

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN**

**“ENRIQUE GUZMÁN Y VALLE”**

**ESCUELA DE POSGRADO**

**“JORGE PEÑALOZA RAMELLA”**

**ESTADÍSTICA APLICADA A LA  
INVESTIGACIÓN EDUCATIVA**

**AUTOR:**

**Mg. Johnny Félix, Farfán Pimentel**

**La Molina, febrero del 2014**

# INVESTIGACIÓN ESTADÍSTICA

## 1. DEFINICION

La investigación es un proceso de producción de conocimientos científicos; es un proceso sistemático a través del cual se recogen datos e información de la realidad objetiva para dar respuesta a las interrogantes que se plantean. No hay investigación grande o pequeña, simplemente investigar es buscar respuesta para plantear soluciones.

Cuando se aplica el método científico al estudio de los problemas económicos se habla de investigación económica, asimismo se tiene investigación educativa, investigación agropecuaria, etc. Toda investigación requiere de datos, sin datos no hay investigación, entonces surge la necesidad de definir métodos, análisis o tratamientos de datos, con el propósito de obtener algunas medidas o indicadores que expresen la dimensión o niveles de la variable estudiada, es decir, realizar la paralización de las variables; en este contexto la estadística surge como ciencia auxiliar de la investigación, que por su naturaleza, estructura y métodos, en este proceso, el análisis estadístico también cumple con los diversos pasos de la investigación.

## 2. OBJETIVO DE LA INVESTIGACION ESTADISTICA

El objetivo de la investigación estadística es descubrir respuestas a determinadas interrogantes a través de la aplicación de procedimientos científicos. El punto de partida de la investigación es la existencia de un problema que habrá que definir, examinar, valorar, y analizar críticamente, para luego formular y entender su solución.

## 3. ETAPA DE LA INVESTIGACIÓN ESTADÍSTICA

La investigación estadística por su naturaleza, es fundamental de tipo descriptiva; se preocupa de la confiabilidad, validez y significación de los datos, de la muestras así como los métodos y técnica de recolección y análisis estadístico.

La investigación estadística es un proceso donde se distinguen cinco etapas:

#### **Planteamiento o preparación.**

- Fundamento y comprensión del estudio e identificación de las variables.
- Determinación de objetivos.
- Organización de las variables.
- Precisión de los datos e información requerida.
- Identificación y evaluación de la fuente de información.
- Identificación y análisis de estudios similares.
- Determinación del ámbito de la investigación
- Preparación del plan para ejecutar la investigación.
- Formación y capacitación del equipo de trabajo.
- Elaboración del calendario de actividades.
- Formulación del presupuesto y fuente de financiamientos.
- Diseño y ejecución de una prueba piloto o experimental.

#### **Recopilación de los datos**

La recopilación o recolección de datos es el momento en el cual el investigador se pone en contacto con los objetos o elementos sometidos a estudio, con el propósito de obtener los datos o respuesta a las variables analizadas.

El método de recolección está asociado también con el tipo y naturaleza de la fuente de datos.

#### **Organización y presentación de datos**

Después de la recopilación de los datos, se procede a su organización, clasificación y tabulación, de modo que se facilite la presentación en tablas cuadros o gráficos.

Como tarea previa a la investigación es indispensable realizar una evaluación, crítica, corrección y ajuste de los datos, el propósito es superar las omisiones, inconsistencia y desechar las respuestas no significativas o erróneas.

Téngase presente que la validez de sus resultados y conclusiones depende de gran medida de la fidelidad de los datos utilizados. No existen computadora que por si, corrija los errores de recopilación.

Realizada las correcciones o ajuste, se procede a la clasificación o establecimiento de categorías o intervalos, para la agrupación de los datos.

Finalmente se procede a la tabulación o procesamiento de los datos, de acuerdo a un plan de tabulaciones previamente definido.

Los cuadros y tablas estadística como primera fase de la reducción de datos, facilita el cálculo de los indicadores con los cuales se inicia la descripción, análisis e interpretación de los datos, variables e información estadística.

### **Análisis e interpretación de los datos**

En esta etapa se aplica los argumentos matemático y teóricos de la estadística. A través de métodos estadístico se calcula indicadores y medidas de resumen, se establecen relaciones entre variables, se estiman valores, se ejecuta pruebas estadísticas, etc., como elementos de referencia para la descripción, análisis e interpretación del comportamiento de los datos, hacer inferencia válida y obtener información de los elementos o unidades estudiadas.

### **Formulación de conclusiones y preparación de informe**

En toda investigación debe analizarse el cumplimiento de los objetivos, en función de los resultados fundamentales, esta contrastación permite elaborar un resumen de los aspectos sustantivos, que luego se expresaran en forma de conclusiones y sugerencia orientadora en la toma de decisiones.

## **4. ELECCIÓN DE LAS UNIDADES ESTADÍSTICAS.**

La elaboración de una buena estadística implica una definición correcta de las unidades que se van a considerar y una delimitación de la materia a investigar. Antes de iniciar la observación y las operaciones de recuentos, el estadístico debe tener una idea clara, tanto del conjunto que quiere estudiar como de los individuos o unidades que constituye dicho conjunto.

Las unidades estadística debe definirse cuidadosamente teniendo en cuenta los siguientes criterios:

- Debe ser sencilla, de modo que se puede caracterizar con facilidad, que los encargados de la recopilación no tengan duda en su identificación.
- Debe ser precisa, de modo que facilite su identificación y saber que observar.
- Fácilmente comprensible y adaptada a los objetivos que se persiguen.
- Debe ser semejantes, de manera que sean aditivo.
- Respetar las posibles definiciones oficiales o estatales.

# RECOLECCION DE DATOS.

## 1. DEFINICION

La recopilación o colección de datos es el momento en el cual el investigador se pone en contacto con los objetos o elementos sometidos a estudio, con el propósito de obtener los datos o respuesta de las variables consideradas; a partir de estos datos se prepara la información estadística, se calcula medidas de resumen e indicadores para el análisis estadístico.

Antes de recopilar o recoger datos, es importante analizar los objetivos del estudio, precisar las variables e identificar las fuentes de datos, a fin de definir que datos hay que recopilar y como hacer esta tarea.

La formulación del problema y del marco teórico, la definición de las hipótesis y de los objetivos de la investigación permite especificar los tipos de información y las variables que son requeridas. Realizada esta tarea, el investigador debe a continuación seleccionar y elaborar las técnicas e instrumentos para recolectar los datos.

El trabajo de recolección de datos, en general se puede realizar mediante dos modalidades:

- La técnica de investigación documental o bibliográfica.
- La técnica de trabajo de campo.
- La observación y la exploración en el terreno, que consiste en el contacto directo del investigador con el objeto de estudio.
- La encuesta y la entrevista, que consiste en el acopio de testimonios orales y escrito de personas vivas.

La fase de recolección de datos es uno de los puntos principales de la investigación, en consecuencia, debe dotarse de ciertas garantías para que los datos científicos puedan ser confiables y comparables, evitar las desviaciones y la falta de representatividad.

## 2. INFORMACIÓN ESTADÍSTICA

La información estadística, como datos procesados de acuerdo a ciertos objetivos, es un medio que permite cuantificar un aspecto de una realidad, de un

fenómeno o problema determinado, en un momento o periodo dado y un ámbito concreto. A partir de la información estadística se puede describir y explicar esa realidad, así como inferir conclusiones para definir un plan de acción o desarrollo específico. La información, en general, sirve para tomar decisiones.

### **3. FUENTES DE DATOS**

Las fuentes de datos es el lugar, la institución, las personas o elementos donde están o que poseen los datos que se necesitan para cada una de las variables o aspecto de la investigación o estudio.

En general se puede disponer de cinco tipos de fuentes de datos:

- Las oficinas estadísticas.
- Registros administrativos.
- Documentos.
- Encuesta o censos.
- Los elementos o sujetos.

Las tres primeras fuentes son de tipo administrativos y constituyen fuentes secundarias; por su parte, las dos últimas corresponde a la investigación estadística, ya que permiten obtener datos originales, intencionales y de primera mano, es decir constituye fuentes primarias.

### **4. TÉCNICA DE RECOLECCION**

La técnica de recolección son diversas y depende de: la naturaleza del objeto de estudio, de las posibilidades de acceso o contacto con los elementos investigados, del tamaño de la población o muestra, de los recursos y de las oportunidades de obtener datos. Las técnicas también está asociada al tipo y naturaleza de la fuente de datos.

Entre las técnicas más frecuentes se tiene:

- **La observación:**

La observación en el proceso de investigación es la acción de mirar con rigor, en forma sistemática y profunda, con los intereses de descubrir la importancia de aquellos que se observa. La observación es el método básico que se utiliza para adquirir información acerca del mundo que nos rodea, y por lo tanto, constituye la técnica primordial de la investigación científica. La observación puede tener lugar en situaciones auténticas de la vida ordinarias o también en el laboratorio.

- **Los documentos:**

La técnica documental es un tipo de observación que recopila o busca sus datos en documentos, fuentes o graficas de todo tipo.

- **La entrevista:**

La entrevista es una situación de interrelación o dialogo entre personas, es una técnica donde una persona llamada entrevistador, solicita al entrevistado, le proporcione algunos datos o información. El éxito de la entrevista como técnica de recolección, depende de la eficiencia del trabajo del entrevistador.

- **La encuesta:**

La encuesta es una técnica de recolección de datos, donde se obtiene la información tal como se necesita, preparada con objetivos estadístico. Permite observar y registrar características en las unidades de análisis de una determinada población o muestra, delimitada en el tiempo y en el espacio. En toda encuesta se hace uso de un cuestionario, cuya respuesta se registra en el formulario o cedula. Cuando una encuesta está dirigida a la totalidad de elementos de una población, se llama censo; en tanto; cuando está dirigido a una parte representativa de la población, se llama encuesta por muestreo.

## **5 INSTRUMENTO DE MEDICION**

- **El cuestionario:**

es un instrumento constituido por un conjunto de preguntas sistemáticamente elaboradas, que se formula al encuestado o entrevistado, con el propósito de obtener los datos de las variables consideradas en el estudio.

Cuando las preguntas se organizan y se imprimen, se obtiene el formulario o cedula, que es el instrumento que se utiliza para registrar las respuestas.

# PRESENTACIÓN DE DATOS

## (VARIABLE CUALITATIVA)

### 1. ORGANIZACIÓN Y PRESENTACIÓN DE DATOS

Cuando se realiza la recopilación de antecedentes con fines estadísticos, se obtiene una gran cantidad de datos, algunas veces estos están en su forma natural o empírica (fuentes primarias) y otras ya están organizadas en tablas, cuadros y gráficos (fuentes secundarias).

Los datos pueden estar incompletos, incorrectos, desordenados, pero en todos los casos constituye datos básicos para iniciar un estudio, conocer y analizar el comportamiento y las características de los elementos de una población.

En el trabajo estadístico, siempre se dispone de muchos datos que, definitivamente tiene que ser clasificados, ordenados y presentados adecuadamente, de tal manera que facilite la comprensión, descripción y análisis del fenómeno estudiado y obtener conclusiones validas para la toma de decisiones.

La organización y presentación de los datos estadísticos, supone realizar los siguientes pasos:

**Evaluación y crítica**, consiste en inspeccionar la validez y confiabilidad de los datos, para corregir los errores y omisiones de acuerdo a ciertas reglas fijas. A partir de datos incorrectos no se pueden obtener buenos resultados.

**Codificación**, es una técnica mediante la cual los datos o respuestas se convierten en un numero, símbolo o lenguaje que permita su procesamiento o tabulación electrónica. La codificación implica la definición de criterios de clasificación y de categorización de las variables con miras a formular el plan de tabulación.

**Clasificación**, consiste en establecer las categoría de la variables.

**Procesamiento o tabulación de datos**, es la contabilización o registro del número de casos en cada una de las categoría de la variables, de acuerdo al plan de tabulación previamente establecido.

**Presentación de los datos**, donde los resultados de la tabulación, una vez evaluados, se presenta en cuadros, tablas y gráficos. La presentación de datos implica tener la información estadística organizada para proceder al análisis e

interpretación de los resultados y de los aspectos considerados de la población en estudio.

En el trabajo estadístico, lo que se tiene disponible en un primer momento es un material numérico, producto de la observación o recopilación de datos, que son categorizados, ordenados, procesados y presentados en cuadros o gráficos; hay un proceso de resumen estadístico que se concreta con el cálculo de indicadores.

Existen dos formas de presentar ordenadamente los datos estadísticos:

- En forma tabular, como son los cuadros y tablas estadísticas.
- Mediante gráficos y diagramas.

## 2. TABLA DE FRECUENCIA

Son tablas de trabajos estadísticos, que presenta la distribución de un conjunto de elementos de acuerdo a las categorías de las variables, en ellas se observa la frecuencia o repeticiones de cada uno de los valores de las variables, que se obtienen después de realizar la operación de tabulación, la tabla presenta los diversos tipos de frecuencia a la vez se utiliza para organizar los datos y calcular algunos indicadores, medidas de resumen o estadígrafo.

## 3. PARTES PRINCIPALES DE UNA TABLA DE FRECUENCIA

**Numero de cuadro**, es el código o elemento de identificación que permite ubicar el cuadro en el interior de un documento. El número se anota junto con la palabra "cuadro", por ejemplo "cuadro N 3.3". Indica que es el tercer cuadro del capítulo tres.

**Título**, es la descripción resumida del contenido del cuadro, la redacción del título debe ser breve, claro y completo de modo que se pueden deducir sin ambigüedad que tipo de información contiene el cuadro.

**Concepto o encabezamiento**, es la descripción de las filas y columnas de un cuadro estadístico, el encabezamiento se ubica en la parte superior del cuerpo del cuadro. Indica las variables y sus categorías o intervalos, también puede indicar un periodo de tiempo.

**Cuerpo del cuadro**, es el contenido numérico de los cuadros. Es la parte donde se colocan los datos correspondientes a las características o variables indicados en el encabezamiento o en los conceptos, es decir presenta la

distribución de los elementos según la clasificación en categoría de las variables.

**Notas de pie o llamadas**, se usa para algunos términos o siglas, y también para indicar que elementos están o no incluidos en algunos de los conceptos del cuadro.

**Fuentes**, es la indicación al pie del cuadro, que sirve para nombrar la publicación, entidad, estudio o fuentes de donde se obtuvieron los datos utilizados para construir el cuadro. La identificación de la fuente permite, si fuera el caso, comprobar la información o para obtener información complementaria. Hay dos tipos de fuentes: **primaria**, cuando se obtiene directamente de la unidad de análisis o cuando se recurre a los propios formularios de una encuesta; **secundaria**, cuando se recurre a documentos, boletines o cuadros estadísticos publicados.

