, se puede encontrar que

$$x^n = \Lambda^n_m x^{'m} \ , \tag{24}$$

expresión que se puede invertir para dar

$$x^{'m} = \Lambda^m_n x^n \ . \tag{25}$$

Ahora, consideremos la transformación de la derivada de una función o campo escalar, para lo cual tenemos

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^m} \to \frac{\partial \phi}{\partial x'^m} = \frac{\partial \phi}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial x'^m} = \Lambda^k_m \frac{\partial \phi}{\partial x^k} \ , \tag{26}$$

o de forma más concisa

$$(\partial_m \phi)' = \Lambda^k_m (\partial_k \phi) \ . \tag{27}$$

Se puede observar que la derivada respecto a x^m se transforma como un índice que baja la componente covariante, entonces, una cantidad de dos índices se transformará como

$$e'_{m\mu} = \Lambda^n_m e_{n\mu} \ , \tag{28}$$

de lo cual se puede encontrar la siguiente transformación

$$e'^m_\mu = \Lambda^m_k e^k_\mu \ . \tag{29}$$

De este modo, para muchos propósitos es conveniente considerar sólo transformaciones locales de Lorentz (LLT) infinitesimales, las cuales se pueden expresar como

$$\Lambda^n_m = \delta^n_m + \lambda^n_m \ , \tag{30}$$

donde la matriz λ^n_m es pequeña o infinitesimal. Así, de esta forma podemos expresar la transformación general a primer orden como

$$\eta_{pq}(\delta^p_m \lambda^q_n + \lambda^p_m \delta^q_n) = 0 \ , \tag{31}$$

o equivalentemente como

$$\lambda_{nm} = -\lambda_{mn} \ . \tag{32}$$

Volvamos al efecto de una transformación de coordenadas general la cual se puede escribir como

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x) \ , \tag{33}$$

donde $\xi^\mu(x)$ es alguna función continua de x. De este modo las componentes de un vector dx se transforman como

$$dx \to dx'^\mu = \left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\right) dx^\nu = \left(\delta^\mu_\nu + \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\nu}\right) dx^\nu \ , \tag{34}$$

esta expresión permite obtener la transformación asociada con cualquier índice contravariante (índice griego superior), por ejemplo tenemos

$$e^\mu_m(x) \to e'^\mu_\nu(x') = \left(\delta^\mu_\nu + \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\nu}\right) e^\nu_m(x) \ , \tag{35}$$

donde hemos tomado sólo términos a primer orden en ξ^μ, de tal modo que el cambio en $e^\mu_m(x)$ está dado por

$$\delta_{TGC}(e^\mu_m) = \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\nu} e^\nu_m \ , \tag{36}$$

con esta expresión y con algunos desarrollos algebraicos adicionales podemos obtener[1] [2] [3]

$$\delta_{TGC}(e^m_\mu) = -\frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\mu} e^m_\nu \ . \tag{37}$$

Estas últimas expresiones constituyen la transformación general de coordenadas, las cuales son de gran importancia en la relatividad general.

6 Derivada Covariante

Las ecuaciones de la física contendran derivadas de campos tensoriales y por lo tanto es necesario definir derivadas covariantes las cuales deben contener las propiedades de transformación correctas de las transformaciones locales de Lorentz TLL y de la transformación general de coordenadas TGC. Definimos la derivada covariante de e^m_ν mediante la siguiente relación[1] [2] [3]

$$D_\mu e^m_\nu = \partial_\mu e^m_\nu - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} e^m_\lambda + \omega^m_{\mu n} e^n_\nu \ , \tag{38}$$

donde $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ es la conexión asociada con la transformación general de coordenadas, es referido como símbolo de Christoffel, el cual no es un tensor. De forma análoga $\omega^m_{\mu n}$ se se asocia con la transformación local de Lorentz y es un vector bajo la transformación general de coordenadas, este vector es llamado la "conexión de espín", ahora se cálcula como $\omega^m_{\mu n}$ se transforma bajo una TLL requiriéndo que $D_\mu e^m_\nu$ tenga las propiedades de transformación adecuadas, de tal modo que tenemos

$$\delta_{TLL}(D_\mu e^m_\nu) = \lambda^m_n (D_\mu e^n_\nu) = \lambda^m_n (\partial_\mu e^n_\nu - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} e^n_\lambda + \omega^n_{\mu k} e^k_\nu) \ , \tag{39}$$

bajo algunos desarrollos algebraicos podemos obtener

$$\delta_{TLL}(\omega^m_{\mu n}) = -\partial_\mu \lambda^m_n + \lambda^m_p \omega^p_{\mu n} - \lambda^p_n \omega^m_{\mu p} \ , \tag{40}$$

de forma análoga, se encuentra para $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ el siguiente resultado

$$\delta_{TGC}(\Gamma^\lambda_{\mu\nu}) = -\partial_\mu \partial_\nu \xi^\lambda - (\partial_\mu \xi^\rho)\Gamma^\lambda_{\rho\nu} - (\partial_\nu \xi^\rho)\Gamma^\lambda_{\mu\rho} + (\partial_\rho \xi^\lambda)\Gamma^\rho_{\mu\nu} \ , \tag{41}$$

estos desarrollos muestran que las conexiones no se transforman como tensores.

