

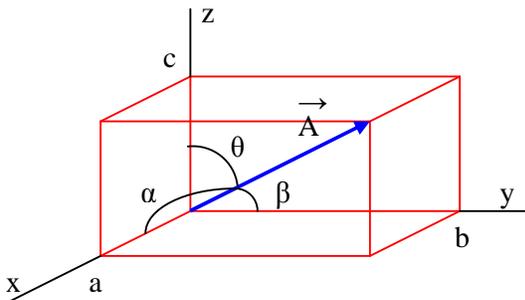
## VECTORES EN TRES DIMENSIONES

Los vectores pueden expresarse en función de coordenadas, de la siguiente manera:

$$\vec{A} = (a; b; c)$$

o de otra forma:  $\vec{A} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$

donde:  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ , son vectores denominados, vectores unitarios que indican la dirección de los ejes "x", "y", "z" respectivamente.



El módulo del vector  $\vec{A}$  es igual:

$$A = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

**Ejemplo:** El módulo del vector:

$$\vec{A} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$$

Es igual a:  $A = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} \rightarrow A = 3$

**COSENOS DIRECTORES:**

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\cos \alpha = \frac{a}{A} \rightarrow a = A \cos \alpha$$

$$\cos \beta = \frac{b}{A} \rightarrow b = A \cos \beta$$

$$\cos \theta = \frac{c}{A} \rightarrow c = A \cos \theta$$

$\alpha$ : ángulo que forma el vector  $\vec{A}$  con el eje x

$\beta$ : ángulo que forma el vector  $\vec{A}$  con el eje y

$\theta$ : ángulo que forma el vector  $\vec{A}$  con el eje z

### SUMA DE VECTORES

Si se tiene:  $\vec{A} = (a_1; b_1; c_1)$

$$\vec{B} = (a_2; b_2; c_2)$$

Entonces:  $\vec{A} + \vec{B} = (a_1 + a_2; b_1 + b_2; c_1 + c_2)$

**Ejemplo:** calcular el módulo del vector resultante de los siguientes vectores:

$$\vec{A} = (2; 1; -2)$$

$$\vec{B} = (1; -3; 1)$$

$$\vec{C} = (-1; 1; -1)$$

La resultante de estos vectores es:

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$$

$$\vec{R} = (2+1-1; 1-3+1; -2+1-1)$$

$$\vec{R} = (2; -1; -2)$$

También se expresa:  $\vec{R} = 2\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$

El módulo de la resultante es:

$$R = \sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9}$$

$$R = 3$$

### RESTA DE VECTORES

Si se tiene:  $\vec{A} = (a_1; b_1; c_1)$

$$\vec{B} = (a_2; b_2; c_2)$$

Entonces:  $\vec{A} - \vec{B} = (a_1 - a_2; b_1 - b_2; c_1 - c_2)$

**Ejemplo:** Calcular:  $|\vec{A} - \vec{B}|$

Si se tiene:  $\vec{A} = (4; -8; 6)$

$$\vec{B} = (1; 4; 2)$$

La resta de los vectores es:

$$\vec{A} - \vec{B} = (4-1; -8-4; 6-2)$$

$$\vec{A} - \vec{B} = (3; -12; 4)$$

También se expresa:  $\vec{A} - \vec{B} = 3\vec{i} - 12\vec{j} + 4\vec{k}$

El módulo del vector resta es:

$$|\vec{A} - \vec{B}| = \sqrt{(3)^2 + (-12)^2 + (4)^2}$$

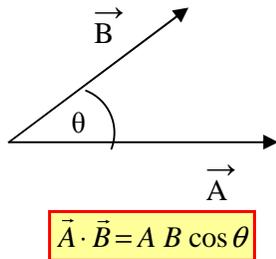
$$|\vec{A} - \vec{B}| = \sqrt{169}$$

$$|\vec{A} - \vec{B}| = 13$$

## PRODUCTO DE VECTORES

### Producto escalar ( $\vec{A} \cdot \vec{B}$ )

Al multiplicar escalarmente dos vectores, se obtiene como resultado “un número”. Dicho número se obtiene multiplicando los módulos de los vectores y por el coseno del ángulo que forman dichos vectores.



**Ejemplo:** Si los módulos de los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  son  $A=12$ ,  $B=6$  y el ángulo que forman dichos vectores es  $60^\circ$ . Calcular el producto escalar de ellos.

