Cuando ansiamos respuestas lógicas observamos señales. Cada hecho indica algo preciso para iluminar nuestro itinerario.

Explorando la Relatividad Especial

1. Expresión transformada de la energía cinética

Tradicionalmente se recurre al desarrollo en serie para comparar la fórmula relativista de la energía cinética con la fórmula clásica. Hay un modo más directo y más didáctico, que a los estudiantes de todos los niveles les resulta convincente.

<u>Símbolos</u>

T energía cinética

m masa en movimiento

m_0 masa en reposo

C velocidad de la luz en el vacío

v velocidad del objeto

<u>Transformación</u>

Escribamos las ecuaciones de partida.

$$m_0 = m\sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}} \tag{1}$$

$$T = (m - m_0)C^2 \tag{2}$$

En (2) reemplazamos m_0 como indica (1).

$$T = \left(m - m\sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}} \right) C^2 \tag{3}$$

Extraemos factor común m .

$$T = m \left(1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}} \right) C^2 \tag{4}$$

En el miembro derecho multiplicamos y dividimos por $\left(1+\sqrt{1-\dfrac{v^2}{C^2}}\,\right)$.

Después operamos.

$$T = m\frac{\left(1-\sqrt{1-\dfrac{v^2}{C^2}}\,\right)\left(1+\sqrt{1-\dfrac{v^2}{C^2}}\,\right)}{\left(1+\sqrt{1-\dfrac{v^2}{C^2}}\,\right)}\;C^2 \tag{5}$$

Aplicamos propiedad distributiva. Después simplificamos.

$$T = m\;\;\frac{v^2}{1+\sqrt{1-\dfrac{v^2}{C^2}}} \tag{6}$$

En (1) despejamos m y aplicamos eso en (6).

$$T = m_0\;\;\frac{v^2}{\left(1+\sqrt{1-\dfrac{v^2}{C^2}}\right)\sqrt{1-\dfrac{v^2}{C^2}}} \tag{7}$$

Los estudiantes comprueban que en el límite para $\dfrac{v}{C} \to 0$ el denominador tiende a 2, coincidiendo con la fórmula clásica. Eso los tranquiliza.

2. Semejanza con la derivada de un logaritmo

Simbolicemos u a la función siguiente.

$$u = v\;\boldsymbol{.}\;\ln\left(1+\sqrt{1-\frac{v^2}{C^2}}\right) \tag{8}$$

Derivamos.

$$\frac{du}{dv} = \ln\left(1+\sqrt{1-\frac{v^2}{C^2}}\right) + v\;\boldsymbol{.}\;\frac{1}{1+\sqrt{1-\dfrac{v^2}{C^2}}}\;\frac{1}{2}\;\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{C^2}}}\;\frac{(-2v)}{C^2} \tag{9}$$

Simplificamos y ordenamos.

$$\frac{du}{dv} = \ln\left(1+\sqrt{1-\frac{v^2}{C^2}}\right) - \frac{1}{C^2}\;\frac{v^2}{\left(1+\sqrt{1-\dfrac{v^2}{C^2}}\right)\;\sqrt{1-\dfrac{v^2}{C^2}}} \tag{10}$$

Hacemos pasaje de términos.

$$\frac{1}{C^2}\ \frac{v^2}{\left(1+\sqrt{1-\dfrac{v^2}{C^2}}\right)\ \sqrt{1-\dfrac{v^2}{C^2}}} = \ln\left(1+\sqrt{1-\frac{v^2}{C^2}}\right) - \frac{du}{dv} \tag{11}$$

En (8) dividimos ambos miembros por v .

$$\frac{u}{v} = \ln\left(1+\sqrt{1-\frac{v^2}{C^2}}\right) \tag{12}$$

En (11) aplicamos (12) .

$$\frac{1}{C^2}\ \frac{v^2}{\left(1+\sqrt{1-\dfrac{v^2}{C^2}}\right)\ \sqrt{1-\dfrac{v^2}{C^2}}} = \frac{u}{v} - \frac{du}{dv} \tag{13}$$

Multiplicamos por $m_0\ C^2$ ambos miembros

$$m_0\ \frac{v^2}{\left(1+\sqrt{1-\dfrac{v^2}{C^2}}\right)\ \sqrt{1-\dfrac{v^2}{C^2}}} = m_0\ C^2\left(\frac{u}{v} - \frac{du}{dv}\right) \tag{14}$$

Reemplazamos el miembro izquierdo de (14) por T , como indica (7).

$$T = m_0\ C^2\left(\frac{u}{v} - \frac{du}{dv}\right) \tag{15}$$

Siendo T función de v solamente, $\dfrac{du}{dv}$ es simplemente el cociente incremental.

Expresada en términos de u , la energía cinética existe cuando el cociente común $\dfrac{u}{v}$ y el cociente incremental $\dfrac{du}{dv}$ difieren.

3. Propiedades de la función u

La función u tiene dimensiones de velocidad. Es la velocidad observable multiplicada por el logaritmo de 1 más la contracción relativista, como vemos en (8). ¿Podemos atribuirle significado físico a una función así?