Ahora, el siguiente paso es obtener el lagrangiano para los campos e^m_μ , $\omega^m_{\mu n}$, $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$. Sin embargo en la teoría de Einstein de la relatividad no existen campos independientes. En lugar de ello, las dos conexiones son postuladas como funciones de e^m_μ que junto a los desarrollos obtenidos anteriormente lleva a expresiones únicas para estas conexiones, en partícular tenemos

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \left[\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu}\right] \ , \tag{42}$$

esto tiene la importante propiedad simétrica $\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\nu\mu}$ lo cual implica que $D_\mu D_\nu \phi = D_\nu D_\mu \phi$ para cualquier campo escalar ϕ . De esta forma se dice que el espacio tiene "torsión" cero[1].

7 El lagrangiano de Einstein

Se puede introducir un tensor muy importante conocido como el tensor de intensidad-esfuerzo, el cual se construye para incorporar los contenidos y la dinámica de la materia energía, se denota como $T_{\mu\nu}$, el cual se construye para situaciones especiales. De igual forma se introduce el siguiente tensor[1]

$$R_{\mu\nu}^{mn} = \partial_\mu \omega_\nu^{mn} - \partial_\nu \omega_\mu^{mn} + \omega_{\mu k}^{m} \omega_\nu^{kn} - \omega_{\nu k}^{m} \omega_\mu^{kn} \ , \tag{43}$$

se puede mostrar que esta cantidad se transforma como un tensor de dos índices, bajo tansformaciones TGC y TLL. Se puede observar que no se ha introducido las conexiones $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ porque ellas se cancelan, ya que $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}$ mientras que $R_{\mu\nu}^{mn}$ es antisimétrico bajo permutación de índices $\mu \longleftrightarrow \nu$. Entoces se debe construir un escalar del 'cuadrado' de $R_{\mu\nu}^{mn}$ con los índices adecuadamente contraídos, esto conduce a un término del lagrangiano, el cual debe contener la energía cinética de los $\omega_{\mu n}^{m}$, entonces se puede representar de forma independiente, campos que se propagan. Ahora formamos una cantidad escalar R , definiendo

$$R = R_{\mu\nu}^{mn} e_m^\nu e_n^\mu \ , \tag{44}$$

con lo cual se escribe el Lagrangiano de Einstein como

$$\mathcal{L}^{(E)} = -\frac{eR}{2\kappa^2} \ , \tag{45}$$

donde se define e como

$$e = \det(e_\lambda^m) = \left[\det(e_m^\lambda)\right]^{-1} = \left[-\det(g_{\mu\nu})\right]^{1/2} \ , \tag{46}$$

de tal manera que podemos pensar que $\mathcal{L}^{(E)}$ es una densidad escalar. Como R es invariante bajo una TGC, entonces se puede determinar la integral de acción definida por

$$S^{(E)} = \int d^4x \mathcal{L}^{(E)} \ . \tag{47}$$

La cantidad κ es una constante arbitraria que no juega ningún rol a menos que se introduzcan términos de materia adicionales. Como R tiene dimensiones de $(longitud)^{-2}$ y la densidad lagrangiana tiene dimensiones de $(energía)(longitud)^{-3}$, se sigue que κ^2 tiene dimensiones de $(longitud)(energía)^{-1}$, o equivalentemente en unidades tal que $\hbar = c = 1$, así κ tendría dimensiones de $(masa)^{-1}$.

Las ecuaciones clásicas de movimiento para los campos $\omega_{\mu n}^{m}$ y e_μ^n son obtenidas minimizando la acción, definida anteriormente, respecto a los campos, entonces de este modo encontramos la ecuación de movimiento respecto a $\omega_{\mu n}^{m}$, la cual es

$$\omega_{\mu mn} = \frac{1}{2} e_m^\nu (\partial_\mu e_{n\nu} - \partial_\nu e_{n\mu}) - \frac{1}{2} e_n^\nu (\partial_\mu e_{m\nu} - \partial_\nu e_{m\mu}) - \frac{1}{2} e_m^\rho e_n^\sigma (\partial_\rho e_{p\sigma} - \partial_\sigma e_{p\rho}) e_\mu^p \ . \tag{48}$$

Esta es una ecuación puramente algebraica, porque en el lagrangiano las derivadas de $\omega_{\mu n}^{m}$ sólo se consideran los términos lineales, lo cual posibilita la eliminación de los $\omega_{\mu n}^{m}$ en favor de los e_m^μ.