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A B \cos \theta = (12)(6) \cos 60^\circ$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (72)(0,5) \rightarrow \boxed{\vec{A} \cdot \vec{B} = 36}$$

**Ejemplo:** Si se tiene los vectores:

$$\vec{A} = (1; 2; -2)$$

$$\vec{B} = (3; -1; 2)$$

Calcular el producto escalar  $\vec{A} \cdot \vec{B}$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (1)(3) + (2)(-1) + (-2)(2)$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 3 - 1 - 4$$

$$\boxed{\vec{A} \cdot \vec{B} = -2}$$

**Caso particular:** Cuando dos vectores son perpendiculares entre sí, el producto escalar de ellos es “CERO”

$$\boxed{\vec{A} \cdot \vec{B} = 0}$$

**Ejemplo:** Si los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  son perpendiculares entre si, hallar el valor de “a”

$$\vec{A} = (a; 2; -2) \text{ y } \vec{B} = (3; -1; a)$$

Si son perpendiculares, se cumple:  $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$

$$\text{Osea: } (a)(3) + (2)(-1) + (-2)(a) = 0$$

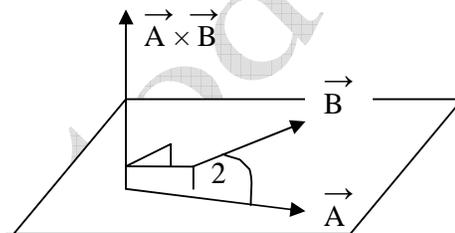
$$3a - 2 - 2a = 0 \rightarrow a = 2$$

### Producto vectorial ( $\vec{A} \times \vec{B}$ )

Al multiplicar vectorialmente dos vectores se obtiene como resultado a otro vector. El módulo de ese vector es igual al producto de los módulos de los vectores a multiplicar y por seno del ángulo que forman entre sí.

$$\boxed{|\vec{A} \times \vec{B}| = A B \text{ sen } \theta}$$

La dirección de dicho vector es perpendicular al plano que contiene a los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$



Si los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  son dados de la siguiente forma:

$$\vec{A} = (1; 2; 3) \text{ y } \vec{B} = (4; 5; 6)$$

Su productor vectorial se determina así:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = (2 \times 6 - 5 \times 3)\vec{i} - (1 \times 6 - 4 \times 3)\vec{j} + (1 \times 5 - 4 \times 2)\vec{k}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = (12 - 15)\vec{i} - (6 - 12)\vec{j} + (5 - 8)\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{A} \times \vec{B} = -3\vec{i} + 6\vec{j} - 3\vec{k}}$$

Si se desea calcular el módulo del producto vectorial se procede a efectuar así:

$$\vec{A} \times \vec{B} = -3\vec{i} + 6\vec{j} - 3\vec{k}$$

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = \sqrt{(-3)^2 + (6)^2 + (3)^2}$$

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = \sqrt{9 + 36 + 9} = \sqrt{54}$$

$$\boxed{|\vec{A} \times \vec{B}| = 3\sqrt{6}}$$

### ¿Cómo se determina el vector unitario de un vector?

El vector unitario de cualquier vector  $\vec{A}$

Se expresa de la siguiente manera:

$$\vec{u} = \frac{\vec{A}}{A}$$

**Ejemplo:** Para determinar el vector unitario del vector:  $\vec{A} = 2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ , se determina en primer lugar, su módulo:

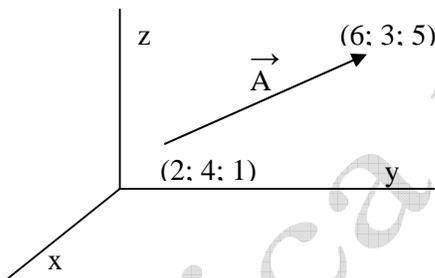
$$A = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} \rightarrow A = \sqrt{9} \rightarrow A = 3$$

$$\text{Entonces: } \vec{u} = \frac{\vec{A}}{A} = \frac{2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}}{3}$$

El vector unitario del vector  $\vec{A}$ , es igual a:

$$\vec{u} = \frac{2\vec{i}}{3} + \frac{\vec{j}}{3} + \frac{2\vec{k}}{3}$$

### ¿Cómo se determina la ecuación vectorial de un vector?



El vector  $\vec{A}$  está entre los puntos: (2; 4; 1) y (6; 3; 5)

