



¡Tú eres el próximo!

GEOMETRÍA:

Docente: Dr. Johnny F. Farfán P.

Actualmente la geometría, en sus diversas concepciones, tiene muchas aplicaciones, en el campo de la física (estática), análisis vectorial, en la ingeniería y arquitectura. Las construcciones de casas, edificios, puentes, puertos, etc.

La geometría es una ciencia que surge de la necesidad de medir los terrenos y trazar sobre ellas líneas divisorias. La palabra geometría deriva de dos palabras griegas geo, que significa tierra y metron que significa medir.

Tema Nº1: SEGMENTOS

1. En una recta se tienen los puntos consecutivos A, B, C, D de modo que $AD=30$, $Ab=10$, $CD=12$. Calcular BC.

a.5 b. 6 c. 7 **d. 8** e.9

2. En los puntos colineales A, B, C, D se cumple que $BC=5$, $AC+BD=20$. Hallar AD.

a.10 b. 12 c. 13. d. 14 **e. 15**

3. Sobre una recta se toman los puntos consecutivos A, B, C,

D de modo que $AB=4$; $BC=3$; $CD=5$. Encontrar $\frac{AC+BD}{AD}$

a.1, 25 b. 1,21 c. 1,22 d. 1,23 e. 1, 27

4. En una recta se marcan los puntos consecutivos A, B, C de modo que $AB=10 + x$; $BC= 16 - 2x$. Encontrar "x", si B es punto medio del segmento AC.

a.1 **b. 2** c. 3 d. 4 e. 5

5. En una recta se ubican los puntos consecutivos A, B, C tal que $AB+AC=18$, luego se toma el punto medio "M" del segmento BC. Hallar AM.

a.7 b. 8 **c. 9** d. 5 e. 4

6. En una recta se marcan los puntos consecutivos A, B, C, luego se toma el punto medio M del segmento BC.

Encontrar AM, si: $\frac{BC^2}{4} +$

$AB \cdot AC = 64$

a.6 b. 7 **c. 8** d. 5 e.4

7. En los puntos colineales A, B, C, D se cumple que $AC=14$, $BD=16$. Encontrar la longitud del segmento que une los puntos medios de los segmentos AB y CD.



¡Tú eres el próximo!



a.11 b.12 c.13 d.14 **e.15**

8. Los puntos A, B, C, D, E se encuentran sobre una línea recta, de tal forma que: $BC=2AB$, $AD=20$, Además $AB.CE=AC.BD$ Calcular DE.

a.10 b. 20 c. 30 **d. 40** e. 50

9. En los puntos colineales A, B, C, se toma el punto medio M del segmento BC de modo que $AB^2+AC^2=26$. Hallar AM^2+BM^2

a.10 b.11 c.12 **d.13** e.14

10. Sobre una recta se toman los puntos consecutivos A, B, C, D cumpliéndose que $AB.BD=AD.BC$, además

$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{BD} = \frac{2}{5} \text{ Hallar BC.}$$

a. 2,4 **b.2,5** c.2,6 d.2,7 e.2,8

11. En una línea recta se ubican los puntos A, B, C, D tal que $CD^2=AC.BC$, además:

$$\frac{1}{AD} + \frac{1}{BD} = \frac{1}{13} \text{ Hallar CD.}$$

a.**13** b.14 c.15 d.16 e.17

12. Sobre una recta se toman los puntos consecutivos A, B, C, D de modo que

$AB.CD=AD.BC$, además:

$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{AD} = \frac{1}{6} \text{ Encontrar AC.}$$

a.11 **b.12** c.13 d.14 e.15

13. En una recta se toman los puntos consecutivos A, B, C, D de modo que: $AB.CD=2AD.BC$, además: $\frac{2}{AB} + \frac{1}{AD} = \frac{n}{2AC}$ Hallar "n".

a. 4 b.5 **c.6** d.7 e.8

14. En una línea recta se tienen los puntos consecutivos A, B, C, D, E tal que: $AC+BD+CE=35$, además: $BD = \frac{3}{4}AE$ Hallar AE.

a.10 **b.20** c.30 d.40 e.50

15. En una recta se toman los puntos consecutivos A, B, C, D cumpliéndose que $(AB-CD)(AD+BC)=36$, $BD=8$. Encontrar AC.

a. **10** b.11 c.12 d.13 e.14

TAREA ACADÉMICA

16. En una línea recta se ubican los puntos A, B, y Cen el orden indicado, tal que $AC+BC=10$. Calcular MC, si M es el punto medio de AB.

a.5 b.6 c.7 d.8 e.9



¡Tú eres el próximo!



17. A, B, C, D y E son puntos colineales y consecutivos de tal manera que B, C y D son puntos medios de AC, AE y BE respectivamente. Calcular AE, si $CD=2$

a.12 b.14 **c.16** d.18 e.20

18. Sobre una recta se ubican 3 puntos consecutivos A, B y C tal que la distancia entre los puntos medios de AB y AC es 36. Calcular BC.

a.70 **b.72** c.74 d.78 e.80

19. En una recta se ubican los puntos consecutivos A, B y C de modo que $AC=30$. Determinar la distancia entre los puntos medios de AB y BC.

a.10 **b.15** c.20 d.25 e.30

20. En una recta se ubican los puntos consecutivos A, B y C de modo que $AC=10$ y $BD=12$. Determinar la distancia entre los puntos medios de AB y CD.

a.11 b.12 c.13 d.14 e.16

Tema N°2: ÁNGULOS

Desde la invención del ángulo geométrico, fue posible representar y

comprender los objetos de la naturaleza mediante gráficas. Por ejemplo, el equilibrio de las estructuras es explicado a partir de las fuerzas que se producen al interior de los cuerpos. Mediante la valiosa ayuda de la Geometría se establecieron las primeras relaciones entre ángulos segmentos y fuerzas.

Un desarrollo ulterior de la geometría es la trigonometría.

DEFINICIÓN

Ángulo es la unión de dos rayos que tienen un origen común.

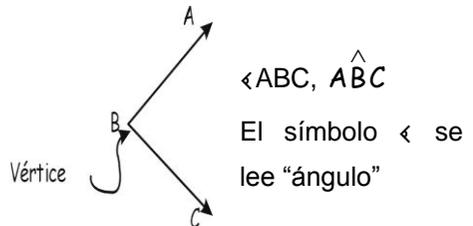
ELEMENTOS

- Lados: Son los rayos \vec{BA} y \vec{BC}
- Vértice: Es el origen común "B"

Notación:

En general los ángulos se designan con tres letras mayúsculas; la letra central corresponde al vértice.

Algunas veces, cuando no hay lugar a confusión un ángulo se nombra con la letra del vértice.



MEDIDA DE UN ÁNGULO

Los ángulos se miden en grados sexagesimales. Para encontrar la



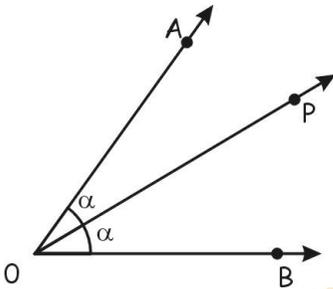
¡Tú eres el próximo!

medida de un ángulo se utiliza un instrumento llamado transportador. Cuando no se conoce la medida, se representa mediante una letra griega en la abertura.

$$m\angle AOB = 0^\circ.$$

BISECTRIZ DE UN ÁNGULO

Es el rayo que partiendo del vértice, divide al ángulo en dos ángulos congruentes.



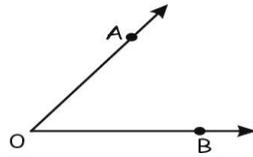
\overrightarrow{OP} divide al $\angle AOB$ en dos ángulos.

\hat{AOP} y \hat{POB} que son congruentes por tener la misma medida "α" luego.

\overrightarrow{OP} es bisectriz de $\angle AOB$

b. Ángulo Agudo

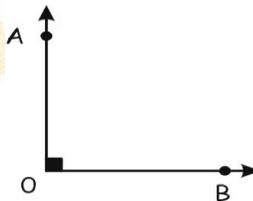
Es el ángulo cuya medida es menor que 90° y mayor que 0° .



$$0^\circ < m\angle AOB < 90^\circ.$$

c. Ángulo Recto

Es el ángulo cuya medida es igual a 90° .

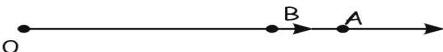


$$m\angle AOB = 90^\circ.$$

CLASIFICACIÓN DE LOS ÁNGULOS SEGÚN SU MEDIDA

a. Ángulo Nulo

Cuando sus dos lados coinciden midiendo de esta manera 0° .

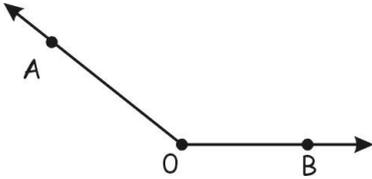


d. Ángulo Obtuso

Es el ángulo cuya medida es menor que 180° pero mayor que 90° .



¡Tú eres el próximo!



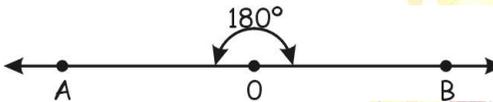
$$90 < m\angle AOB < 180^\circ.$$

e. Ángulo Llano

30

Es aquel cuya medida es 180° .