Ahora bien, minimizando la acción respecto e_m^μ rapidamente, se observa que se requiere

$$(R_{\mu\nu}^{mn} e_n^\mu + R_{\nu\mu}^{nm} e_n^\mu) e + R_{\mu\lambda}^{pn} e_p^\lambda e_n^\mu \frac{\delta e}{\delta e_m^\nu} = 0 \ . \tag{49}$$

Bien, recordemos el resultado general que se tiene para cualquier matriz $\mathbf{M}$

$$\frac{\delta(\det(\mathbf{M}))}{\delta M_{jk}} = \det(\mathbf{M})(\mathbf{M}^{-1})_{kj} \ , \tag{50}$$

así, podemos obtener

$$\frac{\delta e}{\delta e_m^\nu} = -e e_\nu^m \ , \tag{51}$$

con lo cual obtenemos

$$R_{\mu\nu}^{mn} e_n^\mu - \frac{1}{2} R \ e_\nu^m = 0 \ , \tag{52}$$

donde se ha hecho uso de las propiedades de antisimetrización de $R^{mn}_{\mu\nu}$, mediante algunos pasos algebraicos se obtiene

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 0 \ , \tag{53}$$

donde $R_{\mu\nu} = R^{mn}_{\lambda\nu} e^{\lambda}_{n} e_{m\mu}$.

La ecuación obtenidad anteriormente, es la ecuación de Einstein para e^{μ}_{m} , y de este modo para la métrica $g_{\mu\nu}$, en el espacio vacío. La ecuación es no lineal y tiene muchas soluciones, en analogía con las múltiples trayectorias obtenidas para un cuerpo que se lanza con diferentes condiciones iniciales en mecánica clásica.

El proceso matemático que se ha seguido, en el cual $\omega^{m}_{\mu n}$ y e^{μ}_{m} son considerados como campos independientes, se conoce con el nombre de 'formalismo a primer orden' o formalismo de 'Palatini'. Un proceso alterno se sigue con la conexión de spín como una función de e^{μ}_{m}, con este proceso conduce a un lagrangiano que contiene sólo campos e^{μ}_{m} . Este proceso es referido como 'formalismo a segundo orden'. A nivel clásico y en ausencia de materia, los dos procesos anotados anteriormente son idénticos[1].

La versión cuantizada de los dos formalismos no necesariamante es la misma, ya que el formalismo a primer orden permite fluctuaciones cuánticas de $\omega^{m}_{\mu n}$ alrededor del valor clásico. También, con la inclusión de materia en el Lagrangiano, el formalismo a primer orden da un $\omega^{m}_{\mu n}$ que en general depende de otros campos, así los dos formalismos dan diferentes resultados, aun clasicamente. Sin embargo, estas diferencias solo aparecen para altos ordenes del acople gravitacional, y así de este modo unicamente se afectan las distancias muy cortas del orden de la longitud de Planck $l_P = \left(\frac{\hbar G_N}{c^3}\right)^{1/2} \approx 1.6 \times 10^{-35} m$.

8 El tensor de Curvatura

Se obtienen propiedades de los símbolos R introducidos anteriormente. Esto suministrará un vínculo entre la aproximación considerada y tratamientos más generales. En primer lugar bajamos los índices de $R^{mn}_{\lambda\nu}$ mediante[1] [2] [3] [4]

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = R^{mn}_{\lambda\nu} e_{m\rho} e_{n\sigma} \ , \tag{54}$$

esta cantidad es conocida como el tensor de curvatura de Riemann-Cristoffel. Tomando las expresiones anteriormente halladas de $\omega^{m}_{\mu n}$ en la definición de $R^{mn}_{\lambda\nu}$, conseguimos expresar este tensor en términos de los $e_{m\rho}$ y de este modo en términos de la métrica, con lo cual se encuentra

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2}\left[\partial_\nu \partial_\rho g_{\mu\sigma} - \partial_\mu \partial_\rho g_{\nu\sigma} - \partial_\nu \partial_\sigma g_{\mu\rho} + \partial_\mu \partial_\sigma g_{\nu\rho}\right] + \Gamma_{\lambda\mu\sigma}\Gamma^{\lambda}_{\nu\rho} - \Gamma_{\lambda\mu\rho}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} \ , \tag{55}$$

así, se pueden obtener las siguientes relaciones de simetría-antisimetría

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = -R_{\nu\mu\rho\sigma} = -R_{\mu\nu\sigma\rho} = R_{\rho\sigma\mu\nu} \ . \tag{56}$$

Una consecuencia de estas relaciones, es que en el espaciotiempo cudri-dimensional, unicamente 20 de las $4^4 = 256$ componentes de $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ son independientes. Estas 20 componentes definen completamente las propiedades de curvatura del espaciotiempo. Todos los elementos del tensor de Riemann-Cristoffel son cero, si solamente sí, el espacio es plano, es decir si, las coordenadas se pueden escoger de tal forma que $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, note que si esto no es cierto en un sistema coordenado dado no se puede asumir que el espacio no sea plano. La única manera que podemos estar seguros es calcular los $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ y mostrar que al menos una de las componentes es diferente de cero.