**Nota de unidad de medida**, se escribe debajo del título original, se usa cuando se abrevia la escritura de las cifras y para expresar en que unidades están expresada la variables.

**Elaboración**, es una indicación que se coloca debajo de la fuente y sirve para mencionar el responsable, que utilizando datos originales o de la fuente, elaboro el cuadro estadístico final; indicando la responsabilidad de la publicación del cuadro.

#### 4. ELEMENTOS DE UNA TABLA DE FRECUENCIAS

##### **Valor de la variable o intervalo de clases**

Resulta de la clasificación o categorización de variable.

##### **Frecuencia absoluta**

Es el número de veces que se repite un determinado valor de la variable; en el caso de los intervalos es el numero de observaciones comprendido en dicho intervalo; está representado por “ $f_i$ ”.

##### **Frecuencia relativa**

Es el cociente de la frecuencia absoluta entre el total de datos, está representado por “ $h_i$ ”

$$h_i = \frac{f_i}{n}$$

### Frecuencia porcentual

Es la multiplicación de la frecuencia relativa por 100  $p_i = h_i * 100\%$

### Frecuencia absoluta acumulada

Es el que resulta de acumular sucesivamente las frecuencias absoluta, se representa por "F<sub>L</sub>"

$$F_k = \sum_{i=1}^k f_i = f_1 + f_2 + \dots + f_k$$

### Frecuencia relativa acumulada

Es el que resulta de acumular o sumar sucesivamente las frecuencias relativas, se representa por "H<sub>i</sub>"

$$H_k = \sum_{i=1}^k h_i = h_1 + h_2 + \dots + h_k$$

### Frecuencia porcentual acumulada

Es el que resulta de acumular o sumar sucesivamente las frecuencias porcentuales, se representa por "P<sub>i</sub>"

$$P_k = \sum_{i=1}^k p_i = p_1 + p_2 + \dots + p_k$$

## 5. PROPIEDADES DE LAS FRECUENCIAS

- Las frecuencias absoluta y las frecuencias absoluta acumuladas son números enteros no negativos y no mayores que "n".
- Las frecuencias relativa y las frecuencias relativa acumulada son valores que varían entre 0 a 1.
- Las frecuencias porcentuales y porcentuales acumuladas son número que varían de 0 a 100%.
- La suma de todas las frecuencias absoluta es igual al tamaño de la muestra.
- La suma de todas las frecuencias relativa es igual a la unidad.
- La suma de todas las frecuencias porcentuales es 100%.
- La última frecuencia absoluta acumulada es igual al tamaño de la muestra.
- La ultima frecuencia relativa acumulada es la unidad.
- La ultima frecuencia porcentual acumulada es 100%.

## 6. TABLA DE FRECUENCIA Y GRAFICOS PARA VARIABLE CUALITATIVAS

La tabla de frecuencia tiene la siguiente forma:

C	f	h	p
C1	f 1	h 1	p1
C2	f 2	h 2	p2
C3	f 3	h 3	p3
C4	f 4	h 4	p4

La representación grafica de la distribución de frecuencia de variables cualitativa, se hace comúnmente por grafica de barras y de sectores.

### EJEMPLO 1

En una entrevista a una muestra de 30 personas sobre su preferencia de bebidas gaseosa por los tres colores: negro(N), rojo(R) , blanco(B) se ha obtenido los siguiente resultados:

B	B	R	B	R	B
R	B	R	B	R	N
R	B	B	B	R	R
N	R	N	N	N	R
N	N	B	N	B	B

Realizar el cuadro de frecuencia y los gráficos.

### EJERCICIOS RESUELTOS N° 2.

1.- Se realizó un estudio en relación al liderazgo del gerente y la satisfacción de los empleados de empresa "Textil Los Olivos" S.R.L en el 2010. Los empleados encuestados fueron 300 elegidos aleatoriamente de un total de 1000 empleados que tiene la empresa. Algunas variables que se estudiaron son: Sexo del empleado, procedencia del empleado, edad del empleado, número de años de experiencia laboral del gerente.

*Problema:* ¿Cómo se relaciona del liderazgo del gerente y la satisfacción de los empleados de empresa "Textil Los Olivos" S.R.L en el 2009?

Objetivo: Analizar cómo se relaciona el liderazgo del gerente y la satisfacción de los empleados de empresa

"Textil Los Olivos" S.R.L en el 2009

Población: Todos los 1000 empleados de la empresa "Textil Los Olivos" S.R.L

Muestra: Fueron encuestados 300 empleados seleccionadas aleatoriamente.

NOMBRE DE VARIABLE	TIPO DE VARIABLE	MODALIDAD	ESCALA DE MEDICIÓN
Sexo del empleado	Cualitativa	Femenino	Nominal
Procedencia del empleado	Cualitativa	Lima Callao La molina	Nominal
Edad del empleado	Cuantitativa	-	Razón
Número de años de Experiencia laboral del	Cuantitativa	-	Razón

2.- Se desea hacer un estudio de investigación sobre la Influencia del abandono familiar en el desarrollo socioemocional de los niños menores de 12 años de los Hogares de menores del Cercado de Lima.

*Población:* Todos los niños menores de 12 años de ambos sexos de los Hogares del Cercado de Lima.

*Muestra:* 200 niños menores de 12 años de ambos sexos de los Hogares del Cercado de Lima.

Nº	Variable	Escala de Medición
1	Genero	Nominal
2	Abandono familiar	Nominal
3	Desarrollo socioemocional	Ordinal

3.-En un estudio descriptivo sobre complicaciones que produce el Dispositivo Intra Uterino (DIU), se tomo una muestra de 150 historias clínicas de una población de 1800 mujeres a quienes se les había aplicado el DIU. Algunas variables de interés para el investigador fueron: tipo de complicación más frecuente, tiempo de uso del DIU antes de que se produzca la complicación.

Identifique Población, Muestra, variables, tipo según su naturaleza y escala de medición.

Solución:

*Población:* Todas las historias clínicas de mujeres a quienes se les había aplicado el DIU (N=1800)

*Muestra:* 150 historias clínicas de mujeres a quienes se les había aplicado el DIU.

VARIABLE	TIPO SEGÚN SU	ESCALA DE
Tipo de complicación más frecuente	Cualitativa Nominal	Nominal
Grado de complicación	Cualitativa Ordinal	Ordinal
Tiempo de uso del DIU antes de que se	Cuantitativa continua	Razón





Área: Letras (derecho, educación y ciencias de la comunicación)

1. Se realizó un estudio para establecer las posibilidades que tenía el candidato X de ganar las elecciones municipales en el distrito A. Se conoce que el 25% de los habitantes del distrito vive hace más de 5 años en dicha zona. Se encuestaron a 200 personas y se obtuvo lo siguiente:

- El 40% de los habitantes del distrito A no ha decidido aún su voto.
- El 23,5% indicó que votarían por el candidato X.
- El principal problema a resolver por el nuevo alcalde es la delincuencia, tal como lo indicaron el 75% de los encuestados.

Determine: La población, muestra, las variables, clasificación según naturaleza y función, escala de medición, los parámetros y estadísticos (si existen) y Elabore Ud. un cuestionario tomando en cuenta los resultados dados y otras preguntas que Ud. considere conveniente y que no se haya tomado en cuenta.

2. Se realizó un estudio en el distrito de Comas para analizar la opinión de las personas entre 18 a 72 años sobre gestión del actual alcalde del distrito, para lo cual se preguntó a 300 personas residentes en el distrito. Obteniéndose los siguientes resultados: el 39.6% de los menores de 25 años aprueba la gestión del alcalde, mientras que el 68.7% de las demás personas aprueba la gestión. Identifique la población, la muestra, unidad de análisis, las variables, tipos de variable, las escalas de medición.

3. Completar los datos que faltan en la siguiente tabla estadística:

$x_i$	$f_i$	$F_i$	$h_i$
1	4		0.08
2	4		
3		16	0.16
4	7		0.14
5	5	28	
6		38	
7	7	45	
8			

4. Se ha realizado una encuesta en 30 hogares del distrito de Los Olivos; se pregunto el número de individuos que viven en el domicilio habitualmente. Las respuestas obtenidas han sido las siguientes:

4, 4, 1, 3, 5, 3, 2, 4, 1, 6, 2, 3, 4, 5, 5, 6, 2, 3, 3, 2, 2, 1, 8, 3, 5, 3, 4, 7, 2, 3.

a. Calcule la distribución de frecuencias de la variable obteniendo las frecuencias absolutas, relativas y sus correspondientes acumuladas.

- b. ¿Qué proporción de hogares está compuesto por tres o menos personas? ¿Qué proporción de individuos viven hogares con tres o menos miembros?
- c. Dibuje el diagrama de frecuencias absolutas y el diagrama acumulativo de frecuencias.

## PRESENTACIÓN DE DATOS

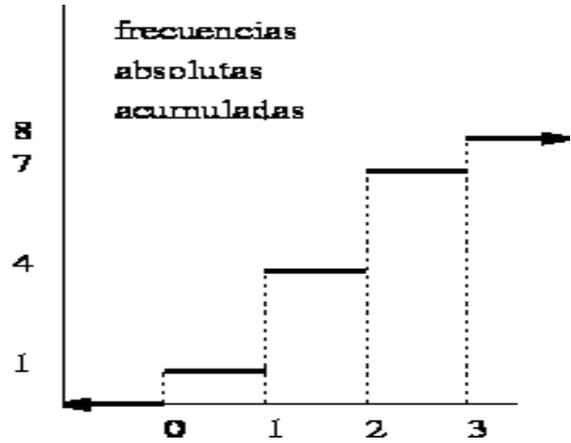
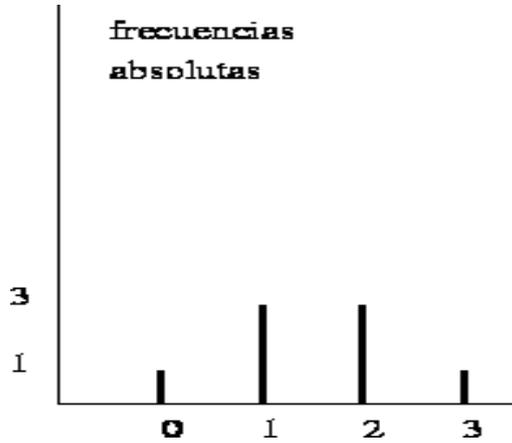
(Variable cuantitativa)

### 1. TABLA DE FRECUENCIA Y GRAFICOS PARA VARIABLE CUANTITATIVA DISCRETAS

La tabla de frecuencia tiene la siguiente forma:

Valores de la Variable X	Frecuencias Absolutas (f <sub>i</sub> )	Frecuencias Relativas (h <sub>i</sub> )	Frecuencias Porcentuales (p <sub>i</sub> )	Frecuencias Absolutas Acumuladas (F <sub>i</sub> )	Frecuencias Relativas Acumuladas (H <sub>i</sub> )
X <sub>1</sub>	f <sub>1</sub>	h <sub>1</sub>	p <sub>1</sub>	F <sub>1</sub>	H <sub>1</sub>
X <sub>2</sub>	f <sub>2</sub>	h <sub>2</sub>	p <sub>2</sub>	F <sub>2</sub>	H <sub>2</sub>
...	...	...	...	...	...
X <sub>k</sub>	f <sub>k</sub>	h <sub>k</sub>	p <sub>k</sub>	F <sub>k</sub>	H <sub>k</sub>
<b>Total</b>	$\sum_{i=1}^k f_i = n$	$\sum_{i=1}^k h_i = 1$	$\sum_{i=1}^k p_i = 100\%$		

La representación grafica más común de una distribución de frecuencias de variable cuantitativa discreta es del tipo bastón y el de escalera.



**EJEMPLO 1:**

1. Construir la distribución de frecuencia y grafico del número de hijos por familia en una muestra de 30 hogares, si se han observado los siguientes datos

4	4	4	1	0	4
0	2	4	1	1	4
1	1	3	2	1	2
1	2	2	3	2	4
3	4	1	4	3	0

**EJEMPLO 2:**

2. Se tiene información de una muestra de 150 ingenieros de la ciudad de Lima según el número de consultorías realizadas en el 2010.

3. Los siguientes datos corresponden a los alumnos de la sección C del cuarto de primaria del IE 3053 del Distrito de los Olivos, como observamos en la siguiente tabla.

<b>Tabla N°1: Variable Genero</b>						
$x_i$	Recuento	$f_i$	$F_i$	$h_i$	$p_i$	$H_i$
27	I	1	1	0,03	3%	0 . 0 32
28	II	2	3	0,06	6%	0 . 0 97
29		6	9	0,19	19%	0 . 2 90
30		7	16	0,23	23%	0 . 0 5 16
31		8	24	0,26	26%	0 . 7 74
32	III	3	27	0,10	10%	0 . 8 71
33	III	3	30	0,10	10%	0 . 9 68
34	I	1	31	0,03	3%	1
<b>Total</b>		<b>31</b>		<b>1.00</b>	<b>1 0 0%</b>	

Nº de consultorías	Frecuencias Absolutas ( $f_i$ )	Frecuencias Relativas ( $h_i$ )	Frecuencias Porcentuales ( $p_i$ )	Frecuencias Absolutas Acumuladas ( $F_i$ )	Frecuencias Relativas Acumuladas ( $H_i$ )	Frecuencias Porcentuales Acumuladas ( $P_i$ )
0	2	0,01	1,3%	2	0,01	1,3%
1	15	0,10	10,0%	17	0,11	11,3%
2	40	0,27	26,7%	57	0,38	38,0%
3	55	0,37	36,7%	112	0,75	74,7%
4	38	0,25	25,3%	150	1,00	100,0%
<b>Total</b>	150	1,00	100,0%			

\*) : 1 corresponde al género masculino y 2 al femenino.

Se pide elaborar la tabla de distribución de frecuencia de la variable Género.

Nº	Genero	$f_i$	$h_i$	$p_i$ (%)	$P_i$
1	Masculino	13	$13/20=0.65$	$0.65*100=65$	65
2	Femenino	7	0.35	35	100
<b>Total</b>		<b>20</b>	<b>13</b>	<b>100</b>	<b>---</b>

4. Durante el mes de Febrero, en la ciudad de Lima se han registrado las siguientes temperaturas máximas:

32, 31, 28, 29, 33, 32, 31,  
 30, 31, 31, 27, 28, 29, 30,  
 32, 31, 31, 30, 30, 29, 29,  
 30, 30, 31, 30, 31, 34, 33,  
 33, 29, 29.