(Sus lados se encuentran extendidos en direcciones opuestas)



$$m\angle AOB = 180^\circ.$$

f. Ángulo de una Vuelta

Es el ángulo cuya medida es

360°



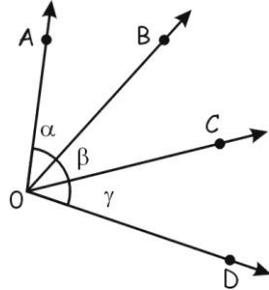
$$m\angle AOB = 360^\circ.$$

CLASIFICACIÓN DE LOS

ÁNGULOS SEGÚN SU POSICIÓN

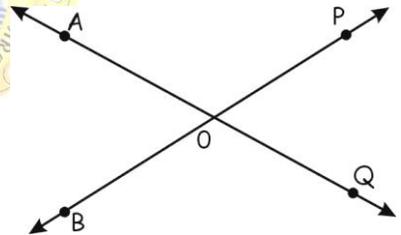
a. Ángulo Consecutivo

Son los que tienen lados en común y el mismo vértice



b. Ángulo Opuestos por el Vértice

Son dos ángulos que tienen el mismo vértice y sus lados son opuestos (tienen la misma medida)



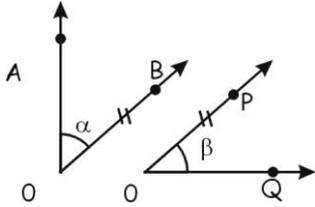
CLASIFICACIÓN DE LOS ÁNGULOS SEGÚN LA COMPARACIÓN DE SUS MEDIDAS

a. Ángulos Complementarios

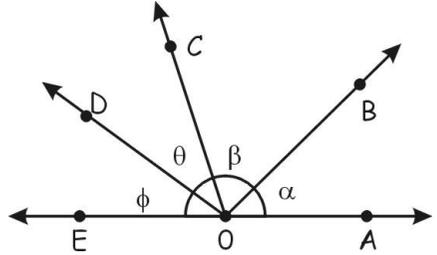
Dos ángulos son complementarios si la suma de sus medidas es 90° .



¡Tú eres el próximo!



$$\alpha + \beta = 90^\circ$$



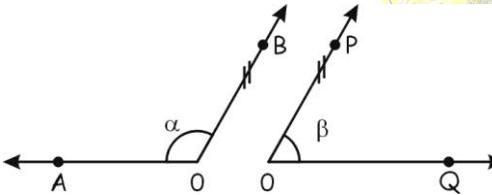
$$\alpha + \beta + \theta + \phi = 180^\circ$$

Teorema II

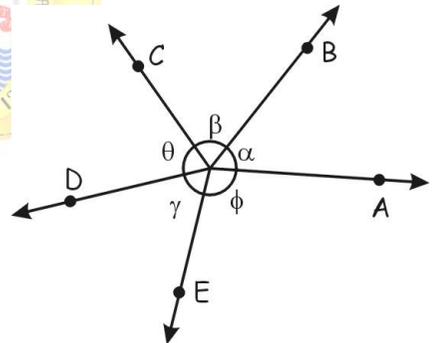
La suma de las medidas de los ángulos consecutivos formados alrededor de un punto en un plano es 360° .

b. Ángulos Suplementarios

Dos ángulos son suplementarios si la suma de sus medidas es 180°



$$\alpha + \beta = 180^\circ$$



$$\alpha + \beta + \theta + \gamma + \phi = 360^\circ$$

TEOREMAS FUNDAMENTALES

Teorema I

La suma de las medidas de los ángulos consecutivos formados alrededor de un mismo vértice y a un mismo lado de una recta es 180°

PROBLEMAS

1. Encontrar el complemento de un ángulo que mide 25° más el suplemento de otro ángulo que mide 105° .



¡Tú eres el próximo!



- a. 120° b. 130° c. 140° d. 150°
e. 160°
2. Encontrar la medida de un ángulo, si es igual a ocho veces su suplemento.
- a. 150° b. 160° c. 170° d. 180°
e. 185°
3. Encontrar la medida de un ángulo, sabiendo que su complemento es igual a $\frac{2}{5}$ de su suplemento.
- a. 10° b. 20° c. 30° d. 40°
e. 50°
4. Encontrar la medida de un ángulo "x", sabiendo que $SC(x) + SSS(2x) + CC(3x) = 390^\circ$
- a. 40° b. 50° c. 60° d. 70° e. 80°
5. Las medidas de dos ángulos suplementarios son entre sí como 4 es a 5. ¿Cuánto mide el mayor de los dos ángulos?
- a. 100° b. 120° c. 130° d. 140°
e. 150°
6. La medida de un ángulo es "x", el suplemento del complemento del triple de "x" es igual al complemento de "x" aumentado en 20° . Calcular "x".
- a. 3° b. 4° c. 5° d. 6° e. 7°
7. Si a la medida de un ángulo se le resta su complemento, resulta igual a la cuarta parte de su suplemento. Hallar la medida del ángulo.
- a. 40° b. 50° c. 60° d. 70° e. 80°
8. Si a uno de dos ángulos suplementarios se le disminuye 30° y al otro se le aumenta 30° , lo que queda del segundo es igual a 17 veces lo que queda del primero. Hallar la diferencia de las medidas de dichos ángulos.
- a. 100° b. 110° c. 120° d. 140°
e. 145°
9. El complemento de la diferencia que existe entre el suplemento y el complemento de la medida de un ángulo es igual al duplo del complemento de dicho ángulo. Calcular la medida de dicho ángulo.
- a. 80° b. 60° c. 120° d. 90°
e. 135°
10. Si al suplemento del complemento de la medida de un ángulo se le aumenta el complemento del suplemento



¡Tú eres el próximo!



de la medida de dicho ángulo, resulta 90° más el suplemento de la medida de dicho ángulo. Hallar la medida del ángulo.

a. 60° b. 80° c. 75° d. 90°
e. 45°

11. La medida de un ángulo es "x", si $SC(x)=120^\circ$, encontrar $E=SSSSCC(x)$.

a. 60° b. 45° c. 90° d. 30° e. 75°

12. La suma de las medidas de dos ángulos es igual a 80° , el complemento del primer ángulo es el doble del segundo. Hallar la diferencia de las medidas de dichos ángulos.

a. 70° b. 60° c. 40° d. 50° e. 35°

13. Determinar la medida de un ángulo, si la suma del suplemento y el complemento de dicho ángulo es igual a 160° .

a. 45° b. 50° c. 55° d. 60° e. 65°

14. Dado los ángulos consecutivos AOB; BOC y COD, tal que la suma de medidas de los ángulos AOC y BOD es 100° . Calcular la medida del ángulo AOD, si la

suma de las medidas de los ángulos AOB y COD es 50° .

a. 60° b. 65° c. 75° d. 80° e. 85°

15. Sean los ángulos AOB, BOC y COD tres ángulos consecutivos. Si $m\text{AOC} + m\text{BOD}=140^\circ$, determinar la medida del ángulo formado por las bisectrices de los ángulos AOB y COD.

a. 70° b. 75° c. 80° d. 85° e. 90°

TAREA ACADÉMICA

16. El suplemento del complemento del doble de un ángulo excede en 42° a los dos tercios del complemento del ángulo. Calcular el valor de dicho ángulo.

a. $4,5^\circ$ b. $5,5^\circ$ c. $6,5^\circ$ d. $7,5^\circ$
e. $8,5^\circ$

17. Calcular el valor de un ángulo sabiendo que los $\frac{3}{4}$ del suplemento de su complemento es igual a un ángulo recto.

a. 10° b. 20° c. 30° d. 40° e. 50°

18. Calcular un ángulo si el complemento de la cuarta



¡Tú eres el próximo!

parte del suplemento del complemento del ángulo es igual al complemento del doble del ángulo más 16° .

a. 11° b. 22° c. 33° d. 44° e. 55°

19. La medida de un ángulo es "x". Si la diferencia entre los $5/6$ del suplemento de "x" y el complemento de $x/2$ excede en $x/15$ el doble del complemento de "x". Calcular el suplemento del complemento de "x".

a. 150° b. 160° c. 165° d. 170° e. 175°

20. En los ángulos consecutivos AOB, BOC, COD se cumple que: $m\angle BOD - 3m\angle AOB = 60^\circ$, $m\angle COD = 3m\angle AOC$. Hallar $m\angle BOC$.

a. 10° b. 12° c. 14° d. 15° e. 16°

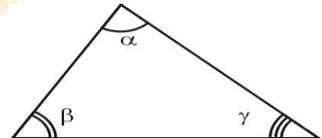
Escaleno	Isósceles	Equilátero

Según la Medida de sus Ángulos

Obtusángulo	Acutángulo	Rectángulo

PROPIEDADES BÁSICAS

1. La suma de los ángulos interiores en un triángulo es 180°



$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

Tema N°3: TRIÁNGULOS

CONCEPTO

Es un polígono que tiene tres lados

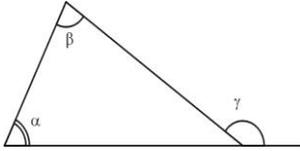
CLASIFICACIÓN

Según la Medida de sus Lados

2. Un ángulo exterior cualquiera es siempre igual a la suma de los ángulos interiores no adyacentes a él.



¡Tú eres el próximo!



$$\gamma = \alpha + \beta$$

isósceles, triángulo rectángulo isósceles.

Escaleno, sus lados no son congruentes.

PROBLEMAS

CLASIFICACIÓN

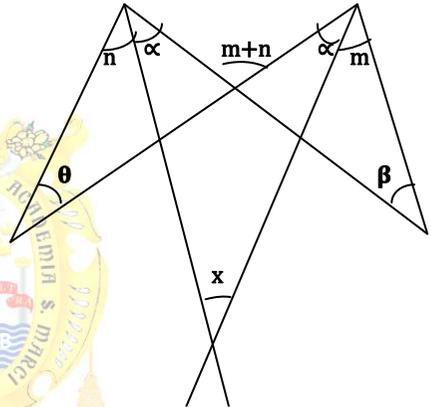
1. Según sus ángulos:

Acutángulo, sus tres ángulos interiores son agudos.