El tensor de dos índices $R_{\mu\nu}$ que aparece en la ecuación de Einstein se conoce con el nombre de tensor de Ricci, y se relaciona con el tensor $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ mediante

$$R^{mn}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu\rho\sigma} e^{m\rho} e^{n\sigma} \ , \tag{57}$$

de tal modo que con algun paso algebraico adicional obtenemos

$$R_{\mu\nu} = R_{\lambda\nu\rho\sigma} e^{m\rho} e^{n\sigma} e_m^\lambda e_{n\nu} = R_{\lambda\nu\mu\sigma} g^{\sigma\lambda} \ , \tag{58}$$

lo que permite concluir que $R_{\mu\nu} = R^\lambda_{\mu\nu\lambda}$. Además, el tensor de Ricci es simétrico, es decir $R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$.

Ahora bién, la contracción de los dos índices del tensor de Ricci conduce al escalar de curvatura R, dado por

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R^\mu_\mu \ , \tag{59}$$

se puede mostrar que los siguientes pasos son equivalentes

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} g^{\sigma\lambda} R_{\lambda\nu\mu\sigma} = g^{\mu\nu} g^{\sigma\lambda} R^{mn}_{\lambda\nu} e_{m\mu} e_{n\sigma} = R^{mn}_{\lambda\nu} e_m^\nu e_n^\lambda \ . \tag{60}$$

Es importante mencionar que unicamente el tensor de Riemann-Cristoffel $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ con sus 20 componentes independientes contiene toda la información acerca del espacio, ya que $R_{\mu\nu}$ unicamente tiene 10 componentes y R tiene unicamente una componente. Por lo tanto, cuando $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ sea idénticamente cero, ambos $R_{\mu\nu}$ y R son también cero, pero lo contrario de esto no necesariamente es cierto. Un espacio donde $R_{\mu\nu} = 0$ se dice que es un espacio plano de Ricci, pero un espacio plano de Ricci no necesariamente es plano.

Finalmente, se da una relación útil para $R_{\mu\nu}$, la cual se puede deducir de algunas consideraciones algebraicas[5]

$$R_{\mu\nu} = \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\mu\lambda} - \partial_\lambda \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma^\rho_{\mu\nu} \Gamma^\sigma_{\rho\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\sigma} \Gamma^\sigma_{\nu\rho} \ .$$

9 Inclusión de Materia

Con el fin de relacionar el tratamiento puramente geométrico, se hace necesario introducir la materia-energía, lo cual brindará la posibilidad de crear un marco físico, para ello se considera una nueva acción definida como[1]

$$S = S^{(E)} + S^{(M)} \ , \tag{61}$$

donde el término $S^{(M)}$ describe los fermiones, los bosones, los campos gauge, etc. Claramente, se requere que $S^{(M)}$ también sea invariante bajo TLL y TGC.

Así, podemos escribir $S^{(M)}$ en términos de la densidad Lagrangiana, dada por

$$S^{(M)} = \int d^4x \mathcal{L}^{(M)} \ , \tag{62}$$

y esta puede ser expresada en términos de un esclar U como

$$\mathcal{L}^{(M)} = eU \ . \tag{63}$$

Por lo tanto, cuando variamos la acción respecto a e_m^ν , se obtiene

$$\delta S^{(M)} = \int d^4x e \left[\frac{\delta U}{\delta e_m^\nu} - e_\nu^m U \right] \delta e_m^\nu \ , \tag{64}$$

asi, podemos definir $T_{\mu\nu}$ mediante

$$T_{\mu\nu} = -e_{m\mu} \left[\frac{\delta U}{\delta e_m^\nu} - e_\nu^m U \right] \ , \tag{65}$$

entonces, la ecuación de Einstein es ahora expresada como

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = -\kappa^2 T_{\mu\nu} \ , \tag{66}$$

donde el factor κ^2 , suministra el acople entre materia y campos gravitacionales y el tensor $T_{\mu\nu}$ es conocido familiarmente como el tensor momentum-energía, el cual se puede obtener para algunos casos concretos.