**Construir la tabla de distribución de frecuencias.**

**Solución:**

En la primera columna de la tabla colocamos la variable ordenada de menor a mayor, en la segunda hacemos el recuento y en la *tercera* anotamos la frecuencia absoluta.

### 1. TABLA DE FRECUENCIA PARA VARIABLE CUANTITATIVA CONTINUA

La tabla de frecuencia tiene la siguiente forma:

$$R = \text{RANGO} = \text{MAX} - \text{MIN}$$

$$K = \text{NUMERO DE INTERVALO} = 1 + 3.3 \text{LOG}(n)$$

$$A = \text{AMPLITUD DEL INTERVALO} = R / K$$

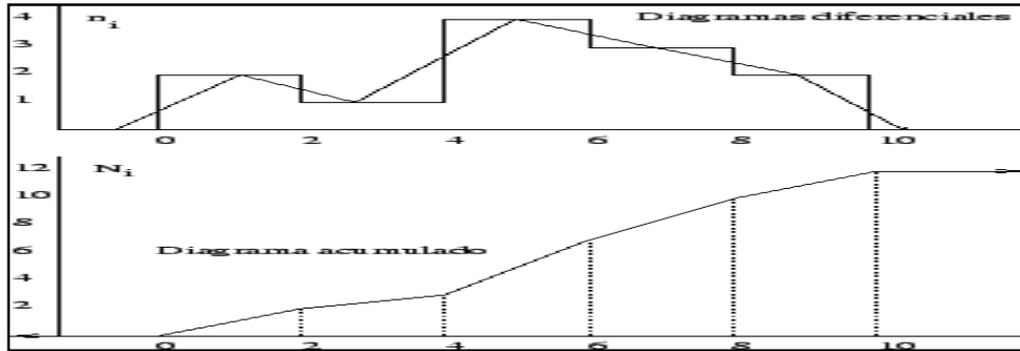
L = LIMITES

$$X = \text{MARCA DE CLASE} = \frac{L_i + L_{i+1}}{2}$$

La tabla de frecuencia para una variable cuantitativa continua debe tener intervalos, marca de clases y todas las frecuencia tanto simple como acumulada

LIMITES	X	f	h	p	F	H	P
L1 - L2	x1	f 1	h 1	p 1	F1	H1	P1
L2 - L3	x2	f 2	h 2	p 2	F2	H2	P2
L3 - L4	x3	f 3	h 3	p 3	F3	H3	P3
L4 - L5	x4	f 4	h 4	p 4	F4	H4	P4

La representación grafica más común de una distribución de frecuencias de variable cuantitativa continua es histograma de frecuencia, el polígono de frecuencia y la ojiva.



### EJEMPLO

1. Construir la distribución de frecuencia de los ingresos quincenales de 50 personas si los datos recopilados son:

63	23	10	59	53	89	53	72	60	65
64	36	70	52	67	76	49	57	51	61
57	44	56	62	62	67	73	64	43	85
60	61	56	59	68	71	67	62	35	56
62	61	51	63	78	26	55	81	60	99

Realizar la tabla de frecuencia y gráficos.

### EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Se tiene información del promedio de notas de 150 alumnos del Colegio "Avancemos Juntos" del distrito de Villa El Salvador como se indica en la siguiente tabla.

<i>Tabla: Distribución de Frecuencia del Promedio de notas</i>					
<b>Nº</b>	<b>Nota Promedio</b>	<b><math>f_i</math></b>	<b><math>h_i</math></b>	<b><math>p_i</math> (%)</b>	<b><math>P_i</math></b>
1	20	50			
2	19	40			
4	18	30			
5	16	30			
<b>Total</b>					

Determinar

- a. El porcentaje total de alumnos que tiene como nota promedio menor igual de 18.
  - b. El porcentaje de alumnos que tiene como nota promedio 20.
2. En un determinado Centro Oncológico se atiende diariamente a 40 pacientes con cáncer. Entre otras características, en la ficha clínica se consigna, edad (años), sexo Y localización del tumor. Los valores de estas variables en los 40 pacientes son:

Paciente	Edad	Sexo	L
01	65	M	E
02	52	F	P
03	71	M	P
04	84	M	E
05	39	M	P
06	55	F	P
07	42	F	N
08	49	M	P
09	67	M	E
10	71	F	N
11	31	M	P
12	60	F	E
13	63	M	B
14	57	M	B
15	61	M	C
16	59	F	U
17	49	M	P
18	61	M	T
19	72	F	C
20	40	F	P

- a. Construya un cuadro  
b. Realice un gráfico de

$X_i$	$f_i$	$F_i$	$h_i$
5	4		0.16
7	2		
9		9	0.36
11	16		

de frecuencias  
barras e interprételo

3. Completar los datos que faltan en la siguiente tabla estadística:

$x_i$	$f_i$	$F_i$	$h_i$
1	4		0.08
2	4		
3		16	0.16
4	7		0.14
5	5	28	
6		38	
7	7	45	
8			

4. Completar los datos que faltan en la siguiente distribución.

5. Se ha realizado un estudio entre 100 mujeres mayores de 15 años y el número de hijos de las mismas. El resultado ha sido

Nº hijos	0	1	2	3	4	5	6
Nº mujeres	13	20	25	20	11	7	4

Construir la distribución de frecuencias y representar el gráfico de barras.

## DISTRIBUCIONES IMPORTANTES

### DISTRIBUCION NORMAL

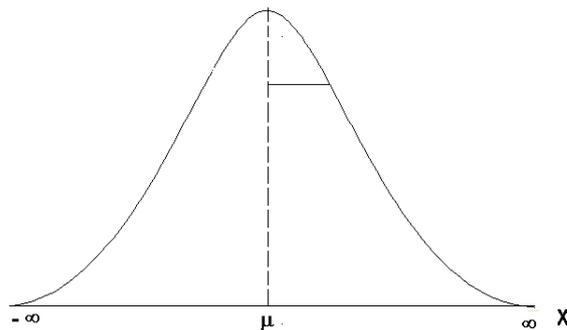
#### 7.1 DEFINICION

Esta distribución es frecuentemente utilizada en las aplicaciones estadísticas. Su propio nombre indica su extendida utilización, justificada por la frecuencia o normalidad con la que ciertos fenómenos tienden a parecerse en su comportamiento a esta distribución.

Muchas variables aleatorias continuas presentan una función de densidad cuya gráfica tiene forma de campana.

Se dice que la variable aleatoria  $X$  es continua cuando toma valores reales desde el  $-\infty < x < \infty$  y se dice que se distribuye normalmente con media  $\mu$  y variancia  $\sigma^2$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$



La distribución normal se utiliza como modelo para variables como el peso, la altura, la calificación en un examen, etc., es decir, en variables cuya distribución es simétrica con respecto a un valor central (alrededor del cual toma valores con gran probabilidad) y apenas aparecen valores extremos.

Si una variable aleatoria  $x$  tiene distribución normal suele representarse como  $N(\mu, \sigma^2)$  donde  $\mu$ , es la media o valor esperado de la variable y  $\sigma = \sigma_x$  es la desviación típica de la variable, que son los dos parámetros que caracterizan la distribución normal.

En la distribución normal, la mayoría de la probabilidad se concentra en la zona central.

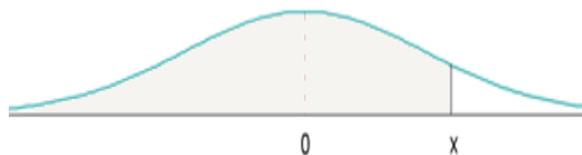
### Propiedades de la distribución normal:

La distribución normal posee ciertas propiedades importantes que conviene destacar:

- Tiene una única moda, que coincide con su media y su mediana.
- La curva normal es asintótica al eje de abscisas. Por ello, cualquier valor entre  $-\infty$  y  $+\infty$  es teóricamente posible. El área total bajo la curva es, por tanto, igual a 1.
- Es simétrica con respecto a su media.
- La distancia entre la línea trazada en la media y el punto de inflexión de la curva es igual a una desviación típica.
- El área bajo la curva comprendida entre los valores situados aproximadamente a dos desviaciones estándar de la media es igual a 0.95.
- La forma de la campana de Gauss depende de los parámetros  $\mu$  y  $\sigma$ .

### Distribución normal estándar

La **distribución normal estándar, o tipificada o reducida**, es aquella que tiene por **media el valor cero,  $\mu = 0$** , y por **desviación típica la unidad,  $\sigma = 1$** .



La probabilidad de la variable  $X$  dependerá del área del recinto sombreado en la figura. Y para calcularla utilizaremos una tabla.

### Tipificación de la variable

Para poder utilizar la tabla tenemos que transformar la variable  $X$  que sigue una distribución  $N(\mu, \sigma)$  en otra variable  $Z$  que siga una distribución  $N(0, 1)$ .

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

## Cálculo de probabilidades en distribuciones normales

La **tabla** nos da las **probabilidades de  $P(z \leq k)$** , siendo **z** la variable tipificada.

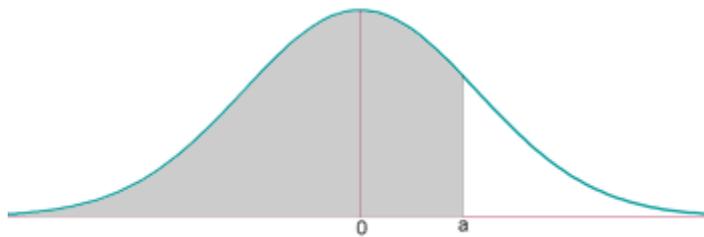
Estas probabilidades nos dan la **función de distribución  $\Phi(k)$** .

$$\Phi(k) = P(z \leq k)$$

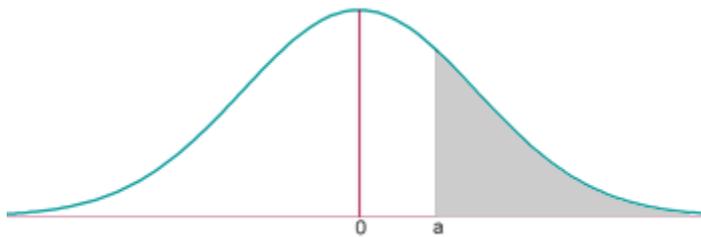
Búsqueda en la tabla de valor de **k**

**Unidades y décimas** en la columna de la izquierda. **Céntesimas** en la fila de arriba.

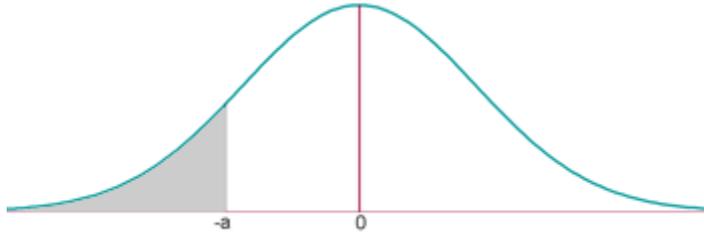
$$P(Z \leq a)$$



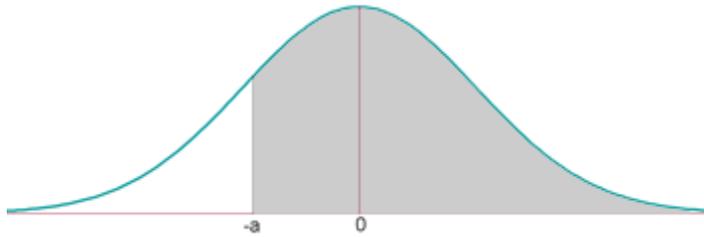
$$P(Z > a) = 1 - P(Z \leq a)$$



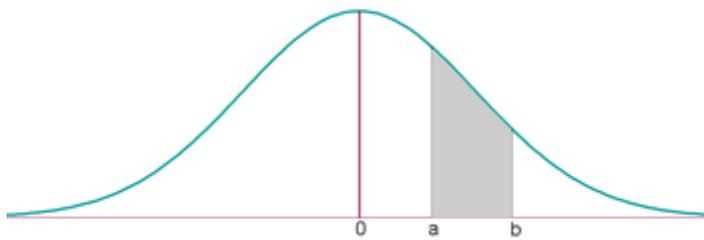
$$P(Z \leq -a) = 1 - P(Z \leq a)$$



$$P(Z > -a) = P(Z \leq a)$$



$$P(a < Z \leq b) = P(Z \leq b) - P(Z \leq a)$$



$$P(-b < Z \leq -a) = P(a < Z \leq b)$$

Ejemplos.

1) Determinar la probabilidad de cada una de las siguientes expresiones:

a)  $P(Z < 1.25)$

b)  $P(Z < -2.28)$

c)  $P(Z < 0)$

d)  $P(0 < Z < 2.5)$

e)  $P(-2.38 < Z < 0)$

f)  $P(-2.25 < Z < 2.25)$

g)  $P(1.55 < Z < 2.35)$

h)  $P(Z > 2.43)$

i)  $P(z > -1.25)$

2) En una población normalmente distribuida con media  $\mu = 30$  y variancia igual a 25 se pregunta: ¿Qué porcentaje del total de las observaciones estarán entre 20 y 35?

3) Se sabe que el peso medio de la población de un grupo de estudiantes es igual a 60 Kg., y su desviación estándar es igual a 3 kg. ¿Halle la probabilidad de que el peso de un alumno este entre 55 y 65 Kg?

4) El peso de los atletas de pruebas de medio fondo sigue una distribución normal con media 64,3 kilos y desviación típica 2,3 kilos. Hallar un intervalo centrado alrededor de la media que contenga:

a) El 68,3% de la población.  
Solución.-

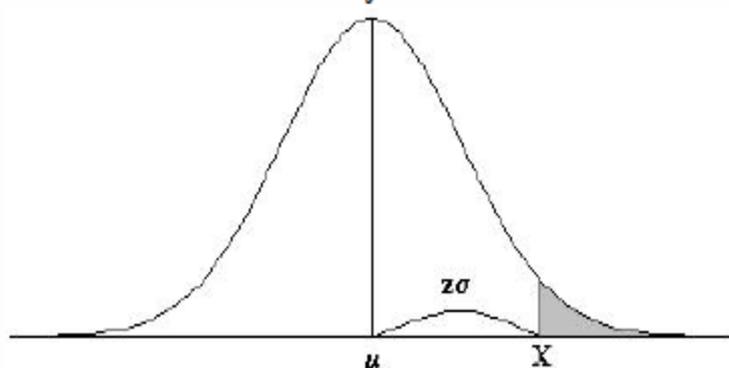
b) El 95,5% de la población.  
Solución.-

- c) El 99,7% de la población  
Solución.-

**Ejemplo**

La longitud a que se puede estirar sin rotura un filamento de Nylon es una variable aleatoria con media 5000 pies y desviación estándar 5000. ¿Cuál es la probabilidad que la longitud promedio de 100 filamento este comprendido entre 4750 y 5500?