Obtusángulo, tiene un ángulo interior obtuso.

Rectángulo, tiene un ángulo interior recto, los lados que forman al ángulo recto se llaman catetos, el tercer lado se llama hipotenusa.

1. Hallar x si $\beta + \theta = 60^\circ$



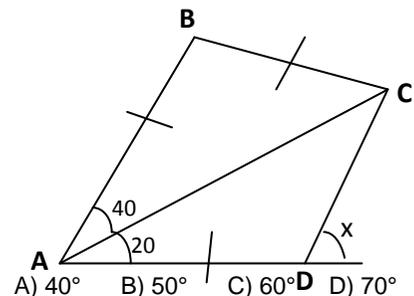
- A) 30 B) 40 C) 60 D) 80 E) 45

2. Según sus lados:

Equilátero, sus tres lados son congruentes, cada uno de los ángulos interiores mide 60° .

Isósceles, dos de sus lados son congruentes, al lado no congruente se le llama base, los ángulos adyacentes a la base son congruentes, pueden ser: triángulo acutángulo isósceles, triángulo obtusángulo

2. Calcule "x". Si $AB=BC=CD$



- A) 40° B) 50° C) 60° D) 70°

3. En un triángulo isósceles ABC ($AB=BC$), se traza la ceviana interior



¡Tú eres el próximo!

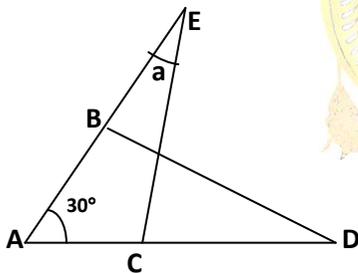
\overline{AN} en cuya prolongación se ubica el punto P tal que $AB=PC$ y $m\angle BCP=60^\circ$. si $m\angle ABC=40^\circ$, calcule la medida del ángulo determinado por \overline{AP} y \overline{BC} .

- a. 60° b. 50° c. 80° d. 90° e. 100°

4. En un triángulo ABC, $AB=BC$, \overline{CR} es una ceviana interior, tal que $R\hat{C}B=24^\circ$. La bisectriz del ángulo ARC corta a \overline{AC} en el punto Q. Hallar la $m\angle AQR$.

- a. 72° b. 56° c. 76° d. 78° e. 82°

5. Hallar "a", si $AB=BE=BD=CD$



- a. 10° b. 20° c. 15° d. 30° e. 18°

6.- En un $\triangle ABC$, recto en B se traza la altura \overline{BH} , la cual es cortada en los puntos Q y M por las bisectrices interiores \overline{AD} y \overline{CE} , respectivamente. Hallar MQ, si $BE=7$ y $BD=7$.

- a.3 b.1,5 c.2 d.6 e.4

7.-En un triángulo PQR, $PQ=6$, se traza la ceviana interior \overline{QF} , tal que

$F\hat{Q}R = 3\hat{R}$ y $QF=4$, si $\hat{P} = 2\hat{R}$. Hallar FR

- a.12 b.10 c.8 d. 11 e.9

8.-Dado un triángulo ABC, en la región relativa a los lados AB y BC se ubican los puntos N y Q respectivamente tal que: N, C y Q son colineales. $m\angle BAQ=m\angle QAC$

$$2m\angle BCQ+m\angle ABC=100;$$

$$m\angle ACN=3m\angle BCQ$$

Calcule:

$$m\angle AQN$$

- a. 50° b. 100° c. 90° d. 110° e. 120°

9.-En un triángulo dos lados miden 7 y 9cm. Calcular el perímetro del triángulo si el tercer lado mide el doble de uno de los otros.

- a.20 b.25 c.35 d.30 e.40

10.-Se tiene un triángulo isósceles ABC ($AB=BC$). Se toman los puntos G, M y F en los lados AB, BC y AC respectivamente tal que el triángulo FMG es equilátero. Si $m\angle GFA=\alpha$ además $m\angle BGM=\beta$ y $m\angle FMC=\theta$; se cumple:

$$a. \beta = \frac{\alpha - \theta}{2}$$

$$b. \beta = \frac{\alpha + \theta}{2}$$

$$c. \alpha = \frac{\beta + \theta}{2}$$

$$d. \alpha = \frac{\beta - \theta}{2} \quad e. \alpha = \frac{\beta - 2\theta}{2}$$

11.-En un triángulo ABC, se trazan las cevianas BE y AD de manera que $AB=AE=BD$, $DE=DC$ y $m\angle BAE=60^\circ$. Calcule $m\angle EDC$



¡Tú eres el próximo!

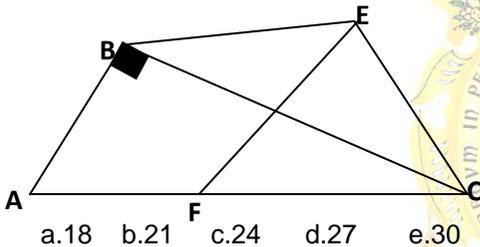


a.80° b.90° c.100° d.110° e.120°

12.- En un triángulo ABC, $m\angle BAC = 2m\angle BCA$, se ubica D exterior al triángulo relativo al lado BC. Si $\overline{AB} \cong \overline{BD}$ y $m\angle DBC + m\angle BCA = 60^\circ$, entonces $m\angle BCD$ es:

a.10° b.15° c.20° d.30° e.60°

13.- En la figura mostrada, $BE = EF = EC$; $m\angle BAF = 2m\angle BEF$. Calcular $m\angle BCA$



a.18 b.21 c.24 d.27 e.30

14. Los lados de un triángulo miden 12; $2x+5$; $x-2$, encontrar su perímetro, si "x" es un número entero.

a.27 b.28 c.29 d.30 e.31

15. En un triángulo ABC, $AB=9$, por el vértice B se traza una recta paralela al lado AC, la cual corta a la prolongación de la bisectriz interior del ángulo A en el punto D. Calcular BD.

a. 7 b.8 **c. 9** d.10 e.12

TAREA ACADÉMICA

16. Dado un triángulo ABC, con $AB=12$ y $BC=15$, por el vértice B se traza una recta L paralela al lado AC, la prolongación de la bisectriz interior AD corta a la recta L en "F" y la bisectriz exterior del ángulo C corta a la recta L en "E". Hallar FE.

a.2 **b.3** c.4 d.5 e.6

17. En el triángulo rectángulo ABC recto en B se traza la altura BH. Calcular la medida del ángulo formado por las bisectrices de los ángulos BAC y HBC al cortarse.

a.70° b.80° c.82° d.85° **e.90°**

18. En el triángulo rectángulo ABC recto en B, la altura BH y la bisectriz interior AF se cortan en el punto E. Hallar BE, si $BF=5$

a.3 b.4 **c.5** d.6 e.7

19. Dado un triángulo ABC, en el cual se traza su bisectriz interior AD, luego por D se traza una recta paralela al lado AC la cual corta al lado AB en el punto E. Calcular AB, si: $DE=3$ y $AB=3BE$.

a.4,5 b.4,6 c.4,7 d.4,8 e.4,9

20. Se construye el triángulo ABC, cuyos lados mide: a, b, c, por la parte del lado BC exterior al triángulo se toma un punto F. Hallar el mayor valor



¡Tú eres el próximo!

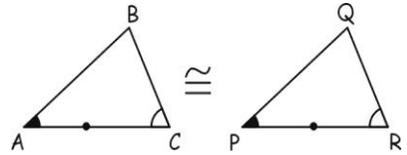
entero que puede tomar FC, si $a+c=11$, $FA=5$, $FB=4$.

a.11 b.12 **c.13** d.14 e.15

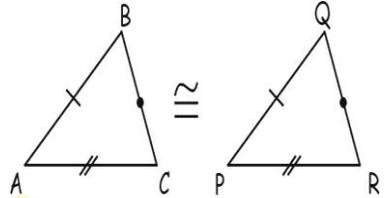
Tema Nº4: CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

DEFINICIÓN

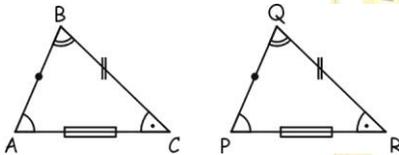
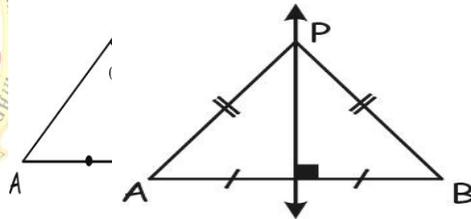
Dos triángulos son congruentes, si tienen sus tres lados congruentes y sus tres ángulos congruentes respectivamente.



3. CASO (L.L.L.)



4. Caso (L.L.A.)

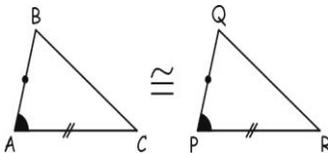


⇒ $\triangle ABC = \triangle PQR$

α : Opuesto al mayor lado

CASOS DE CONGRUENCIA EN TRIÁNGULOS

1. Caso (L.A.L.)



2. Caso (A.L.A.)

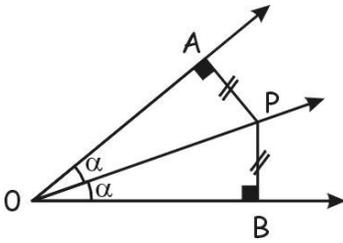
PROPIEDADES EN CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

1. De la Bisectriz

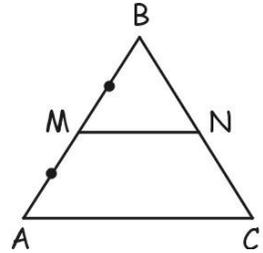
Todo punto situado en la bisectriz siempre equidista de los lados del ángulo.