Su ecuación vectorial se obtiene restando el punto del extremo del vector menos el punto del origen del vector:

$$\vec{A} = (6; 3; 5) - (2; 4; 1)$$

$$\vec{A} = (6 - 2; 3 - 4; 5 - 1)$$

$$\vec{A} = (4; -1; 4)$$

$$\vec{A} = 4\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$$

### PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Calcular la resultante ( $\vec{R}$ ) de los siguientes 3 vectores:

$$\vec{A} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$$

$$\vec{B} = \vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\vec{C} = -4\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$$

A)  $\vec{R} = \vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}$     B)  $\vec{R} = -\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$

C)  $\vec{R} = -\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$     D)  $\vec{R} = \vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$

E)  $\vec{R} = -\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}$

- 2.- Determine el módulo del vector  $\vec{F}$ , si:

$$\vec{F} = 2\vec{A} - \vec{B} + 3\vec{C}$$

$$\vec{A} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{B} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\vec{C} = -\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$$

A) 6    B)  $6\sqrt{2}$     C)  $6\sqrt{3}$

D)  $6\sqrt{5}$     E) 12

3. Si el módulo del vector  $\vec{A}$  es igual a 3, calcular el módulo del vector  $\vec{B}$ :

$$\vec{A} = (1; a; a); \quad \vec{B} = (2a; a; 4)$$

A) 4    B)  $4\sqrt{2}$     C) 6

D)  $6\sqrt{2}$     E) 10

4. Determine los valores de m y n si se cumple la siguiente relación:

$$\vec{A} = m\vec{B} + n\vec{C}$$

$$\vec{A} = \vec{i} - \vec{j}; \quad \vec{B} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k};$$

$$\vec{C} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$$

Dar como respuesta: m+n

A) 0    B) -1    C) +1

D) +2    E) -2

5. Un vector  $\vec{A}$  tiene su origen en el punto (2; -1; -2) y su extremo (flecha) en un punto "P"; un segundo vector  $\vec{B}$  se inicia en el punto "P" y termina en el punto (-3; 1; 3). Calcular el módulo del vector resultante de estos dos vectores.

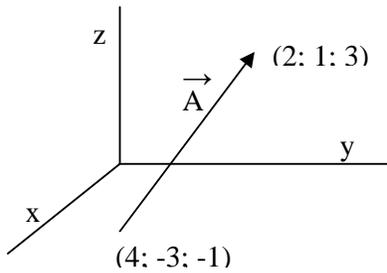
A)  $2\sqrt{6}$     B)  $3\sqrt{6}$     C)  $4\sqrt{6}$

D)  $5\sqrt{6}$     E)  $6\sqrt{6}$

6. Dos vectores parten de un mismo punto "P" y uno de ellos termina en el punto (3; -2; -1) y el otro en el punto (2; -4; -2). Calcular el módulo de la resta de estos vectores.

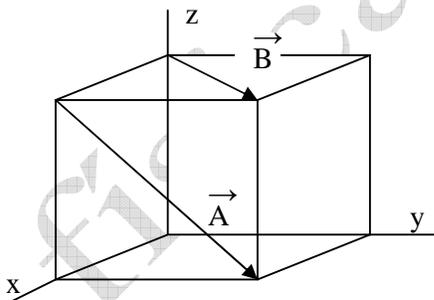
A)  $\sqrt{6}$     B) 2    C) 3  
D)  $\sqrt{5}$     E)  $2\sqrt{6}$

7. Calcular el vector unitario del vector  $\vec{A}$ .



A)  $\frac{1}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k}$     B)  $\frac{1}{6}\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j} + \frac{1}{3}\vec{k}$   
C)  $\frac{1}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} - \frac{2}{3}\vec{k}$     D)  $\frac{1}{3}\vec{i} - \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k}$   
E)  $-\frac{1}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k}$

8. Calcular la resultante de los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ , ubicados en el siguiente cubo de 2 unidades de arista.



A)  $\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$     B)  $2\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$   
C)  $2\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$     D)  $2\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$   
E)  $2\vec{i} - 4\vec{j} - 2\vec{k}$

9. Si la resultante de los vectores  $\vec{a}$ ;  $\vec{b}$  y  $\vec{c}$  es nula, calcular:  $m + n + p$ .

$$\vec{a} = (m; n; -4); \vec{b} = (n; -1; p) \text{ y } \vec{c} = (3; p; m)$$

A) 0    B) +1    C) -1  
D) +2    E) -2

10. Si se tiene:  $\vec{a} = (3; 1; -4)$  y  $\vec{b} = (-2; 3; 1)$ .

Calcular:  $\vec{a} \cdot \vec{b}$

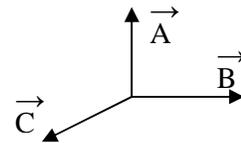
A) +7    B) -7    C) -1  
D) +1    E) 0

11. Si los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  son perpendiculares entre sí, determine el valor de "a".

$$\vec{A} = (a; -2; 3) \text{ y } \vec{B} = (2; 1; -a)$$

A) 0    B) +1    C) -1  
D) +2    E) -2

12. En la figura se tiene a los vectores  $\vec{A}$ ;  $\vec{B}$  y  $\vec{C}$  perpendiculares entre sí. Indique la expresión correcta que represente la figura.



