HABILIDADES LÓGICO MATEMÁTICAS

PRESENTACIÓN

El presente módulo de Habilidades Lógico Matemáticas tiene como finalidad proporcionar los fundamentos matemáticos para estudiantes de ciencias empresariales, ingenierías y ciencias sociales, para que los estudiantes adquieran soltura en el manejo de estos conceptos, que son herramientas comunes en los cursos que llevaran en ciclos superiores.
El objetivo de este material es que la transmisión delos conocimientos básicos de Habilidades Lógico Matemáticas debe hacerse a través de situaciones aplicadas y contextualizadas a las Ciencias empresariales, ingenierías y ciencias sociales, aumentando el interés y la motivación para así de esta manera comprender la necesidad de adquirir dichos conocimientos.
En este material, cada concepto matemático es explicado y ejemplificado a través desituaciones contextualizadas que introduce al alumno en problemas que encontrará a lo largo de su vida académica y profesional.
El módulo contiene conceptos y ejemplos de lógica proposicional, teoría de conjuntos, proporcionalidad, ecuaciones e inecuaciones, funciones reales, así como aplicación de los conocimientos adquiridos en la resolución de problemas prácticos teniendo como soporte el software matemático GEOGEBRA para la visualización geométrica de conceptos en concordancia con el enfoque pedagógico de Van Hiele.
Cada tema contiene aplicaciones a sus respectivas carreras, y una gran variedad de ejercicios y aplicaciones resueltas, al final de cada tema contiene una lista de ejercicios propuestos al estudiante que tiene la misión de analizar ejemplos concretos de la teoría revisada.

PRIMERA UNIDAD

I. COMPETENCIA

Desarrolla habilidades lógico matemáticas para identificar y plantear problemas de la realidad, y tomar decisiones para su resolución, desenvolviéndose con responsabilidad y actitud proactiva.

II. CAPACIDADES

1. Analiza y aplica los principios lógicos en su vida cotidiana.
2. Discrimina tautologías, contradicciones y contingencias.
3.- Reconoce las principales proposiciones categóricas A, E, I, O,
4. Discrimina inferencias y falacias en su quehacer cotidiano a partir del conocimiento de las reglas y leyes lógicas.
5 Conceptúa los términos: Conjunto elemento y relación de pertenencia.
6 Construye el concepto de proporcionalidad.
7.- Construye el concepto de regla de tres.

CAPÍTULO I: LÓGICA

SESIÓN 1

I.- DEFINICIÓN Y OBJETO DE LA LÓGICA

La palabra Lógica se deriva de la palabra griega **logos** que significa razonamiento
o discurso.

La Lógica Matemática es la disciplina que trata de métodos de razonamiento. En un nivel elemental, la Lógica proporciona reglas y técnicas para determinar si es o no válido un argumento dado. Ciertamente se usa en forma constante el razonamiento lógico para realizar cualquier actividad.

Existen además otras definiciones:

Lógica es la ciencia que estudia la estructura del pensamiento, prescindiendo del contenido.

Lógica también es la manera ordenada de pensar y de expresar nuestras ideas.

El objetivo principal de la Lógica es analizar la estructura del pensamiento, es decir su forma lógica para descubrir leyes y reglas.

1.1.- DIFERENCIAS ENTRE JUICIO, ORACIÓN Y PROPOSICIÓN

1.1.1.- El juicio

Es una relación o conjuntos de conceptos que se caracteriza por constituir una afirmación o aseveración de algo, es una forma, una estructura del pensamiento que objetivamente es verdadero o falso. (Astudillo, Dolores; Inciso, Liliana).

1.1.2.- El Enunciado

Es la expresión verbal o escrita del juicio.

Ejemplos:

- Pedro es ingeniero.
- El puente más extenso del mundo se encuentra en China.
- Las matemáticas son la base de las ingenierías.

No son enunciados:

Las oraciones exclamativas. (Sentimientos, interjecciones). Ej.: ¡socorro!, ¡auxilio! ¡te quiero!
Las oraciones imperativas. (Órdenes), Ej.: Cierra la puerta; te vas afuera.
Las desiderativas. (Deseos, súplicas). Ej.: Ojala no haya clases.
Las oraciones interrogativas. (Preguntas). Ej.: ¿Qué hora es?

1.1.3.- Razonamiento

Es un conjunto de afirmaciones o juicios relacionados de manera tal que se supone que uno de ellos (llamado conclusión) se desprende o infiere del o los otros (llamados premisas). La pretensión de que la conclusión se deriva de las premisas se manifiesta a través de expresiones especiales como: por lo tanto, luego, por consiguiente, etc.

1.1.4..- La Proposición

Es un enunciado que puede ser falso o verdadero, pero no ambas cosas a la vez. La proposición es un elemento fundamental de la lógica matemática; generalmente se las expresa en oraciones declarativas o aseverativas, tales como:

Oraciones afirmativas. (Informan). Ej.: Mañana es lunes.

Oraciones descriptivas. (Describen). Ej.: La tiza es blanca

Oraciones explicativas. (Explican). Ej.: Si hace frío entonces es invierno

A continuación se tienen algunos ejemplos de proposiciones válidas y no válidas, y se explica el porqué algunos enunciados no son proposiciones. Las proposiciones se indican por medio de una letra minúscula, dos puntos y la proposición propiamente dicha.

Ejemplo.

p El edificio es alto.
q $-17 + 38 = 21$
r $x > y-9$
s Las ingenierías son base para el desarrollo del país.
t: Hola ¿como estas?
w: Lava el coche por favor.

Los incisos p y q sabemos que pueden tomar un valor de falso o verdadero; por lo tanto son proposiciones válidas. El inciso r también es una proposición válida, aunque el valor de falso o verdadero depende del valor asignado a las variables x y y en determinado momento. La proposición del inciso s,es válida Sin embargo los enunciados t y w no son válidos, ya que no pueden tomar un valor de falso o verdadero, uno de ellos es un saludo y el otro es una orden.

EJERCICIOS No. 1.

Valida las siguientes Proposiciones.

p_1: Todo ingeniero del 2 ciclo de la UCV tiene soluciones concretas.
p_2: Todas las ingenierías necesitan de las matemáticas.
p_3: Todos los ingenieros egresados de la UCV tienen trabajo.
p_4: Un ingenieros es trabajador.
p_5: Los ingenieros aceptan los retos más difíciles de la vida.
p_6: El alumno no necesariamente quiere ser ingeniero.

Ejercicios

Escribir 20 proposiciones válidas y 10 inválidas.

Importante: Valor de verdad

Una proposición es verdadera o es falsa; si es verdadera se denotará por la letra "V" o el "1" y si es falsa se denotará por "F" o por el "0". Si no se puede determinar su valor de verdad, se podrá analizar los posibles valores de verdad (tablas de certeza).

II.- CLASES DE PROPOSICIONES

Las proposiciones se clasifican en proposiciones simples o atómicas y proposiciones compuestas o moleculares:

2.1.- PROPOSICIONES SIMPLES

Son aquellas proposiciones que no se pueden descomponer.

Ejemplo:

p: Todo ingeniero se adapta rápidamente a su centro laboral.

q: Si un puente resiste a un terremoto; también para las lluvias.

r: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2.2.- PROPOSICIONES COMPUESTAS O MOLECULARES

Son aquellos enunciados que están formados por dos o más proposiciones simples y unidos por término lógico.

Ejemplos:

p: Laisaes Administradora y su hermano Mateo es Ingeniero.

q: Un Ingeniero tiene como base las matemáticas y las Física.

Podemos observar en los ejemplos anteriores que tanto **p** como **q** están compuestas de dos proposiciones simples.

Los conectivos lógicos son elementos gramaticales que unen dos o más proposiciones simples; estos son:

2.3.- CONECTIVOS LÓGICOS

OPERADOR LÓGICO	**LÓGICA SIMBÓLICA**	**TERMINOLOGÍA LÓGICA**
Negación	$\neg$	no
Conjunción	$\wedge$	Y
Disyunción	$\vee$	O
Disyunción exclusiva	$\underline{\vee}$	o en sentido excluyente
Conjunción negativa	$\downarrow$	ni….ni
Disyunción negativa	/	no…no
Condicional	$\rightarrow$	Si…., entonces
Bicondicional	$\Leftrightarrow$	Si y sólo si

2.4.- PROPOSICIONES COMPUESTAS Y CONECTIVOS LÓGICOS

Los operadores lógicos también permiten formar proposiciones compuestas (formadas por varias proposiciones). Los operadores o conectores básicos son:

2.4.1.- CONJUNCIÓN
($\wedge$) QUE SE LEE Y

Se utiliza para conectar dos proposiciones que se deben cumplir para que se pueda obtener un resultado verdadero. Su símbolo $\wedge$ que se lee "y". Se lo conoce como la multiplicación lógica y tiene estrecha relación con la intersección de conjuntos.

Ejemplo 01.

Sea el siguiente enunciado:

"Un tren enciende cuando tiene gasolina en el tanque y tiene corriente la batería".

Simbolizando tenemos:

p: el tren enciende cuando tiene gasolina en el tanque

q: el tren enciende cuando tiene corriente la batería.

V(p) = V
V(q) = V

En consecuencia:V(p $\wedge$ q) = V

Ejemplo 02.

3 + 4 = 6 y 3 + 7 = 10

p: 3 + 4 = 6 V(p) = F
q: 3 + 7 = 10 V(q) = V

Por consiguiente:V (p $\wedge$ q) = F

De tal manera que la representación del enunciado anterior usando simbología lógica es como sigue:

p $\wedge$ q; que se lee:
p y q
p pero q
p aunque q
p incluso q
p también q; etc.

Su tabla de verdad es:

p	q	p $\wedge$ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Ejercicios
Escribir 5 ejercicios de conjunción y determine el valor de verdad de cada uno.

2.4.2.- LA DISYUNCION:

2.4.2.1..- LA DISYUNCIÓN INCLUSIVA

($\vee$) QUE SE LEE: O.

Es la unión de dos proposiciones simples con el conectivo lógico “o”. Simbólicamente se lo representa así: p$\vee$ q que se lee p ó q o ambas. El enunciado es verdadero cuando alguna de las proposiciones es verdadera o ambas son verdaderas; Se conoce también como la suma lógica y se relaciona estrechamente con la unión de conjuntos.

Ejemplo 01.

Sea el siguiente enunciado

“Un ingeniero puede entrar al cine si compra su boleto u obtiene un pase”.

Donde.

p: Un ingeniero puede entrar al cine si se compra su boleto.
q: Obtiene su pase.

Simbólicamente tenemos:p $\vee$ q

V(p) = V
V(q) = V

En consecuencia: V (p $\vee$ q) = V

4 + 3 = 9 o 3 + 5 = 8

p: 4 + 3 = 9 V (p) = F
q: 3 + 5 = 8 V (q) = V

En consecuencia: V (p $\vee$ q) = V

Su tabla de verdad es:

p	q	p $\vee$ q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

TAREA

Escriba 10 ejemplos de disyunción inclusiva y determine su valor de verdad.

2.4.2.2..- DISYUNCIÓN EXCLUSIVA

($\underline{\vee}$) QUE SE LEE O EN SENTIDO EXCLUYENTE

El enunciado es verdadera cuando p es verdadero y q es falso o viceversa. Simbólicamente se lo representa por p $\underline{\vee}$ q que se lee p o q pero no ambas.

Ejemplos:

Carmen es ingenieroó de matematico

Simbólicamente tenemos:

p: Carmen es ingeniero V(p) = V
q: Carmen es matematico V (q) = V

En consecuencia: V (p $\underline{\vee}$ q) = F

(p $\underline{\vee}$ q) que se lee: p ó q, pero no ambas.

$\sqrt{25}$ = 6 o 3 + 9 = 7

p: $\sqrt{25}$ = 6 V (p) F
q: 3 + 9 = 7 V (q) = F

En consecuencia: V (p $\underline{\vee}$ q) = F

Su tabla de verdad es:

p	q	(p $\veebar$ q)
V V F F	V F V F	F V V F

TAREA

Escribir 10 ejercicios de disyunción exclusiva y determine el valor de verdad.

2.4.4.- Negación

(¬) no

Su función es negar la proposición. Esto significa que sí alguna proposición es verdadera y se le aplica el operador no se obtendrá su complemento o negación (falso). Al negar una proposición simple, se transforma en una proposición compuesta Este operador se indica por medio de los siguientes símbolos:

(~, ¬)

Ejemplos:

p: Patricio está estudiando ingeniería V (p) = V

¬ p: Patricio no está estudiando ingeniería. V (¬ p) = F

q: María es ingeniero V (q) = F

¬ q: No es cierto que María es ingeniero V (¬q) = V

Su tabla de verdad es:

p	¬ p
V	F
F	V

A veces la negación de una proposición simple se obtiene mediante otra proposición simple, así:

p: x es mortal

¬p: x es inmortal

q: y es par

¬q: y es impar

La negación en Matemática se realiza así:

p: 2 + 3 = 5 V (p) = V

$\neg$p: 2 + 3 $\neq$ 5 V ($\neg$p) = F

2.4.5.- CONJUNCIÓN NEGATIVA:

El enunciado es verdadero cuando las proposiciones simples que la forman son falsas.

La conjunción negativa de dos proposiciones p y q, se representa por "p $\downarrow$ q" o por p $\oplus$ q se lee: ni p, ni q

Ejemplos:

"ni 3 + 2 = 5, ni 2 + 4 = 6"

Simbólicamente tenemos:p $\downarrow$ q

p: 3 + 2 = 5 V (p) = V

q: 2 + 4 = 6 V (q) = V

Consecuentemente tenemos que:V (p $\downarrow$ q) = F

$\neg$p: 3 + 2 $\neq$ 5 V ($\neg$ p) = F

$\neg$q: 2 + 4 $\neq$ 6 V ($\neg$ q) = F;

Consecuentemente:V ($\neg$ p $\wedge \neg$ q) = F

Entonces se deduce que:(p $\downarrow$ q) $\equiv$ ($\neg$ p $\wedge \neg$ q)

Su tabla de verdad es:

P	q	(p $\downarrow$ q)
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

TAREA

Escribir 10 ejercicios de conjunciones negativas y determinar el valor de verdad.

2.4.6.- DISYUNCIÓN NEGATIVA:

El enunciado es falso cuando las proposiciones simples que la forman son verdaderas. La disyunción negativa de proporciones se representa por p / q; que se lee noóno q.

Ejemplo:

No eres ingeniero o no eres matemático p / q

p: eres ingeniero V (p) = V

q: eres matematico V (q) = V

En consecuencia:V (p / q) = F

$\neg$ p: no eres ingeniero V ($\neg$p) = F

$\neg$q: no eres matematicoV ($\neg$q) = F

Consecuentemente:V ($\neg$p $\vee$$\neg$q) = F

Luego: p / q $\cong$ ($\neg$p $\vee$$\neg$q)

Su tabla de verdad es:

p	q	(p / q)
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

2.4.7.- NEGACIÓN DE PROPOSICIONES COMPUESTAS:

Se puede también utilizar otras formas de negar como: no es el caso que; no es cierto que, (frecuentemente se acostumbra a utilizar esta forma cuando se niegan proposiciones compuestas)

No es el caso que: 3 < 2 y 4 + 1 = 5; simbólicamente tenemos: $\neg$(p$\wedge$q)

No es cierto que: 3 < 2 y 4 + 1 = 5; simbólicamente tenemos: $\neg$(p$\wedge$q)

p: 3 < 2 V (p) = F

q: 4 + 1 = 5 V (q) = V

Consecuentemente:V $\neg$(p$\wedge$q) = V

TAREA: Escriba 10 ejemplos de negación.

2.4.8.- PROPOSICIONES CONDICIONALES

($\Rightarrow$)que se lee “entonces”

Una proposición condicional, es aquella que está formada por dos proposiciones simples (o compuesta) p y q. La cual se indica de la siguiente manera: $\Rightarrow$ que se lee “si p, entonces q; simbólicamente se la representa por:

$p \Rightarrow q$ $\left\{\begin{array}{l}\text{Se lee “Si p, entonces q”}\\ \text{Si p, q}\\ \text{p, sólo si q}\\ \text{p es necesario para q; etc.}\end{array}\right.$

En este caso p: es el antecedente y q: es el consecuente.

Se lee:

$q \Rightarrow p$ $\left\{\begin{array}{l}\text{q puesto que p}\\ \text{q, si p}\\ \text{q cuando p}\\ \text{q cada vez que p}\\ \text{q dado que p}\\ \text{q porque p}\\ \text{q ya que p; etc.}\end{array}\right.$

Se caracterizan porque después de cada uno de estos conectivos está el antece dente o condición.

Ejemplo: Simbolice y determine el valor de verdad:

Un candidato a presidente del Ecuador dice:

“Si salgo electo presidente del Colegio de Ingenieros del Perú, entonces recibirán un 50% de aumento en su sueldo el próximo año”.

Una declaración como esta se conoce como condicional. Su valor de verdad es la siguiente:

p: Si salgo electo Presidente delColegio de Ingenieros del Perú V (p) = V

q: Recibirán un 50% de aumento en su sueldo el próximo año V(q)= V

De tal manera que el enunciado se puede expresar de la siguiente manera: $p \Rightarrow q$

El $V(p \Rightarrow q) = V$

Otro ejemplo: $5+7=12 \Rightarrow 8- 5 = 4$; Simbólicamente tenemos: $p \Rightarrow q$

p: $5+7=12$ $V(p) = V$

q: $8 – 5= 4$ $V(q) = F$

Su valor de verdad es: $V (p \Rightarrow q) = F$

Su tabla de verdad es:

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Esto significa que una proposición condicional es falsa cuando p = V y q = F; en los demás casos será verdadera.

2.4.8.1.- VARIANTES DE LA CONDICIONAL

A toda proposición condicional se le asocia tres proposiciones igualmente importantes, que son: proposición recíproca, inversa y contrarecíproca.

Proposición recíproca.-

Dada la proposición condicional “$p \Rightarrow q$ “, se llama proposición recíproca a la proposición que se denota por: “$q \Rightarrow p$”

Ejemplo:

Si y es par, entonces, y es múltiplo de 2 ; simbólicamente: $p \Rightarrow q$. Condicional

Si y es múltiplo de 2, entonces, y es par ; simbólicamente: $p \Rightarrow q$. Su recíproca:

Si b es perpendicular a **c**, entonces **c** es perpendicular a **b.**

La proposición anterior simbólicamente la denotamos por “$p \Rightarrow q$”; mientras que la proposición recíproca será: “$q \Rightarrow p$”.

c es perpendicular a **b**, si **b** es perpendicular a **c.**

Proposición inversa. -

Dada la proposición condicional “$p \Rightarrow q$ “, se llama proposición inversa a la proposición que se denota por: “$\neg p \Rightarrow \neg q$”.

Ejemplo:

Si Marcos consigue la beca, entonces estudiara una maestría en ingeniería;

simbólicamente tenemos: $p \Rightarrow q$

La proposición inversa será: "$\neg p \Rightarrow \neg q$”, será:

Si Marcos no consigue la beca, entonces no estudiara una maestría en ingeniería.

Simbólicamente tenemos: $\neg p \Rightarrow \neg q$

Proposición contrarecíproca.-

Dada la proposición condicional: “$p \Rightarrow q$”, se denomina proposición contrarecíproca a la que se denota por: $\neg q \Rightarrow \neg p$.

Ejemplo:

Si vivo en Lambayeque, vivo en la provincia de Chiclayo; simbólicamente: $p \Rightarrow q$

La proposición contrarecíproca será :

No vivo en la provincia deChiclayo, si no vivo en Lambayeque ;

simbólicamente: “$\neg q \Rightarrow \neg p$”

En los siguientes ejercicios escribir la proposición dada en la forma “si p entonces q”; determine su valor de verdad. A continuación, escribir la recíproca y la contrarecíproca y determinar la verdad o falsedad de cada una.

- Las lechugas son verduras
- Sólo las rectas paralelas no se cortan
- Sólo las rectas perpendiculares forman ángulos rectos.
- Un triángulo equilátero tiene tres lados iguales
- Si a es mayor que b entonces b es mayor que a
- Los triángulos isósceles son equiláteros
- Un hombre natural de Zapotillo es natural de Loja
- Si $x = 4$ entonces $x^2 = 16$
- Ningún profesor de idiomas tiene mala ortografía

2.4.9.- PROPOSICIÓN BICONDICIONAL
: ($\Leftrightarrow$), QUE SE LEE “SI Y SÓLO SI”

Sean p y q dos proposiciones simples entonces se puede indicar la proposición bicondicional de la siguiente manera: $p \Leftrightarrow q$; que se lee “p si y solo si q”

Esto significa que p es verdadera si y solo si q es también verdadera. O bien p es falsa si y solo si q también es falsa. Ejemplo; el enunciado siguiente es una proposición bicondicional

“Un puente está bien construido , si y solo si; resiste a un terremoto de mayor escala”

Simbólicamente tenemos:

p: Un puente está bien construido V (p) = V

q: resiste a un terremoto de mayor escala V (q) = V

Por consiguiente: V (p $\Leftrightarrow$ q) = V

Su tabla de verdad es:

p	q	p $\Leftrightarrow$ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

La proposición bicondicional solamente es verdadera si tanto p como q son falsas o bien ambas verdaderas.