¡Tú eres el próximo!



$$\begin{matrix} PA = PB \\ OA = OB \end{matrix}$$



$$BN = NC$$

2. De la Mediatriz

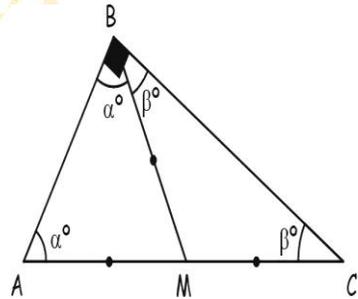
Todo punto situado en la mediatriz de un segmento, siempre equidista de los extremos de dicho segmento.

4. De la Mediana Relativa a la Hipotenusa

La mediana relativa a la hipotenusa siempre mide la mitad de lo que mide la hipotenusa.

3. De la Base Media de un Triángulo

El segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo, es paralelo al tercer lado y mide la mitad de lo que mide el tercer lado.



PROBLEMAS

Si: $\overline{MN} \parallel \overline{AC}$

Si: M y N son puntos medios



¡Tú eres el próximo!

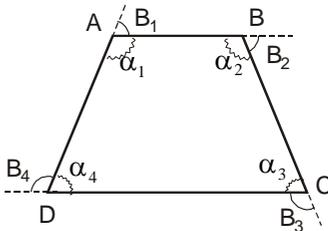
Tema N°5: CUADRILÁTEROS

El objetivo de estudiar a los cuadriláteros es aprender a reconocerlos, las características de los paralelogramos, trapecios y trapezoides.

CUADRILÁTERO: Es el polígono que tiene 4 lados, dos diagonales y la suma de las medidas de sus ángulos interiores es 360° , pueden ser convexos, no convexos, cruzados, completo.

DEFINICION.-

Es aquel polígono que tiene 4 lados, teniendo dos a dos un extremo común.



ELEMENTOS.-

- 1) **LADOS** (\overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} y \overline{DA})
Son los segmentos rectilíneos que lo limitan. Los lados que no tiene vértice común recibe el nombre de lados opuestos.

Ejm: \overline{AB} y \overline{CD} , son lados opuestos como \overline{BC} y \overline{DA} .

- 2) **VERTICES:** (A, B, C y D)
Son las intersecciones de dos lados consecutivos. En todo cuadrilátero, el número de lados es igual al número de vértices.

- 3) **ÁNGULOS INTERIORES** (α_1 , α_2 , α_3 y α_4)
Son los ángulos que se forman por dos lados consecutivos, la suma de ángulos interiores en un cuadrilátero es $= 360^\circ$. Se cumple que:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 360^\circ$$

- 4) **ÁNGULOS EXTERIORES** (B_1 , B_2 , B_3 y B_4)
Son los ángulos formados en un vértice por un lado y la prolongación del lado consecutivo.

Los ángulos exteriores son adyacentes a los interiores.

La suma de sus ángulos exteriores en un cuadrilátero es igual a 360°

$$B_1 + B_2 + B_3 + B_4 = 360^\circ$$

- 5) **DIAGONALES** (\overline{AC} y \overline{BD})
Son los segmentos de recta que unen dos vértices no consecutivos.



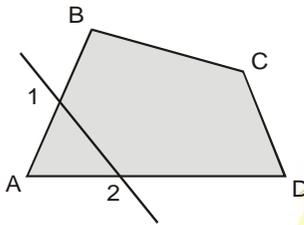
¡Tú eres el próximo!

CLASIFICACIÓN DE LOS CUADRILÁTEROS

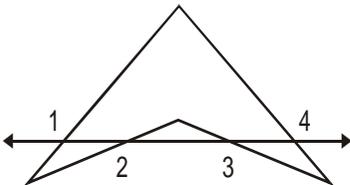
Trapezoide, Trapecio y Paralelogramo.

Por la forma de su contorno

Convexos.- Son aquellos cuadriláteros en los que cualquier recta secante, determina 2 puntos de corte.



Cóncava.- Son aquellos cuadriláteros en los que existe al menos una secante que determina más de dos puntos de corte.



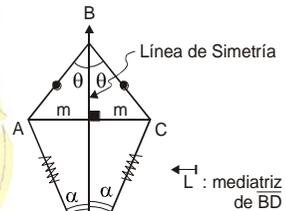
CLASIFICACIÓN DE LOS CUADRILÁTEROS CONVEXOS

De acuerdo al paralelismo de sus lados los cuadriláteros se dividen en:

A. **Trapezoides.-** Son aquellos cuadriláteros que no tienen lados opuestos, ningún lado paralelo a otro paralelo.

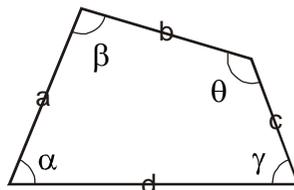
a. **Simétrico.-** Es aquel en el que una de sus diagonales es mediatriz de la otra.

Propiedades:



$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \overline{BC}; \overline{AD} = \overline{CD} \\ \widehat{A\hat{B}D} &= \widehat{D\hat{B}C} = \theta \\ \widehat{A\hat{D}B} &= \widehat{B\hat{D}C} = \alpha \end{aligned}$$

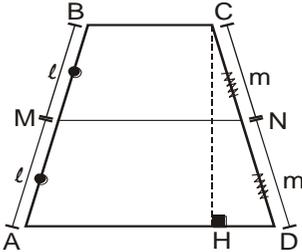
b. **Asimétrico:** Es aquel que no tiene ninguna simetría. También llamado trapecioide irregular.





¡Tú eres el próximo!

B. **Trapecios.**- Es el cuadrilátero que solo tiene dos lados paralelos denominados bases.



BASES: \overline{BC} ; \overline{AD}

$\overline{BC} \parallel \overline{MN} \parallel \overline{AD}$

\overline{MN} : Mediana del trapecio. Es el segmento que une los puntos medios de los lados no paralelos. Se le conoce también como "base media".

\overline{CH} : Altura del trapecio. Es la distancia entre sus dos bases.

PROBLEMAS

1. En un paralelogramo ABCD, una recta secante paralela a la diagonal BD corta a CD en Q, a BC en N, a las prolongaciones de AB y AD en M y R. Calcular MQ, si $NR=6$.

a.4 b.5 **c.6** d.7 e.8

2. En un paralelogramo ABCD, $AB=4$, las bisectrices interiores de los ángulos B y

C se cortan en un punto del lado AD. Hallar el perímetro del paralelogramo.

a.21 b.22 c.23 **d.24**
e.25

3. Calcular la base mayor de un trapecio, los lados no paralelos miden 5 y 7, las bisectrices interiores de los ángulos adyacentes a la base menor se cortan en un punto de la base mayor.

a.10 b.11 **c.12** d.13
e.14

4. En un cuadrilátero convexo ABCD, $AB=6$, $CD=10$. Hallar el perímetro del cuadrilátero que se forma al unir los puntos medios de BC, AC, BD y AD.

a.14 b.15 **c.16** d.17
e.18

5. En un rombo ABCD cuyo lado mide 12, se toma el punto medio M del lado BC, por el punto medio de BM se traza una recta paralela al lado AB que corta a BD en P y a AM en Q. Hallar PQ.

a.2 **b.3** c.4 d.5 e.6



¡Tú eres el próximo!



6. En un paralelogramo ABCD, se marcan los puntos medios M de AB, N de AD, sobre el lado CD se toma un punto Q de modo que: $DQ=CD/4$, $MC=8$. Hallar NQ.
- a.4 b.5 c.6 d.7
e.8
7. En un triángulo ABC, encontrar la distancia del punto medio de la mediana AM a una recta exterior que pasa por el vértice C, si las distancias de los vértices A y B a la recta exterior son 2 y 8.
- a.1 b.2 c.3 d.4 e.5
8. En un rombo ABCD, encontrar la medida del ángulo formado por las bisectrices de los ángulos BAC y BDC.
- a.15° b.30° c.45° d.60°
e.75°
9. En un trapecio recto el menor lado no paralelo mide 8, el menor ángulo interior mide 53°. Hallar el segmento que une los puntos medios de las diagonales.
- a.2 b.3 c.4 d.5 e.6
10. En un cuadrado ABCD, calcular la distancia de su centro a una recta exterior que pasa por el vértice B, la proyección de la diagonal AC sobre la recta exterior mide 14.
- a.5 b.6 c.7 d.8 e.9
11. En un cuadrilátero convexo ABCD, $BD=20$. Encontrar la distancia entre los baricentros de los triángulos ABC y ACD.
- a.20/3 b.22/3 c.25/3 d.26/3
e.29/3
12. En un paralelogramo ABCD, $AB=6$, $AD=9$, las bisectrices interiores de los ángulos A y B se cortan en el punto F. Hallar la distancia de F al centro del paralelogramo.
- a.1, 2 b.1,3 c.1,4 d.1,5
e.1,6
13. En un cuadrilátero convexo ABCD, $m\angle B=m\angle D=90^\circ$, se toman los puntos medios M de AC, N de BD, F de BM. Calcular NF.
- a.2 b.3 c.4 d.5 e.6
14. En un romboide ABCD, $AB=6$, $BC=2$, las bisectrices exteriores de los ángulos C y



¡Tú eres el próximo!



D se cortan en el punto F, de modo que $m\angle ABF=90^\circ$. Hallar BF.