La ecuación de campo obtenida muestra que, en la presencia de un tensor de momentum-energía no cero, el tensor $R_{\mu\nu} \neq 0$, así que el espacio no puede ser plano de Ricci.

Bién, se consideraran algunos casos para $\mathcal{L}^{(M)}$, uno de los casos más simples consiste en considerar una densidad de energía de fondo constante

$$\mathcal{L}^{(\text{cosmo})} = \frac{e}{\kappa^2}\Lambda \ , \tag{67}$$

donde Λ es llamada la constante cosmológica, entonces se obtiene para el tensor momentum-energía

$$T_{\mu\nu} = \frac{g_{\mu\nu}}{\kappa^2}\Lambda \ , \tag{68}$$

con lo cual la ecuación de Einstein toma la forma[2]

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0 \ , \tag{69}$$

podemos, mirar que la gravedad (curvatura), debido al acople con la energía, da un significado al valor absoluto de la energía potencial, un significado que está ausente en la física no gravitacional donde unicamente las fuerzas-las derivadas de la energía potencial-tienen significado, además, empiricamente, Λ es en cualquier escala razonable muy pequeña, un hecho que no se entiende hoy día (problema de la constante cosmológica).

Como segundo ejemplo de un lagrangiano de materia, consideremos un campo sin masa de espin-$\frac{1}{2}$, entonces, en el espacio plano el Lagrangiano está dado por

$$\mathcal{L}^{(1/2)} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi \ , \tag{70}$$

de este modo, con el fin de generalizar esto, reemplazamos $\partial_\mu\psi$ por una derivada covariante apropiada $D_\mu\psi$ la cual debe transformarse como un espinor bajo una TLL y como un vector bajo una TGC, es decir

$$\delta_{TLL}(D_\mu\psi) = -\frac{i}{4}\lambda^{nm}\sigma_{nm}D_\mu\psi \ \ , \tag{71}$$

donde λ^{nm} son los parámetros infinitesimales, y

$$\delta_{TGC}(D_\mu\psi) = -\frac{\partial\xi^\nu}{\partial x^\nu}D_\mu\psi \ \ , \tag{72}$$

se observa que σ_{nm} está definido en términos de las matrices de Dirac usuales en un espacio plano, es decir como

$$\sigma_{nm} = \frac{1}{2}i(\gamma_n\gamma_m - \gamma_m\gamma_n) \ . \tag{73}$$

Estas ecuaciones son satisfechas poniendo

$$D_\mu\psi = \partial_\mu\psi - \frac{i}{4}\omega_\mu^{mn}\sigma_{mn}\psi \ , \tag{74}$$

lo cual permite entender porque ω_μ^{mn} es referido como la conexión de espín. Con lo anterior, la nueva densidad Lagrangiana se puede expresar como

$$\mathcal{L}^{(1/2)} = ie\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi \ , \tag{75}$$

donde e es introducido porque $\mathcal{L}$ es una densidad escalar, y donde los

$$\gamma^\mu = e_n^\mu\gamma^n \ , \tag{76}$$

son las matrices γ en espacios curvos que, en general, son funciones de x^μ .

Un ejemplo final, considera una partícula clásica simple de masa m, entonces, el camino seguido por esta partícula puede ser escrito en forma paramétrica como

$$x^\mu = x^\mu(\tau) \ , \tag{77}$$

donde el parámetro τ define la posición de la partícula sobre la trayectoria, un posible parámetro τ puede ser la coordenada temporal $\tau = x^0$, pero se pueden considerar otros tipos de parámetros. Entonces bajo estas consideraciones, se puede construir un lagrangiano escalar definido por

$$L^{(p)} = -m \left[g_{\mu\nu} \dot{x}^{\mu} \dot{x}^{\nu} \right]^{1/2} \quad , \tag{78}$$

donde el punto denota la derivada respecto al llamado parámetro afín. Se puede interpretar la expresión anterior si se considera que no existe campo gravitacional, por lo cual se puede identificar $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ y si se considera τ como x^0 y adicionalmente se toma el límite no relativista o bajas velocidades, se obtiene

$$L^{(p)} = -m(1 - \dot{\mathbf{x}}^2)^{1/2} \approx -m + \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{x}}^2 + ... \, , \tag{79}$$

lo cual, si no consideramos la masa en reposo, basicamnete se obtiene la energía cinética de la partícula. Ahora bien, si se considera la acción

$$S^{(p)} = -m \int d\tau \left[g_{\mu\nu} \dot{x}^{\mu} \dot{x}^{\nu} \right]^{1/2} \quad , \tag{80}$$

es proporcional a la longitud de la trayectoria entre sus puntos finales. Esta interpretación geométrica, permite verificar la invarianza de la reparametrización de $S^{(p)}$, es decir la invarianza bajo