A)  $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C}$     B)  $\vec{C} \times \vec{A} = \vec{B}$   
C)  $\vec{A} \times \vec{C} = \vec{B}$     D)  $\vec{B} \times \vec{C} = \vec{A}$   
E)  $\vec{B} \times \vec{A} = -\vec{C}$

13. Un vector forma  $60^\circ$  con el eje "x",  $120^\circ$  con el eje "y", ¿qué ángulo forma dicho vector con el eje "z"?

A)  $30^\circ$     B)  $45^\circ$     C)  $60^\circ$   
D)  $120^\circ$     E)  $180^\circ$

14. El resultado de efectuar el producto escalar de dos vectores da como resultado una cantidad igual al módulo del producto vectorial de los mismos vectores. ¿Qué ángulo forman dichos vectores?

A)  $30^\circ$     B)  $37^\circ$     C)  $45^\circ$   
D)  $60^\circ$     E)  $90^\circ$

15. ¿Qué ángulo forman los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  si se sabe que:  $\vec{A} = 2\vec{k}$  y  $\vec{B} = \vec{i} + \vec{j}$

- A)  $0^\circ$     B)  $45^\circ$     C)  $60^\circ$   
 D)  $90^\circ$     E)  $120^\circ$

16. ¿Qué ángulo forman los vectores:

$$\vec{A} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k} \quad \text{y} \quad \vec{B} = -\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$$

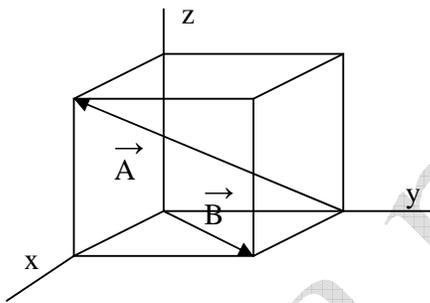
- A)  $30^\circ$     B)  $60^\circ$     C)  $90^\circ$   
 D)  $\text{Arc tg } \sqrt{2}$     E)  $\text{Arc tg } \sqrt{3}$

17. Calcular el producto vectorial:  $\vec{A} \times \vec{B}$

$$\vec{A} = (2; -3; 1) \quad \text{y} \quad \vec{B} = (1; -2; -1)$$

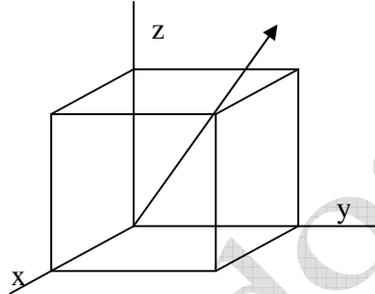
- A) (5; 3; -1)    B) (5; -3; -1)  
 C) (-5; 3; 1)    D) (1; 3; -1)  
 E) (1; -1; 3)

18. En la siguiente figura se tiene un cubo de arista igual a 1, y en él dos vectores. Determine el producto escalar de dichos vectores.



- A) 0    B) +1    C) -1  
 D) +2    E) -2

19. El vector ubicado en el cubo de arista igual a 1, tiene un módulo igual a  $3\sqrt{3}$ . Determine su ecuación vectorial.



- A)  $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$     B)  $2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$   
 C)  $3\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}$     D)  $3\vec{i} - 3\vec{j} + 3\vec{k}$   
 E)  $\sqrt{3}\vec{i} + \sqrt{3}\vec{j} + \sqrt{3}\vec{k}$

20. Se sabe que los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  son perpendiculares entre sí. Calcular:  $|\vec{A} \times \vec{B}|$

$$\vec{A} = \vec{i} - a\vec{j} + \vec{k} \quad \text{y} \quad \vec{B} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + a\vec{k}$$

- A) 3    B)  $3\sqrt{2}$     C) 6  
 D)  $6\sqrt{2}$     E) 12