- a.3 **b.4** c.5 d.6 e.9

15. En un cuadrilátero ABCD, $m\angle BAC=m\angle CAD=22^\circ$, $m\angle ACB=23^\circ$, $m\angle ACD=38^\circ$, $BC=12$. Calcular CD.

- a. $4\sqrt{6}$ b. $5\sqrt{6}$ c. $6\sqrt{6}$ d. $7\sqrt{6}$
e. $8\sqrt{6}$

TAREA ACADÉMICA

16. En un trapezio ABCD ($BC//AD$), las bisectrices de los ángulos interiores B y C se intersectan en un punto de AD. Si: $AB=7$ y $CD=10$, calcular AD.

- a.15 b.16 **c.17** d.18 e.19

17. En un trapezio ABCD, $m\angle B=2m\angle D$, $BC//AD$, $AB=6$ y $BC=4$. Calcular la longitud de la mediana.

- a.5 **b.7** c.8 d.9 e.4

18. En un trapecioide ABCD, $AB=CD$, $m\angle A=80^\circ$, $m\angle D=40^\circ$; M y N son puntos medios de BC y AD respectivamente. Calcular el ángulo ANM.

- a. 50° b. 60° **c. 70°** d. 80° e. 90°

19. En un trapezio ABCD ($BC//AD$), se traza la altura BH. Si además $AH=2$, $HD=9$, $BC=3$ y $m\angle A=2m\angle D$. Calcule el valor de **AB**.

- a.3 **b.4** c.5 d.6 e.7

20. Calcular el valor del ángulo que forman las diagonales de un trapezio isósceles ABCD ($BC//AD$), donde: $AC=BC+AD$

- a. 15° b. 30° c. 45° **d. 60°**
e. 70°

Tema N°6: POLÍGONOS

POLÍGONO: Es la figura plana que se encuentra formada por la unión de un conjunto finito de segmentos de recta que se llaman lados, que se unen por sus extremos y que se llaman vértices.

Se denomina diagonal al segmento que une dos vértices no consecutivos.

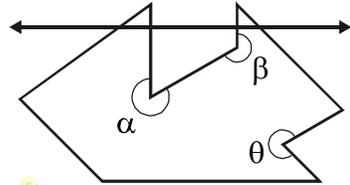
El conjunto de los lados forman el contorno o frontera, la suma de sus longitudes se llama perímetro.



¡Tú eres el próximo!

POLIGONO NO CONVEXO O CONCAVO

Quando algunos de sus ángulos internos son mayores de 180 y menores que 360.

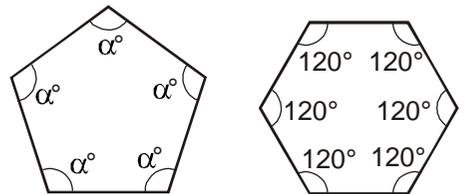


$$\alpha, \beta, \theta > 180^\circ$$

CLASIFICACIÓN DE LOS POLIGONOS CONVEXOS

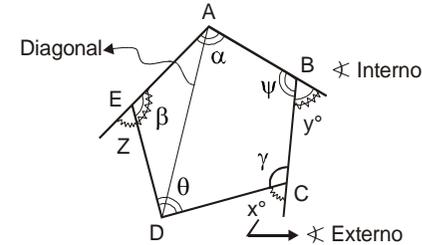
1. **Polígono Equiángulo.-** Cuando tienen todos sus ángulos internos (congruentes) iguales.

Ejm:



2. **Polígono Equilátero.-** Cuando tienen todos sus lados (congruentes) iguales.

Ejm:



Nº de lados = Nº de vértices = Nº de
↘ s internos.

ELEMENTOS:

Vértice : A, B, C, D, E

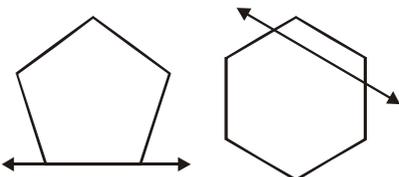
Lados :
↘ $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DE}, \overline{EA}$

m internos : $\alpha, \beta, \theta, \gamma, \psi$

m ↘ externos : x, y, z, \dots

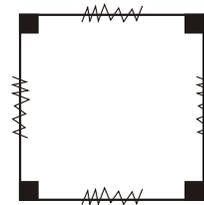
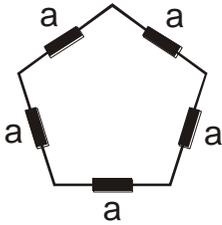
POLIGONO CONVEXO

Es cuando tienen todos sus ángulos internos convexos. Es decir mayores que cero y menores que 180.

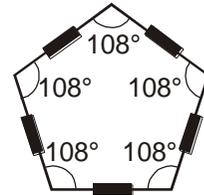
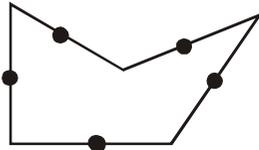




¡Tú eres el próximo!



Cuadrado



PROPIEDADES

Pentágono no convexo equilátero

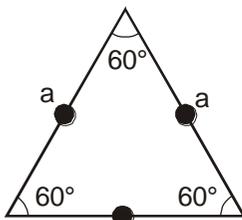
* Para todo polígono convexo.- Si "n" es el número de lados de un polígono convexo, se cumple que:

3. Polígono Regular.-

Cuando sus lados son \cong (iguales) y sus ángulos son \cong (iguales).

1^{ra} Propiedad.- Suma de las medidas de los ángulos internos

Ejms:



Triángulo
equilátero

$$S \angle_{\text{int}} = 180 (n - 2)$$

2^{da} Propiedad.- Suma de las medidas de los ángulos externos.

$$S \angle_{\text{ext}} = 360$$



¡Tú eres el próximo!



3^{ra} Propiedad.- Número total de diagonales.

$$D_T = \frac{n(n-3)}{2}$$

8^{va} Propiedad.- Medida del central (θ)

$$\theta = \frac{360}{n}$$

4^{ta} Propiedad.- Número de diagonales desde un solo vértice.

$$D_1 = (n - 3)$$

5^{ta} Propiedad.- Número de diagonales medias

$$D_n = \frac{n(n-1)}{2}$$

6^{ta} Propiedad.- Medida del \sphericalangle interior (α)

$$\alpha = \frac{180(n-2)}{n}$$

7^{ma} Propiedad.- Medida del \sphericalangle exterior (B)

$$B = \frac{360}{n}$$

PROBLEMAS

1. El número de diagonales de un polígono es igual a doce veces su número de lados. ¿Cuántos lados tiene el polígono?

- a.22 b.24 c.25 **d. 27** d.29

2. En un polígono regular, la medida de su ángulo exterior más la medida de su ángulo interior más la suma de las medidas de sus ángulos interiores es 720° . Hallar el número de lados.

- a.5** b.6 c.7 d.8 e.12

3. Los números de lados de dos polígonos regulares son dos números consecutivos. Calcular el número de lados del polígono de mayor ángulo exterior, si la diferencia de las medidas de sus ángulos exteriores es 12° .

- a.7 b.6 **c.5** d.9 e. 11

4. Hallar el número de lados de un polígono regular, si la





¡Tú eres el próximo!



- medida de su ángulo interior es igual al triple de la medida de su ángulo central.
- a.6 b.7 **c.8** d.9 e.10
5. ¿Cuál es el polígono, cuyo número de diagonales excede al número de vértices en 18° ?
- a.7 b.8 **c.9** d.10 e.13
6. Si el número de lados de un polígono se duplica, la suma de las medidas de sus ángulos interiores se cuadruplica. Encontrar el número de lados.
- a.3** b.4 c.5 d.6 e.7
7. La diferencia entre el número de diagonales y el número de ángulos rectos que contiene la suma de las medidas de los ángulos interiores de un polígono es igual a 13. Hallar el número de lados.
- a.7 b.8 **c.9** d.10 e.11
8. Los ángulos interiores B, C, D de un polígono convexo ABCDE miden 170° , 160° , 150° . Hallar la medida del menor ángulo formado por las prolongaciones de los lados AB y DE.
- a.30° b.45° **c.60°** d.75° e.90°
9. En un polígono, el número de diagonales más el número de triángulos que se forman al unir un vértice con los otros vértices más el número de ángulos rectos que contiene la suma de las medidas de sus ángulos interiores es igual a 14. Encontrar el número de lados.
- a.5** b.6 c.8 d.9 e.13
10. En dos polígonos regulares (1 y 2) se cumple que: $m_{i1} + m_{e2} = 210^\circ$. Halle $m_1 + m_2$ (m_i , m_e son las medidas de los ángulos interior y exterior)
- a.110° b.120° c.130° d.140° **e.150°**
11. En un hexágono equiángulo ABCDEF, $AB=2$, $BC=6$, $CD=4$, $AF=9$. Calcular EF.
- a.1** b.2 c.3 d.4 e.5
12. En un hexágono convexo, la suma de las medidas de cuatro ángulos consecutivos es igual a 490° . Encontrar la medida del ángulo formado por las bisectrices interiores de los otros dos ángulos.



¡Tú eres el próximo!



a.45° b.55° **c.65°** d.75° e.85°

a.15 **b.20** c.24 d.28 e.30

13. Los segmentos AB, BC, CD, DE son cuatro lados consecutivos de un icosaágono regular ABCDEF... Hallar la medida del ángulo formado por las prolongaciones de los lados AB y ED.