La proposición bicondicional, también se forma por la conjunción de una proposición condicional y su recíproca, simbólicamente tememos:
$p \Leftrightarrow q \ = \ p \Rightarrow q \ \wedge q \Rightarrow p$

Ejemplo:
Oscar viajará a la ciudad de Cuenca si y sólo si obtiene un préstamo en el Banco de Loja;
Simbólicamente tenemos:
$q \Rightarrow p$

Equivale a decir: Si Oscarviaja a la ciudad de Cuenca, entonces obtiene un préstamo en el Banco de Loja, y si obtiene un préstamo en el Banco de Loja viajará a la ciudad de Cuenca. Simbólicamente tenemos:

$= p \Rightarrow q \ \wedge q \Rightarrow p$

Por lo tanto la primera y segunda proposición son iguales:
$p \Leftrightarrow q \ = \ p \Rightarrow q \ \wedge q \Rightarrow p$

SESIÓN 2

III.- SIGNOS DE PUNTUACIÓN, AGRUPACIÓN Y ORDEN DE LOS OPERADORES O CONECTIVOS LÓGICOS

Los signos de agrupación más conocidos tenemos: el paréntesis, corchete y llaves( ); [ ] ; { }

Estos signos reemplazan a los signos gramaticales: punto (.), la coma (,), el punto y como (;), y los dos puntos (:).

Los signos de agrupación se usan en lógica cuando se trata de obtener esquemas lógicos más complejos con el fin de evitar la ambigüedad de las fórmulas:

Si las proposiciones tienen el mismo tipo de operador o conectivo lógico, se debe colocar los paréntesis de izquierda a derecha así:

$p \wedge q \vee r \ = (p \wedge q) \ \vee r$

$p \wedge q \vee r \vee s \ = [(p \wedge q) \vee r] \vee s$

Si no hay signos de puntuación ni paréntesis se debe considerar el siguiente orden demenor a mayor jerarquía de los operadores y de izquierda a derecha, para ubicar los paréntesis.

$\neg, \quad \wedge, \quad \vee, \quad \Rightarrow, \quad \Leftrightarrow$

Ejemplos:

$p \wedge q \Rightarrow r = (p \wedge q) \Rightarrow r$

$p \wedge q \Rightarrow r \vee s = (p \wedge q) \Rightarrow (r \vee s)$

$p \Rightarrow q \Leftrightarrow r \wedge s = (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (r \wedge s)$

Si la proposición compuesta está escrita con paréntesis, la ubicación de éstos nos indicará cual es el operador predominante:

Ejercicios

$p \wedge q \Rightarrow r = (p \wedge q) \vee r$ Es un esquema disyuntivo

$p \wedge q \Rightarrow r \vee s = (p \wedge q) \Rightarrow (r \vee s)$ Es un esquema condicional

$p \Rightarrow q \Leftrightarrow r \wedge s = (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (r \wedge s)$ Es un esquema bicondicional.

4. Si un esquema molecular no lleva los signos de agrupación, se puede indicar cual esel operador predominante así:

1)	Conjunción	$p \Rightarrow r \wedge s$	$(p \Rightarrow r) \wedge s$
2)	Condicional	$p \Rightarrow q \vee s$	----------------------
3)	Condicional	$p \wedge q \Rightarrow r$	----------------------
4)	Condicional	$r \vee p \vee q$	----------------------
5)	Conjunción	$r \wedge p \Rightarrow q$	------------------------
6)	Disyunción	$r \vee q \Rightarrow t$	------------------------
7)	Disyunción	$q \Rightarrow p \vee s$	----------------
8)	Disyunción	$q \wedge p \Rightarrow s$	-----------------
9)	Disyunción	$q \Rightarrow r \vee \neg s$	----------------
10)	Condicional	$q \Rightarrow r \vee \neg s$	----------------
11)	Negación	$\neg p \Rightarrow r$ ----------------	
12)	Condicional	$\neg p \Rightarrow r$ -----------------	
13)	Negación	$\neg t \vee s$ -------------------------	

Dadas las siguientes proposiciones matemáticas, incluir los paréntesis.

Disyunción	$x \neq 0 \vee x > y \wedge y = z$	$x \neq 0 \vee (x > y \wedge y = z)$
condicional	$x = 0 \Rightarrow x > y \wedge y \neq z$	-------------------------------
condicional	$x = 0 \vee x \neq 0 \wedge y \Rightarrow z$	-------------------------------

condicional $x > y \wedge x \Leftrightarrow y \Rightarrow y > z$ -------------------------------

conjunción $x = 0 \vee x > 0 \Rightarrow y = 0$ -------------------------------

condicional $x = y \wedge y = z \vee x = z$ -------------------------------

conjunción $x = y \vee y = z \wedge y \neq z$ -------------------------------

En la proposición compuesta: $p \wedge (q \wedge r)$ el conector principal es $\wedge$.

En la proposición compuesta: $p \vee q$ el conector principal es $\vee$

En la proposición compuesta: $p \Rightarrow (p \vee r)$ el conector principal es $\Rightarrow$

En la proposición compuesta: $[(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (r \wedge s)]$ el conector principal es $\Leftrightarrow$

Como podemos darnos cuenta, que los signos de puntuación permiten, entre otras cosas, identificar en una proposición compuesta el ***CONECTOR DOMINANTE OCONECTOR PRINCIPAL O EL DE MAYOR JERARQUÍA***

IV.-CÁLCULO PROPOSICIONAL

Hay dos formas de establecer los valores de verdad:

4.1. POR MEDIO DE LAS TABLAS DE VERDAD

Las tablas de verdad permiten determinar el valor de verdad de una proposición compuesta y depende de las proposiciones simples y de los operadores que contengan. Es posible que no se conozca un valor de verdad específico para cada proposición; es este caso es necesario elaborar una tabla de verdad que nos indique todas las diferentes combinaciones de valores de verdad que pueden presentarse. Las posibilidades de combinar valores de verdad dependen del número de proposiciones dadas.
Para una proposición (n = 1), tenemos $2^1 = 2$combinaciones

Para dos proposiciones (n = 2), tenemos $2^2 = 4$ combinaciones

Para tres proposiciones (n = 3), tenemos $2^3 = 8$ combinaciones

Para n proposiciones tenemos 2^n combinaciones

Ejemplo: dado el siguiente esquema molecular, construir su tabla de valores de verdad:

Pasos para construir la tabla: $(\neg p \wedge q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow \neg r)$

Determinamos sus valores de verdad $2^3 = 8$ combinaciones

Determinamos las combinaciones:

p	q	r
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F

Adjuntamos a éste cuadro el esquema molecular y colocamos debajo de cada una de la variables sus valores de verdad :

p	Q	r	($\neg$ p	$\wedge$	q)	$\Leftrightarrow$	(p	$\Rightarrow$	$\neg$ r)
V	V	V	F	F	V	V	V	F	F
V	V	F	F	F	V	F	V	V	V
V	F	V	F	F	F	V	V	F	F
V	F	F	F	F	F	F	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	F	V	F
F	V	F	V	V	V	V	F	V	V
F	F	V	V	F	F	F	F	V	F
F	F	F	V	F	F	F	F	V	V
				(4)		(6)		(5)	

4. Aplicamos la conjunción de:

($\neg$ p	$\wedge$	q)

5. Aplicamos la condicional

(p	$\Rightarrow$	$\neg$ r)

6. Aplicamos la bicondicional

($\neg$ p	$\wedge$	q)	$\Leftrightarrow$	(p	$\Rightarrow$	$\neg$ r)

El operador de mayor jerarquía es el que determina los valores de verdad del esquema molecular.

Ejercicios:

Sabiendo que p es falsa, q es verdadera y r es falso, hallar el valor de verdad de las siguientes proposiciones compuestas por medio de la tabla de verdad.

$\neg$ (p $\Rightarrow\neg$q) $\Leftrightarrow$ (p $\wedge$ q)

p $\Rightarrow$ (q $\wedge$ r)

$\neg$ q $\Rightarrow$ ($\neg$p $\wedge$ q)

($\neg$ p $\wedge\neg$ q) $\Rightarrow$ (p $\vee$ r)

($\neg$ q $\wedge$) $\vee$ (q $\vee\neg$r)

$(r \wedge \neg r) \vee r$

4.2.- POR MEDIO DEL DIAGRAMA DE ÁRBOL.-

Es un procedimiento corto y fácil, se necesita conocer los valores de verdad de cada variable y aplicar las tablas de certeza lógica:

Ejemplos:

a. Sabiendo que p es falsa, q es verdadera y r es verdadera. Cuál es el valor de verdad de la proposición $q \Rightarrow (p \wedge r)$.

Solución:

Tenemos:
$q \Rightarrow (p \wedge r)$

V F V

F
F

Luego la proposición: $q \Rightarrow (p \wedge r)$, es falsa.

b. Dado el siguiente esquema molecular: $(\neg p \wedge q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow \neg r)$

Si: “p” es falsa “q” es verdadera y “r” es verdadera. El conector dominante es el bicon

dicional encontrar el valor de verdad del esquema por medio del diagrama del árbol:

Solución:
$(\neg p \wedge q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow \neg r)$
V VF F

V V

V

Luego la proposición: $(\neg p \wedge q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow \neg r)$ es verdadera

Ejercicios

1. Si el valor de verdad de la proposición: $q \Rightarrow \neg p$, es falsa, ¿Cuál será el valor de verdad de: $\neg q \wedge \neg p$.

2. Completar con V o F, cada una de las siguientes proposiciones, justificar la respuesta:

Se sabe que $p \wedge q$ es verdadera. Por lo tanto el valor de verdad de $\neg p \Rightarrow q$ es:

Se sabe que $\neg$ p $\Rightarrow$ q es falsa. Por lo tanto, el valor de verdad de p $\vee\neg$ q es:

Se sabe que $\neg$ p $\vee$ q es falsa. Por lo tanto, el valor de vedad de p $\Leftrightarrow$ q es:

Se sabe que p es falsa y $\neg$ p $\Leftrightarrow$ q es verdadera. Por lo tanto, p $\Rightarrow\neg$ q es:

Se sabe que q y $\neg$ r es verdadera. Por lo tanto q $\Rightarrow$ (p $\wedge$ r) es:
----

3. Escribir simbólicamente las proposiciones siguientes y encontrar el valor de verdad por el diagrama del árbol:

4) 2 es número par y 21 es múltiplo de 3, ó 5 es la raíz cuadrada de 10
Si el m.c.m. de 12 y 15 es 60 y 3 es el cuadrado de 9, entonces, estudio o juego ajedrez.

V.-CONTINGENTES, TAUTOLOGÍAS Y CONTRADICCIONES

Los esquemas moleculares se clasifican según el resultado que se obtenga en el operador de mayor jerarquía, pueden ser:

5.1.- CONTINGENTES

Cuando en su resultado hay por lo menos una verdad y una falsedad Ejemplo: dado el siguiente esquema: $(\neg p \wedge q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow \neg r)$

P	q	r	($\neg$ p	$\wedge$	q)	$\Leftrightarrow$	(p	$\Rightarrow$	$\neg$ r)
V	V	V	F	F	V	V	V	F	F
V	V	F	F	F	V	F	V	V	V
V	F	V	F	F	F	V	V	F	F
V	F	F	F	F	F	F	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	F	V	F
F	V	F	V	V	V	V	F	V	V
F	F	V	V	F	F	F	F	V	F
F	F	F	V	F	F	F	F	V	V

El esquema es contingente

5.2.- TAUTOLOGÍA

Es una proposición que siempre es verdadera, independientemente del valor lógico de las proposiciones simples que la componen..

Se puede decir también que un esquema es un tautológico cuando los valores de verdad del operador principal son todos verdaderos.

Ejemplo

Si p y q son proporciones simples distintas, demuestre mediante tablas de certeza que el siguiente esquema proposicional es una tautología.

$(p \wedge q) \Rightarrow (p \Leftrightarrow q)$

p	q	(p	$\wedge$	q)	$\Rightarrow$	(p	$\Leftrightarrow$	q)
V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	F	V	F	F	V	V	F	F
F	V	F	F	V	V	F	F	V
F	F	F	F	F	V	F	V	F

Es un esquema tautológico

5.3.- CONTRADICCIÓN

Es cuando en el resultado todos los valores de verdad son falsos o Un esquema A es una contradicción si “no A” ($\neg$ A), es una contradicción cuando todos los valores del operador de mayor jerarquía son falsos.

Indeterminación: es la sentencia que ni es verdadera ni falsa.

Ejemplo:

Dado el siguiente esquema molecular:

$$[(\neg p \wedge q) \Rightarrow \neg r] \Rightarrow [r \wedge \neg (p \vee \neg q)],$$

determinar si se trata de una contradicción:

P	Q	R	[($\neg$ p ∧ q) $\Rightarrow\neg$ r]$\Rightarrow$ [r $\wedge\neg$ (p $\vee\neg$ q)]											
V	V	V	F	F	V	V	F	F	V	F	F	V	V	F
V	V	F	F	F	V	V	V	F	F	F	F	V	V	F
V	F	V	F	F	F	V	F	F	V	F	F	V	V	V
V	F	F	F	F	F	V	V	F	F	F	F	V	V	V
F	V	V	V	V	V	F	F	V	V	V	V	F	F	F
F	V	F	V	V	V	V	V	F	F	F	V	F	F	F
F	F	V	V	F	F	V	F	F	V	F	F	F	V	V
F	F	F	V	F	F	V	V	F	F	F	F	F	V	V
1	2	3	4	10	5	11	6	15	7	14	13	8	12	9

Podemos observar en el ejemplo anterior que no se trata de una contradicción; pero si es un es un esquema contingente.

OBSERVACIÓN:

Ala tautología se la simboliza con la letra T

A la idea de tautología se la relaciona con el conjunto universal

A la contradicción se la simboliza con la letra C

A la contradicción se la relaciona con el conjunto vacío.

La negación de una tautología es una contradicción

La negación de una contradicción es una tautología.

Ejercicios

1.-¿Cuáles de las siguientes proposiciones compuestas son tautológicas?

$(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \vee q)$

$(q \rightarrow \sim p) \Delta (p \wedge \sim q)$

$(\sim q \leftrightarrow p) \rightarrow (q \Delta \sim p)$

2.-De las siguientes proposiciones

$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \wedge \sim q)$

$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \vee q)$

$[(p \wedge \sim q) \vee q] \wedge \sim p$

$[(p \vee q) \rightarrow q)] \Delta [(q \wedge p) \Delta q]$

Son contingencias:

3.-Comprobar por medio de una tabla de verdad que las siguientes esquemas compuestas son tautologías, contingentes o contradictorios

$p \vee \neg p$

$(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$

$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

$[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$

$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$

VI.-INFERENCIA LÓGICA

Se clasifican en:

6.1.- IMPLICACIONES LÓGICAS

Se lo representa por el símbolo “$\rightarrow$”, no es un conectivo lógico, es un signo de relación .

Se dice que un esquema A implica a otro esquema B, cuando al unirlos por la condicional nos da una tautología. Simbólicamente se lo representa así: $A \rightarrow B$.

Si la proposición compuesta A implica a la proposición compuesta B, entonces B se deduce necesariamente de A, o también se dice que B se infiere lógicamente de A.

Ejemplo:

Demostrar que el esquema A implica a B

A: $p \wedge q$
B: $p \vee q$

Luego unimos con la condicional y construimos la tabla: $p \wedge q \Rightarrow p \vee q$

P	Q	$p \wedge q$	$\Rightarrow$	$p \vee q$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V
F	F	F	V	F

Como el resultado es una tautología, se ha demostrado que A implica a B.

Nota: la relación de implicación no es recíproca.

6.2.- EQUIVALENCIAS LÓGICAS

Se lo representa por “$\equiv$” pero no es un operador lógico.

Decimos que dos proposiciones compuestas P y Q son equivalente, sí al unir las dos con la bicondicional nos da una tautología, es decir que P y Q tienen los mismos valores de verdad en su operador principal. Simbólicamente se escribe así:

$P \equiv Q$ ó $P \Leftrightarrow Q$ Se lee P es equivalente a Q ó Q es equivalente a P.

Si no son equivalentes se los escribe así: $P \equiv Q$

Si P y Q son equivalentes, entonces Q se deduce válidamente a partir P, y a la vez también P se deduce necesariamente a partir de Q.

Para demostrar que una proposición compuesta es equivalente a otra, se lo puede hacer por medio de las tablas de verdad o por medio de las leyes y reglas de inferencia que veremos a continuación.

A los esquemas moleculares compuestos se los representa con las letras mayúsculas A, B, C,.. etc. ó con P, Q, R, etc.

Ejemplos:

Determinar si las proposiciones siguientes son equivalentes, por medio de la tabla de verdad:

A : Si Laisa aprobó el curso preuniversitario, entonces ingresó a la UCV.
Simbólicamente: $p \Rightarrow q$

B: No es el caso que: Laisa apruebe el curso preuniversitario y no ingrese a la UCV

Simbólicamente : $\neg (p \wedge q)$

Luego demostramos que: $p \Rightarrow q \equiv \neg (p \wedge q)$

Seguidamente para demostrar que estos dos esquemas son equivalentes, los unimos con la bicondicional así: $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg (p \wedge \neg q)$ y construimos una tabla de verdad:

p	q	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg (p \wedge \neg q)$						
V	V		V		V	V	F	
V	F		F		V	F	V	
F	V		V		V	V	F	
F	F		V		V	V	F	

Dado que el resultado de la tabla es una tautología, las proposiciones A y B son equivalentes.

Otro Ejemplo:

P: $q \Rightarrow \neg p$; Q: $\neg (q \wedge \neg p)$

P	q	$(q \Rightarrow \neg p) \Leftrightarrow \neg (q \wedge p)$						
V	V		F		V	F	V	
V	F		V		V	V	F	
F	V		V		V	V	F	
F	F		V		V	V	F	
			1			3	2	

Aquí observamos que la columna 1 y 3 de los operadores principales de las proposiciones P y Q son iguales, por lo tanto son equivalentes.

También las proposiciones P y Q son equivalentes porque al unirlas con la bicondicional nos dio una tautología.

Ejercicios:

Demostrar que los siguientes esquemas moleculares son equivalentes

a) $[p \wedge (q \vee r)] \equiv [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$

b) $[p \vee (q \wedge r)] \equiv [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$

c) $(p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$

d) $(p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$

e) $\neg (p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q)$

f) $\neg (p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q)$

VII.-LEYES DEL ÁLGEBRA PROPOSICIONAL

En lógica, las tautologías son conocidas con el nombre de leyes o principios lógicos. A continuación anotamos las principales leyes que vamos a utilizarlos en el futuro y que usted de familiarizarse:

7.1.- LEYES

L- 1: LEYES DE IDEMPOTENCIA
PARA $\wedge$ Y PARA $\vee$

Si p es una proposición simple o compuesta, entonces:

$$\mathbf{(p \vee p) \equiv p}$$

$$\mathbf{(p \wedge p) \equiv p}$$

Según estas leyes, las proporciones ($p \vee p$) o ($p \wedge p$) pueden sustituirse por p.

L – 2: LEYES DE IDENTIDAD
PARA $\wedge$ Y PARA $\vee$

Si p es una proposición simple o compuesta, entonces:

$$\mathbf{p \vee (V) \equiv (V)};$$

es decir, cuando formamos la disyunción de una proporción p, cuyo valor de verdad es desconocido, con otra cuyo valor de verdad de (V), el resultado es (V), ya que la disyunción es (V) cuando al menos una de las proposiciones dadas es verdadera.

$$\mathbf{p \vee (F) \equiv p};$$

es decir, el valor de verdad de la disyunción de una proposición p, cuyo valor de verdad no conocemos, con otra cuyo valor de verdad es (F), depende del valor de p.

$$\mathbf{p \wedge (V) \equiv p};$$

en este caso el análisis es similar a la parte b), teniendo en cuenta que aquí el conector es

$$\mathbf{p \wedge (F) \equiv (F)};$$

el análisis es similar al de la parte a), teniendo encuenta aquí que el conector es $\wedge$

L- 3: LEYES CONMUTATIVAS
$\wedge$ Y PARA $\vee$

Si p y q son proposiciones, entonces:

$$(p \vee q) \equiv (q \vee p)$$

$(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$, es decir, dos proporciones conectadas con $\vee\wedge$ pueden escribirse en cualquier orden.

L - 4: LEYES ASOCIATIVAS

Si p, q, , son proposiciones cualesquiera, entonces:

a) $(p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$

b) $(p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$

L– 5: LEYES DISTRIBUTIVAS:

Si p, q, r son proposiciones cualesquiera, entonces.

a) $[p \wedge (q \vee r)] \equiv [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$

b) $[p \vee (q \wedge r)] \equiv [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$

Estas leyes son similares a las que conocemos en el álgebra para la suma y la multiplicación. Recordemos que:

$4(x + y) = (4x) + (4y)$

L – 6: LEY DE LA DOBLE NEGACIÓN:

Si p es una proposición simple cualquiera, entonces: $\neg(\neg p) \equiv p$

Al negar dos veces una proposición obtenemos una afirmación.

L – 7: LEY DEL TERCER EXCLUIDO:

Si p es una proposición cualesquiera, entonces: $(p \vee \neg p) \equiv (V)$

Esta propiedad establece que independientemente del valor de verdad que tenga p, la proposición:

$(p \vee \neg p)$ siempre es verdadera. Por tanto, en un esquema lógico complejo podemos reemplazar

$(p \vee \neg p)$, $(q \vee \neg q)$, $(r \vee \neg r)$, $(a \Rightarrow b) \vee \neg (a \Rightarrow b)$, etc., por $(\vee)$.