$$\tau \to f(\tau) \; . \tag{81}$$

Ahora, con el fin de escribir la acción como una integral sobre todo el espacio, se introduce una función delta, tal que

$$S^{(p)} = -m \int d^4x \int d\tau \left[g_{\mu\nu} \dot{x}^{\mu} \dot{x}^{\nu} \right]^{1/2} \delta^4(x - x(\tau)) \; , \tag{82}$$

entonces, si se realizan las variaciones $\frac{\delta S^{(p)}}{\delta e^{\nu}_{m}}$ sobre esta acción, se encuentra el tensor momentum-energía de una partícula simple, el cual es

$$T^{(p)}_{\mu\nu} = m \int d\tau \frac{\dot{x}^{\mu} \dot{x}^{\nu}}{\left[g_{\rho\sigma} \dot{x}^{\rho} \dot{x}^{\sigma} \right]^{1/2}} \delta^4(x - x(\tau)) \; . \tag{83}$$

Por lo tanto minimizando la acción respecto a las variaciones en $x^{\mu}(\tau)$, determinamos la ecuación para la trayectoria, la cual es más fácil de expresar cuando se escoge τ como el tiempo propio, la cual es la longitud de camino definida por

$$d\tau = (g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu})^{1/2} \; . \tag{84}$$

Así, en el límite no relativista, con campo gravitacional cero, y con τ siendo el tiempo ordinario x^0, llegamos a las llamadas ecuaciones de movimiento, definidas por

$$g_{\mu\sigma} \ddot{x}^{\mu} + \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^{\nu}} \dot{x}^{\mu} \dot{x}^{\nu} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} \dot{x}^{\mu} \dot{x}^{\nu} = 0 \quad , \tag{85}$$

la cual se puede expresar como

$$\ddot{x}^{\rho} + g^{\sigma\rho} (\partial_{\nu} g_{\mu\sigma} - \frac{1}{2} \partial_{\sigma} g_{\mu\nu}) \dot{x}^{\mu} \dot{x}^{\nu} = 0 \; , \tag{86}$$

y haciendo uso de los símbolos de Christoffel, se puede expresar como

$$\ddot{x}^{\rho} + \Gamma^{\rho}_{\mu\nu} \dot{x}^{\mu} \dot{x}^{\nu} = 0 \; , \tag{87}$$

donde se puede interpretar esta ecuación como una generalización de la primera ley de Newton que describe, en un sistema coordenado arbitrario, el movimiento de una partícula en un campo gravitacional, además el camino se interpreta como una geodésica que corresponde a un extremo de la longitud de camino entre los puntos finales, de hecho la longitud es medida respecto a la métrica $g_{\mu\nu}$, y es en ésta métrica donde se incorpora el efecto de la gravedad[3] [4].

10 Límite Newtoniano

Con el fin de ilustrar la relación entre relatividad general y la teoría clásica de Newton, consideremos el movimiento de una partícula de masa m en un fondo generado por un campo gravitacional, es decir un campo determinado por alguna fuente externa, en otros téminos un espaciotiempo curvo debido a la presencia de una fuente de materia-energía. Entonces ignoremos los efectos de la partícula en si misma sobre el campo gravitacional ya que esta solo contribuye con correcciones a segundo orden en el movimiento de la partícula. De esta forma el camino de la partícula está dado por $x^{\mu}(\tau)$, donde usamos la asignación $\tau = x^0$, bien, con esto en mente consideremos movimiento no relativista, es decir baja energía, poca velocidad, y masa muy pequeña de la partícula, lo cual nos conduce a despreciar $\dot{x}^{\mu}$ en comparación a $\dot{x}^{0} = 1$.

Ahora, consideremos algo más, tomemos el campo gravitacional que sea estático, por lo tanto $\partial_0 g_{\mu\nu} = 0$, y que además sea un campo débil o de baja intensidad, esto significa que podemos considerar un sistema coordenado cuasi-cartesiano tal que[1]

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \ , \tag{88}$$

donde $|h_{\mu\nu}| << 1$, entonces considerando términos a bajo orden en $h_{\mu\nu}$, la ecuación de movimiento $\ddot{x}^{\rho} + g^{\sigma\rho}(\partial_\nu g_{\mu\sigma} - \frac{1}{2}\partial_\sigma g_{\mu\nu})\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu} = 0$, se simplifica para obtener

$$\ddot{x}^{\rho} = \frac{1}{2}(\frac{dx^0}{d\tau})^2(\frac{\partial h_{00}}{\partial x_\rho}) \ , \ \ddot{x}^0 = 0 \ , \tag{89}$$

expresiones que en la notación 3-espacial usual, se puede escribir como

$$\ddot{x} = -\frac{1}{2}\nabla h_{00} \ , \tag{90}$$

lo cual conduce a decir que la partícula cumple con la segunda ley de Newton, con un potencial dado por