17. En un polígono convexo, desde (n-6) vértices consecutivos, se trazan 25 diagonales. Encontrar la suma de las medidas de los ángulos internos de dicho polígono.

a.122° b.124° c.125° **d.126°**
e.128°

a.1440° b.1450° c.1460°
d.1470° e.1480°

14. Cuando el número de lados de un polígono regular disminuye en dos, su número de diagonales disminuye en 15. Encontrar la medida de su ángulo central.

18. En un polígono equiángulo ABCDEF... cuyo número de lados es "n", las prolongaciones de AB y ED se intersecan en L de modo que el ángulo \sphericalangle ALE es obtuso. Calcule el mínimo valor de "n".

a.32° b.34° c.35° **d.36°** e.37°

15. Cuando a un polígono convexo se le aumenta un lado, su número de diagonales aumenta en 6. ¿Cuál es el número de diagonales si se le disminuye un lado?

a.11 b.12 **c.13** d.14
e.15

a.9 b.10 c.11 d.12 e.13

TAREA ACADÉMICA

16. Calcular el número de lados de un polígono convexo, si su número de diagonales es mayor que el número de lados en 150°.

19. ¿En qué polígono regular se cumple que al aumentar 30° la medida de su ángulo externo, se obtiene otro polígono regular en el cual su ángulo externo es a su ángulo interno como 2 es a 7? Dar el número de lados.

a.31 b.33 c.35 **d.36** e.38

20. En un polígono convexo ABCDE... se trazan dos diagonales de tal forma que



¡Tú eres el próximo!

de los cuatro polígonos parciales que se determinan, tres sean triángulos y la suma del número de diagonales totales del polígono inicial y del polígono parcial que no es un triángulo es igual a 23, calcular la suma de las medidas de los ángulos internos del polígono parcial.

- a. 700° b. 800° **c. 900°** d. 600°
e. 500°

Tema N°7: CIRCUNFERENCIA

DEFINICIÓN.-

Es la figura geométrica que está formado por todos los puntos de un mismo plano que se encuentran a una misma distancia de otro punto de ese mismo plano denominado **centro**.

A la distancia constante de estos puntos al centro de le denomina **radio de la circunferencia**.

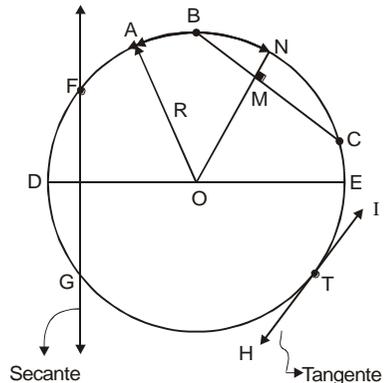
Se denomina **círculo** a la región interior del plano limitada por una circunferencia.

ELEMENTOS:

- **CENTRO (O):** Punto equidistante de todos los puntos de circunferencia. Dos o más circunferencias con el mismo

centro se dice que son concéntricas.

- **RADIO (\overline{OA}):** Segmento que une el centro de la circunferencia con un punto cualquiera de la misma.
- **CUERDA (\overline{BC}):** Segmento que une dos puntos de una misma circunferencia.
- **DIAMETRO (\overline{DE}):** Es la cuerda de mayor longitud que pasa por el centro de la circunferencia dividiéndola en partes iguales.
- **SECANTE (\overline{FG}):** Es toda recta en el plano de la circunferencia en dos puntos. Cabe notar que la secante contiene a la cuerda.
- **TANGENTE (\overline{HI}):** Es toda recta en el plano de la circunferencia que tiene solo un punto común con este (T), el cual recibe el nombre de "punto de tangencia"

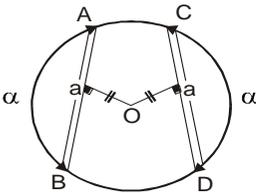




¡Tú eres el próximo!



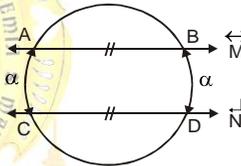
- **FLECHA** (\overline{MN}): Segmento levantado perpendicularmente del punto medio de una cuerda al arco. La prolongación de la flecha siempre pasa por el centro.
- **ARCO** (\overline{AN}): Es la porción de circunferencia limitada por los extremos de una cuerda. En particular, una semicircunferencia es un arco limitado por los extremos de un diámetro.



2^{da} Propiedad.- El segmento que une el centro de una circunferencia es perpendicular a la cuerda. Esta divide a los arcos que subtiene en dos partes congruentes.

3^{ra} Propiedad.- En toda circunferencia, a arcos congruentes corresponden cuerdas congruentes.

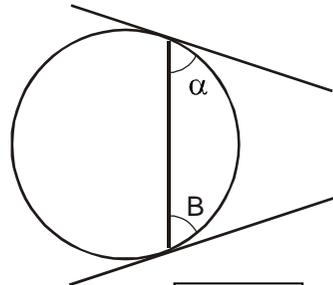
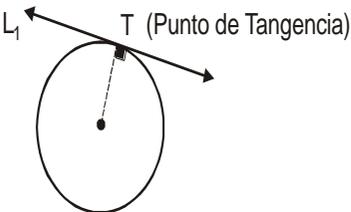
4^{ta} Propiedad.- En una misma circunferencia los arcos comprendidos entre paralelas son congruentes.



5^{ta} Propiedad.-

PROPIEDADES:

1^{ra} Propiedad.- Toda recta tangente a una circunferencia es perpendicular al radio trazado por el punto de contacto.



$$\alpha = B$$

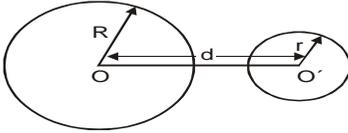
Posiciones Relativas de dos circunferencias.





¡Tú eres el próximo!

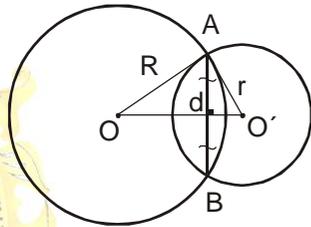
- c)
d) **Secantes.**- Cuando tienen dos puntos comunes. La distancia entre sus centros es menor que la suma de los radios, pero mayor que su diferencia.



Dos circunferencias situadas en un mismo plano, con centros O y O' y radios R y r respectivamente, pueden tener las siguientes posiciones relativas: Si $\overline{AB} = \overline{CD} \Rightarrow$

$$m\overline{AB} = m\overline{CD}$$

- a) **Exteriores.**- Cuando todos los puntos de una son exteriores a la otra. La distancia entre sus centros es mayor que la suma de los radios.

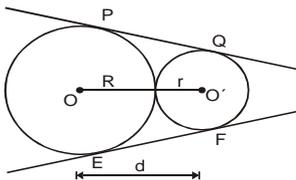


\overline{AB} : Cuerda

Común

$\overline{OO'} \perp \overline{AB}$

- e) **Tangentes Interiormente.**- Cuando tienen un punto común y todos los puntos de una de ellas son interiores a la otra. Sus centros están al mismo lado de la tangente común y la distancia entre ellos es igual a la diferencia de los radios.



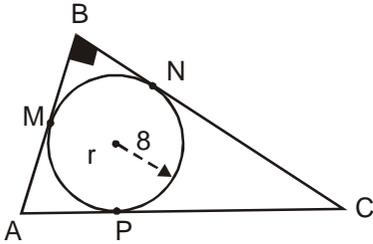
- b) **Tangentes Exteriormente.**- Cuando tiene un punto común y los demás puntos de una son exteriores a la otra. En este caso, sus centros están a lados opuestos de la tangente común y la distancia entre ellos es igual a la suma de los radios.

PROBLEMAS

- En la figura: M , N y P : puntos de tangencia $AC = 15$. Calcular $AB + BC$.

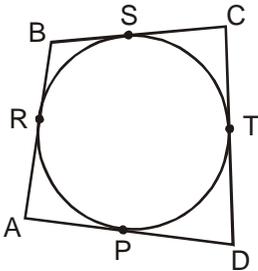


¡Tú eres el próximo!



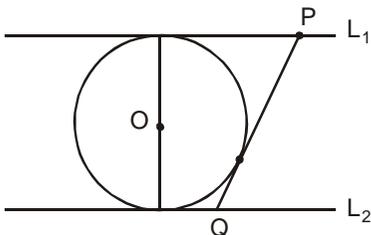
- a. 33 b. 30 c. 32 d. 34 e. 3

2. En la figura: R, S T y P: puntos de tangencia: si $AB = 6$, $BC = 8$ y $CD = 10$. Calcular AD.



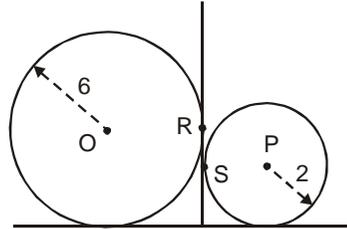
- a. 6 b. 9 c. 7 d. 8 e. 10

3. En la figura ($L_1 \parallel L_2$) A y B: puntos de tangencia. Calcular $m \angle POQ$, además "O" centro



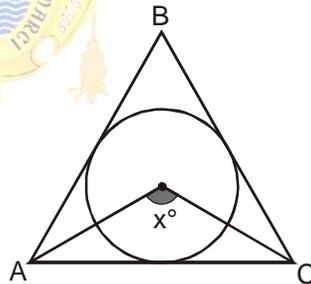
- a. 70° b. 80° c. 90° d. 100° e. 120°

4. En la figura R y S: puntos de tangencia. Calcular RS.



- a. 4 b. 3 c. 2 d. 1 e. 5

5. En la figura, la circunferencia es tangente a los 3 lados. Si $m \angle B = 40^\circ$. Calcular x.

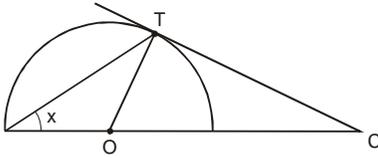


- a. 100° b. 110° c. 120°
d. 130° e. 140°

6. En la figura "O" es centro. Calcular x si $m \angle TOC = 2x$ $m \angle TCO$.

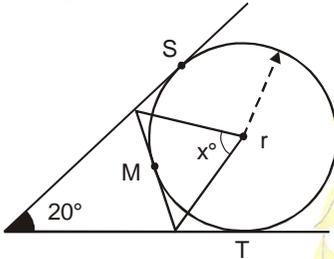


¡Tú eres el próximo!