L – 8: LEY DE CONTRADICCIÓN:

Si p es una proposición cualesquiera, entonces: $\mathbf{(p \wedge \neg p) \equiv (F)}$

Esquemas como $(p \wedge \neg p)$, $(q \wedge \neg q)$, $(r \wedge \neg r)$ pueden remplazarse por (F)

L – 9: LEYES DE DE MORGAN:

Si p, q son proposiciones simples o compuestas, entonces:

$$\mathbf{\neg (p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q)}$$

$$\mathbf{\neg (p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q)}$$

Estas leyes nos indican cómo negar una disyunción y una conjunción. La parte: a) establece que para negar una conjunción es necesario cambiar la conjunción por disyunción ($\wedge$ por $\vee$) y negar las proposiciones dadas.

La parte b) establece que para negar una disyunción debemos cambiar la disyunción por la conjunción (la $\wedge$por$\vee$) y negar las proposiciones dadas.

Ejemplo:

Negar la proposición: “7 es un número primo y 30 es divisible por 5”.

Solución:

Cambiamos “y” por “o” y negamos las proposiciones simples que forman elenunciado, así:

“7 no es un número primo o 30 no es divisible por 5”.

L– 10: LEY DE LA CONDICIONAL:

Usando tablas de verdad podemos verificar que: $p \Rightarrow q$ equivale a $\neg p \vee q$.

La proposición $p \Rightarrow q$ es una abreviación de la proposición $\neg p \vee q$; es decir:

$$\mathbf{(p \Rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q)}$$

NOTA: Son muchos los esquemas lógicos que ofrecen alguna complejidad y pueden simplificarse utilizando esta definición alterna del condicional.

Ejemplo 1:

Escribamos sin condicional las proposiciones siguientes:

a) $(p \wedge q) \Rightarrow r$

b) $p \Rightarrow (\neg q \vee \neg\ )$

c) $\neg p \Rightarrow \neg q$

SOLUCIÓN:

a. $(p \wedge q) \Rightarrow r\ ] \equiv \neg (p \wedge q) \vee r$

b. $[\, p \Rightarrow (\neg q \vee \neg r)\,] \equiv \neg p \vee (\neg q \vee \neg r)$

c. $(\neg p \Rightarrow \neg q) \equiv \neg (\neg p) \vee \neg q \equiv p \vee (\neg q)$

Ejemplo 2:

Escribamos una proposición equivalente a:“Si X es ingeniero entonces X tiene una constructora”

SOLUCIÓN:

Usando la definición alterna de la implicación tenemos:“X no es ingeniero o X no tiene una constructora”

Ejemplo 3:

Comprobemos que $(p \Rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q)$

SOLUCIÓN:

Elaboramos la tabla de verdad:

p	Q	$\neg p$	$(p \Rightarrow q)$	$\Leftrightarrow$	$(\neg p \vee q)$
V	V	F	V	VV	
V	F	F	F	V	F
F	V	V	V	VV	
F	F	V	V	VV	
			(1)	(3)	(2)

L- 11.- LEY DE LA BICONDICIONAL

$$\mathbf{p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)}$$

L- 12.- CONJUNCIÓN NEGATIVA.-

$$\mathbf{p \downarrow q \equiv \neg\ p \wedge \neg\ q}$$

L-13.- DISYUNCIÓN EXCLUSIVA.-

$$\mathbf{p \vee q \equiv (p \vee q) \wedge \neg (p \wedge q)}$$

Ejercicios: Demuestre las leyes mediante el uso de las tablas de verdad.

7.2.- APLICACIONES DE LAS LEYES DEL ALGEBRA PROPOSICIONAL

Las leyes nos pueden servir para demostrar que un esquema es equivalente a otro, también podemos utilizar en la simplificación de proposiciones etc.

Ejemplo 1: Probemos que $\neg (p \Rightarrow q) \equiv [p \wedge \neg q)]$

SOLUCIÓN:

$\neg (P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow \neg [(p) \neg \vee q]$ **Definición alterna de implicación**

$\Leftrightarrow \neg (\neg p) \wedge \neg (q)$ **Ley de De Morgan para** $\vee$

$\Leftrightarrow p \wedge (\neg q)$ **Ley de la Doble Negación**

Luego: $\neg (p \Rightarrow q) \equiv [p \wedge (\neg q)]$

Ejemplo 2: Probemos que la proposición $(p \wedge q) \Rightarrow p$ es una tautología.

SOLUCIÓN:

$[(p \wedge q) \Rightarrow p] \Leftrightarrow \neg (p \wedge q) \vee p$ **Definición alterna de** $\Rightarrow$

$\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \vee p$ **Ley de De Morgan para** $\wedge$

$\Leftrightarrow (\neg p \vee p) \vee (\neg q)$**Ley Asociativa de la** $\vee$

$\Leftrightarrow (V) \vee (\neg q)$ **Ley del Tercer excluido**

$\Leftrightarrow (V)$ **Ley Idéntica de la** $\vee$

Por lo tanto, al ser $[(p \wedge q) \Rightarrow p] \equiv (V)$, concluimos que es una tautología.

Ejercicios

1) Probemos que la proposición $[(p \Rightarrow q) \wedge (\neg q)] \Rightarrow (\neg p)$ es una tautología.

2) Probemos que la siguiente proposición es una contradicción:

$\neg [\neg(\neg p \wedge q) \vee (\neg p \vee q)] \Leftrightarrow \neg [\neg (\neg p \wedge q)] \wedge \neg (\neg p \vee q)$

3) Elaborar la tabla de verdad de las siguientes proposiciones y decir en cada caso si se trata de una tautología, una contradicción o una determinación.

a) $\neg (p \Rightarrow \neg q) \Leftrightarrow (p \wedge q)$

b) $(p \wedge \neg q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$

c) $p \Rightarrow (q \wedge r)$

d) $\neg p \Rightarrow (\neg p \wedge q)$

e) $(\neg p \wedge \neg q) \Rightarrow (p \vee q)$

f) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg p$

g) $(\neg q \wedge r) \vee (q \wedge \neg r)$

h) $(r \wedge \neg r) \vee r$

4) Los siguientes ejercicios deben resolverse aplicando las Leyes del Álgebra proposicional y no por tablas de verdad.-

Probar que las proposiciones siguientes son tautologías:

a) $[\neg q \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow (\neg p)$

b) $[(p \Rightarrow q) \wedge \neg q] \Rightarrow (\neg p)$

c) $[(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [(p \wedge q) \Rightarrow r]$

d) $[\neg p \wedge (p \vee q)] \Rightarrow q$

e) $p \Rightarrow (p \vee q)$

5) Simplificar las siguientes proposición utilizando leyes:

a. $(p \Rightarrow \neg q) \wedge (\neg p \wedge q)$

b. $p \Rightarrow (p \wedge \neg q)$

c. $\neg m \wedge (\neg m \Rightarrow \neg n)$

d. $\neg [t \Rightarrow (m \wedge t)]$

e. $\neg[(p \wedge q) \Rightarrow (\neg p \Rightarrow q)]$

7.2.- INFERENCIA LÓGICA:

La inferencia es el paso de un conjunto de premisas a la conclusión.

Simbólicamente se lo representa así:

$$\begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ . \\ . \\ . \\ P_n \\ \hline \therefore C \end{array}$$

Al unir cada una de las premisas por el operador conjuntivo y estas a la vez con la conclusión por medio del condicional, se obtiene la siguiente fórmula inferencial:

$$P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \ldots\ldots \wedge P_n \Rightarrow C$$

Como las premisas y la conclusión están constituidas por proposiciones, podemos decir que la inferencia es una estructura de proposiciones, donde a partir de una o más proposiciones llamadas premisas se obtiene otra proposición llamada conclusión:

Ejemplos:

1. Vicente viajará al norte del país o se quedará en la capital. Por lo tanto, Si Vicente viaja al norte del país entonces no se quedará en la capital.

2.Si Mateo gana el concurso de poesía entonces obtendrá una beca. Mateo ganó el concurso de poesía. Luego Mateoobtendrá una beca.

La conclusión se puede distinguir de sus premisas porque generalmente van precedidas por alguno de los términos como "por lo tanto", "luego", en consecuencia", "de ahí que", etc. y las premisas podemos distinguirlas casi siempre por los signos de puntuación comoel punto seguido o por el sentido que tiene el enunciado.

7.3.- VALIDEZ Y VERDAD

La validez se refiere a la forma de pensamiento, mientras que la verdad se obtiene del análisis del contenido del pensamiento. En todo razonamiento o inferencia hay que distinguir su validez de su verdad.

El razonamiento o la inferencia son válidos cuando la conjunción de premisas implica a la conclusión; y, si esto no sucede, la inferencia es inválida.

La validez o invalidez de una inferencia depende únicamente de su forma lógica, y la forma lógica depende de la función que desempeñan las conectivas en la estructura del enunciado inferencial.

Si una inferencia válida tiene su premisa o conjunto de premisas verdaderas, entonces se puede asegurar que la conclusión es necesariamente verdadera; pero si la premisas o conjunto de premisas no son verdaderas, así la inferencia sea válida, lógicamente no se puede saber la verdad o falsedad de la conclusión. Entonces, el único caso que se puede saber la verdad de la conclusión es cuando la inferencia es válida y tiene premisas verdaderas.

7.4.- MÉTODOS PARA DETERMINAR LA VALIDEZ DE UNA INFERENCIA LÓGICA

Analizar la validez o invalidez de una inferencia consiste en decidir si la fórmula de la inferencia es válida o no, para esto conocemos dos métodos:

7.4.1. POR LA TABLA DE VALORES

Se sugiere seguir los siguientes pasos:

a. Simbolizar las premisas y la conclusión:

b. Obtener la formula inferencial

c. Aplicar la tabla de valores.Si el resultado es tautológico, la conjunción de premisas implica a la conclusión, y por tanto la inferencia es válida, pero si el resultado no es tautológico, la inferencia no es válida.

Ejemplos:

1. Vicente viajará al norte del país o se quedará en la capital. Por lo tanto, Si Vicente viaja al norte del país entonces no se quedará en la capital.

a. Simbolizamos:

$$\frac{p \vee q}{\therefore\ p \Rightarrow \neg q}$$

b. Obtenemos la formula inferencial: $(p \vee q) \Rightarrow (p \Rightarrow \neg q)$

b. Elaboramos la tabla de valores:

p	Q	$(p \vee q) \quad \Rightarrow \quad (p \Rightarrow \neg q)$
V	V	V F F
V	F	V VV
F	V	V VV
F	F	F V V

El esquema no es tautológico, luego la premisa no implica a la conclusión y la inferencia no es válida,

2. Si Mateo gana el concurso de poesía entonces obtendrá una beca. Mateo ganó el concurso de poesía. Luego Mateo obtendrá una beca.

a. Simbolizando tenemos:

$p \Rightarrow q$
p

$\therefore\ q$

b. Obtenemos la formula inferencial:

$[(\ p \Rightarrow\ q\ )\ \ \wedge\ p\ ]\ \Rightarrow\ q$

c. Elaboramos la tabla de valores:

p	Q	$[(\ p \Rightarrow\ q\ )\ \ \wedge\ p\ ]\ \ \Rightarrow\ \ q$
V	V	VVV
V	F	FF V
F	V	V F V
F	F	V F V

El esquema es tautológico, luego la conjunción de premisas implica a la conclusión y la inferencia es válida.

7.4.2. POR EL MÉTODO ABREVIADO

Es un procedimiento que evita estar construyendo la tabla de valores de verdad para determinar la validez de la inferencia.

Este método consiste en suponer la conjunción de premisas verdaderas y la conclusión falsa, única posibilidad que invalidad la implicación.

$$\mathbf{P_1 \wedge\ P_2 \wedge P_3 \wedge \ldots\ldots \wedge P_n \Rightarrow C}$$

V VVV F

Ejemplo:

1. Vicente viajará al norte del país o se quedará en la capital. Por lo tanto, Si Vicente viaja al norte del país entonces no se quedará en la capital.

a. Simbolizamos:

$p\ \vee\ q$

$\therefore\ p \Rightarrow \neg\ q$

b. Obtenemos la formula inferencial: $(\ p\ \vee\ q\ )\ \Rightarrow\ (\ p \Rightarrow \neg\ q\ )$

c. Suponemos valores, a las premisas verdaderas y la conclusión falsa

$(\ p\ \vee\ q\ )\ \Rightarrow\ (\ p \Rightarrow \neg\ q\ )$

V F

Como cada una de las variables(p, q), cumplen una sola función veritativa, decidimos que la inferencia no es válida. Esto es, se ha demostrado que la premisa es verdadera y la conclusión es falsa.

2. Si Juan gana el concurso de poesía entonces obtendrá una beca. Juan ganó el concurso de poesía. Luego Juan obtendrá una beca.

Simbolizando tenemos:

$p \Rightarrow q$
p

$\therefore q$

b. Obtenemos la formula inferencial: $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$

c. Suponemos valores, a las premisas verdaderas y la conclusión falsa:

$[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$

V VF

c. Comprobamos:

$[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$

F F
V V F

Como la variable p tiene dos valores: verdadero y falso a la vez. Por lo tanto, hay implicación y la inferencia es válida.

7.5.-Reglas de inferencia:

Para inferir un razonamiento a partir de otros se requiere de un proceso en el que se aplican propiedades o leyes fijadas de antemano y que no hayan sido obtenidas de casos particulares o para casos particulares.

Estas leyes dan la certeza de que solo es posible obtener conclusiones ciertas de premisas ciertas.

7.5.1.- MODUS PONENDO PONENS
(REGLA DE SEPARACIÓN):

Su abreviatura es PP.

Simbólicamente tenemos:

$p \Rightarrow q$ (1)
p (1)

$\therefore q$ (1)

Su fórmula inferencial es: $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$

Si una proposición condicional es verdadera y si verdadero el antecedente, entonces necesariamente será verdadero el consecuente.

Ejemplo:

Premisa 1: Si él está en el partido de fútbol, entonces él está en el estadio.

Premisa 2: El está en el partido de fútbol

Conclusión: El está en el estadio.

Se simboliza de la siguiente manera el ejercicio anterior

$p \Rightarrow q$ (1)
p (1)

$\therefore\ q$ (1)

Ejercicios:

A. ¿Qué conclusión se puede sacar de cada uno de los siguientes conjuntos de premisas?

Es decir ¿qué proposición lógica se sigue de las premisas?

Si usted está en Madrid, entonces su reloj señala lamisa hora que en Barcelona. Usted está en Madrid.

Si no nos despedimos ahora, entonces no cumpliremos nuestro plan. No nos despedimos ahora.

Si vivo en la capital del Ecuador, entonces no vivo en ninguno de las 21 provincias del Ecuador. Vivo en la capital del Ecuador.

Utilizando Modus PonendoPonens sacar una conclusión de cada uno de los conjuntos de premisas siguientes. Escribir la conclusión en la línea (3)

$p \vee q \Rightarrow r$

$p \vee q$

$\neg p \Rightarrow \neg r$

$\neg p$

Poner una C junto a cada ejemplo en el que la conclusión es correcta según el Modus

Poniendo Ponens. Poner una I junto a cada conclusión incorrecta.

Premisas: s y $s \Rightarrow t$: conclusión: t

Premisas: $t \Rightarrow v$ y t: conclusión v

Premisas: $p \Rightarrow q$ y q: conclusión r

Premisas: s y $r \Rightarrow s$

Premisas: r y $r \Rightarrow s$

7.5.2. DOBLE NEGACIÓN.

La reglade doble negación es una regla simple que permitepasar de una premisa única a la conclusión.

Simbólicamente tenemos:

$$\frac{\neg\neg p \ (1)}{\therefore p \ (1)} \qquad\qquad \frac{p \qquad (1)}{\therefore \neg\neg p \ (1)}$$

Ejemplo:

No ocurre que María no es estudiante

Simbolizando el ejemplo anterior tenemos:

$$\frac{\neg\neg p \ (1)}{\therefore p \ (1)}$$

La conclusión es que María es estudiante.

Ejercicios:

A. Qué conclusión podemos sacar de cada una de las proposiciones siguientes por la doble negación:

1. Todos los mamíferos son animales de sangre caliente
2. El granito es un tipo de mineral ígneo
3. No ocurre que un quinto no es el veinte por cierto

B. Demostrar que las conclusiones son consecuencia de las premisas dadas:

1. Demostrar: $\neg\neg t$	2. Demostrar: b
(1) $s \Rightarrow t$	(1) $\neg a$
(2) s	(2) $\neg a \Rightarrow \neg\neg b$
(3)	(3)
(4)	(4)

7.5.3.- MODUS TOLLENDO TOLLENS.

Su abreviatura es TT.

Simbólicamente tenemos:

$p \Rightarrow q$ (1)
$\neg q$ (1)

$\neg\ p$ (1)

Su fórmula es: $[(p \Rightarrow q) \wedge \neg q] \Rightarrow \neg\ p$

Si una proposición condicional es verdadera y si es verdadera la negación del consecuente, entonces necesariamente será verdadera la negación del antecedente.

Ejemplo:

Premisa 1: Si tiene luz propia, entonces el astro es una estrella

Premisa 2: El astro no es una estrella.

Conclusión: Por tanto no tiene luz propia

Se simboliza de la siguiente manera el ejercicio anterior

$p \Rightarrow q$ P
$\neg\ q$ P

$\neg p$ TT 1, 2

Ejercicios:

1) ¿Qué conclusión se puede deducir de cada uno de los conjuntos de premisas siguientes utilizando TT? Escribir las conclusiones es castellano.

2) Si la luz fuera simplemente un movimiento ondulatorio continuo, entonces la luz más brillante dará lugar siempre a una emisión de electrones con mayor energía que los originados por luz más tenue. La luz más brillante no siempre emite electrones con mayor energía que los originados.

3) Si un ángulo de un triángulo es mayor de 90 grados, entonces la suma de los otros dos ángulos es menor de 90 grados. La sima de los otros dos ángulos no es menor de 90 grados.

4) Si el arriendo se mantiene válido, entonces el dueño es responsable de las reparaciones. El dueño no es responsable de las reptaciones.

5) Deducir una conclusión de cada uno de los conjuntos de premisas siguientes, aplicando la regla del Modus TollendoTollens.

1. (1) $q \Rightarrow r$ 2. (1) $q \Rightarrow \neg\ r$ 3. (1) $(p \vee q) \Rightarrow r$
(2) $\neg\ r$ (2) $\neg\neg\ r$ (2) $\neg\ r$
(3)(3) (3)

Demostrar que las conclusiones son consecuencia de las premisas dadas. Indicar la demostración completa.

Demostrar: c

(1) $\neg$ b
(2) a $\Rightarrow$ b (2) q
(3) $\neg$ a $\Rightarrow$ c (3) $\neg$ p $\Rightarrow$ r $\wedge$ s

Demostrar: r $\wedge$ s

(1) p $\Rightarrow$ q
(2) $\neg$ e $\Rightarrow \neg$ f

Demostrar:

(1) f

7.5.4.- MODUS TOLLENDO PONENS.

Su abreviatura es: MTP

Simbólicamente tenemos:

p $\vee$ q (1)
$\neg$ p (1)

---

q (1)

p $\vee$ q (1)
$\neg$ q (1)

---

p (1)

Sus fórmulas son:

[(p $\vee$ q) $\wedge\neg$ p]$\Rightarrow$ q

[(p $\vee$ q) $\wedge\neg$ q]$\Rightarrow$ p

Si una proposición disyuntiva es verdadera y si es verdadera la negación de una de sus componentes, entonces necesariamente será verdadera la otra componente de la disyunción.

Ejemplo:

1.- Supóngase que se tiene como premisa:

O esta sustancia contiene hidrógeno o contiene oxígeno

La segunda premisa dice:

Esta sustancia no contiene oxígeno

Por medio del Modus TollendoPonens se puede concluir:

Esta sustancia contiene oxígeno

2.- Para aclarar la forma de esta inferencia, se puede simbolizar el ejemplo:

p: Esta sustancia contiene hidrógeno

q: Esta sustancia contiene oxígeno

La demostración de la conclusión es:

$p \vee q$ P
$\neg p$ P

q TP 1, 2

Ejercicios:

1.-¿Qué conclusión, en forma de proposición escrita en castellano, se puede deducir de cada uno de los conjuntos de premisas siguientes utilizando la regla TP?

2.-Este hombre o es un abogado o es un político. No es un abogado.
Juan o ha terminado el libro o no ha ido a devolverlo hoy a la biblioteca.
Juan no ha terminado el libro.

B. Deducir una conclusión de cada uno de los siguientes conjuntos de premisas usando el Modus TollendoPonens.

(1) $\neg q \vee r$ P	(1) $t \vee (p \Rightarrow q)$	(1) $(s \wedge t) \vee r$
(2) $\neg r$ P	(2) $\neg t$ P	(2) $\neg (s \wedge t)$ P

C. Demostrar que las conclusiones son consecuencia de las premisas dadas en los Ejercicios que siguen. Dar una demostración completa.

1) Demostrar: p	2) Demostrar $a \wedge b$	3) Demostrar: p
(1) $p \vee q$ P	(1) $\neg a \vee b$ P	(1) $t \Rightarrow p \vee q$ P
(2) $\neg t$ P	(2) $\neg a \Rightarrow e$ P	(2) $\neg\neg t$ P
(3) $q \Rightarrow t$ P	(3) $\neg e$ P	(3) $\neg q$ P

7.5.5.-TAUTOLOGÍA SIMPLIFICATIVA

Simbólicamente tenemos:

$p \wedge q$

p

$p \wedge q$

Q

Su fórmula es: $(p \wedge q) \Rightarrow p$

$(p \wedge q) \Rightarrow q$

Si una conjunción de proposiciones es verdadera entonces necesariamente será verdadera cada una de sus componentes.