## Áreas bajo la curva normal



Ejemplo:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

$$P[Z > 1] = 0.1587$$

$$P[Z > 1.96] = 0.0250$$

Desv. normal x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.4980	0.4960	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010

## 7.2 DISTRIBUCIÓN T STUDENT

sea  $Z$  una variable aleatoria normal con media 0 y varianza 1 sea, sea  $Y$  una variable aleatoria que tiene una distribución Chi - cuadrado con  $r$  grado de libertad, y si  $Y$  e  $Z$  son independiente, entonces la variable aleatoria

$$T = \frac{Z}{\sqrt{Y/r}}$$

Se dice que tiene una distribución t – student,  $r$  grados de libertad.

$$P[T_r < a] = p$$

$r$  = grado de libertad

$a$  = cuantil

$p$  = probabilidad

### Ejemplo 3

Hallar la probabilidad  $P(T_5 < 2,571) = p$

### Ejemplo 4

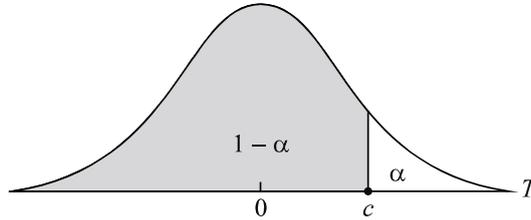
Hallar el grado de libertad  $P(T_r < 1,812) = 0,95$

### Ejemplo 5

Hallar el cuantil  $P(T_8 < a) = 0,95$

## TABLA DE LA DISTRIBUCION $t$ -Student

La tabla da áreas  $1 - \alpha$  y valores  $c = t_{1-\alpha, r}$ , donde,  $P[T \leq c] = 1 - \alpha$ , y donde  $T$  tiene distribución  $t$ -Student con  $r$  grados de libertad..



$1 - \alpha$

$r$	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995
1	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	0.686	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	0.686	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	0.685	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	0.685	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	0.684	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	0.684	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	0.684	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	0.683	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	0.683	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	0.683	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
40	0.681	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
60	0.679	0.848	1.046	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
120	0.677	0.845	1.041	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617
$\infty$	0.674	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

### 7.3 DISTRIBUCIÓN CHI CUADRADO

Sean  $Z_1, Z_2, \dots, Z_r$ , variables aleatorias independientes distribuidas normalmente, cada una con media 0 y varianza 1, la variable aleatoria

$$X^2 = Z_1^2 + Z_2^2 + \dots + Z_r^2$$

Se dice que es una variable aleatoria Chi - cuadrado con  $r$  grado de libertad

$$P[X^2 < a] = p$$

$r$  = grado de libertad

$a$  = cuantil

$p$  = probabilidad

#### **Ejemplo**

Hallar la probabilidad  $P(x^2_4 < 2,19) = p$

#### **Ejemplo**

Hallar el grado de libertad  $P(x^2_r < 18,3) = 0,95$

#### **Ejemplo**

Hallar el cuantil  $P(x^2_6 < a) = 0,95$

## PRUEBAS DE HIPOTESIS

### I.- INTRODUCCION

El objetivo de la prueba de hipótesis es probar la validez de una aseveración acerca de un parámetro poblacional mediante el desarrollo de un procedimiento. Se aplican métodos para tomar decisiones sobre poblacionales a partir de los resultados de una muestra aleatoria escogida de esa población. Para llegar a tomar decisiones estadísticas se debe partir de afirmaciones con respecto a la población en la que estamos interesados, donde tales suposiciones pueden ser verdaderas o no. Una afirmación hecha sobre una población o sobre sus parámetros deberá ser sometida a comprobación experimental con el propósito de saber si los resultados de una muestra aleatoria extraída de esa población contradice o no tal afirmación.

### II.- HIPOTESIS ESTADISTICAS

**DEFINICION 1:** Una hipótesis Estadísticas es una declaración sobre el valor de un parámetro de la población desarrollado con el fin de ponerlo a prueba.

**DEFINICION 2:** Una hipótesis Estadísticas es cualquier información o suposición que se hace acerca del tipo de distribución de probabilidad de la población o el valor o valores de uno o más parámetros de la población.

#### Ejemplos:

- Un jurado sostiene la hipótesis de que la persona acusada de un crimen es inocente y somete esta hipótesis a verificación revisando las evidencias y escuchando los testimonios antes de llegar a un veredicto.
- El 80% de los que juegan regularmente a la lotería estatal nunca ganan más de \$100 en un juego.
- La proporción de casas con hábitos de reciclaje es mayor que 0.15
- La varianza de los diámetros de ciertos arboles es  $0.95 \text{ m}^2$
- La comisión mensual media de vendedores de computadoras es \$2000

### III.- DEFINICIONES BASICAS

**3.1.- HIPOTESIS:** Es una afirmación acerca de un parámetro poblacional.

**3.2.- PRUEBA DE HIPOTESIS:** Procedimiento basado en la evidencia muestral y la teoría de probabilidad; se emplea para determinar si la hipótesis es una afirmación razonable.

- **HIPOTESIS NULA  $H_0$ :** Una declaración o afirmación sobre el valor de un parámetro de la población.

- **HIPOTESIS ALTERNATIVA  $H_1$ :** Una declaración o afirmación que se acepta si los datos de la muestra proporcionan evidencia de que la hipótesis nula es falsa.
- **NIVEL DE SIGNIFICANCIA:** La probabilidad de rechazar la hipótesis nula cuando es verdadera.
- **ESTADISTICO DE PRUEBA:** Un valor determinado a partir de la información muestral, usado para determinar si se rechaza la hipótesis nula.
- **VALOR CRITICO:** Punto de división entre la región en la que se rechaza la hipótesis nula y la región en la que no rechaza la hipótesis nula.
- **ERROR TIPO I:** Rechazar la hipótesis nula  $H_0$ , cuando es verdadera.
- **ERROR TIPO II:** No rechazar la hipótesis nula  $H_0$ , cuando es falsa.

**3.3.- ERROR TIPO I y ERROR TIPO II:** El investigador no puede estudiar cada elemento de la población. Por tanto, existe la posibilidad en incurrir en dos tipos de error:

- **Error Tipo I:** En el que se rechaza la hipótesis nula, cuando debería haber sido no rechazada.

$$\alpha = P[\text{cometer un error de tipo I}]$$

- **Error Tipo II:** En el que no se rechaza la hipótesis nula, cuando debería haberse rechazado.

$$\beta = P[\text{cometer un error de tipo II}]$$

En la siguiente tabla se resumen las decisiones que puede tomar el investigador y las consecuencias posibles

Hipótesis Nula	Investigador	
	No se rechaza $H_0$	Se rechaza $H_0$
<b><math>H_0</math> es verdadera</b>	Decisión Correcta	Error de Tipo I
<b><math>H_0</math> es falsa</b>	Error de Tipo II	Decisión Correcta

#### **IV.- PROCEDIMIENTOS PARA REALIZAR UNA PRUEBA DE HIPOTESIS**

<b>Paso 1:</b> Se plantean las hipótesis nula y alternativa
<b>Paso 2:</b> Se selecciona el nivel de significancia
<b>Paso 3:</b> Se identifica el estadístico de prueba

<b>Paso 4:</b> Se formula la regla de decisión
--

<b>Paso 5:</b> no se rechaza $H_0$ o se rechaza $H_0$
---

## V.- PRUEBA DE HIPOTESIS DE UNA COLA

Una prueba es de una cola cuando la hipótesis alternativa,  $H_1$  indica una dirección, como por ejemplo:

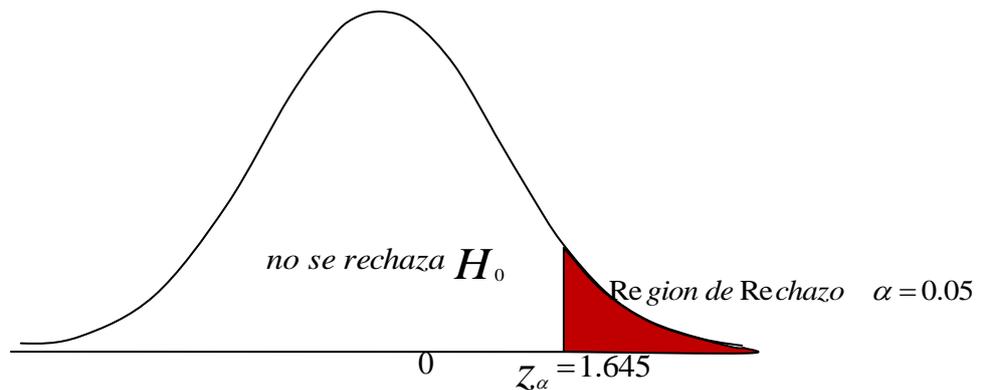
- $H_1$ : Las comisiones anuales ganadas por corredores de bienes raíces a tiempo completo son más de \$35.000. ( $\mu > \$35.000$ )
- $H_1$ : La velocidad de autos que viajan en Georgia es menos de 60 millas por hora. ( $\mu < 60$ )
- $H_1$ : Menos del 20% de los clientes pagan en efectivo su consumo de gasolina. ( $p < 0.20$ )

## DISTRIBUCIÓN MUESTRAL PARA EL ESTADÍSTICO Z

Nivel de significancia:  $\alpha = 0.05$

Región de rechazo: 0.05

Valor crítico: 1.645



## VI.- PRUEBAS DE SIGNIFICANCIA DE DOS COLAS

Una prueba es con dos colas cuando no se especifica ninguna dirección en la hipótesis alterna  $H_1$

**Ejemplo:**

- $H_1$ : La cantidad pagada por los clientes en el centro comercial en Georgetown no es igual a \$25. ( $\mu \neq \$25$ ).

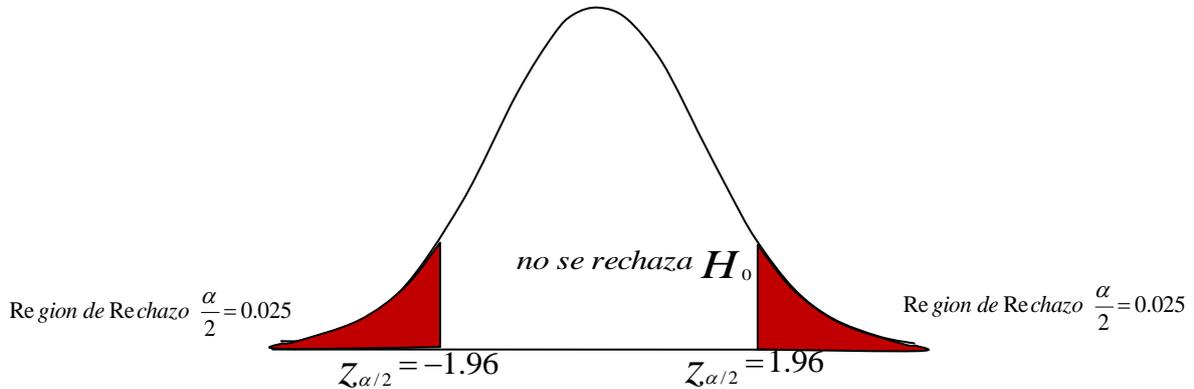
- $H_1$ : El precio para un galón de gasolina no es igual a \$1.54. ( $\mu \neq \$1.54$ ).

### DISTRIBUCIÓN MUESTRAL PARA EL ESTADÍSTICO Z

Nivel de significancia:  $\alpha=0.05$

Región de rechazo: 0.025

Valores críticos: -1.96 y 1.96



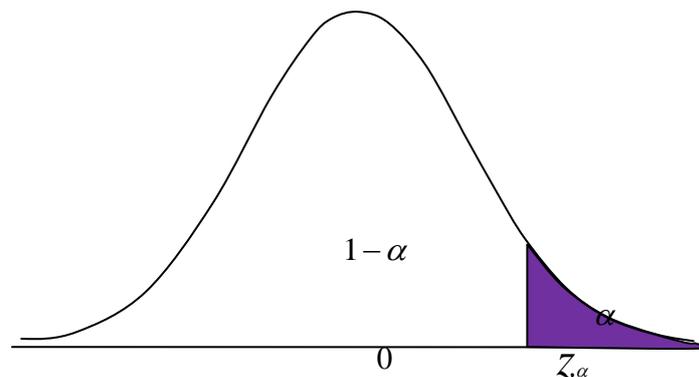
### VII.- PRUEBA DE HIPOTESIS ACERCA DE LA MEDIA DE UNA POBLACIÓN NORMAL CON VARIANZA POBLACIONAL CONOCIDA

#### 7.1.- CONTRASTE UNILATERAL HACIA LA DERECHA

- **Hipótesis:**  $H_0 : u \leq u_0$  vs  $H_1 : u > u_0$
- **Nivel de Significancia:**  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ )
- **Estadígrafo de Contraste:**  $Z = \frac{\bar{x} - u_0}{\sigma / \sqrt{n}}$
- **Región crítica:** La región crítica de la prueba de tamaño  $\alpha$  será de la forma:

$$C = \left\{ \bar{x} > \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\alpha} \right\} = \left\{ z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > Z_{\alpha} \right\}$$

- Se rechaza  $H_0$  si:  $Z > z_{\alpha}$



## 7.2.- CONTRASTE UNILATERAL HACIA LA IZQUIERDA

■ **Hipótesis:**  $H_0 : u \geq u_0$  vs  $H_1 : u < u_0$

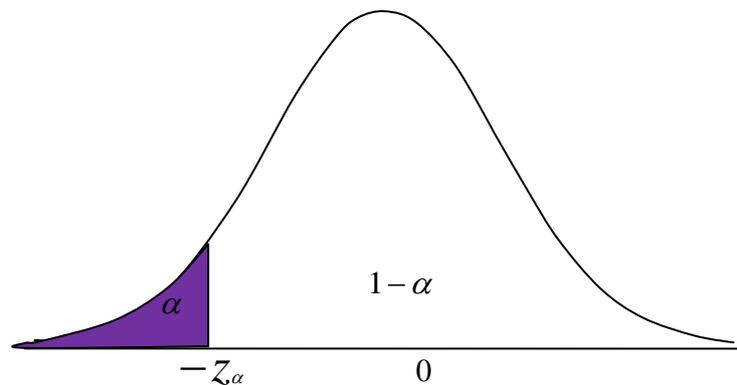
■ **Nivel de Significancia:**  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ )

■ **Estadígrafo de Contraste:** 
$$Z = \frac{\bar{x} - u_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

■ **Región crítica:** La región crítica de la prueba de tamaño  $\alpha$  será de la forma:

$$C = \left\{ \bar{x} < \mu_0 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_\alpha \right\} = \left\{ z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} < -Z_\alpha \right\}$$

■ **Se rechaza  $H_0$  si:**  $Z < -Z_\alpha$



## 7.3.- CONTRASTE BILATERAL

■ **Hipótesis:**  $H_0 : u = u_0$  vs  $H_1 : u \neq u_0$

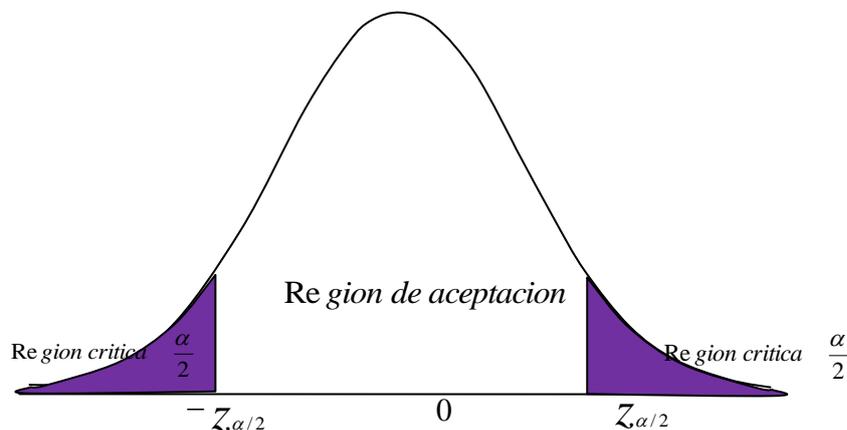
■ **Nivel de Significancia:**  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ )

■ **Estadígrafo de Contraste:** 
$$Z = \frac{\bar{x} - u_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

■ **Región crítica:** La región crítica será de la forma:

$$C \equiv \left\{ \bar{x} < \mu_0 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\alpha/2} \text{ o } \bar{x} > \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\alpha/2} \right\} = \left\{ |Z| = \left| \frac{\bar{x} - u_0}{\sigma / \sqrt{n}} \right| > Z_{\alpha/2} \right\}$$

■ **Se rechaza  $H_0$  si:**  $|Z| > Z_{\alpha/2}$



## VIII.- PRUEBA DE HIPOTESIS ACERCA DE LA MEDIA DE UNA POBLACIÓN

### NORMAL CON VARIANZA POBLACIONAL DESCONOCIDA

#### 8.1.- CONTRASTE BILATERAL:

##### 8.1.1.- MUESTRAS GRANDES: $n > 30$

■ Hipótesis:  $H_0 : u = u_0$  vs  $H_1 : u \neq u_0$

■ Nivel de Significancia:  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ )

■ Estadígrafo de Contraste:  $Z = \frac{\bar{x} - u_0}{S / \sqrt{n}}$

■ Región crítica:  $C = \left\{ |Z| = \left| \frac{\bar{x} - u_0}{S / \sqrt{n}} \right| > Z_{\alpha/2} \right\}$

■ Se rechaza  $H_0$  si:  $|Z| > Z_{\alpha/2}$

##### 8.1.2.- MUESTRAS PEQUEÑAS: $n \leq 30$

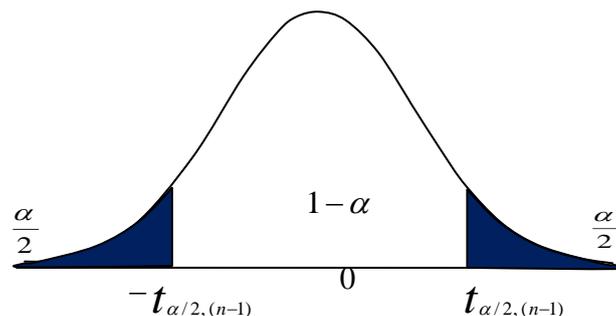
■ Hipótesis:  $H_0 : u = u_0$  vs  $H_1 : u \neq u_0$

■ Nivel de Significancia:  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ )

■ Estadígrafo de Contraste:  $T = \frac{\bar{x} - u_0}{S / \sqrt{n}}$

■ Región crítica:  $C = \left\{ |T| = \left| \frac{\bar{x} - u_0}{S / \sqrt{n}} \right| > t_{\alpha/2, (n-1)} \right\}$

■ Se rechaza  $H_0$  si:  $|T| > t_{\alpha/2, (n-1)}$



#### 8.2.- CONTRASTE UNILATERAL

##### 8.2.1.- MUESTRAS GRANDES: $n > 30$

■ Hipótesis:  $H_0 : u \leq u_0$  vs  $H_1 : u > u_0$

■ Nivel de Significancia:  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ )

■ Estadígrafo de Contraste:  $Z = \frac{\bar{x} - u_0}{S / \sqrt{n}}$

■ Región crítica:  $C = \left\{ \bar{x} > \mu_0 + \frac{S}{\sqrt{n}} Z_{\alpha} \right\} = \left\{ z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{S / \sqrt{n}} > Z_{\alpha} \right\}$

- Se rechaza  $H_0$  si:

$$z > Z_\alpha$$

### 8.2.2.- MUESTRAS PEQUEÑAS: $n \leq 30$

- Hipótesis:

$$H_0 : u \leq u_0 \quad vs \quad H_1 : u > u_0$$

- Nivel de Significancia:  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ )

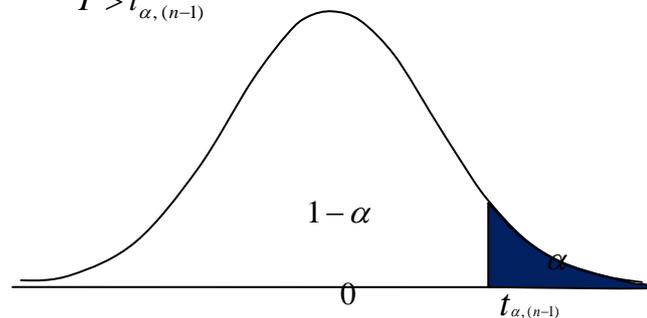
- Estadígrafo de Contraste:  $T = \frac{\bar{x} - u_0}{S / \sqrt{n}}$

- Región crítica:

$$C = \left\{ \bar{x} > \mu_0 + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha, (n-1)} \right\} = \left\{ T = \frac{\bar{x} - \mu_0}{S / \sqrt{n}} > t_{\alpha, (n-1)} \right\}$$

- Se rechaza  $H_0$  si:

$$T > t_{\alpha, (n-1)}$$



## IX.- PRUEBA DE HIPOTESIS ACERCA DE UNA PROPORCION

Sea  $X_1, X_2, \dots, X_n$  una muestra aleatoria de una población Bernoulli  $B(1, p)$  donde  $p$  es la proporción poblacional. El estimador máximo verosímil de  $p$  es:

$$\hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} = \frac{\text{Numero de éxito en la muestra}}{n}$$

Para  $n$  suficientemente grande  $n > 30$ , se sabe que:  $n$

### 9.1.- CONTRASTE BILATERAL $\hat{p} \approx N(p, \frac{p(1-p)}{n})$

- Hipótesis:  $H_0 : p = p_0 \quad vs \quad H_1 : p \neq p_0$

- Nivel de Significancia:  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ )

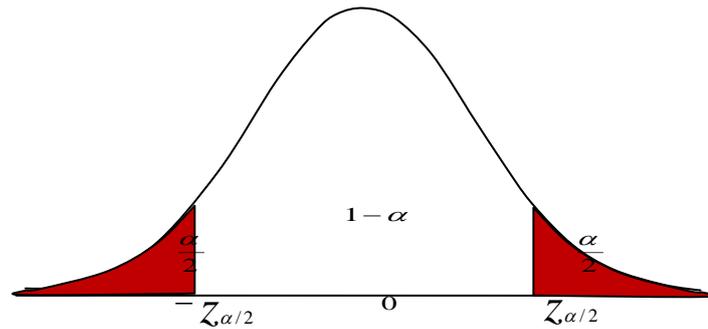
- Estadígrafo de Contraste:  $Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$

- Región crítica:

$$C = \left\{ |Z| = \left| \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \right| > Z_{\alpha/2} \right\}$$

- Se rechaza  $H_0$  si:

$$|Z| > Z_{\alpha/2}$$



## 9.2.-CONTRASTE UNILATERAL

■ **Hipótesis:**  $H_0 : p \leq p_0$  vs  $H_1 : p > p_0$

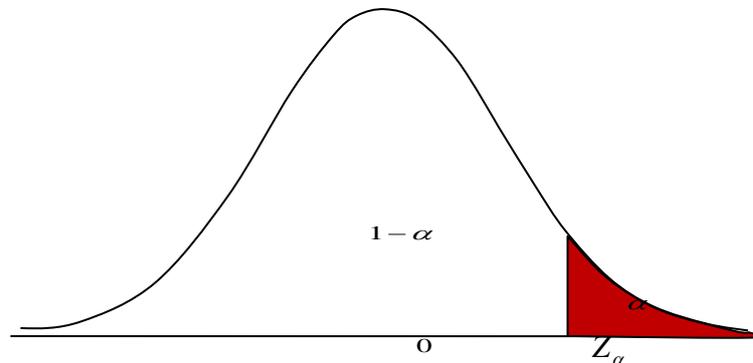
■ **Nivel de Significancia:**  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ )

■ **Estadígrafo de Contraste:** 
$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

■ **Región crítica:**

$$C = \left\{ \hat{p} > p_0 + Z_\alpha \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} \right\} = \left\{ z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} > Z_\alpha \right\}$$

■ **Se rechaza  $H_0$  si:**  $Z > Z_{\alpha/2}$



## X.- PRUEBA DE HIPOTESIS DE PROPORCIONES DE DOS POBLACIONES INDEPENDIENTES

Sean  $X_1, X_2, \dots, X_{n_1}$  una muestra aleatoria extraída de una población Bernoulli  $B(1, p_1)$  y  $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2}$  una muestra aleatoria extraída de una población Bernoulli  $B(1, p_2)$ .

Supongamos que las poblaciones son independientes. Denotemos las proporciones muestrales de cada muestra por:

$$\hat{p}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} X_i}{n_1} = \frac{X_1}{n_1} = \frac{\text{Numero de exito en la muestra 1}}{n_1}$$

$$\hat{p}_2 = \frac{\sum_{j=1}^{n_2} Y_j}{n_2} = \frac{X_2}{n_2} = \frac{\text{Numero de exito en la muestra 2}}{n_2}$$

$$\text{donde } \hat{p} = \frac{X_1 + X_2}{n_1 + n_2}$$

## 10.1.- CONTRASTE UNILATERAL

■ **Hipótesis:**

$$H_0 : p_1 \leq p_2 \quad vs \quad H_1 : p_1 > p_2$$

■ **Nivel de Significancia:**  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ )

■ **Estadígrafo de Contraste:** 
$$Z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

■ **Región crítica:**  $C = \{z > z_{\alpha/2}\}$

■ **Se rechaza  $H_0$  si:**  $z > z_{\alpha/2}$

## 10.2.- CONTRASTE BILATERAL

■ **Hipótesis:**

$$H_0 : p_1 = p_2 \quad vs \quad H_1 : p_1 \neq p_2$$

■ **Nivel de Significancia:**  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ )

■ **Estadígrafo de Contraste:** 
$$Z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

■ **Región crítica:**

$$C = \{z < -z_{\alpha/2} \quad o \quad z > z_{\alpha/2}\}$$

$$C = \{|z| > z_{\alpha/2}\}$$

■ **Se rechaza  $H_0$  si:**

$$|z| > z_{\alpha/2}$$

**Observación:** Cuando las hipótesis de contraste son de la forma:

$$H_0 : p_1 - p_2 = p_0 \quad vs \quad H_1 : p_1 - p_2 \neq p_0$$

$$H_0 : p_1 - p_2 \leq p_0 \quad vs \quad H_1 : p_1 - p_2 > p_0$$

$$H_0 : p_1 - p_2 \geq p_0 \quad vs \quad H_1 : p_1 - p_2 < p_0$$

El estadígrafo de contraste es dado por:

$$Z = \frac{\left(\hat{p}_1 - \hat{p}_2\right) - p_0}{\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}}$$

## XI.- PRUEBA DE HIPOTESIS ACERCA DE UNA VARIANZA

### 11.1.- PRUEBA DE HIPOTESIS UNILATERAL POR LA DERECHA:

■ **Hipótesis:**

$$H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_o^2 \quad vs \quad H_1 : \sigma^2 > \sigma_o^2$$

■ **Nivel de Significancia:**  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ )

■ **Estadígrafo de Contraste:**

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_o^2}$$

■ **Región crítica:** La región crítica de la prueba de tamaño  $\alpha$  será de la forma:

$$C = \{\chi^2 > \chi_{\alpha(n-1)}^2\}$$

### 11.2.- PRUEBA DE HIPOTESIS UNILATERAL POR LA IZQUIERDA:

- Hipótesis:  $H_0: \sigma^2 \geq \sigma_o^2$  vs  $H_1: \sigma^2 < \sigma_o^2$
- Nivel de Significancia:  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ )
- Estadígrafo de Contraste:  $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_o^2}$