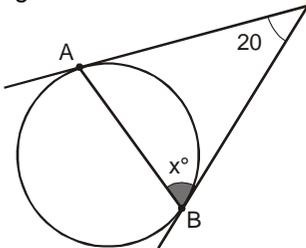
- a. 30° b. 40° c. 35° d. 45° e. 50°

7. En la figura: S, M y T: son puntos de tangencia. Calcular "x".



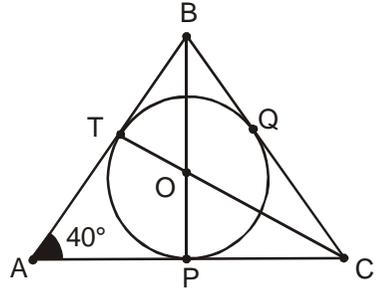
- a. 80° b. 70° c. 75° d. 95° e. 85°

8. En la figura: A, B son puntos de tangencias. Calcular $2x$.



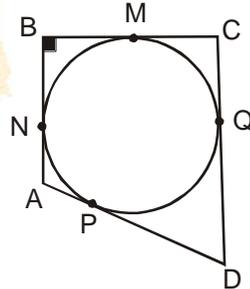
- a. 150° b. 170° c. 160° d. 180° e. 190°

9. En la figura T, P y Q son puntos de tangencia. Calcular: $m\angle TOP + m\angle BOC$.



- a. 230° b. 240° c. 220°
d. 260° e. 250°

10. En la figura M, N, P, Q son puntos de tangencia, $AB + CD = 20$, $AD = 12$, Calcular MC.



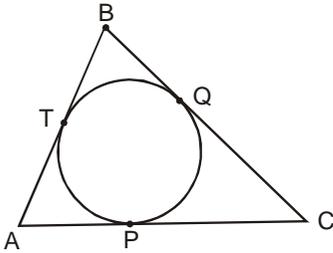
- a. 2 b. 6 c. 5 d. 3 e. 4

11. Hallar AT, si $AB = 7$, $BC = 8$ y $AC = 9$.

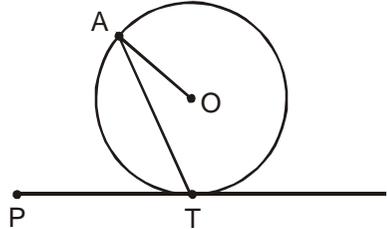
Nota: B, O, P no son colineales



¡Tú eres el próximo!

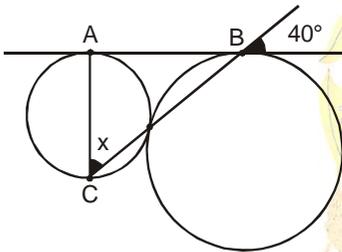


14. Si "O" es centro, T es punto de tangencia y la $m\angle OAT = 20$. Calcular la $m\angle PTA$.



a.6 b.5 c.4 d. 2 e.3

12. Hallar "x" en el sgte. gráfico.



a.50° b.90° c.80° d.70° e.60°

15. En un triángulo ABC: $AB = 8$, $BC = 10$ y $AC = 12$. Si la circunferencia inscrita determina sobre \overline{AC} el punto M. Calcular AM.

a.3 b.4 c.5 d.6 e.2

a.70° b.50° c.40° d.60° e.30°

Tema N°8: RELACIONES MÉTRICAS

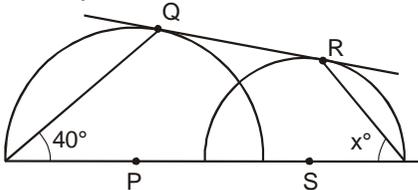
A) RELACIONES MÉTRICAS EN EL TRIÁNGULO RECTÁNGULO

Elementos de un triángulo Rectángulo.

a y b = Son las longitudes de los catetos \overline{BC} y \overline{AC} .

c = Es la longitud de la Hipotenusa \overline{AB}

13. En la figura, Calcular "x" si P y S son centros.



a.90° b.40° c.80° d.50° e.70°



¡Tú eres el próximo!

h = Es la altura relativa a la Hipotenusa.

m = Es la longitud de la proyección del cateto \overline{BC} sobre la hipotenusa.

n = Es la longitud de la proyección del cateto \overline{AC} sobre la hipotenusa.

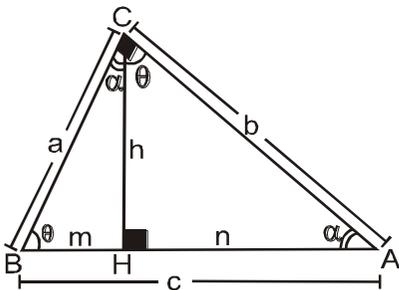
- Los siguientes teoremas nos describen las principales relaciones que hay entre las longitudes de los lados, altura y proyecciones de un triángulo rectángulo.

TEOREMA 1

"En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de un cateto es igual al producto de su proyección por la hipotenusa".

En la figura se cumple que:

$$a^2 = m \cdot c \quad b^2 = n \cdot c$$

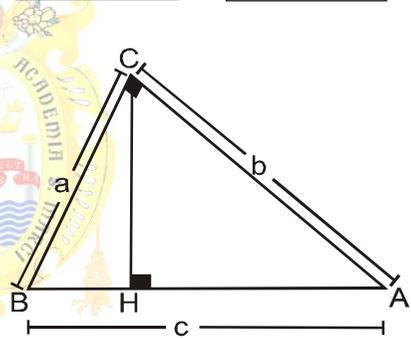


TEOREMA 2 (Teorema de Pitágoras)

"En todo triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa".

En la figura se cumple que:

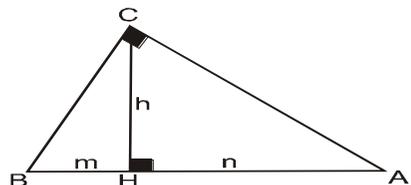
$$a^2 + b^2 = c^2 \quad \text{o} \quad c = \sqrt{a^2 + b^2}$$



TEOREMA 3

"En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la altura relativa a la hipotenusa es igual al producto de las proyecciones de los catetos sobre la misma" En la figura se cumple que

$$h^2 = m \cdot n$$





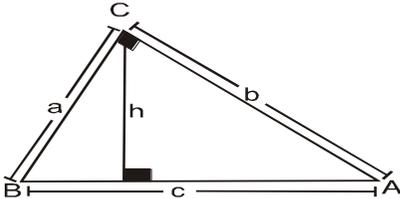
¡Tú eres el próximo!

Los triángulos que no son rectángulos, son oblicuángulos, luego un triángulo oblicuángulo puede ser acutángulo u obtusángulo.

2) COMO RECONOCER SI UN TRIÁNGULO ES ACUTÁNGULO U OBTUSÁNGULO

Se aplican las siguientes propiedades:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{h^2}$$

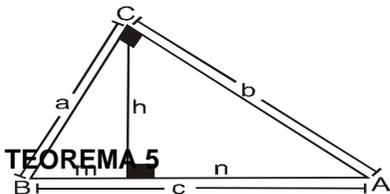


TEOREMA 4

En todo triángulo rectángulo, el producto de catetos es igual al producto de la hipotenusa por su altura relativa

En la figura se cumple que:

$$a \cdot b = c \cdot h$$



TEOREMA 5

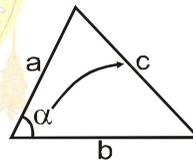
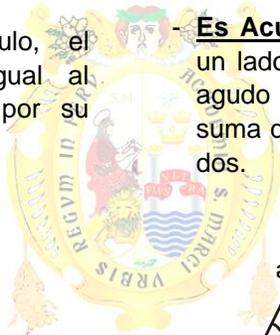
“En todo triángulo rectángulo la suma de las inversas de los cuadrados de los catetos es igual a la inversa del cuadrado de la altura relativa a la hipotenusa”. En la figura se cumple que

B. RELACIONES MÉTRICAS EN EL TRIÁNGULO OBLICUÁNGULO

1) TRIÁNGULO OBLICUÁNGULO

CURSO: GEOMETRIA

- **Es Acutángulo:** Si el cuadrado de un lado que se opone a un ángulo agudo siempre es **MENOR** que la suma de los cuadrados de los otros dos.



$$\alpha < 90^\circ \rightarrow c^2 < a^2 + b^2$$

NOTA: Todos los ángulos del triángulo son menores que 90.

- **Es Obtusángulo:** Si el cuadrado de un lado que se opone a un ángulo obtuso siempre es **MAYOR** que la suma de los cuadrados de los otros dos.

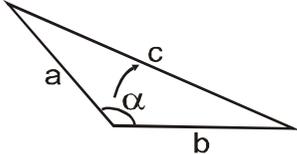
NOTA: Un ángulo de los tres ángulos del triángulo es mayor que 90.



¡Tú eres el próximo!