Ejemplo:

Apruebo los talleres y apruebo el módulo 2

Premisa 1: apruebo los talleres

Premisa 2: apruebo el módulo 2

Conclusión: 1) apruebo los talleres

Conclusión: 2) apruebo el módulo 2

7.5.6.- TAUTOLOGÍA ADJUNCIÓN

Simbólicamente tenemos:

P
Q

$p \wedge q$

Su fórmula es:$[(p) \wedge (q)]\Rightarrow (p \wedge q)$

Si dos proporciones cualesquiera son verdaderas, entonces necesariamente será verdadera la conjunción que con dichas proposiciones se forme.

Ejemplo:

Salí bien en el examen y tengo 10

p: salí bien en el examen

q: tengo 10

$(p \wedge q)$: salí bien en el examen y tengo 10

7.5.7. TAUTOLOGÍA ADICIÓN

Simbólicamente tenemos:

$$\frac{P}{p \vee q}$$

Su fórmula es: $p \Rightarrow [p \vee q]$

Si una proposición cualesquiera es verdadera, entonces necesariamente será verdadera la disyunción que se forme con dicha proposición y cualquier otra.

Ejemplo:

Estudio con responsabilidad o pierdo el módulo

p: estudio con responsabilidad

q: pierdo el módulo

$p \vee q$: estudio con responsabilidad o pierdo el módulo.

7.5.8. SILOGISMO HIPOTÉTICO
(LEY TRANSITIVA).

Su abreviatura es HS

Simbólicamente tenemos:

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ q \Rightarrow r \\ \hline p \Rightarrow r \end{array}$$

Su fórmula es: $[(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s) \wedge (p \vee r)] \Rightarrow (q \vee s)$

Si una proposición condicional es verdadera y si es verdadera otra condicional que tenga como antecedente el consecuente de la primera, entonces necesariamente será verdadera otra condicional que tenga por antecedente el de la primea y por consecuente el consecuente de la segunda.

Ejemplo:

(1) Si hace calor, entonces Juana va a nadar

(2) Si Juana va a nadar, entonces arregla la casa después de comer.

Se puede concluir:

(3) Si hace calor, entonces arregla la casa después de comer.

Ejercicios:

En los ejemplos siguientes de la ley del silogismo hipotético obsérvese que algunos de los antecedentes y consecuentes son proposiciones moleculares. La forma, sin embargo es la misma.

a. (1) $\neg p \Rightarrow \neg q$ P

(2) $\neg q \Rightarrow \neg r$ P

(3) $\neg p \Rightarrow \neg r$ HS 1,2

b. (1) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$ P

(2) $r \Rightarrow (q \wedge t)$ P

(3) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \wedge t)$ HS 1,2

A. ¿Qué conclusiones se puede sacar, si se puede sacar alguna, por la ley de silogismo hipotético de los conjuntos de proposiciones siguientes?

Si el agua se hiela, entonces sus moléculas forman cristales. Si las moléculasforman cristales, entonces el agua aumenta de volumen.

Si un haz fino de fotones penetran en un gas en una cámara de niebla, entonces los fotones expulsan electrones de lo s átomos del gas. Si los fotones expulsan electrones de átomos de gas, entonces la energía de la luz se convierte en energía cinética de los electrones.

B. Traducir los razonamientos del ejercicio A en símbolos lógicos y demostrar que su conclusión es consecuencia lógica de las premisas.

C. Utilizar la ley del silogismo hipotético y obtener una conclusión del siguiente conjunto de premisas.

1. (1) $q \Rightarrow \neg p$
   (2) $\neg p \Rightarrow r$

2. (1) $s \vee t \Rightarrow r \vee q$
   (2) $r \vee q \Rightarrow \neg p$

D. Indicar una deducción formal de las siguientes conclusiones a partir de las premisas dadas.

1. Demostrar: $\neg t$
(1) $(q \Rightarrow r) \wedge p$
(2) $r \Rightarrow t$
(3) $(q \Rightarrow r) \Rightarrow \neg t$

2. Demostrar: q
(1) $\neg r \Rightarrow s$
(2) $s \Rightarrow p \wedge q$
(3) $r \Rightarrow t$
(4) $\neg t$

7.5.9.- SILOGISMO DISYUNTIVO
(LEY DEL DILEMA).

Su abreviatura es DS

Simbólicamente tenemos:

$p \Rightarrow q$

$r \Rightarrow s$

$p \vee r$

$q \vee s$

Su fórmula es:$[(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s) \wedge (p \vee q)] \Rightarrow (q \vee s)$

Si dos proposiciones condicionales son verdaderas y si es verdadera la disyunción que se forme con los antecedentes de dichas condicionales, entonces necesariamente será verdadera la disyunción que se forme con los consecuentes.

Ejemplo:

O llueve o el campo está seco

Si llueve, entonces jugaremos dentro.

Si el campo está seco, entonces jugaremos al baloncesto

¿Qué conclusión se puede sacar de estas proposiciones? La conclusión es que o jugaremos dentro o jugaremos el baloncesto. La conclusión es otra disyunción.

Simbolizamos:

r: llueve

d: el campo está seco

p: jugaremos dentro

b: jugaremos al baloncesto

Esto se simboliza así:

(1) $r \vee d$ P

(2) $r \vee p$ P

(3) $d \Rightarrow b$ P

(4) $p \vee b$ D S1, 2, y 3

Ejercicios:

A. ¿Qué conclusión se puede sacar de cada uno de los siguientes conjuntos de premisas,por la ley del silogismo disyuntivo? Dar como conclusión una proposición en lenguaje corriente.

O Juan tiene mayoría o Pedro tiene mayoría. Si Juan tiene mayoría. Pedro será el tesorero. Si Pedro tiene mayoría, entonces Juan será el tesorero.

O la planta es un aplanta verde o es una planta no verde. Si es una planta verde, entonces fabrica su propio elemento. Si es una planta no verde, entonces depende de las materias de otras plantas para su alimento.

B. Simbolizar los razonamientos de los ejemplos anteriores y demostrar que las conclusiones son consecuencia lógica de las premisas.

C. Utilizar la ley del silogismo disyuntivo (DS) para obtener una conclusión de cada uno de los siguientes conjuntos de premisas.

1. (1) $p \vee \neg q$
   (2) $\neg q \Rightarrow r$
   (3) $p \Rightarrow \neg s$

2. (1) $\neg t \vee \neg s$
   (2) $\neg s \Rightarrow p$
   (3) $\neg t \Rightarrow q$

Dar una deducción completamente formal de las siguientes conclusiones a partir de las premisas dadas.

1. Demostrar: $r \wedge (p \wedge q)$
   (1) $p \vee q$
   (2) $q \Rightarrow r$
   (3) $p \Rightarrow t$
   (4) $\neg t$

2. Demostrar: $\neg q \wedge s$
   (1) $s \wedge \neg r$
   (2) $r \vee \neg t$
   (3) $q \Rightarrow t$

7.5.10. CONMUTATIVA

Simbólicamente tenemos:

$$\frac{p \wedge q}{q \wedge p} \qquad \frac{p \vee q}{q \vee p}$$

Su fórmula es:

$(p \wedge q) \Rightarrow (q \wedge p)$ $\qquad$ $(p \vee q) \Rightarrow (q \vee p)$

Ejemplo:

Pedro trabaja y estudia $\quad p \wedge q$

Por lo tanto:

Pedro estudia y trabaja $\quad q \wedge p$

7.5.11. SIMPLIFICACION DISYUNTIVA:

Simbólicamente tenemos:

$p \vee p$

$\overline{}$
p

Su fórmula es: $(p \vee p) \Rightarrow p$

Ejemplo:

Pedro es ingeniero o Pedro es ingeniero $p \vee p$

Se concluye: que Pedro es ingeniero

7.5. 12.LAS LEYES DE DE MORGAN:

Simbólicamente tenemos:

a) $\neg (p \vee q)$ b)$\neg p \wedge \neg q$

$\overline{}$ $\overline{}$

$\neg p \wedge \neg q$ $\neg (p \vee q)$

Ejemplos:

a) No ocurre a la vez que: hace calor o que hace frío $\neg (p \vee q)$

Se puede también expresar:

No hace calor y no hace frío $\neg p \wedge \neg q$

b) No llueve y no hace sol $\neg p \wedge \neg q$

Se puede también expresar:

No ocurre que: llueve o haga sol $\neg (p \vee q)$

Ejercicios:

A. ¿Qué se puede concluir de las premisas siguientes utilizando las leyes de De Morgan?

1. O los estudiantes no son ingenieros o no tienen tiempo

2. No ocurre que o el aire es un buen conductor del calor o el agua es un buenconductor del calor.

3. No ocurre que los puentes son cementos o que los edificios son calles

B. Aplicar las leyes de De Morgan para deducir conclusiones:

1. $\neg(p \wedge q)$
2. $\neg r \vee \neg t$
3. $\neg(\neg r \wedge \neg s)$
4. $\neg\neg g \vee \neg h$

C. Indicar una demostración formal completa para cada uno de los razonamientos simbolizados siguientes:

1. Demostrar: $\neg s$

(1) $\neg(p \wedge q)$

(2) $\neg q \Rightarrow t$

(3) $\neg p \Rightarrow t$

(4) $s \Rightarrow \neg t$

2. Demostrar: $r \wedge q$

(1) $\neg s \Rightarrow \neg(p \vee \neg t)$

(2) $t \Rightarrow (q \wedge r)$

(3) $\neg s$

D.-Dar una demostración formal completa para cada uno de los razonamientos siguientes:

1. Demostrar: $x = 1$

(1) $\neg(z < 3) \vee (x > y) \wedge y = 2$

(2) $x < y \vee x = 1$

(3) $x > z \Rightarrow x > y$

(4) $x > z \Rightarrow x < y$

7.5.13.- REGLA DE LA BICONDICIONAL.

Su abreviatura es LB

Simbólicamente tenemos:

$$\frac{p \Leftrightarrow q}{(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)} \qquad \frac{\begin{array}{c} p \Rightarrow q \\ q \Rightarrow p \end{array}}{p \Leftrightarrow q}$$

Ejercicios:

A. Simbolizar las siguientes proposiciones y dar una deducción formal:

1. Esta ley será aprobada en esta sesión si y solo si es apoyada por la mayoría. O es apoyada por la mayoría o el gobernador se opone a ella. Si el gobernador se opone a ella, entonces será pospuesta en las deliberaciones del comité. Por tanto o esta ley será aprobada en esta sesión o será pospuesta en la deliberación del comité.

2. $3 \times 5 = 12 \Leftrightarrow 5 + 5 + 5 = 12$

$4 \times 4 \neq 13$

$5 + 5 + 5 = 12 \Rightarrow 4 \times 4 = 13$

Por lo tanto: $3 \times 5 \neq 12$

B. Dar una demostración formal completa de cada uno de los razonamientos siguientes:

1. Demostrar: $2 \times 5 = 5 + 5 \Rightarrow 2 \times 4 = 4 + 4$

(1) $2 \times 4 = 4 + 4 \Leftrightarrow 2 \times 5 = 5 + 5$

2. Demostrar: $x = 4 \Leftrightarrow 3x + 2 = 14$

(1) $3x + 2 = 14 \Leftrightarrow 3x = 12$
(2) $3x = 12 \Leftrightarrow x = 4$

7.5.14. CONJUNCIÓN NEGATIVA

Simbólicamente:

$p \downarrow q$

$\neg p \wedge \neg q$

Su fórmula es: $(p \downarrow q) \Rightarrow (\neg p \wedge \neg q)$

Ejemplo:

Ni Luis estudia ni Juan trabaja $p \downarrow q$

Se concluye que:

Luis no estudia y Juan no trabaja. $\neg p \wedge \neg q$

7.5.15. DISYUNCIÓN EXCLUSIVA

Simbólicamente:

$$\frac{p \veebar q}{(p \vee q) \wedge \neg (p \wedge q)}$$

Ejemplo:

Inés es hija de Pedro o hija de Luis $p \veebar q$

Se concluye:

Inés es hija de Pedro o Inés es hija de Luis y no es cierto que: Inés es hija de Pedro y de Luis

SESIÓN 3

VIII.-PROCESOS DE DEDUCCIÓN

De un conjunto de premisas dadas, que se puede deducir:

1. Determinar el valor de verdad de las premisas. Si alguna de ellas es falsa no es posible inferir nada de ellas.

Ejemplo: que se puede deducir de:

$2 + 3 = 5 \Rightarrow 3 = 3$

$4 + 2 = 7 \vee 9 + 2 = 11$

$4 + 2 = 7 \wedge 2 = 2$

Determinamos el valor de verdad

$2 + 3 = 5 \Rightarrow 3 = 3$ V

$4 + 2 = 7 \vee 9 + 2 = 11$ V

$4 + 2 = 7 \wedge 2 = 2$ F

De este conjunto de premisas no se puede concluir nada.

2. Determinar si las premisas son inconsistentes o no.

a. Si las premisas no son consistentes (inconsistentes) no se puede inferir nada de ellas.

b. Si las premisas son consistentes es posible deducir una conclusión utilizando las reglas de inferencia.

Ejemplo: Que se deduce de:

Si 3 + 2 = 5, 6 – 4 = 2

Si $6 - 4 = 2$, $6 = 3 + 3$

1. Determinamos el valor de verdad de las premisas:

   $3 + 2 = 5 \Rightarrow 6 - 4 = 2$ V

   $6 - 4 = 2 \Rightarrow 6 = 3 + 3$ V

2. Determinamos la conclusión:
   $3 + 2 = 5 \Rightarrow 6 = 3 + 3$

Ejemplo: Considerando que las premisas son verdaderas, que se puede deducir de:

$p \Rightarrow q$
$\neg r \wedge p$
$q \Rightarrow r$

$p \Rightarrow q$ P_1

$\neg r \wedge p$ P_2

$q \Rightarrow r$ P_3

$\neg r$ C_1 de P_2 (Regla de la simplificación)

$\neg q$ C_2 de P_3 y C_1 (M T.T)

$\neg p$ C_3 de P_1 y C_2 (M. T.T)

p C_4 de P_2 (Regla de la simplificación)

$\neg p \wedge p$ C_5 de C_3 y C_4 (Regla de adjunción)

Las premisas son inconsistentes, en consecuencia nada se puede deducir de ellas

Ejercicios:

Que se puede deducir de:

1. $4 + 3 = 7 \Rightarrow 2 = 2$

$3 + 2 = 6 \vee 4 + 3 = 7$

$3 + 2 \neq 6 \wedge 2 \neq 2$

2. $\neg p \vee q$

$\neg\neg p$

$s \Leftrightarrow q$

3. $q \veebar r$

$\neg q \Rightarrow p$

$\neg r \Rightarrow (s \wedge t)$

4. $p \downarrow q$

$\neg q \Rightarrow [s \wedge (r \vee p)]$

MÉTODOS DE DEMOSTRACIÓN

Los métodos de demostración pueden ser: directo, condicional e indirecto. La demostración de una proposición tiene por objeto establecer que es verdad, infiriéndola de verdades conocidas o ya demostradas.

MÉTODO DIRECTO:

Consiste en inferir una conclusión, partiendo únicamente de un conjunto de premisas.

Ejemplo:

Demostrar: s; de

$p \vee q$	$p \vee q$	P_1
$p \Rightarrow s$	$p \Rightarrow s$	P_2
$q \Rightarrow s$	$q \Rightarrow s$	P_3
$s \vee$	C_1; de P_1, P_2 y P_3	(Regla del SilogismoDisy.)
s	C; de C_1	(Simplificación Disyuntiva)

IX.-CIRCUITOS LÓGICOS

El valor de verdad de una proposición puede asociarse al pasaje de corriente en un circuito eléctrico controlado por un interruptor.

En efecto, para representar un interruptor mediante una proposición p, se tiene:

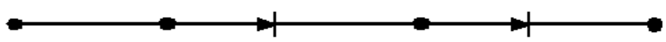
Circuito cerrado   Circuito abierto

Es decir, el interruptor está cerrado (pasa corriente) si V(p) = V, y está abierto (no pasa corriente) si V(p)=F. De aquí establecemos una identificación entre las proposiciones y los interruptores de un circuito eléctrico. Las operaciones proposicionales (conjunción, disyunción, etc.) pueden representarse mediante circuitos con tantos interruptores como proposiciones componentes. Considerando las clases de instalaciones: en serie y en paralelo, es factible diseñar esquemas de circuitos eléctricos para representar a proposiciones compuestas o viceversa.

<u>Circuitos en serie:</u>

Consideremos dos interruptores p y q conectados en serie:

p   q

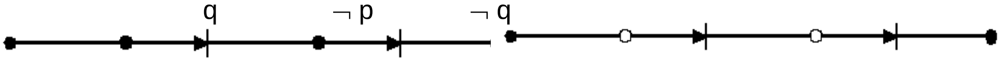


Se observa que este circuito admite poso de corriente cuando los dos (interruptores p y q están cerrados, en cualquier otro caso no hay paso de corriente. De aquí tenemos el comportamiento de la conjunción de las proposiciones $p \wedge q$. Por tanto:

a) $p \wedge q$: representa un circuito cerrado en serie, que deja posar corriente solo si losinterruptores p y q están cerrados a la vez. Diremos que solo en este estado $p \wedge q$ es verdadera.

b) $\neg p \wedge \neg q$: representa un circuito abierto en serie que deja pasar corriente. Diremos entonces que en este estado $\neg p \wedge \neg q$ es falsa.

p q $\neg p$ $\neg q$

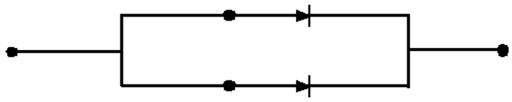


$p \wedge q$ $\neg p \wedge \neg q$

Circuitos en paralelo:

Consideremos ahora dos interruptores instalados en paralelo:

p



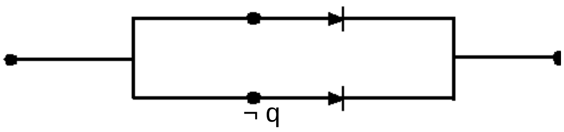
q

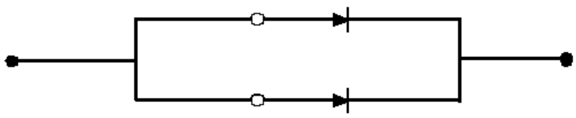
Se observa en el circuito que hay paso de corriente cuando uno de los interruptores o ambos están cerrados; no hay paso de corriente cuando los dos interruptores están abiertos. Tenemos, entonces, el comportamiento de la disyunción de las proposiciones p y q. La falsedad de $p \vee q$, es decir, el hecho de que no pase corriente, solo se verifica en el caso de la falsedad simultánea de $p \vee q$; Por tanto:

$p \vee q$: representa un circuito cerrado en paralelo que deja pasar corriente si por lo menos uno de los interruptores eléctricos está cerrado. Diremos que solo en esteestado $p \vee q$ es verdadero

b) $\neg p \vee \neg q$: representa un circuito abierto en paralelo que no deja pasar corriente, polo que en este estado $\neg p \vee \neg q$ es falsa.

p $\neg p$





q $\neg q$

$p \vee q$ $\neg p \vee \neg q$

Las representaciones anteriores nos permiten diseñar o simbolizar redes de circuitos eléctricos conectados en serie y en paralelo, o también simplificar circuitos muy complicados haciendo uso de las ya conocidas equivalencias notables.

Ejemplo:

Disertar circuitos lógicos de las siguientes proposiciones:

a) $(p \vee q) \wedge r$ b) $p \Rightarrow q$ c) $p \Leftrightarrow q$

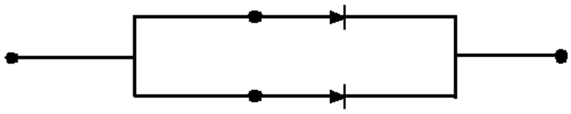
Solución:

a) Vemos que $(p \vee q) \wedge r$ es la conjunción de $p \vee q$ y r, que deben estar conectados en serie:

$p \vee q$ r

Pero, $p \vee q$ se representa por:(1)

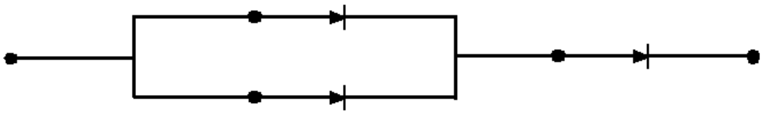
p



q

Luego sustituyendo en (1), tendremos la representación pedida, esto es:

p r

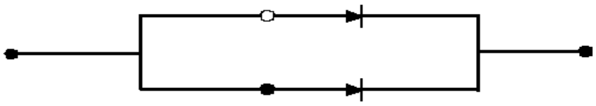


q

b) Según la condicional: $p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$

Luego, la representación de $p \Rightarrow q$, es la disyunción (conexión en paralelo) de $\neg p \vee q$. Esto es:

$\neg$ p



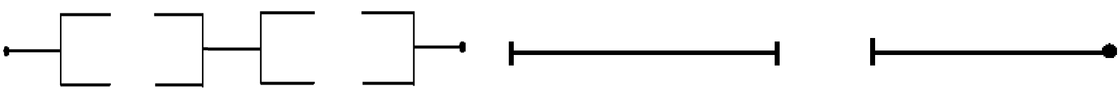
q

c) De la equivalencia: $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

$\equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$

Entonces, la representación de $p \Leftrightarrow q$ es conjunción (conexión en serie) de

$(\neg p \vee q)$ y $(\neg q \vee p)$, esto es:

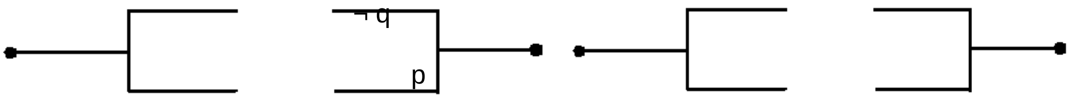


¬ p∨q¬ q∨p

Pero ¬p∨q y ¬ q ∨ p, se representan, respectivamente, por: (2)

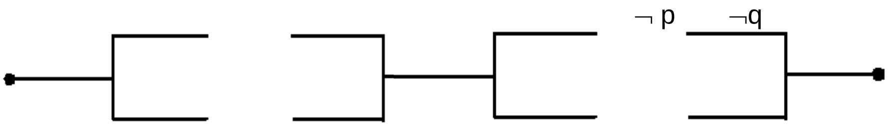
¬ p

q



Sustituyendo en (2) se tiene:

qp

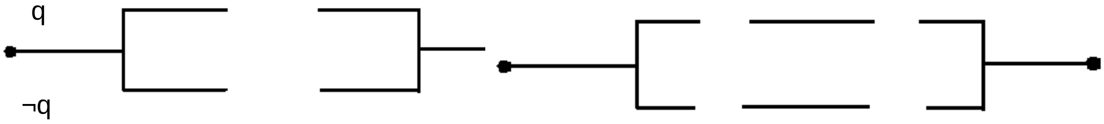


Pero, según la equivalencia:p ⇔ q ≡ (p ∧ q) ∨ (¬ p ∧¬ q)

Representando la disyunción de p ∧ q y ¬ p ∧¬ q, tendremos:

p∧q   p

¬ p ∧¬q   ¬ p



Los circuitos (3) y (4) son representaciones de p ⇔ q; se dice entonces que (3) y (4) son circuitos equivalentes.