$$v = \frac{1}{2} m h_{00} \ , \tag{91}$$

de este modo, y con el fin de determinar h_{00} evaluamos $R_{\mu\nu}$ a primer orden en $h_{\mu\nu}$, con lo cual la ecuación de campo se torna en

$$\frac{1}{2}\eta^{\rho\sigma}(\partial_\mu\partial_\nu h_{\rho\sigma} + \partial_\rho\partial_\sigma h_{\mu\nu} - \partial_\nu\partial_\sigma h_{\rho\mu} - \partial_\mu\partial_\rho h_{\nu\sigma}) = -\kappa^2(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}T^{\lambda}_{\lambda}) \ . \tag{92}$$

Colocando $\mu = \nu = 0$, y usando el hecho de que $h_{\mu\nu}$ es independiente de x^0 , encontramos

$$\nabla^2 h_{00} = 2\kappa^2(T_{00} - \frac{1}{2}T^{\lambda}_{\lambda}) \ , \tag{93}$$

de tal modo que podemos considerar para la fuente T_{00} una partícula de masa M , fija en el origen, así que se puede expresar la fuente como

$$T_{00} = M\delta^3(\mathbf{x}) \ , \tag{94}$$

con las otras componentes en cero, entonces podemos obtener

$$h_{00} = -\frac{\kappa^2 M}{4\pi\,|\mathbf{x}|} \quad , \tag{95}$$

o expresarse como

$$V = -\frac{\kappa^2 M m}{8\pi\,|\mathbf{x}|} \quad , \tag{96}$$

donde podemos hacer la identificación con la constante de gravitación universal de Newton

$$G_N = \frac{\kappa^2}{8\pi} \quad . \tag{97}$$

Entonces, se ha reducido la descripción relativista a la descripción clásica, en otros términos, la descripción Newtoniana o clásica está contenida en la descripción relativista, un enorme logro de la relatividad.

11 Ondas gravitacionales

Hasta aquí, no se ha considerado una solución explícita de las ecuaciones de campo, hoy día se conocen muchas soluciones, históricamente una de las primeras soluciones fue la encontrada por Schwarzchild, y posteriormente surgieron otras muchas soluciones, sin embargo existen soluciones las cuales son típicas de una teoría de campos, una de ellas es la solución de ondas gravitacionales, que pueden pensarse como campos que varian rápidamente, las cuales se originan cada vez que una masa puentual es sometida a una aceleración.

Consideremos un campo de ondas planas las cuales dependen sólo de ξ^4 , ξ^1 (representan una coordenada temporal y una coordenada espacial respectivamente), entonces, como en la teoría clásica, existen ondas progresivas en la dirección positiva Ξ^1 (representa un eje espacial) y ondas que se propagan en la dirección opuesta, de este modo, la onda más general que se propaga en la dirección Ξ^1 positiva tiene las siguientes componentes

$$\gamma_1^{44} = \gamma_1^{44}(\xi^1 - \xi^2) \ , \gamma_1^{4s} = \gamma_1^{4s}(\xi^1 - \xi^4) \ , \ \gamma_1^{rs} = \gamma_1^{rs}(\xi^1 - \xi^4) \tag{98}$$

donde los $\gamma' s$ representan los elementos de la métrica, así, las ecuaciones de campo son satisfechas automáticamente, y además se satisface una condición entre las coordenadas que es

$$\gamma_1^{\mu 4,4} - \gamma_1^{\mu 1,1} = -(\gamma_1^{'\mu 4} - \gamma_1^{'\mu 1}) = 0 \ , \tag{99}$$

donde la prima denota diferenciación respecto al argumento $(\xi^1 - \xi^4)$, con esto, obtenemos las condiciones

$$\gamma_1^{'44} = \gamma_1^{'11} = -\gamma_1^{'14} \ , \ \gamma_1^{'12} = -\gamma_1^{'42} \ , \ \gamma_1^{'13} = -\gamma_1^{'43} \ , \tag{100}$$

mientras las componentes restantes, γ_1^{22}, γ_1^{23}, γ_1^{33} , son funciones arbitrarias de $(\xi^1 - \xi^4)$. Encontramos que varias de estas componentes no corresponden a un campo ondulatorio físico, las cuales pueden eliminarse de forma conveniente bajo alguna transformación de coordenadas, entonces si llevamos a cabo una transfomación de coordenas $\xi^{*\alpha} = \xi^\alpha + \lambda v^\alpha(\xi^\rho)$, la cual cambia los valores de las coordenadas sólo en cantidades que son proporcionales al paramétro λ, entonces si permitimos que v^α dependa sólo de los argumentos $(\xi^1 - \xi^4)$, entonces las leyes de transformación toman las siguientes expresiones