3) PROYECCIÓN DE UN LADO SOBRE OTRO LADO

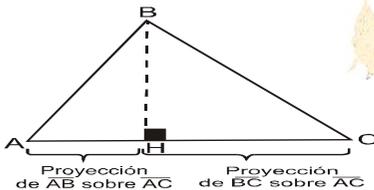
En el triángulo es importante



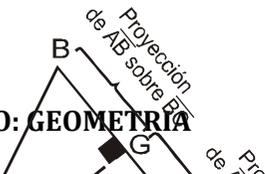
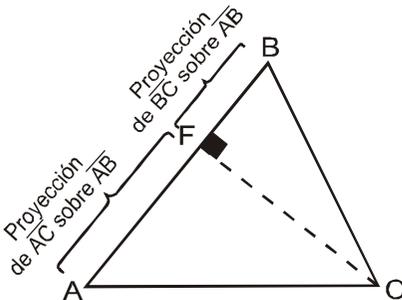
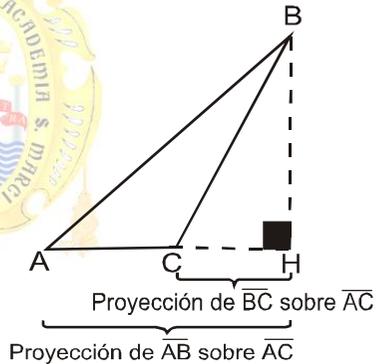
$$\alpha > 90^\circ \rightarrow c^2 > a^2 + b^2$$

conocer la proyección de un lado sobre otro, para ello siempre se traza una altura

- **En el triángulo acutángulo:** En el triángulo acutángulo, la proyección de un lado sobre otro está contenido en este último.

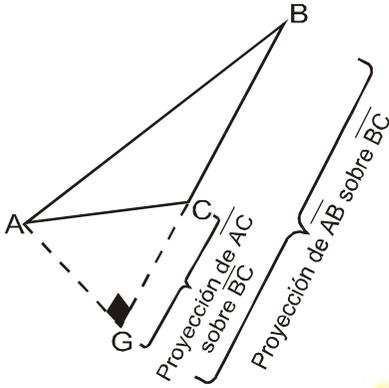


- **En el triángulo obtusángulo:** En el triángulo obtusángulo, para encontrar la proyección de un lado sobre uno de los lados adyacentes al ángulo obtuso, se debe prolongar este último.





¡Tú eres el próximo!



TEOREMA 2

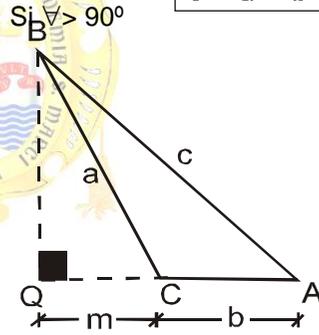
“En todo triángulo, el cuadrado del lado que se opone a un ángulo obtuso es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos, más el doble producto de uno de ellos por la proyección del otro sobre aquel”

4) TEOREMA DE EUCLIDES

TEOREMA 1

“En todo triángulo, el cuadrado de un lado que se opone a un ángulo Agudo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos, menos el doble producto de uno de ellos por la proyección del otro sobre aquel”.

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2bm$$



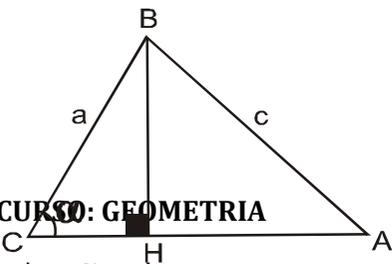
5) TEOREMA DE LA MEDIANA

“En todo triángulo la suma de los cuadrados de los lados laterales a una mediana es igual al doble del cuadrado de la mediana más la mitad del cuadrado del lado donde cae la mediana”.

Así en la figura

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2bm$$

Si: $\angle < 90^\circ$



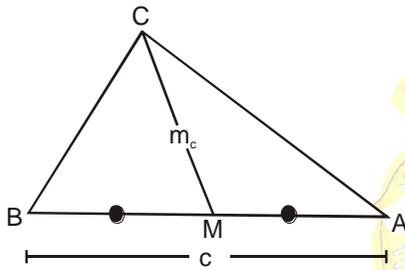


¡Tú eres el próximo!

" m_c " → es la mediana relativa al lado "c".

Entonces:

$$a^2 + b^2 = 2m_c^2 + \frac{c^2}{2}$$

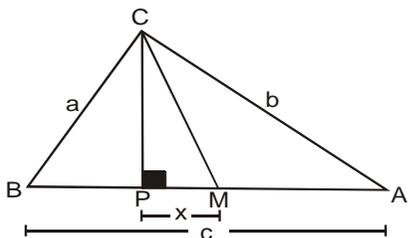


TEOREMA DE LA PROYECCIÓN DE LA MEDIANA

En todo triángulo, se cumple lo siguiente:

Si " x " es la proyección de la mediana \overline{CM} , entonces:

$$x = \frac{b^2 - a^2}{2c}$$



PROBLEMAS

01. En un triángulo rectángulo las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa están en la relación 2:1. El cateto mayor mide $4\sqrt{6}$ cm. ¿Cuánto mide la hipotenusa?

- a) 10 cm b) 12 cm c) 9 cm
- d) 11 cm e) 13 cm

02. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 10cm y uno de los catetos mide 8 cm. ¿Cuánto mide la proyección del cateto menor sobre la hipotenusa?

- a) 6,4 b) 2,8 c) 3
- d) 3,6 e) 5

03. En un rectángulo ABCD: AB = 6 cm BC = 8 cm, calcular la longitud de la proyección del lado \overline{BC} sobre la diagonal \overline{AC} .

- a) 5,4 b) 6,4 c) 5
- d) 6 e) 3,6

04. Sobre el lado \overline{BC} de un rectángulo ABCD se toma un punto P tal que el ángulo APD es recto. Si BP = 3, PC = 12. Hallar el perímetro de dicho rectángulo.



¡Tú eres el próximo!



- a) 40 b) 44 c) 42
d) 46 e) 38

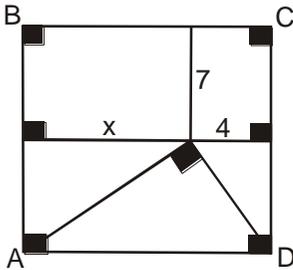
5. Los catetos de un triángulo rectángulo miden a y b , si:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{144}$$

Calcular la altura relativa a la hipotenusa.

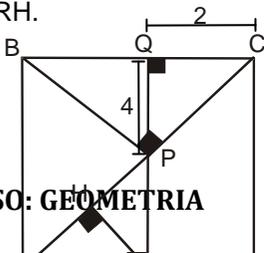
- a) 10 b) 11 c) 12
d) 13 e) 14

6. En la figura ABCD es un cuadrado. Hallar "x".



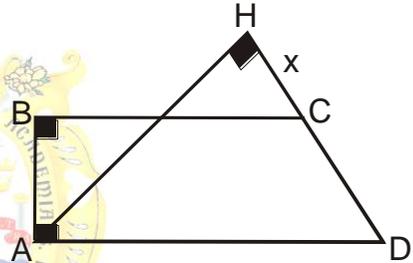
- a) 9 b) 8 c) 7
d) 5 e) 6

7. Si ABCD es un cuadrado, hallar RH.



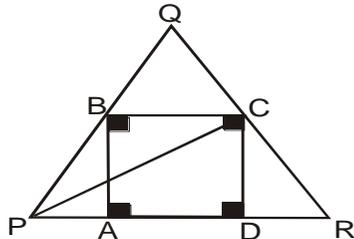
- a) 3,6 b) 4 c) 4,8
d) 5,2 e) 5

8. En la figura $AB = 3$, $BC = 4$, $AD = 7$, hallar "x".



- a) 1 b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{2}{3}$

9. En la figura PQR es un triángulo equilátero y ABCD es un cuadrado si $PC = 10$. Hallar el área del cuadrado.





¡Tú eres el próximo!



- a) $2\sqrt{2}$ b) $\sqrt{17}$ c) $\frac{400\sqrt{3}}{7}$ d) 0,5 e) $\sqrt{2}$
- d) $\frac{300}{7+2\sqrt{3}}$ e)
10. En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, $AB = 8$, $BC = 6$; se traza la mediana \overline{CM} ; calcular la longitud de la proyección de \overline{CM} sobre \overline{AC} .
- a) 1,2 b) 3,4 c) 5
d) 6,8 e) 7,9
11. Las bases de un trapecio isósceles miden 2 y 8 m respectivamente, y cada lado no paralelo mide 6 m. Hallar la longitud de una de las diagonales.
- a) $\sqrt{26}$ b) 8 c) 7
d) $2\sqrt{13}$ e) 6
12. En el interior de un cuadrado ABCD se toma un punto P, tal que la mediana del ángulo APD = 90, $AP = 4$, $PD = 3$. Calcular la longitud de la proyección de BP sobre \overline{AP} .
- a) 1 b) 2 c) 3
13. Los lados de un triángulo miden 7,6 y $\sqrt{97}$. Calcular la longitud de la mediana relativa al menor lado.
- a) 5 b) 6 c) 7
d) 8 e) 9
14. Se tiene un cuadrado abad sobre \overline{CD} y \overline{AD} se toman los puntos P y Q respectivamente tal que $AP = 8$, $PQ = 4$, $AQ = 6$. Una de las diagonales del cuadrado mide:
- a) $7\sqrt{2}$ b) 9 c) 8,5
d) $8\sqrt{2}$ e) $9\sqrt{2}$
15. Las bases de un trapecio miden 2 y 12 metros respectivamente. Hallar la altura del trapecio.
- a) 5 b) 4 c) 4,8
d) 5,2 e) 5,6



¡Tú eres el próximo!