Ejercicios:

¿Si el costo de cada llave de Instalación del circuito E de la figura adjunta es $10, cuánto se ahorraría si se reemplaza éste por un circuito lógico más simple equivalente?

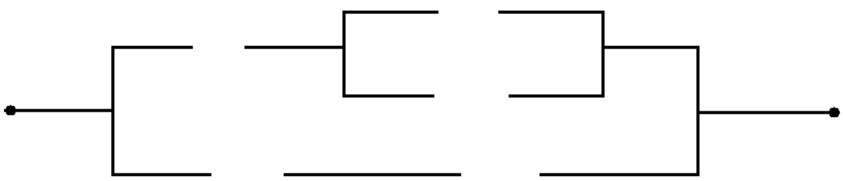
1. Describir simbólicamente el circuito:

r

p

¬ q

q   ¬ r

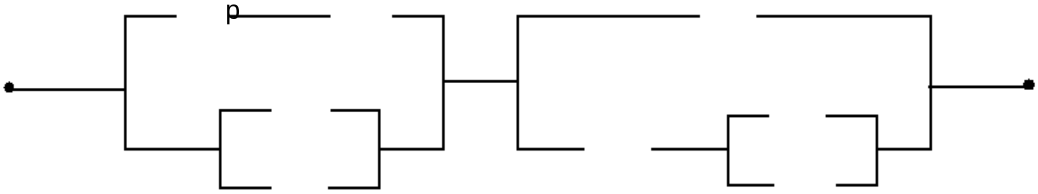


2.. Determinar el circuito equivalente al circuito:

¬ p ¬ q p

p ¬q
q

q¬ p



p

q

3. Construir el circuito lógico equivalente del esquema:

$$\left[(p \rightarrow q) \vee p\right] \wedge \left[(p \rightarrow q) \vee \neg p\right]$$

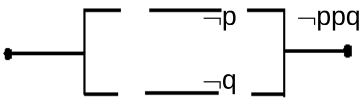
¬ p

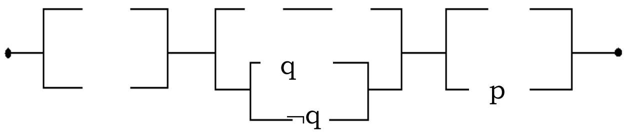
q

4. ¿La proposición p Δ q (Disyunción exclusiva) a cuáles de los siguientes circuitos esequivalente?

p ¬ q ¬p ¬ppq

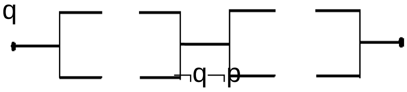
q¬p ¬q

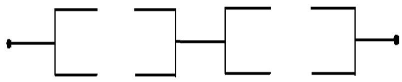




q¬p p q

p ¬ q ¬q¬p





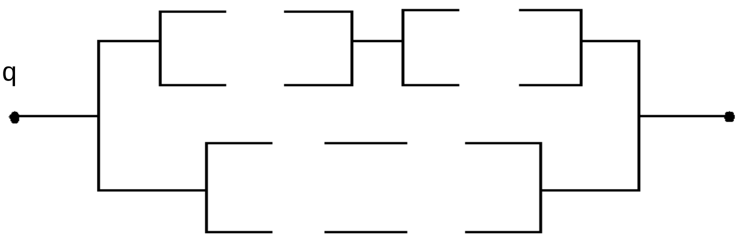
5.Qué representa el circuito equivalente a:

p ¬ p

q ¬ q

p q

¬ p ¬ q



6. Hallar la menor expresión que representa el circuito:

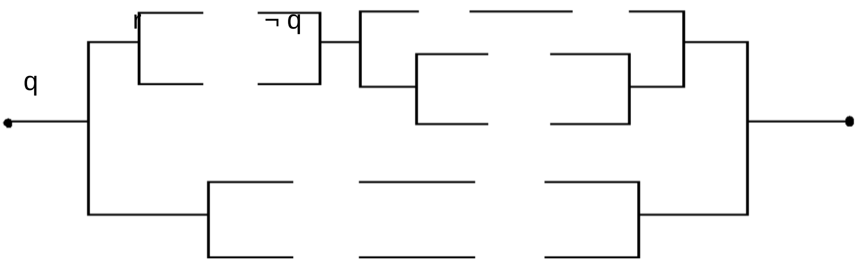
p r ¬ q

q q

¬ r

¬ r q

r ¬ q



7. Sea A el circuito lógico más simple correspondiente a la proposición:

$[(p \wedge q) \vee (p \wedge r)] \wedge [(p \wedge s) \vee (p \wedge \neg s)]$ y B el circuito lógico más simple equivalente a:

q ¬ p

¬ p q

Construir el circuito lógico correspondiente a: A ⇒B

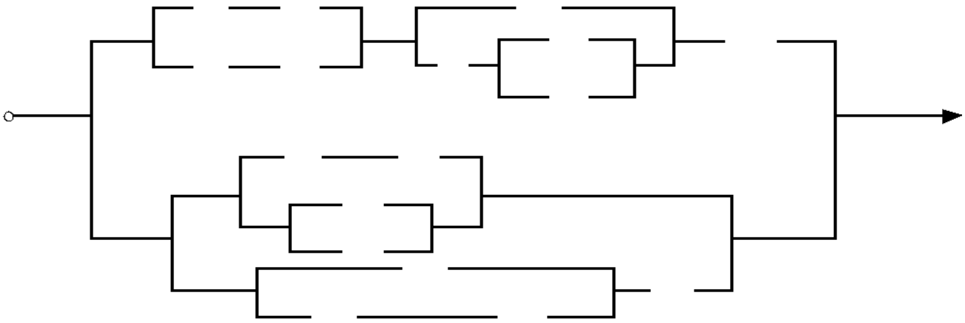
8. Hallar la proposición x de manera que sea una tautología el circuito simplificadosiguiente:

¬ p ¬ q p
¬ p ¬ q
pqq
¬q pq

p

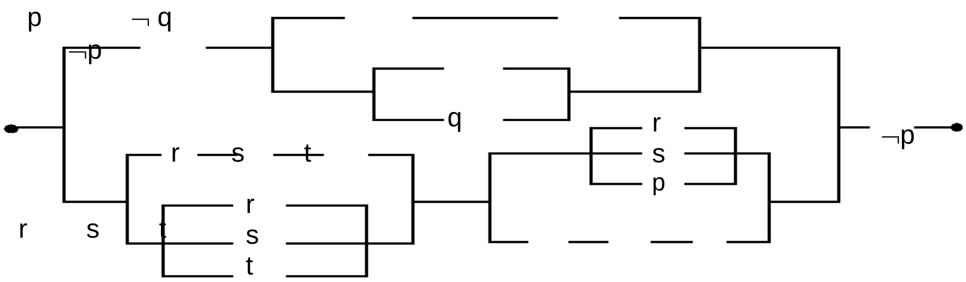
¬¬q

¬ p ¬ r



9. Construir el circuito lógico más simple equivalente a:

¬ p



CAPÍTULO II: TEORIA DE CONJUNTOS

SESIÓN 4

I.- TEORIA DE CONJUNTOS

NOCIÓN: Se entiende por conjunto, que se trata de una colección, agrupación o reunión de elementos de una misma especie.

DETERMINACIÓN DE UN CONJUNTO

Por comprensión o forma constructiva: Es cuando se enuncia una propiedad común, que reúne a todos los elementos con una misma condición.

Ejemplos.

$$A = \{x / x \in Z^+ \wedge 3 < x \leq 9\}$$

$$B = \{2x / x \in Z^+ \wedge 4 \leq x < 10\}$$

Por extensión o forma tabular: Es cuando se enuncia a todos y cada uno de los elementos que conforman el conjunto.

De los ejemplos anteriores

A = {4; 5; 6; 7; 8; 9}

B = { 8; 10; 12; 14; 16; 18}

RELACIONES ENTRE CONJUNTOS

Inclusión o (subconjunto)

Se dice que un conjunto A está incluido en otro conjunto B, si todo elemento del conjunto A es también elemento del conjunto B.

$$\boxed{A \subset B \leftrightarrow x \in A \rightarrow x \in B}$$

Ejemplo:

	A = {1; {2}; 3}	
$1 \in$ A	{1} $\subset$ A	{1; {2}} $\subset$ A
{2} $\in$ A	{{2}} $\subset$ A	

Conjuntos iguales

Dos conjuntos A y B son iguales cuando tienen los mismos elementos

$$\boxed{A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A}$$

Conjuntos comparables

Dos conjuntos A y B son comparables, cuando por lo menos uno de ellos se encuentra incluido en el otro.

$$\boxed{\text{Acomp.}\, B \Leftrightarrow ACB \vee BCA}$$

CONJUNTOS NOTABLES

Conjunto vació o nulo

Carece de elementos: Está incluido en todo conjunto

Notación:

$\boxed{\Phi \;;\; \{\}}$ (Cualquiera de las dos)

OBSERVACIÓN:

$$\boxed{\Phi \subset A;\ \forall A}$$

Conjunto universal (U)

Es aquel conjunto que reúne a todos los elementos de una misma especie, se usa para el estudio de una situación particular.

Conjunto unitario:

Llamado también singletón, es aquel que tiene un solo elemento

A = { 1} B = { Φ }   C = {2} D = {a}

Conjunto potencia [P(A)].

Conjunto formado por todos los subconjuntos del conjunto A. Su cantidad de elementos está dada por 2^n; donde n representa el número de elementos de A.

Por ejemplo: Sea el conjunto: A = {1; 2; 3}

n(A) = 3 (número de elementos del conjunto A)

(o también cardinal de A)

Luego: n[P(A)] = 2^3 = 8 es decir:P(A) = {{1}; {2}; {3}; {1;2}; {1;3}; {2;3}; {1; 2; 3}; Φ }

Conjunto producto cartesiano:

Conjunto formado por pares ordenados donde las primeras componentes son del primer conjunto y las segundas componentes, son del segundo conjunto.

Es decir:

A x B = {(x;y)/x $\in$ A $\wedge$ y $\in$ B}

Ejemplo: A = {a; b; c} B = {2;4}

AxB = {(a;2); (a; 4); (b; 2); (b; 4); (c; 2); (c; 4)}

Ejercicios

1.-Dado el conjunto $A = \{x \in Z^+ / 2x \leq 12\}$, ¿cuál de las siguientes relaciones es incorrecta si Z^+ es el conjunto de los enteros positivos?

A) 12 $\notin$ A   B) 10 $\in$ A   C) 8 $\notin$ AD) 2 $\in$ A   E) 5 $\in$ A

2.-Determinar la suma de los elementos de:B = {x $\in$ Z/ – 12<x+6<20}

A) 62   B) – 62   C) – 66D) 91   E) – 91

3.-Dado el conjunto: $B = \{x^2 / x \in N; x \leq 4\}$; calcular la suma de sus elementos

A) 10   B) 20   C) 25   D) 30   E) 32

4.-Dado: A = {2, {4, 5}, 4}, ¿qué afirmación es incorrecta?

A) 2 $\in$ A   B) {2} $\not\subset$ A   C) {4,5} $\in$ AD) 4 $\in$ A   E) 0 $\notin$ A

5.-Sabiendo que: A = {{4; 5}; {6; 7; 8}; {9}}; ¿cuántas de las siguientes afirmaciones son correctas?

{5} $\in$ A
{9} $\subset$ A
{5; 6} $\subset$ A
{{4; 5}} $\subset$ A

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

6.-Calcular la suma de los elementos de P en: $P = \{x^2 + 3 / x \in Z \wedge -2 \leq x < 4\}$

A) 7 B) 14 C) 19 D) 26 E) 37

7.- ¿Cuántos elementos tiene el conjunto A?A = {{3; 4; {5; 7; 8}}}

A) 5 B) 2 C) 3 D) 1 E) 0

8.-Dado el conjunto: $E = \{(x+5) / x \in Z \wedge -5 \leq x \leq 5\}$ ¿cuántos subconjuntos tiene E?

A) 32 B) 64 C) 1024 D) 2 048 E) 512

9.-Dado el conjunto A = $\{x \in N / 3x < 10\}$; ¿cuál de las siguientes relaciones es correcta si N es el conjunto de los números naturales?

A) – 2 $\in$ A B) 4 $\in$ AC) 2 $\notin$ A D) 0 $\in$ A E) 3 $\notin$ A

10.-¿Cuántos elementos tiene el conjunto A, sabiendo que tiene 480 subconjuntos más que el conjutno B, el cual posee 5 elementos?

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

11.-El conjunto A tiene 15 subconjuntos propios. Calcular el cardinal de A.

A) 1 B) 2 C) 4 D) 16 E) 24

12.-Si los conjuntos G = {2a; 6} y E= {4; 4b} son unitarios, ¿cuántos elementos tiene:
A = {3a – 1; 7b; 2a+1; ab; a+b}?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

13.-Si el siguiente conjunto es unitario: A = {a+b; b+c; a+c; 6}, calcular: $(a^2+b^3+c^4)$

A) 28 B) 72 C) 96 D) 258 E) 117

14.-Si: {(3^{a+2}; 83} = {3^{b+2}+2; 27} Hallar: a.b

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

15.-Calcular a^b si los conjuntos A y B son iguales A = {3a –8 ; 44}; B = 10;b^a – 20}

A) 36 B) 16 C) 64 D) 12 E) 18

16.-Calcular la suma de los elementos de R; si: $R = \{x^2 - x / x \in Z \wedge -3 < x < 3\}$

A) 8 B) 5 C) 6 D) 4 E) 10

17.- Dado el conjunto unitario:A = {a+b; a+2b –3; 12}; calcular: a^2+b^2

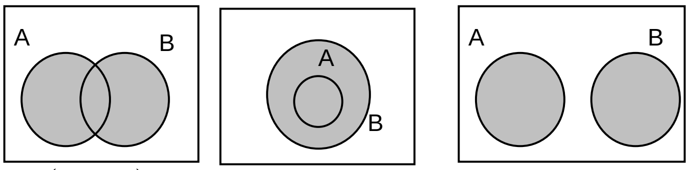
A) 80 B) 74 C) 104 D) 90 E) 39

18.-Determinar el cardinal de: $S = \{x+1 / \sqrt{\frac{3x-1}{2}} \in N \wedge x < 17\}$

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

II.- OPERACIONES ENTRE CONJUNTOS

Reunión o Unión ($\cup$): Resulta de la unión de los elementos de dos o más conjuntos $(A \cup B) = x / x \in A \ y / o \ x \in B\}$



$(A \cup B)$ $(A \cup B)$ $(A \cup B)$

PROPIEDADES

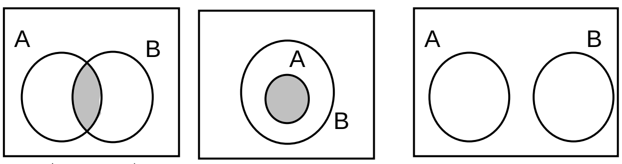
A $\cup$ A = A
A $\cup$ B = B $\cup$ A
A $\cup$ (B $\cup$ C) = (A $\cup$ B) $\cup$ C
A $\cup$ U =U
A $\cup$ Φ = A

Si A y B son conjuntos disjuntos: n(A $\cup$ B) = n(A) + n(B)

Para dos conjuntos A y B se cumple: n(A $\cup$ B) = n(A) + n(B) – n(A $\cap$ B)

Intersección ($\cap$): Resulta de aquellos elementos comunes a ambos conjuntos

$(A \cap B) = \{x / x \in A \wedge x \in B\}$

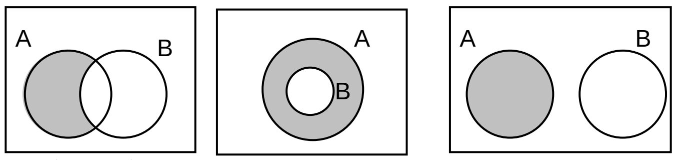


$(A \cap B)$ $(A \cap B) = A$ $(A \cup B) = \{ \ \}$

PROPIEDADES

A $\cap$ A = A
A $\cap$ B = B $\cap$ A
A $\cap$ (B $\cap$ C) = (A $\cap$ B) $\cap$ C
A $\cap$ U=A
A $\cap$ Φ = Φ
A $\cap$ B = Φ (Si A y B son disjuntos)
A $\cap$ (B $\cup$ C) = (A $\cap$ B) $\cup$ (A $\cap$ C)
A $\cup$ (B $\cap$ C) = (A $\cup$ B) $\cap$ (A $\cup$ C)

Diferencia: Resulta de aquellos elementos que pertenecen al conjunto A, pero no al Conjunto B
$(A-B)=\{x/x\in A\wedge x\notin B\}$



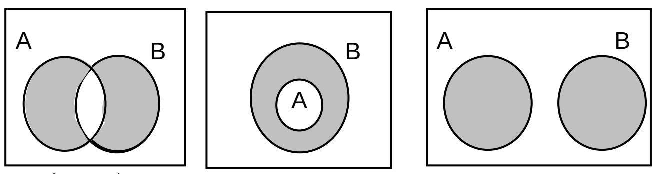
$(A-B)$ $(A-B)$ $(A-B)$

PROPIEDADES

A – A = Φ
A – Φ =A
A – B $\neq$ B – A

1. **Diferencia Simétrica (** Δ **):** Resulta de aquellos elementos que pertenecen al conjunto (A $\cup$ B) pero no al conjunto (A $\cap$ B)

$(A\Delta B)=\{x/x\in(A-B)\vee x\in(B-A)\}$
(A Δ B) = (A – B) $\cup$ (B – A)
(A Δ B) = (A $\cup$ B) –(A $\cap$ B)



$(A\Delta B)$ $(A\Delta B)$ $(A\Delta B)$

PROPIEDADES

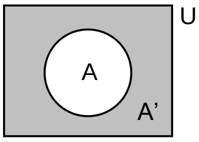
A Δ B = B Δ A
(A Δ B) Δ C = A Δ (B Δ C)
A Δ A = Φ
A Δ Φ = A
A Δ B = Φ $\Rightarrow$ A = B

2. Complementación: Son aquellos elementos que pertenecen al conjunto universal, pero no al conjunto A

NOTACIÓN:

A^C = A' = $\overline{A}$ es decir

$A^C = U - A = \{x / x \in U \wedge x \notin A\}$



PROPIEDAD

$A - B = A \cap B^C$ $\qquad$ $A \cap A' = \Phi$

$(A')' = A$ $\qquad$ $\Phi' = U$

$A' \cup A = U$ $\qquad$ $U^C = \Phi$

Ejercicios

01. En una ciudad a la cuarta parte de la población no le gusta la carne ni el pescado; a la 1/2 le gusta la carne y a los 5/12 le gusta el pescado. ¿Qué fracción de la población gusta carne y pescado?

A) 1/6 B) 5/6 C) 1/3 D) 1/12 E) 5/12

02. De una muestra recogida a 92 turistas, se determinó lo siguiente: 30 eran africanos; 40 europeos y 50 eran músicos. De estos últimos 24 eran africanos y 16 eran europeos. ¿Cuántos de los que no son europeos, no eran africanos, ni músicos?

A) 10 B) 12 C) 9 D) 11 E) 8

03. De 160 personas que gustan de los jugos de fresa; manzana y piña se sabe que 60 gustan de un jugo solamente; 70 gustan exactamente de 2 de estos jugos y 20 de otros pero no los mencionados ¿Cuántos gustan de los tres a la vez?

A) 10 B) 20 C) 30 D) 15 E) 25

04. En uno de los salones del ciclo anual respecto a los alumnos que lo conforman, se sabe que: a 20 varones no les gusta la cumbia; a 25 mujeres si les gusta dicho ritmo musical; a los varones que les agrada dicho género son 30 y son a su vez el doble de las mujeres a las que no les gusta.
¿Cuántos son en el salón?

A) 70 B) 80 C) 60 D) 100 E) 90

05. De 60 estudiantes en un instituto de idiomas 20 estudian sólo inglés; 10 estudian inglés y francés; 25 estudian francés solamente. ¿Cuántos estudian otros idiomas, pero no los mencionados?