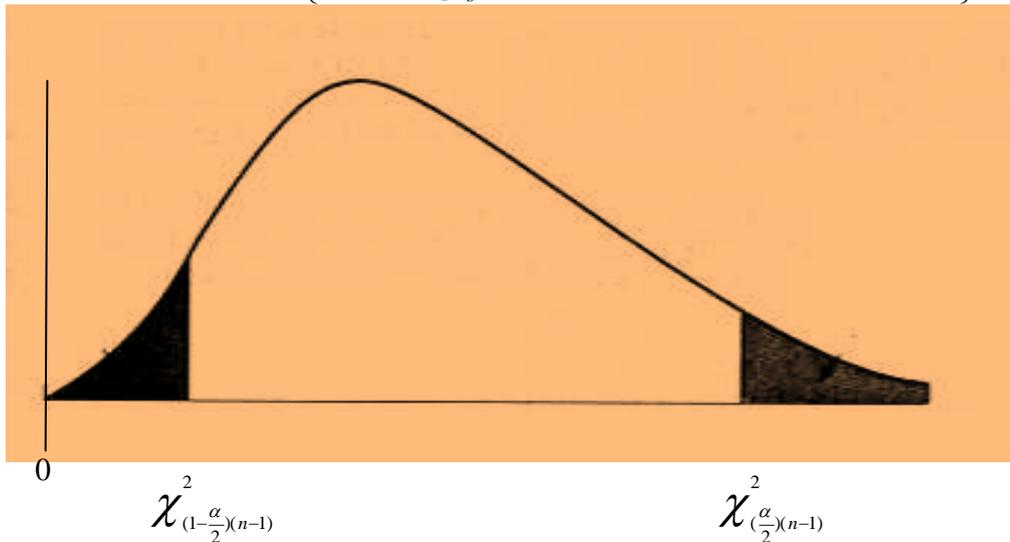
- Región crítica:

$$C = \left\{ \chi^2 < \chi_{\alpha}^2 \right\}$$

### 11.3.- PRUEBA DE HIPOTESIS BILATERAL:

- Hipótesis:  $H_0: \sigma^2 = \sigma_o^2$  vs  $H_1: \sigma^2 \neq \sigma_o^2$
- Nivel de Significancia:  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ )
- Estadígrafo de Contraste:  $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_o^2}$

- Región crítica:  $C = \left\{ \chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_o^2} < \chi_{(1-\frac{\alpha}{2})(n-1)}^2 \text{ o } \chi^2 > \chi_{(\frac{\alpha}{2})(n-1)}^2 \right\}$



## XII.- PRUEBA DE HIPOTESIS ACERCA DE MEDIAS DE DOS POBLACIONES

### NORMALES INDEPENDIENTES DE VARIANZAS CONOCIDAS

**DEFINICION:** Sean  $X_1, X_2, \dots, X_{n_1}$  una muestra aleatoria extraída de una población  $N(u_1, \sigma_1^2)$  y  $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2}$  una muestra aleatoria extraída de una población  $N(u_2, \sigma_2^2)$  donde  $\sigma_1^2$  y  $\sigma_2^2$  son conocidas. Supongamos que las poblaciones son independientes.

$$\bar{X}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} X_i}{n_1} \quad \text{y} \quad \bar{X}_2 = \frac{\sum_{j=1}^{n_2} Y_j}{n_2}$$

### 12.1.-PRUEBA DE HIPOTESIS BILATERAL

- **Hipótesis:**  $H_0 : u_1 = u_2, (u_1 - u_2 = 0)$  vs  $H_1 : u_1 \neq u_2, (u_1 - u_2 \neq 0)$
- **Nivel de Significancia:**  $\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \approx N(u_1 - u_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2})$   $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ )
- **Estadígrafo de Contraste:**  $Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (u_1 - u_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$
- **Región crítica:**

$$C \equiv \left\{ \left| Z \right| = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} > Z_{\alpha/2} \right\}$$

### 12.2.- PRUEBA DE HIPOTESIS UNILATERAL

- **Hipótesis:**  $H_0 : u_1 \leq u_2$  vs  $H_1 : u_1 > u_2$
- **Nivel de Significancia:**  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ )
- **Estadígrafo de Contraste:**  $Z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$
- **Región crítica:**

$$C \equiv \left\{ Z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} > Z_{\alpha} \right\}$$

## XIII.- PRUEBA DE HIPOTESIS ACERCA DE MEDIAS DE DOS POBLACIONES NORMALES INDEPENDIENTES CON VARIANZAS DESCONOCIDAS

**DEFINICION:** Sean  $X_1, X_2, \dots, X_{n_1}$  una muestra aleatoria extraída de una población  $N(u_1, \sigma_1^2)$  y  $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2}$  una muestra aleatoria extraída de una población  $N(u_2, \sigma_2^2)$  donde  $\sigma_1^2$  y  $\sigma_2^2$  son desconocidas. Para cada una de estas muestras, tenemos sus respectivas medias y varianzas muestrales:

$$\bar{X}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} X_i}{n_1} \quad S_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \bar{X}_1)^2}{n_1 - 1}$$

$$\bar{X}_2 = \frac{\sum_{j=1}^{n_2} Y_j}{n_2} \quad S_2^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n_2} (Y_j - \bar{X}_2)^2}{n_2 - 1}$$

### 13.1.- PRUEBA DE HIPOTESIS BILATERAL

#### CASO1: MUESTRAS GRANDES Y VARIANZAS DESCONOCIDAS:

$n_1 + n_2 > 30$

- **Hipótesis:**  $H_0: u_1 = u_2, (u_1 - u_2 = 0)$  vs  $H_1: u_1 \neq u_2, (u_1 - u_2 \neq 0)$
- **Nivel de Significancia:**  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ )

- **Estadígrafo de Contraste:** 
$$Z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$$

- **Región crítica:** 
$$C \equiv \left\{ \left| Z \right| = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} > Z_{\alpha/2} \right\}$$

#### CASO 2: MUESTRAS PEQUEÑAS $n_1 + n_2 \leq 30$ VARIANZAS DESCONOCIDAS: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$

- **Hipótesis:**  $H_0: u_1 = u_2$  vs  $H_1: u_1 \neq u_2$
- **Nivel de Significancia:**  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ )
- **Estadígrafo de Contraste:** 
$$T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}}$$
- **Región crítica:** 
$$C \equiv \{ |T| > t_{\alpha/2, (n_1 + n_2 - 2)} \}$$

#### CASO 3: MUESTRAS PEQUEÑAS $n_1 + n_2 \leq 30$ Y VARIANZAS DESCONOCIDAS PERO DISTINTAS: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

- **Hipótesis:**  $H_0: u_1 = u_2$  vs  $H_1: u_1 \neq u_2$
- **Nivel de Significancia:**  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ )
- **Estadígrafo de Contraste:** 
$$T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\left( \frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2} \right)}}$$
- **Región crítica:**

$$C \equiv \{ |T| > t_{\alpha/2, (g)} \}$$

$$g = \frac{\left( \frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2} \right)^2}{\left( \frac{S_1^2}{n_1} \right)^2 + \left( \frac{S_2^2}{n_2} \right)^2} - 2$$

$$\frac{1}{n_1 + 1} + \frac{1}{n_2 + 1}$$

### 13.2.- PRUEBA DE HIPOTESIS UNILATERAL

#### CASO 1: MUESTRAS GRANDES Y VARIANZAS DESCONOCIDAS:

$n_1 + n_2 > 30$

- **Hipótesis:**  $H_0 : u_1 \geq u_2$  vs  $H_1 : u_1 < u_2$
- **Nivel de Significancia:**  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ )
- **Estadígrafo de Contraste:**  $Z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$
- **Región crítica:**  $C = \left\{ Z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} < -Z_\alpha \right\}$

#### CASO 2: MUESTRAS PEQUEÑAS $n_1 + n_2 \leq 30$ Y VARIANZAS

DESCONOCIDAS PERO IGUALES:  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$

- **Hipótesis:**  $H_0 : u_1 \leq u_2$  vs  $H_1 : u_1 > u_2$
- **Nivel de Significancia:**  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ )
- **Estadígrafo de Contraste:**  $T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}}$
- **Región crítica:**  $C \equiv \{T > t_\alpha, (n_1 + n_2 - 2)\}$

#### CASO 3: MUESTRAS PEQUEÑAS $n_1 + n_2 \leq 30$ Y VARIANZAS

DESCONOCIDAS PERO DISTINTAS:  $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

- **Hipótesis:**  $H_0 : u_1 \geq u_2$  vs  $H_1 : u_1 < u_2$
- **Nivel de Significancia:**  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ )
- **Estadígrafo de Contraste:**  $T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$
- **Región crítica:**

$$C \equiv \{T < -t_\alpha, (g)\}$$
$$g = \frac{\left( \frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2} \right)^2}{\frac{\left( \frac{S_1^2}{n_1} \right)^2}{n_1 + 1} + \frac{\left( \frac{S_2^2}{n_2} \right)^2}{n_2 + 1}} - 2$$

## XIV.- CONTRASTE PARA LA IGUALDAD DE VARIANZAS DE DOS POBLACIONES NORMALMENTE

### 14.1.- CONTRASTE BILATERAL

- **Hipótesis:**  $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$  vs  $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$
- **Nivel de Significancia:**  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ )

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \approx F(n_1 - 1, n_2 - 1)$$

- **Estadígrafo de Contraste:**

- **Región crítica:**

$$C = \left\{ F = \frac{S_1^2}{S_2^2} < F_{(1-\frac{\alpha}{2})}(n_1-1, n_2-1) \quad o \quad F = \frac{S_1^2}{S_2^2} > F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1) \right\}$$

- **Conclusión: Se rechaza  $H_0$  si:**

$$C = \left\{ F < F_{(1-\frac{\alpha}{2})}(n_1-1, n_2-1) \quad o \quad F > F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1) \right\}$$

$$\text{Nota: } F_{(1-\frac{\alpha}{2})} = F_{(1-\frac{\alpha}{2})}(n_1-1, n_2-1) = \frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n_2-1, n_1-1)}$$

$$H_0: \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2 \quad vs \quad H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$$

#### 14.2.- CONTRASTE UNILATERAL

- **Hipótesis:**

- **Nivel de Significancia:**  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ )

- **Estadígrafo de Contraste:**  $F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \approx F(n_1-1, n_2-1)$

- **Región crítica:**  $C = \left\{ F = \frac{S_1^2}{S_2^2} > F_{\alpha}(n_1-1, n_2-1) \right\}$

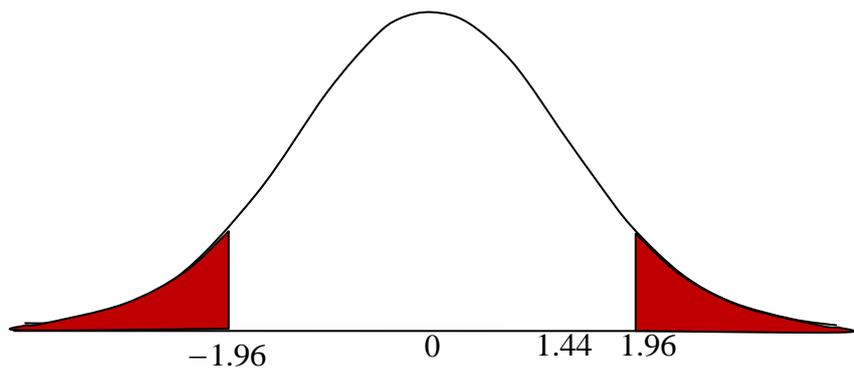
- **Conclusión: Se rechaza  $H_0$  si:**  $C = \{F > F_{\alpha}(n_1-1, n_2-1)\}$

#### XV.- VALOR DE p EN LA PRUEBA DE HIPOTESIS

- Valor- $p$  es la probabilidad de observar un valor muestral tan extremo, que el valor observado, dado que la hipótesis nula es verdadera.
- Si el valor- $p$  es más pequeño que el nivel de significancia, se rechaza  $H_0$ .
- Si el valor- $p$  es más grande que el nivel de significancia,  $H_0$  no se rechaza.

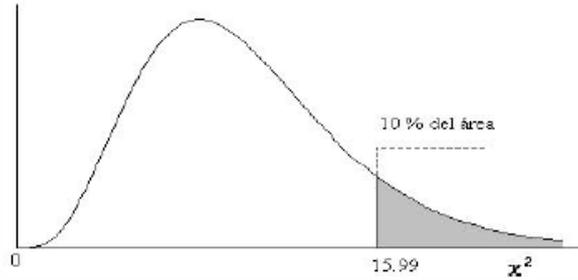
##### CALCULO DEL VALOR DE p

- Prueba de una cola: valor- $p = P\{z \geq \text{valor absoluto del estadístico de prueba}\}$
- Prueba de dos colas: valor- $p = 2P\{z \geq \text{valor absoluto del estadístico de prueba}\}$
- **Del Ejemplo 1**,  $z = 1.44$ , una prueba de dos colas, el valor- $p = 2P\{z \geq 1.44\} = 2(.5 - .4251) = .1498$ . Porque  $0.05 > .1498$ , no se rechaza  $H_0$ .