Más que discutir ideas, intentemos en primera instancia examinar propiedades matemáticas. Por ejemplo buscar los extremos de u poniendo en (10) $\dfrac{du}{dv} = 0$.

$$0 = \ln\left(1 + \sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}}\right) - \frac{1}{C^2}\,\frac{v^2}{\left(1 + \sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}}\right)\,\sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}}} \tag{16}$$

Podemos darle a (16) una forma compacta utilizando el símbolo siguiente.

$$\delta = \ln\left(1 + \sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}}\right) \tag{17}$$

Expresada en función de δ la ecuación (16) toma la forma siguiente.

$$0 = \delta - \frac{1}{C^2}\,\frac{v^2}{e^{\delta}\,(e^{\delta} - 1)} \tag{18}$$

De (17) despejamos $\dfrac{v^2}{C^2}$

$$\frac{v^2}{C^2} = e^{\delta}\,\left(\mathbf{2} - e^{\delta}\right) \tag{19}$$

Aplicamos a (18) lo indicado en (19). Después simplificamos.

$$0 = \delta - \frac{\left(\mathbf{2} - e^{\delta}\right)}{\left(e^{\delta} - 1\right)} \tag{20}$$

Multiplicamos ambos miembros por $\left(e^{\delta} - 1\right)$

$$0 = \delta\left(e^{\delta} - 1\right) - \left(\mathbf{2} - e^{\delta}\right) \tag{21}$$

Despejamos e^{δ}

$$e^{\delta} = \frac{\mathbf{2} + \delta}{\mathbf{1} + \delta} \tag{22}$$

Resolver la ecuación (22) es condición previa para calcular los valores de v asociados con los extremos de la función u .

La definición (8) muestra que para $v = 0$ y para $v = C$, en ambos casos, resulta $u = 0$. Es decir tenemos $u = 0$ en los topes del intervalo de velocidad permitido para $m_0 \neq 0$. Los ceros de la función u delimitan condiciones físicas específicas.

Entre medio de los topes resulta $u > 0$. Los conceptos físicos permiten esperar que u tenga un máximo en esa región. Esto debería verificarse resolviendo a (22) .

4. Mejor que conclusión, invitación

El máximo de u corresponde a una velocidad determinada, cuyo valor se calcula resolviendo a (22). Simbolicemos $v_{\mathbf{q}}$ a esa velocidad. ¿Qué se puede opinar de lo hecho después de la definición (8) ? ¿Complica inútilmente los cálculos o es el primer paso de algo interesante? Me gustaría calcular $v_{\mathbf{q}}$ y después hacer experimentos acelerando partículas hasta esa velocidad precisa, para observar detalles del comportamiento. ¿Podría u ser una medida de algo que antes nunca fue tenido en cuenta? Vista por primera vez, la función u no exhibe un significado evidente. Lo mismo sucede la primera vez que vemos la definición de entropía. Sin la entropía no sabríamos, por ejemplo, qué proporción de un monto de energía es útil para realizar trabajo. Tal vez una partícula en movimiento esté sujeta a limitaciones en su interacción con el medio circundante. ¿Qué ocurriría en el caso de existir una velocidad que imposibilita la interacción con el entorno? Soñemos un poco, imaginando que eso existe y que se produce cuando u tiene su máximo. El medio no actuaría sobre la partícula, ni la partícula sobre el medio. Sería un tránsito perfectamente inercial, sin oposición, a velocidad constante y en forma indetectable. Soñemos más. Un conjunto de partículas en esa condición permanecería dentro del universo como materia indetectable. Materia normal en un estado especial, que no permite detectarla por medios convencionales. Ideas de ese estilo ejemplifican las razones para sentir curiosidad respecto al significado de u y al comportamiento de la materia en el estado v_q .

Iterando numéricamente, con la ecuación (22) obtuve un valor δ exacto hasta 15 decimales. El décimosexto decimal (último de la cifra mostrada) es levemente impreciso.

$$\delta_q = 0,508554724060375(5) \tag{23}$$

Aplicando ese valor a (19) obtenemos con la calculadora

$$\frac{v^2}{C^2} = 0,56058198122474604851481204822425 \tag{24}$$

Radicando tenemos

$$\frac{v}{C} = 0,7487202289405... \tag{25}$$

Esto significa que la función u adquiere su valor máximo cerca de $v = \frac{3}{4}\, C$. ¿Hay evidencia empírica de algo interesante que ocurra en esa condición ? Ese tipo de evidencia, en caso de existir, sería otro motivo para investigar el desarrollo iniciado en la definición (8).
He dado a este artículo un estilo distendido, acorde con la sencillez del tema. Por eso evitaré agregar en el final referencias bibliográficas, citas, lecturas recomendadas, etc. Simplemente me gustaría recibir noticias de alguien que resuelva formalmente la ecuación (22). Mi correo electrónico es
carloschiappini@hotmail.com

Gracias.