A) 7 B) 5 C) 6 D) 10 E) 12

06. De un grupo de 60 personas se sabe que 25 de ellas no estudian ni trabajan; 20 personas estudian y 9 personas estudian y trabajan. ¿Cuántas de ellas realizan sólo una de las dos actividades?

A) 32 B) 28 C) 24 D) 30 E) 26

07. De 32 personas se conoce:

* 4 mujeres tienen 16 años
* 12 mujeres no tienen 17 años
* 14 mujeres no tienen 16 años
* 9 varones no tienen 16 ni 17 años

¿Cuántos varones tienen 17 ó 16 años?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 4 E) 8

08. De 180 alumnos que les gustan los cursos de Aritmética: Álgebra y Física. Se supo que 34 gustan Aritmética pero no de Álgebra; 18 gustan de Álgebra pero no de Física; 56 gustan de Física pero no de Aritmética. ¿A cuántos le gusta los tres cursos mencionados?

A) 92 B) 82 C) 72 D) 62 E) 64

09. En el primer día de visita a la muñeca gigante “Camila” asistieron 200 niños peruanos; 150 adultos extranjeros; 250 niños extranjeros; 100 ancianos peruanos; los adultos peruanos son el doble de los niños peruanos y los ancianos extranjeros son el triple de los ancianos peruanos. Si son todos los asistentes. ¿cuántos fueron?

A) 1 200 B) 1 300 C) 1 400 D) 1 100E)1 500

10. En un salón de clase de 65 alumnos se observó:

* 30 son hombres
* 40 son del ciclo semestral
* Hay 10 mujeres que no son del ciclo semestral.

¿Cuántos hombres no estudian en el ciclo semestral?

A) 10 B) 15 C) 20 D) 25 E) 40

11. De un grupo de 55 personas; 25 hablan inglés; 32 hablan francés; 33 hablan alemán y 5 los tres idiomas. ¿Cuántas personas del grupo hablan sólo dos idiomas, si todos hablan al menos uno de los idiomas mencionados?

A) 20 B) 25 C) 30 D) 22 E) 27

12. De una muestra recogida a 200 transeúntes se determinó que:
60 eran mudos; 70 eran cantantes callejeros y 90 eran ciegos. De estos últimos 20 eran mudos y 30 eran cantantes. ¿Cuántos de los que no son cantantes callejeros no eran mudos ni ciegos?

A) 22 B) 24 C) 28 D) 26 E) 30

13. De un grupo de deportistas se sabe que todos los que practican tenis practican fútbol; pero no todos los que practican básket practican fútbol. Solamente fútbol practican 20; tenis y fútbol pero no básket son 10; 30 tenis y básket; 10 básket y fútbol pero no tenis; 40 sólo básket y 50 otros deportes pero no los mencionados. ¿Cuántos son los componentes de dicho grupo?

A) 170 B) 180 C) 200 D) 160 E) 190

14. En el primer día de visita a la muñeca gigante “Camila” asistieron 200 niños peruanos; 150 adultos extranjeros; 250 niños extranjeros; 100 ancianos peruanos; los adultos peruanos son el doble de los niños peruanos y los ancianos extranjeros son el triple de los ancianos peruanos. Si son todos los asistentes. ¿Cuántos fueron?

A) 1 200 B) 1 300 C) 1 400 D) 1 100 E) 1 500

15. De 32 personas se conoce :
* 4 mujeres tienen 16 años
* 12 mujeres no tienen 17 años
* 14 mujeres no tienen 16 años
* 9 varones no tienen 16 ni 17 años

¿Cuántos varones tienen 17 ó 18 años?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 4 E) 8

16. De 180 alumnos que les gustan los cursos de Aritmética; Álgebra y Física, se supo que 34 gustan Aritmética pero no de Álgebra; 18 gustan de Álgebra pero no de Física; 56 gustan de Física pero no de Aritmética. ¿A cuántos les gusta los tres cursos mencionados?

A) 92 B) 82 C) 72 D) 62 E) 64

17. De 60 estudiantes en un instituto de idiomas 20 estudian sólo inglés; 10 estudian inglés y francés; 25 estudian francés solamente. ¿Cuántos estudian otros idiomas, pero no los mencionados?

A) 7 B) 5 C) 6 D) 10 E) 12

18. En una ciudad a la cuarta parte de la población no le gusta la carne ni el pescado; a la 1/2 le gusta la carne y a los 5/12 le gusta de pescado. ¿Qué fracción de la población gusta carne y pescado?

A) 1/6 B) 5/6 C) 1/3 D) 1/12 E) 5/12

19. De una muestra recogida a 200 transeúntes se determinó que :60 eran mudos; 70 eran cantantes callejeros y 90 eran ciegos. De éstos últimos 20 eran mudos y 30 eran cantantes. ¿Cuántos de los que no son cantantes callejeros no eran mudos ni ciegos?

A) 22 B) 24 C) 28 D) 26 E) 30

20. En un salón de clase de 65 alumnos se observó:
* 30 son hombres
* 40 son del ciclo semestral
* Hay 10 mujeres que no son del ciclo semestral.

¿Cuántos hombres no estudian en el ciclo semestral?

A) 10 B) 15 C) 20 D) 25 E) 40

21. De un grupo de 55 personas; 25 hablan inglés; 32 hablan francés; 33 hablan alemán y 5 los tres idiomas. ¿Cuántas personas del grupo hablan sólo dos idiomas, si todos hablan al menos uno de los idiomas mencionados?

A) 20 B) 25 C) 30 D) 22 E) 27

CAPÍTULO III: PROPORCIONALIDAD

SESIÓN 5

I.- PROPORCIONALIDAD

INTRODUCCIÓN
Tanto en la vida diaria como en las operaciones comerciales es necesario comparar cosas, ya que algunos enunciados que involucran números, tienen un significado muy restringido si no se comparan con otros o con otras cantidades.

Ejemplo:

Que a un inversionista le pagan medio millón de dólares por concepto de intereses que ha ganado su inversión a plazo fijo, y que otro ha ganado $550 mil pesos por su inversión en casa de bolsa, no puede decirse cuál de los dos resultó mayormente beneficiado porque se tendría que conocerse el capital que cada uno tiene invertido aún en el supuesto de que en los dos casos, el plazo de la inversión sea el mismo.

RAZÓN

Razón o relación de dos cantidades es el resultado de comparar dos cantidades. Dos cantidades pueden compararse de dos maneras: Hallando en cuánto excede una la otra, es decir, restándolas, o hallando cuántas veces contiene una a la otra, es decir, dividiéndolas. De aquí que haya dos clases de razones: razón aritmética o por diferencia y razón geométrica o por cociente.
En este curso nos centraremos en la razón geométrica, es decir, en la comparación por cociente.

Ejemplo:

Alejandro que está en el ciclo alfa de la UCV, LLEVA precalculo, ha realizado 15 exámenes, de éstos aprobó 12. Esto nos indica lo siguiente:
Reprobó 3 exámenes
Los exámenes aprobados representan $12/15 = 4/5 = 0.80$, o sea 80% del total de exámenes presentados *.
Los exámenes reprobados representan $3/5 = 1/5 = 0.20$, o sea 20% del total de exámenes presentados *

Ejercicios resueltos: Interpreta los siguientes enunciados. Realiza razones geométricas.

Adriana en este inicio de semestre gastó $600 soles en papelería (cuadernos, plástico para forrar, tijeras, plumas, lapiceros, etc.), mientras que Marco gastó $450 pesos por el mismo concepto.
$R = \frac{600}{450} = 1{,}33$ es decir, el valor que canceló Adriana es 1,33 veces mayor que el que canceló Marco.

El matrimonio Sánchez Aguilar tiene 3 hijos: 2 niños y una niña. Mientras que el matrimonio Guerrero Fontes tiene 4 hijos: 3 niñas y 1 niño.

$R(niños) = \frac{2}{1} = 2$ Por cada 2 niños que tiene la familia Sánchez, la familia Guerrero tiene 1 niño

$R(niñas) = \frac{1}{3}$ Por cada 1 niña que tiene el primer matrimonio, el segundo tiene 3 (no tiene sentido realizar la división ya que estamos hablando de cantidad de personas)

RAZÓN: Resultado de comparar dos cantidades, por diferencia o por división.

A – B = K Razón

Antecedente Consecuente

Razón Aritmética: Cuando su comparación es por medio de la sustracción.

Ejemplos:

La razón aritmética de 12 y 3 es 9 porque: 12 – 3 = 9

La razón aritmética de 8 y 2 es……………porque:…………………..

1.2. Razón Geométrica.- Cuando su comparación se realiza por medio de la división o cociente.

$$\frac{A}{B} = K \longrightarrow \text{Razón}$$

Antecedente Consecuente

Ejercicios propuestos

“La taza”

Una taza llena al ras contiene 150g de harina y tiene 240g de azúcar.

¿Cuál es la razón entre la cantidad de harina y azúcar que puede contener la taza?

¿Cuál es la razón entre la cantidad de harina y azúcar que pueden contener 2 tazas? Y tres tazas?

“Los chocolates”

Romina compró 4 chocolates en $1200, si Julio compró 5 de los mismos chocolates

¿Cuánto pagó por ellos?

¿Qué relaciones encontraste?

¿Cómo resolviste el problema?

“La receta para el panadero”

La mamá de Pedro acostumbra a preparar 5 panecillos dulces con 1/2 kilo de harina, para la once familiar de cada día domingo. El panadero del barrio pidió la receta a la mamá de Pedro para elaborar sus panecillos y ofrecerlos a su clientela.

La demanda semanal por los panecillos obedeció a la siguiente tabla

Día	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Doming
Demanda	10	20	25	25	30	40	55

¿Qué cantidad de harina usó el panadero cada día?

¿Cuánta harina ocupó en la semana?

Observaciones:

Se acostumbra llamar al primer término de la razón como antecedente, al segundo término como consecuente y al resultado de la división entre antecedente y consecuente como valor de la razón.

En una fracción numerador y denominador son números enteros, en cambio en una razón antecedente y consecuente no necesariamente con números enteros.

PROPORCIONES

Una PROPORCIÓN es una igualdad entre dos razones. Si las razones son a:b y c:d que forman una proporción, entonces se escribe esta proporción como

a : b = c : d ó $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ Que se lee **" a**es a**b** como **c** es a **d"**

A los números **a** y **d** se les llama**extremos** y a los números **b** y **c** se les llama **medios**

Teorema fundamental de las Proporciones:

En una proporción se cumple SIEMPRE que el producto de los extremos es igual al de los medios.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow ad = bc$$

PROPIEDADES DE LAS PROPORCIONES: Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces:

a) Alternar Extremos: $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$

b) Alternar Medios: $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

b) Permutar:
$\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$

d) Invertir:

$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$

e) Componer respecto al Antecedente y Consecuente respectivamente:

$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ $\frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}$

Descomponer respecto al Antecedente y Consecuente respectivamente:

$\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ $\frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c}$

f) Componer y descomponer a la vez:
$\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$

i) Serie de Razones:
$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = ... = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{a+c+e+.....}{b+d+f+.....} = \frac{x}{y}$

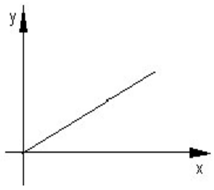
Cuando aplicamos proporciones a la solución de problemas observamos que la relación entre dos cantidades variables producen una de dos tipos de proporciones: directa o inversa.

PROPORCIÓN DIRECTA.- Una relación directamente proporcional es aquella que a mayor cantidad de una variable, mayor cantidad de la otra, lo que es equivalente a menor cantidad de una, menor la cantidad de la otra.

Por ejemplo:
Mientras más pan compro, más dinero pago por él.
Mientras menos estudio, menos aprendo.

Dos variables están en proporcionalidad directa si su cociente permanece constante:

$\boxed{x \text{ e } y \text{ están en proporcionalidad directa} \Leftrightarrow \frac{x}{y} = k}$



k se denomina la constante de proporcionalidad.

El gráfico de dos variables que están en proporcionalidad directa es un conjunto de puntos que están sobre una recta que pasa por el origen.

Ejemplos: Un vehículo tiene en carretera un rendimiento de 16 km/l. ¿Cuántos litros de bencina consumirá en un viaje de 192 km?

Como estas variables se relacionan en forma directa (ya que más kilometraje implica que se gastará más bencina), entonces su cociente es constante.

$$\frac{16\ km}{192\ km} = \frac{1\ litro}{x} \Rightarrow 16 * x = 192 * 1 \Rightarrow x = \frac{192}{16} = 12$$

Respuesta: en un viaje de 192 kilómetros el vehículo consumirá 12 litros de bencina.

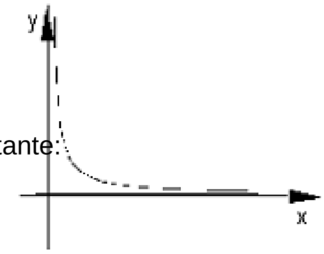
Una bandeja de 30 huevos cuesta $2.500 . ¿Cuánto costará una docena?

$$\frac{30}{12}=\frac{2.500}{x}\Rightarrow x=\frac{12*2.500}{30}=1.000$$

Respuesta: Una docena de huevos cuesta $1.000 .

Sin embargo, hay situaciones que no guardan una proporción directa. Por ejemplo, en un centro de reproducción fotostática a mayor número de fotocopiadoras menor el tiempo que tomará para fotocopiar, o en una construcción es de esperar que a menor el número de trabajadores mayor el tiempo que tomará completarla. Este tipo de **relación entre variables establece una proporción inversa**.

PROPORCIÓN INVERSA Las proporciones inversas se caracterizan porque al disminuir una variable, la otra aumenta.
Por ejemplo:
Mientras más rápido viajo, menos tiempo me demoro.
Mientras menos contamino el aire, más limpio estará.



Dos variables están en proporcionalidad inversa si su producto permanece constante:

$$\boxed{x \text{ e } y \text{ están en proporcionalidad inversa} \Leftrightarrow x\cdot y=k}$$

k se denomina la constante de proporcionalidad.

El gráfico de dos variables que están en proporcionalidad inversa es un conjunto de puntos que están sobre una hipérbola.

Ejemplos: Tres obreros demoran 5 días en hacer una zanja. ¿Cuánto demorarán 4 obreros?
Por estar en proporcionalidad inversa (ya que más obreros tardaran menos tiempo en hacer la zanja) el producto entre las variables: número de obreros – tiempo, es constante (por esto debo tener que 3 * 5 es constante y para eso se invierten las variables completas):

Nº obreros	días
3	5
4	x

Si hay **mayor** cantidad de obreros se morarán **menos** días en hacer el trabajo. Al ser proporción inversa invertimos el segundo término (el que no tiene incógnita)

$$\frac{3\text{ obreros}}{4\text{ obreros}}=\frac{5\text{ días}}{x\text{ días}}\Rightarrow \text{P.I}\Rightarrow\frac{4\text{ obreros}}{3\text{ obreros}}=\frac{5\text{ días}}{x\text{ días}}\Rightarrow x=\frac{5*3}{4}=3{,}75$$

Respuesta: Se demoran aproximadamente 4 días en terminar la obra los 4 obreros (o demoran 3 días y 18 horas)

PROPORCIÓN COMPUESTA.- En la proporcionalidad compuesta hay variables que se relacionan mediante proporcionalidad directa y otras a través de proporcionalidad inversa. Para resolver los ejercicios de este tema, en primer lugar se debe dilucidar qué tipo de proporcionalidad existe entre cada par de variables.

Ejemplos:

1.- Se necesitan 20 obreros para pavimentar 2 km de camino en 5 días. ¿Cuántos obreros se necesitan para pavimentar 5 km en 10 días?

$$\frac{20}{x} = \frac{2*10}{5*5} \Rightarrow \frac{20}{x} = \frac{20}{25} \Rightarrow 20*25 = x*20 \Rightarrow \frac{500}{20} = x \Rightarrow 25 = x$$

Respuesta: Se necesitan 25 obreros para pavimentar 5 km en 10 días.

2.- En construirun puente, trabajan 4 ingenieros con una carga de 6 horas diarias durante 5 días, han realizado 240 m. ¿Cuántos días necesitarán trabajar 3 ingenieros si trabajan 8 horas diarias para realizar 300 m?

Datos:
4 ingenieros, 6 horas diarias, 240 m, 5 días
Pregunta: 3 ingenieros, 8 horas diarias, 300 m, x días.

Se relaciona cada variable con la incógnita:

ingenieros- días: más ingenieros trabajando se demoran menos días: proporción inversa. $\frac{3}{4} = \frac{5}{x}$

Horas – días: más horas trabajando se demoran menos días: proporción inversa. $\frac{8}{6} = \frac{5}{x}$

Casos – días: más metros se demoran mas días: proporción directa: $\frac{240}{300} = \frac{5}{x}$

Finalmente: $\frac{5}{x} = \frac{3}{4} * \frac{8}{6} * \frac{240}{300} \Rightarrow \frac{5}{x} = \frac{5760}{7200} \Rightarrow 5*7200 = 5760*x \Rightarrow x = 6{,}25$

Respuesta: se demoran 6 días y 6 horas (un cuarto de día) los tres ingenieros trabajando 8 horas diarias en resolver los 300 m.

Ejercicios

1.-Un padre tiene 42 años y su hijo 18 años. ¿En qué razón están las edades del hijo y del padre?

2.-Las masas de dos personas están en la razón 2: 3. Si una de ellas tiene 23 kilogramos más de masa que la otra, ¿cuál es la masa de la más liviana?

3.-Dos ángulos suplementarios están en la razón 3: 5. ¿Cuál es la diferencia positiva entre sus medidas?

4.-Un kilógramo de una cierta clase de queso cuesta $3.600. ¿Cuánto se debe pagar por 125 gramos de este queso?

5.-En un mapa a centímetros corresponden a 3.000 metros. ¿A cuántos metros corresponden b centímetros del mapa?

6.-En un liceo mixto de 1540 alumnos, 880 son varones. ¿Cuál es la razón entre el número de damas y el de varones?

7.-Dos números enteros están en la razón 2: 7. Si la suma de ellos es -36, ¿cuáles son los números?

8.-Sean a, b y c números enteros tales que c es la quinta parte de a y a es el doble de b. ¿Cuál es la relación correcta entre b y c?

9.-En un estante, los tarros de salsa de tomate con champiñones y los de salsa de tomate con carne están en la razón 9: 10. Si se retiran del estante 38 tarros de salsa con carne, la razón se invierte. Entonces, los tarros de salsa de tomate con carne que había en el estante, antes del retiro, ¿cuántos eran?

10.-¿Qué número debe restarse de 9 y al mismo tiempo sumarse a 5, para obtener dos números que estén en la razón 3: 4?

11.-Elisa y Alvarito tienen estampillas cuyas cantidades se encuentran en la razón a: b. Si Alvarito tiene 15 estampillas más de las que tiene Elisa, y esta tiene a estampillas, entonces ¿cuál es la cantidad de estampillas que tiene Alvarito?

12.-Un pintor emplea 8 horas en pintar una habitación. ¿Cuánto tiempo emplearán 2 pintores?

13.-Un curso de 36 estudiantes va de paseo a la playa y antes de ir deciden recoger la basura. Si 9 estudiantes limpian la playa en 2 horas, ¿cuánto demorarían si cooperara en esta tarea todo el curso?

14.-Transportar 4 toneladas a 250 km de distancia cuesta $72.000. ¿Cuánto costaría transportar 10 toneladas a doble de distancia?

Propiedad fundamental:

"En toda proporción geométrica el producto de los extremos es igual al producto de los medios".

$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ entonces A x D = B x C

A.- Hallar el término desconocido (x):

1. $\frac{4}{5} = \frac{x}{10}$ **6.** $\frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{x}$

2. $\frac{x}{3} = \frac{5}{15}$ **7.** $\frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{x}{2\sqrt{5}}$

3. $\frac{2}{x} = \frac{6}{9}$ **8.** $\frac{(1-1/5)^2}{\frac{2}{5}} = \frac{0,4}{x}$

4. $\frac{3}{5} = \frac{6}{x}$ **9.** $\frac{4}{x} = \frac{8}{\frac{2}{4}}$

5. $\frac{x}{\frac{5}{4}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{12}}$ **10.** $\frac{\frac{4}{5}}{\frac{3\sqrt{5}}{4}} = \frac{\frac{3\sqrt{5}}{4}}{x}$

11.-Sabemos que a = 12; b = 4x; c = 5a – 6 y d = 20x – 18. Hallar el valor de x si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

A) 7 B) 9 C) 8 D) 10 E) 6

12.-Si la relación entre dos números es como 5 es a 3, calcular el valor del mayor, sabiendo que su suma es igual a 40.

A) 10 B) 15 C) 20 D) 25 E) 30

13.-La suma de dos números es 27. Si su razón aritmética es 11, el número menor es:

A) 8 B) 7 C) 4 D) 5 E) 2

14.- El consecuente de una razón geométrica es 6; si sumamos 6 a ambos términos de la razón, ésta es igual a la anterior más 1/3. Hallar el antecedente de dicha razón.

A) 8 B) 6 C) 4 D) –2 E) –3

15.-Carla tiene 49 años y Sandra 13. ¿En cuántos años más la relación entre las edades será de 16 a 7?

A) 10 B) 15 C) 12 D) 16 E) 20

16.-La suma de los términos de una razón geométrica es 80. Calcula su diferencia si la razón es 2,333….

A) 25 B) 30 C) 34 D) 26 E) 32

17.-Dos números cuya suma es 120 están en una relación de 3 a 5. Hallar la diferencia de dichos números.