### TABLA 3: DISTRIBUCIÓN $\chi^2$

Puntos de porcentaje de la distribución  $\chi^2$



**Ejemplo:**

Para  $\phi = 10$  grados de libertad

$$P[\chi^2 > 15.99] = 0.10$$

$\pi$ $\phi$	0.995	0.99	0.975	0.95	0.9	0.75	0.5	0.25	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005	$\pi$ $\phi$
1	3.93E-05	1.57E-04	9.82E-04	3.93E-03	1.58E-02	0.102	0.455	1.323	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88	1
2	1.00E-02	2.01E-02	5.06E-02	0.103	0.211	0.575	1.386	2.77	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60	2
3	7.17E-02	0.115	0.216	0.352	0.584	1.213	2.37	4.11	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84	3
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	1.923	3.36	5.39	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86	4
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	2.67	4.35	6.63	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75	5
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.20	3.45	5.35	7.84	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55	6
7	0.989	1.239	1.690	2.17	2.83	4.25	6.35	9.04	12.02	14.07	16.01	18.48	20.3	7
8	1.344	1.647	2.18	2.73	3.49	5.07	7.34	10.22	13.36	15.51	17.53	20.1	22.0	8
9	1.735	2.09	2.70	3.33	4.17	5.90	8.34	11.39	14.68	16.92	19.02	21.7	23.6	9
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	6.74	9.34	12.55	15.99	18.31	20.5	23.2	25.2	10
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	7.58	10.34	13.70	17.28	19.68	21.9	24.7	26.8	11
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	8.44	11.34	14.85	18.55	21.0	23.3	26.2	28.3	12
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	9.30	12.34	15.98	19.81	22.4	24.7	27.7	29.8	13
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	10.17	13.34	17.12	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3	14
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	11.04	14.34	18.25	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8	15
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	11.91	15.34	19.37	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3	16
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.09	12.79	16.34	20.5	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7	17
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.86	13.68	17.34	21.6	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2	18
19	6.84	7.63	8.91	10.12	11.65	14.56	18.34	22.7	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6	19
20	7.43	8.26	9.59	10.85	12.44	15.45	19.34	23.8	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0	20
21	8.03	8.90	10.28	11.59	13.24	16.34	20.3	24.9	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4	21
22	8.64	9.54	10.98	12.34	14.04	17.24	21.3	26.0	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8	22
23	9.26	10.20	11.69	13.09	14.85	18.14	22.3	27.1	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2	23
24	9.89	10.86	12.40	13.85	15.66	19.04	23.3	28.2	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6	24
25	10.52	11.52	13.12	14.61	16.47	19.94	24.3	29.3	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9	25
26	11.16	12.20	13.84	15.38	17.29	20.8	25.3	30.4	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3	26
27	11.81	12.88	14.57	16.15	18.11	21.7	26.3	31.5	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6	27
28	12.46	13.56	15.31	16.93	18.94	22.7	27.3	32.6	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0	28
29	13.12	14.26	16.05	17.71	19.77	23.6	28.3	33.7	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3	29
30	13.79	14.95	16.79	18.49	20.6	24.5	29.3	34.8	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7	30
40	20.7	22.2	24.4	26.5	29.1	33.7	39.3	45.6	51.8	55.8	59.3	63.7	66.8	40
50	28.0	29.7	32.4	34.8	37.7	42.9	49.3	56.3	63.2	67.5	71.4	76.2	79.5	50
60	35.5	37.5	40.5	43.2	46.5	52.3	59.3	67.0	74.4	79.1	83.3	88.4	92.0	60
70	43.3	45.4	48.8	51.7	55.3	61.7	69.3	77.6	85.5	90.5	95.0	100.4	104.2	70
80	51.2	53.5	57.2	60.4	64.3	71.1	79.3	88.1	96.6	101.9	106.6	112.3	116.3	80
90	59.2	61.8	65.6	69.1	73.3	80.6	89.3	98.6	107.6	113.1	118.1	124.1	128.3	90
100	67.3	70.1	74.2	77.9	82.4	90.1	99.3	109.1	118.5	124.3	129.6	135.8	140.2	100
$Z_{\alpha}$	-2.58	-2.33	-1.96	-1.64	-1.28	-0.674	0.000	0.674	1.282	1.645	1.96	2.33	2.58	$Z_{\alpha}$

Para  $\phi > 100$  tómesese  $\chi^2 = \frac{1}{2} (Z_{\alpha} + \sqrt{2\phi - 1})^2$ .  $Z_{\alpha}$  es la desviación normal estandarizada correspondiente al nivel de significancia y se muestra en la parte superior de la tabla.

## 7.4 DISTRIBUCIÓN F DE FISHER

Considerando dos muestras aleatorias independientes, de tamaño  $n_1$  y  $n_2$ , extraídas de una población normal, el estadístico F será

### DEFINICIÓN

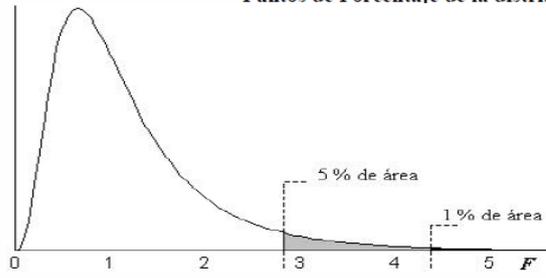
Una variable F se define como el cociente entre dos variables ji-cuadrado divididas por sus correspondientes grados de libertad.

### CARACTERÍSTICAS

- Una variable con distribución F es siempre positiva.
- La distribución de la variable es asimétrica, pero su asimetría disminuye cuando aumentan los grados de libertad del numerador y denominador.
- Hay una distribución F por cada par de grados de libertad.
- Parámetros: Grados de libertad asociados al numerador y denominador

TABLA 4: DISTRIBUCIÓN F DE FISHER

Puntos de Porcentaje de la distribución F



Ejemplo:

Para  $n_1 = 9, n_2 = 12$  grados de libertad:  
 $P[F > 2.80] = 0.05$   
 $P[F > 4.39] = 0.01$

$n_2$		5% (normal) y 1% (negritas) puntos para la distribución de F																												$n_1$
		n1 grados de libertad (para el mayor cuadrado medio)																												
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	$\infty$					
1	1	161	199	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244	245	246	248	249	250	251	252	253	253	254	254	254	254	1	1		
	2	4052	4999	5404	5624	5764	5859	5928	5981	6022	6056	6083	6107	6143	6170	6209	6234	6260	6286	6302	6324	6334	6350	6360	6366	6366	2			
2	1	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.40	19.41	19.42	19.43	19.45	19.45	19.46	19.47	19.48	19.48	19.49	19.49	19.49	19.49	19.50	2	2		
	2	98.50	99.00	99.16	99.25	99.30	99.33	99.36	99.38	99.39	99.40	99.41	99.42	99.43	99.44	99.45	99.46	99.47	99.48	99.48	99.48	99.49	99.49	99.50	99.50	99.50	3			
3	1	10.13	10.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.34	27.23	27.13	27.05	26.92	26.83	26.69	26.60	26.50	26.41	26.35	26.28	26.24	26.18	26.15	26.13	26.13	3	3		
	2	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.34	27.23	27.13	27.05	26.92	26.83	26.69	26.60	26.50	26.41	26.35	26.28	26.24	26.18	26.15	26.13	26.13	4			
4	1	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.94	5.91	5.87	5.84	5.80	5.77	5.75	5.72	5.70	5.68	5.66	5.65	5.64	5.63	5.63	4	4		
	2	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66	14.55	14.45	14.37	14.25	14.15	14.02	13.93	13.84	13.75	13.69	13.61	13.58	13.52	13.49	13.46	13.46	5			
5	1	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.70	4.68	4.64	4.60	4.56	4.53	4.50	4.46	4.44	4.42	4.41	4.39	4.37	4.37	5	5			
	2	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16	10.05	9.96	9.89	9.77	9.68	9.55	9.47	9.38	9.29	9.24	9.17	9.13	9.08	9.04	9.02	9.02		6		
6	1	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.03	4.00	3.96	3.92	3.87	3.84	3.81	3.77	3.75	3.73	3.71	3.69	3.68	3.67	6	6			
	2	13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.79	7.72	7.60	7.52	7.40	7.31	7.23	7.14	7.09	7.02	6.99	6.93	6.90	6.88	6.88		7		
7	1	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.60	3.57	3.53	3.49	3.44	3.41	3.38	3.34	3.32	3.29	3.27	3.25	3.24	3.23	3.23	7	7		
	2	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.54	6.47	6.36	6.28	6.16	6.07	5.99	5.91	5.86	5.79	5.75	5.70	5.67	5.65	5.65	8			
8	1	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.31	3.28	3.24	3.20	3.15	3.12	3.08	3.04	3.02	2.99	2.97	2.95	2.94	2.93	2.93	8	8		
	2	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.73	5.67	5.56	5.48	5.36	5.28	5.20	5.12	5.07	5.00	4.96	4.91	4.88	4.86	4.86	9			
9	1	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.10	3.07	3.03	2.99	2.94	2.90	2.86	2.83	2.80	2.77	2.76	2.73	2.72	2.71	2.71	9	9		
	2	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.18	5.11	5.01	4.92	4.81	4.73	4.65	4.57	4.52	4.45	4.41	4.36	4.33	4.31	4.31	10			
10	1	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.94	2.91	2.86	2.82	2.77	2.74	2.70	2.66	2.64	2.60	2.59	2.56	2.55	2.54	2.54	10	10		
	2	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.77	4.71	4.60	4.52	4.41	4.33	4.25	4.17	4.12	4.05	4.01	3.96	3.93	3.91	3.91	10			

$n_2$		5% (normal) y 1% (negritas) puntos para la distribución de F																												$n_1$
		n1 grados de libertad (para el mayor cuadrado medio)																												
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	$\infty$					
11	1	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.82	2.79	2.74	2.70	2.65	2.61	2.57	2.53	2.51	2.47	2.46	2.43	2.42	2.40	2.40	11	11		
	2	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.46	4.40	4.29	4.21	4.10	4.02	3.94	3.86	3.81	3.74	3.71	3.66	3.62	3.60	3.60	12			
12	1	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.72	2.69	2.64	2.60	2.54	2.51	2.47	2.43	2.40	2.37	2.35	2.32	2.31	2.30	2.30	12	12		
	2	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.22	4.16	4.05	3.97	3.86	3.78	3.70	3.62	3.57	3.50	3.47	3.41	3.38	3.36	3.36	13			
13	1	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.63	2.60	2.55	2.51	2.46	2.42	2.38	2.34	2.31	2.28	2.26	2.23	2.22	2.21	2.21	13	13		
	2	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	4.02	3.96	3.86	3.78	3.66	3.59	3.51	3.43	3.38	3.31	3.27	3.22	3.19	3.17	3.17	14			
14	1	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.57	2.53	2.48	2.44	2.39	2.35	2.31	2.27	2.24	2.21	2.19	2.16	2.14	2.13	2.13	14	14		
	2	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.86	3.80	3.70	3.62	3.51	3.43	3.35	3.27	3.22	3.15	3.11	3.06	3.03	3.00	3.00	15			
15	1	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.51	2.48	2.42	2.38	2.33	2.29	2.25	2.20	2.18	2.14	2.12	2.10	2.08	2.07	2.07	15	15		
	2	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.73	3.67	3.56	3.49	3.37	3.29	3.21	3.13	3.08	3.01	2.98	2.92	2.89	2.87	2.87	16			
16	1	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.46	2.42	2.37	2.33	2.28	2.24	2.19	2.15	2.12	2.09	2.07	2.04	2.02	2.01	2.01	16	16		
	2	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.62	3.55	3.45	3.37	3.26	3.18	3.10	3.02	2.97	2.90	2.86	2.81	2.78	2.75	2.75	17			
17	1	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.41	2.38	2.33	2.29	2.23	2.19	2.15	2.10	2.08	2.04	2.02	1.99	1.97	1.96	1.96	17	17		
	2	8.40	6.11	5.19	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.52	3.46	3.35	3.27	3.16	3.08	3.00	2.92	2.87	2.80	2.76	2.71	2.68	2.65	2.65	18			
18	1	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.37	2.34	2.29	2.25	2.19	2.15	2.11	2.06	2.04	2.00	1.98	1.95	1.93	1.92	1.92	18	18		
	2	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.43	3.37	3.27	3.19	3.08	3.00	2.92	2.84	2.78	2.71	2.68	2.62	2.59	2.57	2.57	19			
19	1	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.34	2.31	2.26	2.21	2.16	2.11	2.07	2.03	2.00	1.96	1.94	1.91	1.89	1.88	1.88	19	19		
	2	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.36	3.30	3.19	3.12	3.00	2.92	2.84	2.76	2.71	2.64	2.60	2.55	2.51	2.49	2.49	20			
20	1	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.31	2.28	2.22	2.18	2.12	2.08	2.04	1.99	1.97	1.93	1.91	1.88	1.86	1.84	1.84	20	20		
	2	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.29	3.23	3.13	3.05	2.94	2.86	2.78	2.69	2.64	2.57	2.54	2.48	2.44	2.42	2.42	21			
21	1	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.28	2.25	2.20	2.16	2.10	2.05	2.01	1.96	1.94	1.90	1.88	1.84	1.83	1.81	1.81	21	21		
	2	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	3.31	3.24	3.17	3.07	2.99	2.88	2.80	2.72	2.64	2.58	2.51	2.48	2.42	2.38	2.36	2.36	22			
22	1	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.26	2.23	2.17	2.13	2.07	2.03	1.98	1.94	1.91	1.87	1.85	1.82	1.80	1.78	1.78	22	22		
	2	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.18	3.12	3.02	2.94	2.83	2.75	2.67												