$$\gamma_1^{*11} = \gamma_1^{11} + v^{1\prime} + v^{4'} \ , \quad \gamma_1^{*12} = \gamma_1^{12} + v^{2\prime} \ , \ \gamma_1^{*13} = \gamma_1^{13} + v^{3\prime} \ , \ \gamma_1^{*14} = \gamma_1^{14} + v^{4\prime} - v^{1\prime} \ , \tag{101}$$

$$\gamma_1^{*22} = \gamma_1^{22} - v^{1\prime} + v^{4\prime} \ , \gamma_1^{*23} = \gamma_1^{23} \ , \quad \gamma_1^{*24} = \gamma_1^{24} - v^{2\prime} \ , \tag{102}$$

$$\gamma_1^{*33} = \gamma_1^{33} - v^{1\prime} + v^{4\prime} \ , \ \gamma_1^{*34} = \gamma_1^{34} - v^{3\prime} \ , \ \gamma_1^{*44} = \gamma_1^{44} + v^{4\prime} + v^{1\prime} \ , \tag{103}$$

escogiendo de forma adecuada las cuatro funciones v^α , podemos obtener un sistema coordenado en el cual todas las componentes con al menos un índice 1 o 4 sea cero, y en la cual la expresión $(\gamma_1^{22} - \gamma_1^{33})$ es igual a cero. La única onda la cual no puede ser eliminada por transformación de coordenadas es aquella en la cual

$$\gamma_1^{22} = -\gamma_1^{33} \neq 0 \ , \tag{104}$$

y aquella en la cual

$$\gamma_1^{23} \neq 0 \ , \tag{105}$$

de este modo, estos dos tipos de ondas pueden ser transformadas en cada una de las otras si las coordenadas espaciales se han rotado alrededor del eje Ξ^1 en un ángulo $\frac{\pi}{4}$ rad.

Las ondas gravitacionales no tienen contraparte en la teoría clásica, infortunadamente la intensidad de aquellas ondas las cuales son presumiblemente producidas por sistemas oscilantes, estrellas dobles, explosiones estelares, colisiones galácticas, entre otros eventos, no son suficientemente fuertes para ser detectadas por algún método conocido a la fecha, aunque se estan haciendo bastantes esfuerzos para lograr su detección u observación.

Einstein y Rosen investigaron de forma rigurosa la solución de ondas, de las ecuaciones de campo no lineales, encontraron que no existen ondas planas, pero que existen ondas cilindricas, todo esto se obtuvo por métodos estrictamente formales, sin embargo, se puede dar una explicación física. La onda gravitacional, asi como las ondas electrodinámicas llevan energía, esto conlleva a que esta densidad de energía cree un campo gravitacional estacionario el cual deforma la métrica, de tal forma que la onda gravitacional puede ser superpuesta en esta métrica deformada. Una onda plana puede ser asociada con una densidad de energía constante en toda parta, y la desviación de la planitud de la métrica, por tanto, puede incrementarse hasta el infinito, en todas las direcciones. Una onda cilíndrica, por otra parte, tiene una singularidad en el eje de simetría, y existe una solución en la cual la amplitud de las ondas se aproxima a cero y la amplitud del campo estacionario llega a ser infinito para valores infinitos de la coordenad ρ , la cual en un espacio euclideano denota la distancia desde el eje de simetría. En suma, existen soluciones que no tienen contraparte en la teoría clásica, ondas gravitacionales las cuales se propagan con la velocidad de la luz[4] [6].

12 Conclusiones

En los apartados anteriores se han ilustrado algunos desarrollos teóricos propios de la teoría de la relatividad, se ha hecho uso de la notación moderna basada en el cálculo tensorial, como se puede observar del desarrollo se mantienen presente los postulados de la relatividad, así como lo concerniete con la invarianza Lorentz, el esquema presentado constituye los elementos más importantes de la teoría de la relatividad y son el punto de partida de múltiples estudios teóricos y experimentales.

References

[1] Collins. P. D. B., Martin A. D., Squires. E. J., Particle Physics and Cosmology, John Wiley and Sons, 1989.

[2] Adler. R, Bazin. M, M. and Schiffer M., Introduction to general relativity, McGraw-Hill, 1975.

[3] Misner. C. W, Thorne. K. S., Wheeler. J. A., Gravitation, W. H. Freeman and Co., 1973.

[4] Weinberg. S. , Gravitation and Cosmology, New York Wiley, 1972.

[5] Tejeiro. S. J. M., Principios de relatividad general, Observatorio Astronómico Nacional, 2005.

[6] Bergmann. P. G., Introduction to theory of relativity, Dover Publications, Inc. New York, 1976.