A) 42 B) 54 C) 66 D) 72 E) 78

18.- Si $\frac{A}{B}=\frac{15}{11}\ y\ A-B=60$. Hallar A.

A) 224 B) 225 C) 215 D) 220 E) 235

19.-Si $\frac{A}{B}=\frac{3}{11}\ y\ A+B=210$. Hallar A.B

A) 7925 B) 7835 C) 7415 D) 7425 E) 7325

20.- Un número excede a otro en 91; si ambos están en una relación de 6 a 13; hallar el número mayor.

A) 184 B) 182 C) 186 D) 169 E) 172

21.- A una fiesta asisten 180 personas entre hombres y mujeres. Por cada 4 mujeres hay 5 hombres. Si se retiran 20 parejas, ¿cuál es la razón entre el número de mujeres y número de hombres que quedan en la fiesta?

A) 3/2 B) 4/5 C) 3/4 D) 7/8 E) 1

22.- En una serie de cuatro razones geométricas equivalentes la suma de los antecedentes es 87. Si los consecuentes son: 4; 5; 8 y 12. Hallar el mayor antecedente.

A) 24 B) 36 C) 48 D) 60 E) 72

23.- El número de niños y niñas en una fiesta infantil está en la relación de 2 a 3, pero si se aumentan 9 parejas, entonces el número de niños y niñas estarían en la relación de 3 a 4. Hallar el número de niños.

A) 27 B) 36 C) 18 D) 54 E) 30

24.- Se tienen 200 fichas de las cuales 60 son negras y las restantes son blancas ¿Cuántas blancas se debe quitar para que por 2 fichas blancas hayan 3 fichas negras?
A) 100 B) 120 C) 140 D) 60 E) 30

25.- La suma y la diferencia de dos números están en la misma relación que los números 153 y 63. Hallar la razón de los números.

A) 5:17 B) 5:12 C) 3:11 D) 3:17 E) 8:15

26. En un terreno, el área construida es de 120 metros cuadrados y el área libre es de 80 metros cuadrados. ¿Cuál es la razón entre el área construida y el área del terreno total?

27. Tres metros de género valen $ 800. ¿Cuánto valen ocho metros del mismo género?

28. Una moto recorre 120 metros en 4 segundos. ¿Qué distancia recorre en 52 segundos, si mantiene su rapidez constante?

29. Seis operarios cavan en 1 día una zanja de 80 metros de longitud. ¿Cuántos metros cavarán, en un día, 42 operarios trabajando las mismas condiciones?

30. Teresa trabajó 3 horas y ganó $ 8.100. A esa razón, ¿cuánto tiempo le tomará ganar $ 27.000?

31. Si 25 telares producen cierta cantidad de tela en 120 horas. ¿Cuántas horas demoran 60 telares iguales en producir la misma cantidad de tela?

32. La rapidez de un automóvil es de 70 km/hrs y demora 5 horas en recorrer una cierta distancia. ¿Cuántas horas demorará, en recorrer la misma distancia, otro automóvil con una rapidez de 80 km/hrs?

33. 18 operarios se demoran 12 días en realizar un determinado servicio. ¿Cuántos días se demoran 24 trabajadores en realizar el mismo servicio?

34. El año pasado se limpió un canal en 28 días con 60 hombres. Este año se quiere efectuar el mismo trabajo en sólo 14 días. ¿Cuántos hombres hay que contratar?

35. En un estanque de cultivo de lenguado se necesita tener una densidad de 3 peces por litro. Si el estanque tiene una capacidad de 500 litros. Calcular cuántos lenguados se deben cultivar.

36. 6 obreros hacen una zanja de 20 metros de longitud. ¿Cuántos metros hacen, en el mismo tiempo, 42 obreros en las mismas condiciones?

37. Los 2/5 de capacidad de un estanque son 500 litros. ¿Cuál es la capacidad de los 3/8 del mismo estanque?.

38. 5 metros de una plancha de zinc de 2 metros de ancho vale $ 6.000, ¿Cuánto valen 4 metros de la misma plancha de zinc, pero de 3 metros de ancho?

39. Juan gana un sueldo base de $ 164.000. La empresa en la que trabaja estimula a sus trabajadores multiplicando el sueldo base por una constante. Juan recibió $ 213.200. ¿Cuál es la constante de estímulo?, ¿Cuánto debe recibir Pedro cuyo sueldo base es de $ 175.000?

40. Un obrero hace un trabajo en 28 días con jornada normal de trabajo (8 hrs.). ¿Cuántas horas diarias deberá trabajar , si debe hacer el mismo trabajo en 16 días?

41. 4 hombres deben hacer una obra en 12 días. ¿En cuántos días podrían hacer la obra 6 hombres?

42. Para reunir un capital 6 socios, aportan $ 200.000 cada uno. ¿Cuánto deben aportar 15 socios para reunir el mismo capital?

43. Durante un año determinado. Las exportaciones de harina de pescado de dos pesqueras es en total 320.000 toneladas, las cuales están en la razón de 13: 7 ¿Cuántas toneladas exporta cada una de ellas respectivamente?

44. En un sector de una pesquera se trabaja desde las 8:00 hrs. hasta las 20:00 hrs. El proceso para maximizar la producción es el siguiente: $\frac{1}{3}$ del tiempo se destina a reparar motores. $\frac{1}{4}$ de la jornada, para reparación de otrosinstrumentos. $\frac{1}{2}$ del tiempo que se ocupa para la reparación de motores, se utiliza para construir accesorios. $\frac{1}{3}$ del tiempo destinado a reparación de otrosinstrumentos, se utiliza para afinar detalles. $\frac{1}{2}$ del tiempo utilizado para los accesorios se destina para almorzar. El resto de la jornada se destina para actividades recreativas. ¿ Cuántas horas se destinan a cada actividad respectivamente?

II.-REGLA DE TRES

REGLA DE TRES SIMPLE DIRECTA

Observemos el siguiente ejemplo:

# obreros	Obras
a	120
+	+
(a + 5)	100

Luego: $\frac{a}{a+5} = \frac{3}{4}$

$4a = 3a + 15 \quad \therefore \quad a = 15$

EJERCICIOS RESUELTOS

Un depósito lleno de gasolina cuesta S/. 275. Si se saca de el 85 ya no cuesta más S/. 150. ¿Cuántos litros contenía el depósito?

Sol:

¡UBIQUEMOS LAS MAGNITUDES!

Costo   Litros

150   (   )   x   (   )

Formemos la proporción geométrica.

$$\frac{275}{150} = \frac{x}{x-85}$$

x =

REGLA DE TRES SIMPLE INVERSA

Veamos el siguiente ejemplo:

# obreros	Obras
x	20
(x + 6)	15

+   -

Son inversamente proporcional

Luego:

x . 20 = (x + 6)

20 x =   + 90

x =

Otro ejemplo:

Un barco tiene víveres para 22 días si lleva 69 tripulantes diga cuanto puede dura un viaje de 33 tripulantes.

1º Ubiquemos las magnitudes.

2º Analicemos dichas magnitudes.

\# tripulantes   # días

69	22	-	+
33	x		

Luego:

$x = \dfrac{\ \ .22}{33}$ $\boxed{}$

$x = \boxed{\ \ \boxed{}\ \ }$

Según el siguiente esquema. Marque si es D.P. o I.P. según convenga.

Mag. A	Mag. B		
a	c	+	-
b	x		

a) D.P. b) I.P.

Coloca D.P. ó I.P. según sea el caso.

Mag. A	Mag. B		
x	z	-	-
y	w		

a) D.P. b) I.P.

Ejercicios

1.- En una panadería han pagado 42 € por 70 barras de pan. ¿ Cuánto tendrían que haber pagado si hubiesen comprado 85 barras?

Barras de pan		
Euros		

2.- Si 3 dólares son 4 € ¿ Cuántos euros son 4,5 dólares?

Dólares		
Euros		

3.- Si una persona recorre 20 km. en 40 minutos en bicicleta, ¿cuánto recorrerá en 1 hora (60 minutos)?

Kilómetro		
Tiempo		

4.- Si el AVE tarda 2 horas en llegar desde Madrid a Córdoba, que distan 400 kilómetros, cuánto recorrerá en 3 horas?

Kilómetro		
Tiempo		

5.- Un paquete de 5 chicles cuesta 0,75 €. ¿Cuánto cuestan 3 paquetes? ¿Cuántos paquetes te puedes comprar con 3 €?

Paquetes		
Euros		

6.- Un grupo de excursionistas tenían víveres para 24 días. Si cuatro de ellos no pueden realizar la excursión entonces los víveres alcanzaran para seis días más. ¿Cuántas personas realizarán la excursión?

a) 20 b) 16 c) 14 d) 12 e) 98

7.- Si 135 obreros construyen 30 metros de pista, 63 obreros, ¿Cuántos metros construirán en igual tiempo?

a) 30 b) 50 c) 60 d) 75 e) 76

8.-Si 8 chocolates cuestan 145. ¿Cuál será el precio de 6 docenas de ellos?

a) 1300 b) 1450 c) 1305 d) 1500 e) 45

9.- 24 carpinteros hacen una casa en 30 días el triple de carpinteros. ¿Qué tiempo tomarán para hacer la misma obra?

a) 30 b) 20 c) 10 d) 5 e) 40

10.- Para sembrar un terreno cuadrado de 20 m. de lado un peón cobra 200 soles. ¿Cuánto cobrará por sembrar otro terreno cuadrado de 12m de lado?

a) 108 b) 109 c) 110 d) 111 e) 107

11.- Si un tornillo cuando da 40 vueltas penetra 8 mm en una madera. ¿Cuántas vueltas más debe dar para que penetre 50 mm?

a) 200 b) 250 c) 120 d) 210 e) 65

12.-Un grupo de 24 náufragos llegan a una isla y tienen víveres para 40 días. Si luego de 13 días seis náufragos fallece, ¿Cuántos días más podrán durar los víveres para los restantes?

a) 5 b) 6 c) 7 d) 8 e) 9

13.- Un buey atado a una cuerda de 2,5 m de longitud puede comer la hierba que esta a su alcance en 3 días. ¿Cuántos días emplearía si la longitud de la cuerda fuera 5m?

a) 12 b) 5 c) 7 d) 15 e) 90

14.- Si por pintar un cubo me cobran 30 soles. ¿Cuánto me cobran por pintar otro cubo cuyo volumen es 8 veces el anterior?

a) 50 b) 90 c) 360 d) 240 e) 56

SESIÓN 6

III.-REGLA DE TRES COMPUESTA

Ejercicios

1.- Por trabajar 8 horas diarias durante 20 días un peón ha ganado S/.120. ¿Cuántas horas diarias habrá trabajado en la misma obra si por 30 días le han pagado S/.225?

A) 6 B) 8 C) 10 D) 12 E) 14

2.- Si con 120 kg de pasto se alimenta a 4 caballos durante 5 días. ¿Cuántos kilogramos de pasto se necesitará para alimentar 9 caballos en 3 días?

A) 116 B) 148 C) 100 D) 162 E) 140

3.- 14 obreros emplearon 28 días para hacer 140 m de obra. ¿Cuánto hicieron 18 obreros en 35 días?

A) 225 B) 250 C) 135 D) 125 E) 140

4.- Una cuadrilla de 15 obreros trabajando 6 horas diarias terminan una obra en 38 días. ¿Cuántos días tardarían para hacer la misma obra, 19 obreros trabajando 3 horas diarias más que los anteriores?

A) 16 B) 18 C) 20 D) 22 E) 24

5.- Un total de 54 agricultores han sembrado un terreno de 1254 m^2 durante 84 días. ¿Cuántos días necesitarán 27 agricultores del triple de rendimiento para sembrar un terreno de 6270 m^2 de superficie?

A) 270 B) 2900 C) 260 D) 360 E) 280

6.- Con 12 obreros se puede hacer una obra en 30 días. Con 10 obreros el triple de rápidos que los anteriores, en cuantos días harán una obra ocho veces difíciles que la obra anterior?

A) 40días B) 88días C) 75días D) 64días E) 96días

7.- 20 obreros, en 14 días de 8 horas; han realizado un trabajo de 120 m de largo. ¿Cuántos días de 7 horas emplearán 24 obreros para hacer 90 m del mismo trabajo?

A) 6 B) 8 C) 10 D) 12 E) 14

8.- Se proyectó hacer una obra, si el número de obreros se aumenta en los 2/5, la jornada de trabajo se disminuye en 1/3 y la dificultad de la obra varía a los 2/5 de lo normal. Entonces el tiempo requerido:

A) aumentó 4/3 B) aumentó 2 veces

C) disminuyó 2 veces D) aumentó 5/9 E) disminuyó 4/7

9.- Quince obreros han hecho la mitad de un trabajo en 20 días. En ese momento abandonan el trabajo 5 obreros. ¿Cuántos días tardarían en terminar el trabajo los obreros que quedan?

A) 90 B) 39 C) 30 D) 28 E) 40

SEGUNDA UNIDAD

I. COMPETENCIA Desarrolla habilidades lógico matemáticas para identificar y plantear problemas de la realidad, y tomar decisiones para su resolución, desenvolviéndose con responsabilidad y actitud proactiva.

II. CAPACIDADES
9. Resuelve problemas de su entorno mediante las ecuaciones.
10.-Grafica funciones lineales y cuadráticas en el plano cartesiano.
11. Grafica funciones Reales: Polinomiales, racionales, irracionales, exponenciales y logarítmicas identificando sus principales elementos y propiedades.
12. Grafica funciones reales utilizando técnicas especiales y haciendo uso del Software Matemático.
13.-Resuelve problemas de su entorno mediante los modelos matemáticos.
.

SESIÓN 07
TEMÁTICA: ECUACION DE PRIMER GRADO, ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO,

SESIÓN 08
TEMÁTICA: INECUACIONES DE PRIMER GRADO, INECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

SESIÓN 09
TEMÁTICA: INECUACIONES FRACCIONARIAS,

SESIÓN 10
TEMÁTICA: FUNCIONES, FUNCIONES II

SESIÓN 11
TEMÁTICA: EVALUACIÓN DE SEGUNA UNIDAD

SESIÓN 7

CAPÍTULO III: ECUACIONES E INECUACIONES

I.-ECUACION DE PRIMER GRADO

FORMA GENERAL
ax + b = 0

Análisis de su raíz

si: $a \neq 0 \wedge b \in R \rightarrow x = -\frac{b}{a}$ solución única(Compatible determinada)

Si: $a = 0 \wedge b = 0 \rightarrow 0x = 0$ “x” admite cualquier solución (Compatible indeterminada)

Si: $a = 0 \wedge b \neq 0 \rightarrow 0x = -b$ no existe ningún valor “x” que multiplicado por cero de cómo resultado “-b” (Incompatible ó absurda)

Teoremas de Transposición:

Si:
* $a + b = c \rightarrow a = c - b$
* $ab = c \rightarrow a = \frac{c}{b}; si: b \neq 0$
* $\frac{a}{b} = c \rightarrow a = bc; si: b \neq 0$

Teoremas de Cancelación:

Si:
* $a + c = b + c \rightarrow a = b; si: c \in R$
* $ac = bc \rightarrow a = b; si: c \neq 0$
* $\frac{a}{c} = \frac{b}{c} \rightarrow a = b; si: c \neq 0$

PROBLEMAS RESUELTOS

Resolver: $\frac{2x}{3} + \frac{3x}{5} = \frac{9x}{15} + 40$

Solución:

Multiplicando ambos miembros por el M.C.M. de los denominadores: 15

$$15\left(\frac{2x}{3}\right) + 15\left(\frac{3x}{5}\right) = 15\left(\frac{9x}{15}\right) + 15(40)$$

$\rightarrow 5(2x) + 3(3x) = 9x + 600$
$10x + 9x = 9x + 600$
eliminando $9x : 10x = 600 \rightarrow x = 60$

Resolver: $\frac{1}{x-3} + 1 = \frac{1}{x-3}$

Solución:

Tener presente que el denominador es diferente de cero.

Es decir: $x-3 \neq 0 \rightarrow x \neq 3$.......(1)

Reduciendo la ecuación: $\dfrac{1+x-3}{x-3}=\dfrac{1}{x-3}$

Cancelando (x – 3):

$1+x-3=1$

$x=3$..................(2)

De (1) y (2) se observa una contradicción.
Concluimos: la ecuación no tiene solución o es incompatible:

Resolver: $\dfrac{3}{x+2}-\dfrac{5x}{x^2-4}=\dfrac{3}{x-2}+\dfrac{x}{x^2-4}$

Solución:
Reduciendo las fracciones a común denominador resulta:

$$\frac{3(x-2)}{(x+2)(x-2)}-\frac{5x}{x^2-4}=\frac{3(x+2)}{(x-2)(x+2)}+\frac{x}{x^2-4}$$

$$\frac{3(x-2)}{x^2-4}-\frac{5x}{x^2-4}=\frac{3(x+2)}{x^2-4}+\frac{x}{x^2-4} \rightarrow$$

$$\frac{3(x-2)-5x}{x^2-4}=\frac{3(x+2)+x}{x^2-4}$$

Para: $x=2 \wedge x=-2$, los denominadores se anulan por tanto: $x \neq \pm 2$........(1)

$3(x-2)-5x=3(x+2)+x \rightarrow 6x=-12$
De donde: x = -2………….(2); de (1) y (2) se observa una contradicción

Se concluye: la ecuación no tiene ninguna solución o es incompatible.

Resolver: $\sqrt{x+4}-\sqrt{x-1}=1$

Solución:
Transponiendo: $\sqrt{x-1}$

$\sqrt{x+4}=1+\sqrt{x-1}$
Elevando al cuadrado miembro a miembro:
$\sqrt{x+4}^{2}=1^2+2\sqrt{x-1}+\sqrt{x-1}^{2}$

$\rightarrow x+4=1+2\sqrt{x-1}+x-1$
Reduciendo se tiene: $4=2\sqrt{x-1} \rightarrow \sqrt{x-1}=2$

Al cuadrado: $x-1=4 \rightarrow x=5$

Llevando: x = 5 a la ecuación propuesta:
$\sqrt{x+4}-\sqrt{x-1}=1 \rightarrow \sqrt{5+4}-\sqrt{5-1}=1$

3 – 2 = 1 (Se verifica la igualdad)
$\therefore$ la solución es: x = 5

Resolver: $x+\sqrt{x+5}=7$

Solución:
$\sqrt{x+5}=7-x$

Elevando al cuadrado miembro a miembro: $\sqrt{x+5}^2=(7-x)^2 \rightarrow x+5=49-14x+x^2$

$x^2-15x+44=0$

x –11
x – 4

Verificando en la ecuación original: $x+\sqrt{x+5}=7$

Si: $x=11 \rightarrow 11+\sqrt{11+5}=7 \rightarrow 11+4=7$ (Falso)

Si: $x=4 \rightarrow 4+\sqrt{4+5}=7 \rightarrow 4+3=7$ (verdadero)

$\therefore$ la única solución es: x = 4

Resolver: $(x-2)(x-4)=5x(x-4)$

Solución:
Llevando $5x(x-4)$ al primer miembro:

$(x-2)(x-4)-5x(x-4)=0$

Extraemos el factor común (x – 4):

$(x-4)[(x-2)-5x]=0$
$x-4=0 \vee (x-2)-5x=0$

Despejando para c/u se tiene:

$x=4 \qquad x=-\frac{1}{2}$

Ejercicios

1. Resolver:

$$\frac{x}{2}-\frac{3x}{5}=\frac{x-6}{2}$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

2.- Resolver:

$$2(x-5)^2+x^2=(x-6)^2+2(x^2-1)$$

A) 6B) 5 C) 2D) – 2 E) 1/2

3.-Resolver:

$$\frac{x+3}{2}-\frac{2-3x}{7}=\frac{4x}{3}$$

A) 1B) 2 C) 3D) 4 E) 18

4.- Resolver:

$$\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x-3}=\frac{3}{x^2-x-6}$$

A) 1B) 2 C) 3D) 4 E) 7

5.- Resolver:

$$\sqrt{x^2+\sqrt{4x^2+x+\sqrt{9x^2+12x}}}=x+1$$

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{6}$ D) $-\frac{1}{6}$ E) $\frac{1}{4}$

6.- Resolver:

$$(x-3)^2+5x=(x+2)^2$$

A) 1 B) -1 C) 2D) 3 E) $\sqrt{2}$

7.- Resolver:

$$\sqrt{7+\sqrt{3+\sqrt{x}}}=3$$

A) 2B) 1 C) 3D) 4 E) 5

8.- Resolver:

$$\frac{x+1}{2}+\frac{x}{3}=\frac{x}{2}+\frac{1}{6}$$

A) – 1 B) 1 C) 2D) – 3 E) 5

9.-Resolver:

$$\frac{x+m}{m}+\frac{x+n}{n}=1$$

A) $-\frac{mn}{m+n}$ B) m + n C) $\frac{mn}{m-n}$ D) m – n E) mn

10.-Resolver:

$$5-\{-x+-(4-2x)-5\}=x+(-5+2x)$$

A) $\frac{4}{17}$ B) $\frac{17}{4}$ C) $\frac{2}{13}$ D) $\frac{13}{2}$ E) $\frac{19}{4}$

11.-Resolver:

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}=1$$

A) $\frac{5}{4}$ B) $\frac{4}{5}$ C) $\frac{1}{4}$ D) 1 E) -1

12.- Resolver:

$$3\left[\frac{1}{2}-\frac{x-1}{x+1}\right]=\frac{1}{4}\left[\frac{9}{x+1}-1\right]$$

A) ϕ B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

13.- Resolver: $\sqrt{x+13}-\sqrt{x-2}=3$ Hallar la inversa de su solución

A) 3 B) 1/3 C) 2D) 4E) 1/4

14.- Sea la ecuación de 1er grado: $(m-7)x^2+(m^2+2m+6)x+3m+2=0$
Hallar "x".