$n_2$	5% (normal) y 1% (negritas) puntos para la distribución de F																										$n_1$
	n1 grados de libertad (para el mayor cuadrado medio)																										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	$\infty$			
34	4.13	3.28	2.88	2.65	2.49	2.38	2.29	2.23	2.17	2.12	2.08	2.05	1.99	1.95	1.89	1.84	1.80	1.75	1.71	1.67	1.65	1.61	1.59	1.57	34		
	<b>7.44</b>	<b>5.29</b>	<b>4.42</b>	<b>3.93</b>	<b>3.61</b>	<b>3.39</b>	<b>3.22</b>	<b>3.09</b>	<b>2.98</b>	<b>2.89</b>	<b>2.82</b>	<b>2.76</b>	<b>2.66</b>	<b>2.58</b>	<b>2.46</b>	<b>2.38</b>	<b>2.30</b>	<b>2.21</b>	<b>2.16</b>	<b>2.08</b>	<b>2.04</b>	<b>1.98</b>	<b>1.94</b>	<b>1.91</b>			
36	4.11	3.26	2.87	2.63	2.48	2.36	2.28	2.21	2.15	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.87	1.82	1.78	1.73	1.69	1.65	1.62	1.59	1.56	1.55	36		
	<b>7.40</b>	<b>5.25</b>	<b>4.38</b>	<b>3.89</b>	<b>3.57</b>	<b>3.35</b>	<b>3.18</b>	<b>3.05</b>	<b>2.95</b>	<b>2.86</b>	<b>2.79</b>	<b>2.72</b>	<b>2.62</b>	<b>2.54</b>	<b>2.43</b>	<b>2.35</b>	<b>2.26</b>	<b>2.18</b>	<b>2.12</b>	<b>2.04</b>	<b>2.00</b>	<b>1.94</b>	<b>1.90</b>	<b>1.87</b>			
38	4.10	3.24	2.85	2.62	2.46	2.35	2.26	2.19	2.14	2.09	2.05	2.02	1.96	1.92	1.85	1.81	1.76	1.71	1.68	1.63	1.61	1.57	1.54	1.53	38		
	<b>7.35</b>	<b>5.21</b>	<b>4.34</b>	<b>3.86</b>	<b>3.54</b>	<b>3.32</b>	<b>3.15</b>	<b>3.02</b>	<b>2.92</b>	<b>2.83</b>	<b>2.75</b>	<b>2.69</b>	<b>2.59</b>	<b>2.51</b>	<b>2.40</b>	<b>2.32</b>	<b>2.23</b>	<b>2.14</b>	<b>2.09</b>	<b>2.01</b>	<b>1.97</b>	<b>1.90</b>	<b>1.86</b>	<b>1.84</b>			
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.04	2.00	1.95	1.90	1.84	1.79	1.74	1.69	1.66	1.61	1.59	1.55	1.53	1.51	40		
	<b>7.31</b>	<b>5.18</b>	<b>4.31</b>	<b>3.83</b>	<b>3.51</b>	<b>3.29</b>	<b>3.12</b>	<b>2.99</b>	<b>2.89</b>	<b>2.80</b>	<b>2.73</b>	<b>2.66</b>	<b>2.56</b>	<b>2.48</b>	<b>2.37</b>	<b>2.29</b>	<b>2.20</b>	<b>2.11</b>	<b>2.06</b>	<b>1.98</b>	<b>1.94</b>	<b>1.87</b>	<b>1.83</b>	<b>1.81</b>			
42	4.07	3.22	2.83	2.59	2.44	2.32	2.24	2.17	2.11	2.06	2.03	1.99	1.94	1.89	1.83	1.78	1.73	1.68	1.65	1.60	1.57	1.53	1.51	1.49	42		
	<b>7.28</b>	<b>5.15</b>	<b>4.29</b>	<b>3.80</b>	<b>3.49</b>	<b>3.27</b>	<b>3.10</b>	<b>2.97</b>	<b>2.86</b>	<b>2.78</b>	<b>2.70</b>	<b>2.64</b>	<b>2.54</b>	<b>2.46</b>	<b>2.34</b>	<b>2.26</b>	<b>2.18</b>	<b>2.09</b>	<b>2.03</b>	<b>1.95</b>	<b>1.91</b>	<b>1.85</b>	<b>1.80</b>	<b>1.78</b>			
44	4.06	3.21	2.82	2.58	2.43	2.31	2.23	2.16	2.10	2.05	2.01	1.98	1.92	1.88	1.81	1.77	1.72	1.67	1.63	1.59	1.56	1.52	1.49	1.48	44		
	<b>7.25</b>	<b>5.12</b>	<b>4.26</b>	<b>3.78</b>	<b>3.47</b>	<b>3.24</b>	<b>3.08</b>	<b>2.95</b>	<b>2.84</b>	<b>2.75</b>	<b>2.68</b>	<b>2.62</b>	<b>2.52</b>	<b>2.44</b>	<b>2.32</b>	<b>2.24</b>	<b>2.15</b>	<b>2.07</b>	<b>2.01</b>	<b>1.93</b>	<b>1.89</b>	<b>1.82</b>	<b>1.78</b>	<b>1.75</b>			
46	4.05	3.20	2.81	2.57	2.42	2.30	2.22	2.15	2.09	2.04	2.00	1.97	1.91	1.87	1.80	1.76	1.71	1.65	1.62	1.57	1.55	1.51	1.48	1.46	46		
	<b>7.22</b>	<b>5.10</b>	<b>4.24</b>	<b>3.76</b>	<b>3.44</b>	<b>3.22</b>	<b>3.06</b>	<b>2.93</b>	<b>2.82</b>	<b>2.73</b>	<b>2.66</b>	<b>2.60</b>	<b>2.50</b>	<b>2.42</b>	<b>2.30</b>	<b>2.22</b>	<b>2.13</b>	<b>2.04</b>	<b>1.99</b>	<b>1.91</b>	<b>1.86</b>	<b>1.80</b>	<b>1.76</b>	<b>1.73</b>			
48	4.04	3.19	2.80	2.57	2.41	2.29	2.21	2.14	2.08	2.03	1.99	1.96	1.90	1.86	1.79	1.75	1.70	1.64	1.61	1.56	1.54	1.49	1.47	1.45	48		
	<b>7.19</b>	<b>5.08</b>	<b>4.22</b>	<b>3.74</b>	<b>3.43</b>	<b>3.20</b>	<b>3.04</b>	<b>2.91</b>	<b>2.80</b>	<b>2.71</b>	<b>2.64</b>	<b>2.58</b>	<b>2.48</b>	<b>2.40</b>	<b>2.28</b>	<b>2.20</b>	<b>2.12</b>	<b>2.02</b>	<b>1.97</b>	<b>1.89</b>	<b>1.84</b>	<b>1.78</b>	<b>1.73</b>	<b>1.70</b>			
50	4.03	3.18	2.79	2.56	2.40	2.29	2.20	2.13	2.07	2.03	1.99	1.95	1.89	1.85	1.78	1.74	1.69	1.63	1.60	1.55	1.52	1.48	1.46	1.44	50		
	<b>7.17</b>	<b>5.06</b>	<b>4.20</b>	<b>3.72</b>	<b>3.41</b>	<b>3.19</b>	<b>3.02</b>	<b>2.89</b>	<b>2.78</b>	<b>2.70</b>	<b>2.63</b>	<b>2.56</b>	<b>2.46</b>	<b>2.38</b>	<b>2.27</b>	<b>2.18</b>	<b>2.10</b>	<b>2.01</b>	<b>1.95</b>	<b>1.87</b>	<b>1.82</b>	<b>1.76</b>	<b>1.71</b>	<b>1.68</b>			
55	4.02	3.16	2.77	2.54	2.38	2.27	2.18	2.11	2.06	2.01	1.97	1.93	1.88	1.83	1.76	1.72	1.67	1.61	1.58	1.53	1.50	1.46	1.43	1.41	55		
	<b>7.12</b>	<b>5.01</b>	<b>4.16</b>	<b>3.68</b>	<b>3.37</b>	<b>3.15</b>	<b>2.98</b>	<b>2.85</b>	<b>2.75</b>	<b>2.66</b>	<b>2.59</b>	<b>2.53</b>	<b>2.42</b>	<b>2.34</b>	<b>2.23</b>	<b>2.15</b>	<b>2.06</b>	<b>1.97</b>	<b>1.91</b>	<b>1.83</b>	<b>1.78</b>	<b>1.71</b>	<b>1.67</b>	<b>1.64</b>			
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.95	1.92	1.86	1.82	1.75	1.70	1.65	1.59	1.56	1.51	1.48	1.44	1.41	1.39	60		
	<b>7.08</b>	<b>4.98</b>	<b>4.13</b>	<b>3.65</b>	<b>3.34</b>	<b>3.12</b>	<b>2.95</b>	<b>2.82</b>	<b>2.72</b>	<b>2.63</b>	<b>2.56</b>	<b>2.50</b>	<b>2.39</b>	<b>2.31</b>	<b>2.20</b>	<b>2.12</b>	<b>2.03</b>	<b>1.94</b>	<b>1.88</b>	<b>1.79</b>	<b>1.75</b>	<b>1.68</b>	<b>1.63</b>	<b>1.60</b>			
65	3.99	3.14	2.75	2.51	2.36	2.24	2.15	2.08	2.03	1.98	1.94	1.90	1.85	1.80	1.73	1.69	1.63	1.58	1.54	1.49	1.46	1.42	1.39	1.37	65		
	<b>7.04</b>	<b>4.95</b>	<b>4.10</b>	<b>3.62</b>	<b>3.31</b>	<b>3.09</b>	<b>2.93</b>	<b>2.80</b>	<b>2.69</b>	<b>2.61</b>	<b>2.53</b>	<b>2.47</b>	<b>2.37</b>	<b>2.29</b>	<b>2.17</b>	<b>2.09</b>	<b>2.00</b>	<b>1.91</b>	<b>1.85</b>	<b>1.77</b>	<b>1.72</b>	<b>1.65</b>	<b>1.60</b>	<b>1.57</b>			
70	3.98	3.13	2.74	2.50	2.35	2.23	2.14	2.07	2.02	1.97	1.93	1.89	1.84	1.79	1.72	1.67	1.62	1.57	1.53	1.48	1.45	1.40	1.37	1.35	70		
	<b>7.01</b>	<b>4.92</b>	<b>4.07</b>	<b>3.60</b>	<b>3.29</b>	<b>3.07</b>	<b>2.91</b>	<b>2.78</b>	<b>2.67</b>	<b>2.59</b>	<b>2.51</b>	<b>2.45</b>	<b>2.35</b>	<b>2.27</b>	<b>2.15</b>	<b>2.07</b>	<b>1.98</b>	<b>1.89</b>	<b>1.83</b>	<b>1.74</b>	<b>1.70</b>	<b>1.62</b>	<b>1.57</b>	<b>1.54</b>			
80	3.96	3.11	2.72	2.49	2.33	2.21	2.13	2.06	2.00	1.95	1.91	1.88	1.82	1.77	1.70	1.65	1.60	1.54	1.51	1.45	1.43	1.38	1.35	1.33	80		
	<b>6.96</b>	<b>4.88</b>	<b>4.04</b>	<b>3.56</b>	<b>3.26</b>	<b>3.04</b>	<b>2.87</b>	<b>2.74</b>	<b>2.64</b>	<b>2.55</b>	<b>2.48</b>	<b>2.42</b>	<b>2.31</b>	<b>2.23</b>	<b>2.12</b>	<b>2.03</b>	<b>1.94</b>	<b>1.85</b>	<b>1.79</b>	<b>1.70</b>	<b>1.65</b>	<b>1.58</b>	<b>1.53</b>	<b>1.50</b>			
100	3.94	3.09	2.70	2.46	2.31	2.19	2.10	2.03	1.97	1.93	1.89	1.85	1.79	1.75	1.68	1.63	1.57	1.52	1.48	1.42	1.39	1.34	1.31	1.28	100		
	<b>6.90</b>	<b>4.82</b>	<b>3.98</b>	<b>3.51</b>	<b>3.21</b>	<b>2.99</b>	<b>2.82</b>	<b>2.69</b>	<b>2.59</b>	<b>2.50</b>	<b>2.43</b>	<b>2.37</b>	<b>2.27</b>	<b>2.19</b>	<b>2.07</b>	<b>1.98</b>	<b>1.89</b>	<b>1.80</b>	<b>1.74</b>	<b>1.65</b>	<b>1.60</b>	<b>1.52</b>	<b>1.47</b>	<b>1.43</b>			
125	3.92	3.07	2.68	2.44	2.29	2.17	2.08	2.01	1.96	1.91	1.87	1.83	1.77	1.73	1.66	1.60	1.55	1.49	1.45	1.40	1.36	1.31	1.27	1.25	125		
	<b>6.84</b>	<b>4.78</b>	<b>3.94</b>	<b>3.47</b>	<b>3.17</b>	<b>2.95</b>	<b>2.79</b>	<b>2.66</b>	<b>2.55</b>	<b>2.47</b>	<b>2.39</b>	<b>2.33</b>	<b>2.23</b>	<b>2.15</b>	<b>2.03</b>	<b>1.94</b>	<b>1.85</b>	<b>1.76</b>	<b>1.69</b>	<b>1.60</b>	<b>1.55</b>	<b>1.47</b>	<b>1.41</b>	<b>1.37</b>			
150	3.90	3.06	2.66	2.43	2.27	2.16	2.07	2.00	1.94	1.89	1.85	1.82	1.76	1.71	1.64	1.59	1.54	1.48	1.44	1.38	1.34	1.29	1.25	1.22	150		
	<b>6.81</b>	<b>4.75</b>	<b>3.91</b>	<b>3.45</b>	<b>3.14</b>	<b>2.92</b>	<b>2.76</b>	<b>2.63</b>	<b>2.53</b>	<b>2.44</b>	<b>2.37</b>	<b>2.31</b>	<b>2.20</b>	<b>2.12</b>	<b>2.00</b>	<b>1.92</b>	<b>1.83</b>	<b>1.73</b>	<b>1.66</b>	<b>1.57</b>	<b>1.52</b>	<b>1.43</b>	<b>1.38</b>	<b>1.33</b>			
200	3.89	3.04	2.65	2.42	2.26	2.14	2.06	1.98	1.93	1.88	1.84	1.80	1.74	1.69	1.62	1.57	1.52	1.46	1.41	1.35	1.32	1.26	1.22	1.19	200		
	<b>6.76</b>	<b>4.71</b>	<b>3.88</b>	<b>3.41</b>	<b>3.11</b>	<b>2.89</b>	<b>2.73</b>	<b>2.60</b>	<b>2.50</b>	<b>2.41</b>	<b>2.34</b>	<b>2.27</b>	<b>2.17</b>	<b>2.09</b>	<b>1.97</b>	<b>1.89</b>	<b>1.79</b>	<b>1.69</b>	<b>1.63</b>	<b>1.53</b>	<b>1.48</b>	<b>1.39</b>	<b>1.33</b>	<b>1.28</b>			
400	3.86	3.02	2.63	2.39	2.24	2.12	2.03	1.96	1.90	1.85	1.81	1.78	1.72	1.67	1.60	1.54	1.49	1.42	1.38	1.32	1.28	1.22	1.17	1.13	400		
	<b>6.70</b>	<b>4.66</b>	<b>3.83</b>	<b>3.37</b>	<b>3.06</b>	<b>2.85</b>	<b>2.68</b>	<b>2.56</b>	<b>2.45</b>	<b>2.37</b>	<b>2.29</b>	<b>2.23</b>	<b>2.13</b>	<b>2.05</b>	<b>1.92</b>	<b>1.84</b>	<b>1.75</b>	<b>1.64</b>	<b>1.58</b>	<b>1.48</b>	<b>1.42</b>	<b>1.32</b>	<b>1.25</b>	<b>1.19</b>			
1000	3.85	3.00	2.61	2.38	2.22	2.11	2.02	1.95	1.89	1.84	1.80	1.76	1.70	1.65	1.58	1.53	1.47	1.41	1.36	1.30	1.26	1.19	1.13	1.08	1000		
	<b>6.66</b>	<b>4.63</b>	<b>3.80</b>	<b>3.34</b>	<b>3.04</b>	<b>2.82</b>	<b>2.66</b>	<b>2.53</b>	<b>2.43</b>	<b>2.34</b>	<b>2.27</b>	<b>2.20</b>	<b>2.10</b>	<b>2.02</b>	<b>1.90</b>	<b>1.81</b>	<b>1.72</b>	<b>1.61</b>	<b>1.54</b>	<b>1.44</b>	<b>1.38</b>	<b>1.28</b>	<b>1.19</b>	<b>1.12</b>			
$\infty$	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.79	1.75	1.69	1.64	1.57	1.52	1.46	1.39	1.35	1.28	1.24	1.17	1.11	1.00	$\infty$		
	<b>6.63</b>	<b>4.61</b>	<b>3.78</b>	<b>3.32</b>	<b>3.02</b>	<b>2.80</b>	<b>2.64</b>	<b>2.51</b>	<b>2.41</b>	<b>2.32</b>	<b>2.25</b>	<b>2.18</b>	<b>2.08</b>	<b>2.00</b>	<b>1.88</b>	<b>1.79</b>	<b>1.70</b>	<b>1.59</b>	<b>1.52</b>	<b>1.42</b>	<b>1.36</b>	<b>1.25</b>	<b>1.15</b>	<b>1.00</b>			