A) 0B) 7 C) 1/3D) – 1/3 E) –7

15.- Resuelva c/u de las ecuaciones luego indique: $\frac{x.y}{z}$

A. $1=\dfrac{2}{2+\dfrac{x-2}{x+4}}$ B. $\dfrac{1}{3+\dfrac{5}{y-\dfrac{1}{3}}}=\dfrac{1}{3+\dfrac{5}{\dfrac{2}{5}+\dfrac{1}{15}}}$ C. $\sqrt{\dfrac{z-3}{2z+5}}+\sqrt{\dfrac{2z+5}{z-3}}=2$

A) $\frac{1}{5}$ B) $-\frac{1}{7}$ C) $\frac{1}{4}$ D) 1 E) $-\frac{1}{5}$

16.-Resolver:

$$\frac{1}{2x-3}-\frac{3}{x(2x-3)}=\frac{5}{x}$$

A) $\frac{5}{3}$ B) $\frac{4}{3}$ C) $\frac{1}{3}$ D) 3 E) $-\frac{1}{3}$

SESIÓN 8

II.-ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Ecuación de segundo grado-. Son aquellas que luego de reducir términos semejantes y pasar todos los términos al 1er miembro adoptan la forma:

$$\boxed{ax^2 +.bx + c = 0p}$$

Término Término Término

cuadrático   lineal   independiente

Donde: “a”, “b”, “c” son coeficientes $(a \neq 0)$

“x” incógnita.

Debes tener presente que toda ecuación de 2do grado tiene dos soluciones o también llamadas raíces de la ecuación.

¿CÓMO SE RESUELVE UNA ECUACIÓN DE 2º GRADO?
Existen varias formas de resolver una ecuación de 2º grado, pero mencionaremos las dos más importantes:

Por factorización.- Aquí generalmente se utiliza el aspa simple, además recuerda:

Si a . b = 0
a = 0 v b = 0

Ejemplo:

Resolver: $x^2 - 7x + 12 = 0$

Solución:

$$\begin{array}{ll} x^2 - 7x + 12 & \\ x & -4 \\ x & -3 \end{array}$$

Luego: $x^2 - 7x + 12 = (x - 4)(x - 3)$

Cada factor se iguala a cero:

$x - 4 = 0$ v $x - 3 = 0$

$x_1 = 4$ v $x_2 = 3$

Estas son las raíces o soluciones

Por fórmula general

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Ejemplo:
Resolver: $x^2 - 7x + 12 = 0$

Solución:

Primero identificamos los valores de “a”, “b” y “c”

$1x^2 - 7x + 12 = 0$

a   b   c

Así tenemos: a = 1; b = -7; c = 12 y aplicamos la fórmula:

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(1)(12)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49-48}}{4}$$

Luego:

$x_1 = \frac{7+\sqrt{1}}{2}$ v $x_2 = \frac{7-\sqrt{1}}{2}$

$x_1 = 4$ v $x_2 = 3$

Propiedades de las raíces.- Dada una ecuación de 2do grado se tiene:

Suma de raíces	Producto de raíces
$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$	$x_1 . x_2 = \frac{c}{a}$

Ejemplos:

Dada la ecuación: $x^2 - 7x + 12 = 0$; determinar la suma y el producto de raíces.

Solución:
En primer lugar, se identifican los valores de a, b y c:

$$\underbrace{1x^2}_{=a} \underbrace{-7x}_{=b} \underbrace{+12}_{=c} = 0$$

Luego, aplicamos la propiedad anterior:

Suma ⇨ $x_1 + x_2 = -\frac{(-7)}{1} = 7$

Producto ⇨ $x_1 \,.\, x_2 = \frac{12}{1} = 12$

Ejercicios
1.- Dada la ecuación: $x^2 - 7x - 8 = 0$; hallar sus raíces.

A) 8 y -1 B) -8 y 1 C) -2 y 4D) -1 y -6 E) -5 y -3

2.- Resolver: $x^2 - 9x + 18 = 0$

A) -3 y -6 B) 2 y 6 C) 3 y 6D) -2 y 6 E) -9 y -2

3.- Resolver: (x – 1) (x – 5) = – 3

A) 2 y 4 B) -2 y 3 C) -2 y -4
D) -3 y -2 E) 0

4.- Hallar las raíces de: $x^2 + 3x – 28 = 0$

A) -4 y -7 B) -7 y 4 C) -2 y -7
D) 4 y 7 E) -4 y 7

5.- Resolver: $x^2 – 5x = 0$

A) 5 B) 0 C) 0 y 5 D) – 5 E) 0 y – 5

6.- Resolver: $2x^2 – 12x = 0$

A) 6 B) 0 y 6 C) 3 y 2 D) 0 y 2 E) 12 y 0

7.-Hallar las raíces de: $x^2 – 25 = 0$
A) 5 B) -5 C) -5 y 5
D) -3 y -2 E) 3 y 2

8.-Dada la ecuación: $x^2 – 49 = 0$ Indicar sus raíces.
A) 7 B) -7 y 7 C) -7 D) 14 E) 0

9.-Resolver: (x + 1) (x + 6) = – 6
A) 2 y 3 B) 2 y 4 C) – 1 y 3
D) – 4 y – 3 E) – 6 y – 1

10.- Resolver y dar su conjunto solución: $x^2+11x+30 = 0$

A) -5 y -6 B) -5 y 6 C) -10 y -3
D) 10 y 3 E) 5 y 6

11.-Resolver: $x^2 – 5x – 6 = 0$

A) 3 y 2 B) -3 y 2 C) 6 y 1
D) -6 y 1 E) 6 y -1

12.-Resolver: $2x^2 – 3x – 5 = 0$

A) $\frac{5}{2} y\, 1$ B) $-\frac{5}{2} y -1$ C) $-\frac{5}{2} y\, 1$

D) $\frac{5}{2} y -1$ E) $5 y -1$

13.- Resolver: $(x + 3)^2 – (x – 1)^2 = x^2$
A) $4+2\sqrt{6};\ 4-2\sqrt{6}$ B) $2\sqrt{6}+1;\ 2\sqrt{6}-1$
C) $2+\sqrt{3};\ 2-\sqrt{3}$ D) $3+\sqrt{2};\ 3-\sqrt{2}$ E) -3 y 1

14.-Resolver: $3x^2 + 5x – 2 = 0$

A) $\frac{1}{3} y -2$ B) $\frac{1}{3} y\, 2$ C) 1 y -2

D) -1 y 2 E) $-\frac{1}{3} y -2$

15.- Resolver: $(x + 1)^2 = 9$

A) 2 y 1 B) 2 y -4 C) 2 y 3 D) 2 E) ± 3

16.- Indicar las raíces de: $x^2 = (x - 9)^2 + (x - 8)^2$

A) 5 y 17 B) 29 y 5 C) -29 y 5
D) -5 y -17 E) 29 y 17

17.- Aplicar la fórmula para resolver: $x^2 - 4x + 2 = 0$

A) $2\sqrt{2}+1;\ 1-2\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{2}-1;\ 2\sqrt{2}+1$
C) $2+\sqrt{2};\ 2-\sqrt{2}$ D) 4 y -2E) 4 y 2

18.- Resolver: $x^2 - 6x + 7 = 0$

A) $3+\sqrt{3};\ 3-\sqrt{3}$ B) $3+\sqrt{2};\ 3-\sqrt{2}$
C) $1+\sqrt{2};\ 1-\sqrt{2}$ D) $2+\sqrt{2};\ 2-\sqrt{2}$ E) 4 y 2

19.- Resolver: $x^2 + 2x = 5$

A) $-1+\sqrt{6};\ -1-\sqrt{6}$ B) $-1+\sqrt{2};\ -1-\sqrt{2}$
C) $-1+\sqrt{3};\ -1-\sqrt{3}$ D) $2+\sqrt{3};\ 2-\sqrt{3}$ E) 2 y -5

20.- Indicar las raíces de: $9(2 - x) = 2x^2$

A) $\frac{3}{2}\,y-6$ B) $-\frac{3}{2}\,y\ 6$ C) $\frac{2}{3}\,y-2$
D) 6 y -3 E) 3 y -6

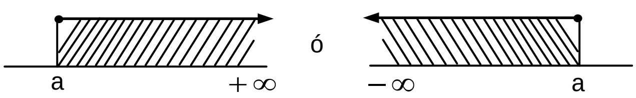
21.- Resolver: $7x^2 + 40x - 12 = 0$

A) $-6\,y\,\frac{1}{7}$ B) $\frac{2}{7}\,y-6$ C) $-\frac{1}{7}\,y-6$
D) $-\frac{3}{7}\,y\ 2$ E) $\frac{1}{7}\,y\ 6$

III.-INECUACIONES DE PRIMER GRADO

Inecuación: Es la desigualdad que podría establecerse entre dos polinomios, verificable para ciertos valores de la incógnita.

Inecuación de primer grado: Es la desigualdad entre dos polinomios de primer grado, siendo el C.S. (es decir los valores que puede tomar la incógnita) de la forma:



¿Cómo se resuelve una inecuación? Se resuelve de manera idéntica a la ecuación, procurando mantener a la incógnita con coeficiente positivo.

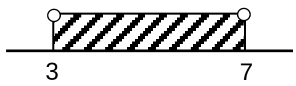
Los valores que verifican una inecuación, es decir su C.S., son INTERVALOS.

Existen tres tipos de intervalos:

Intervalo abierto.- No se consideran los extremos:

Ejemplo: Observa el siguiente intervalo y sus diferentes representaciones:

Representación gráfica:

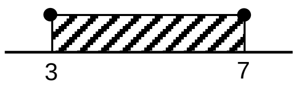


Representación simbólica: $\langle 3;7 \rangle$

Representación algebraica: $3 < x < 7$

Intervalo cerrado.- Sí se consideran los extremos.

Ejemplo:



Representación gráfica:

Representación simbólica: $[3;7]$

Representación algebraica: $3 \leq x \leq 7$

Intervalo semiabierto o semicerrado.- Es una mixtura de los anteriores

PROBLEMAS

Utilizando la representación algebraica, expresa los siguientes intervalos:

Todos los números comprendidos entre –3 y 11.

Los números reales mayores o iguales a –1.

Todos aquellos números que sean menores que 4.

Los números reales comprendidos entre –1 y 7 incluyendo a este último:

Los números reales comprendidos entre -5 y 8 incluyendo estos números.

Ejercicios

1.- Expresa los siguientes conjuntos, mediante la representación simbólica de conjuntos.

$J=\{x/-3 \leq x \leq 5\}$

$\Rightarrow Rpta.$____________

$Y=\{x/-5<x\leq 3\}$

$\Rightarrow Rpta.$____________

$E=\{x/7\leq x<9\}$

$\Rightarrow Rpta.$____________

$O=\{x/-6<3x\}$

$\Rightarrow Rpta.$____________

$G=\{x/4x<12\}$

$\Rightarrow Rpta.$____________

$D=\{x/35x<10\}$

$\Rightarrow Rpta.$____________

2.- Resolver las siguientes inecuaciones y dar su conjunto solución (C.S)

a.- $17+3x-(x+2)\geq 4-x$

b.- 2x + 1 > 2 – (x – 8) + 13

c.- $4(1-x)+2(2-x)\geq 5-11(x-5)$

d.- $4x+3(x-1)\leq 5x+(1-2x)$

3.- Resolver:

$$\frac{2(x+1)}{5}<\frac{3(x-2)}{10}$$

A) $\langle 10;+\infty\rangle$ B) $\langle -\infty;-10\rangle$ C) $\langle -\infty;10\rangle$ D) $\langle -\infty;6\rangle$ E) $\langle 6;+\infty\rangle$

4.- Resolver:

$$\frac{x+5}{3}-\frac{x-2}{2}\leq\frac{x}{6}-3$$

A) $\langle 17;+\infty\rangle$ B) $[17;+\infty\rangle$ C) $[1;+\infty\rangle$ D) $\langle 1;+\infty\rangle$ E) $\langle -17;+\infty\rangle$

5.- Resolver: $\frac{x-5}{4}-2x\geq\frac{3x}{2}-1$

A) $\langle -\infty;2\rangle$ B) $\langle -\infty;-3\rangle$ C) $\left\langle -\infty;-\frac{1}{13}\right]$ D) $\left\langle -\infty;-\frac{1}{13}\right\rangle$ E) $\left\langle \frac{1}{13};+\infty\right\rangle$

6.- Indicar el C.S. de: $(x+4)(x-4)-(x+5)(x+1)>2x-7$

A) $\langle -\infty;1\rangle$ B) $\left\langle -\infty;\frac{7}{4}\right\rangle$ C) $\left\langle -\infty;-\frac{7}{4}\right]$ D) $\left\langle -\infty;-\frac{7}{4}\right\rangle$ E) $\left\langle -\frac{7}{4};+\infty\right\rangle$

7.- Hallar el C.S. de: $(x+1)(x+2)-(x+3)(x-5)>x-1$

A) $\langle 3;+\infty\rangle$ B) $[3;+\infty\rangle$ C) $\langle -\infty;3]$ D) $\langle -\infty;-3\rangle$ E) $\langle -\infty;3\rangle$

8.-Dar el C.S. de: $\dfrac{x+3}{4}<2+\dfrac{x+2}{3}$

A) $\langle -23;+\infty\rangle$ B) $\langle 23;+\infty\rangle$ C) $\langle -\infty;-23\rangle$ D) $\langle -23;23\rangle$ E) $\langle -\infty;23\rangle$

9.-Resolver: $(x+8)^2-(x-8)^2\leq\dfrac{-2x-98}{3}$

A) $\langle -\infty;-1\rangle$ B) $\langle -\infty;1\rangle$ C) $\langle -\infty;-1]$ D) $[1;+\infty\rangle$ E) $\langle 1;+\infty\rangle$

10.- Resolver: $\dfrac{2}{3}(x-5)^2+\dfrac{1}{6}(x+4)(x-6)\geq\dfrac{5}{6}x^2$

A) $\left\langle -\infty;\dfrac{38}{21}\right\rangle$ B) $\left\langle -\infty;\dfrac{38}{21}\right]$ C) $\left\langle \dfrac{23}{21};+\infty\right\rangle$ D) $\left[\dfrac{17}{3};+\infty\right\rangle$ E) $\left\langle -\infty;\dfrac{1}{7}\right\rangle$

11.- Resolver: $(x+1)(x-5)+(x+2)^2<(2x+1)(x-1)+2$

A) $\langle -\infty;2\rangle$ B) $\langle -\infty;2]$ C) $\langle 2;+\infty\rangle$ D) $[2;+\infty\rangle$ E) $\langle -2;2\rangle$

12.-Resolver: $6(x+5)(x-2)\leq 26+2(x+2)(3x-1)$

A) $\left\langle -\infty;\dfrac{13}{2}\right\rangle$ B) $\left\langle \dfrac{13}{2};+\infty\right\rangle$ C) $\left\langle -\dfrac{13}{2};+\infty\right\rangle$ D) $\left\langle -\infty;\dfrac{13}{2}\right]$ E) $\left[\dfrac{13}{2};+\infty\right\rangle$

13.-Resolver: $(2x+1)(x-2)\leq x(x+5)+(x-5)(x+1)$

A) $\left\langle -\infty;\dfrac{3}{4}\right]$ B) $\left\langle \dfrac{3}{4};+\infty\right\rangle$ C) $\left[\dfrac{3}{4};+\infty\right\rangle$ D) $\left[-\dfrac{3}{4};+\infty\right\rangle$ E) $\left\langle -\dfrac{3}{4};\dfrac{3}{4}\right\rangle$

14.- Resolver: $(x-2)(x+1)+x(x-1)\leq(2x+1)(x-3)+4$

A) $\langle 1;+\infty\rangle$ B) $[1;+\infty\rangle$ C) $\langle -\infty;1]$ D) $\langle -\infty;-1\rangle$ E) $\langle -1;+\infty\rangle$

15.- Resolver: $(3x-1)(x+5)<3(x+2)(x-1)$

A) $\left\langle -\infty;-\dfrac{1}{11}\right\rangle$ B) $\left\langle -\infty;\dfrac{1}{11}\right]$ C) $\left[-\dfrac{1}{11};+\infty\right\rangle$ D) $\left\langle -\dfrac{1}{11}+\infty\right\rangle$ E) $\left\langle \dfrac{1}{11};-\dfrac{1}{11}\right\rangle$

16.-Resolver: $(x-2)(x+1)+x(x-3)\leq(2x-3)(x-1)-1$

A) $\langle -\infty;4\rangle$ B) $\langle -\infty;-4]$ C) $\langle 4;+\infty\rangle$ D) $\langle -4;+\infty\rangle$ E) $\langle -\infty;4]$

17.-Calcular el intervalo solución de: $(x+1)^3 \leq x(x^2+3x)$

A) $\left\langle -\infty; \frac{1}{3} \right]$ B) $\langle -\infty; -1]$ C) $\left[\frac{1}{3}; +\infty \right\rangle$ D) $\left[\frac{1}{2}; +\infty \right\rangle$ E) $\left\langle -\infty; -\frac{1}{3} \right\rangle$

18.-Resolver: $(2x-3)^2 > (2x+5)(2x-1)$

A) $\left\langle -\infty; \frac{7}{10} \right\rangle$ B) $\left\langle -\infty; \frac{3}{10} \right\rangle$ C) $\left\langle \frac{1}{2}; +\infty \right\rangle$ D) $\left\langle \frac{2}{3}; +\infty \right\rangle$ E) $\left\langle \frac{3}{5}; +\infty \right\rangle$

19.- Si "M" es el conjunto solución de: $2x - \frac{5}{3} < \frac{x}{3} + 10$

Determinar el número de valores enteros y positivos de "M".

A) 6 B) 7 C) 8 D) 5 E) 9

20.- Resolver el sistema:

$$15x - 2 > 2x + \frac{1}{3}$$
$$2(x-4) < \frac{3x-14}{2};$$

se obtiene: $x \in \left\langle \frac{a}{39}; b \right\rangle$. Señale "a + b"

A) 9 B) 11 C) 7 D) 2 E) 4

21.- Resolver:

$$\frac{x}{4} - 1 > \frac{x}{3} - \frac{3}{2}$$
$$2x - \frac{18}{5} > x + \frac{2}{5}$$

A) 4 < x < 6 B) 3 < x < 5 C) 4 < xD) x < 6 E) x < 5

SESIÓN 9

IV.-INECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Forma general: $P_{(x)} = ax^2 + bx + c \quad \mathbf{0};\ a \neq 0$ $\gtrless$

Donde: $\{a;b;c\} \subset IR$

Del rectángulo se obtiene:

$ax^2 + bx + c > 0; ax^2 + bx + c < 0$

$ax^2 + bx + c \geq 0; ax^2 + bx + c \leq 0$

La solución de la inecuación depende del primer coeficiente y del discriminante:

$\Delta = b^2 - 4ac$

Ejercicios

1.- Resolver: $3x^2-7x+4>0$ indicar un intervalo.

A) $<-\infty;1>$ B) $<-\infty;\frac{3}{2}>$ C) $<-3;+\infty>$ D) $<-4;+\infty>$ E) $<\frac{1}{3};4>$

2.-Si: $m\in<a;b>$ tal que la expresión: $x^2+1<2x^2+x+m<3x^2+2$
se verifica para cualquier tipo de valor para "x", encontrar el valor de: $4(a+b)$

A) 32 B) $-8\sqrt{5}$ C) –16 D) $-16\sqrt{2}$ E) 1

3.- Resolver: $2x^2-3x-9<0$ e indicar la suma de valores enteros que la verifican.

A) 2 B) 3 C) 5 D) 6 E) 9

4.- De los siguientes enunciados, ¿cuántas son verdaderas?
I. $x^2>0\rightarrow x\in IR$ II. $(x-1)^2\geq 0\rightarrow x\in IR$
III. $(x+3)^2\leq 0\rightarrow x\in IR$ IV. $(2x-3)^2\leq 0\rightarrow x\in\left\{\frac{3}{2}\right\}$
V. $x^2\leq 0\rightarrow x\leq 0$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

5.- Resolver: $x^2+2x-1<0$
A) $<-\sqrt{2};\sqrt{2}>$ B) $<-\sqrt{2}-1;-\sqrt{2}+1>$ C) $<1-\sqrt{2};1+\sqrt{2}>$
D) $<-\sqrt{2}-1;\sqrt{2}-1>$ E) $<-2-\sqrt{2};2-\sqrt{2}>$

6.- Resolver: $x^2+10x+27\geq 0$
A) $<-\infty;+\infty>$ B) $<-\infty;\sqrt{5}-\sqrt{3}>$ C) $<-3-\sqrt{5};+\infty>$
D) $<-3+\sqrt{5};+\infty>$ E) ϕ

7.- Resolver: $x^2+10x+27\leq 0$
A) $x\in\phi$ B) $x\in<-\infty;+\infty>$ C) $<-\infty;-2>$
D) $<-\sqrt{2}-1;-\sqrt{2}+1>$ E) $<-\infty;-3>$

8.- Resolver: $(x-1)^2-x^2\geq-(x-2)^2$ dar el conjunto no solución.

A) $x\in[1;5]$ B) $x\in[5;+\infty>$ C) $x\in<-\infty;1]$ D) $x\in<-\infty;5]$ E) $x\in<1;5>$

9.-Resolver: $-2x^2-x+10\leq 0$

A) $x\in[-2;\frac{5}{2}]$ B) $x\in<-\infty;-3]\cup[\frac{5}{2};+\infty>$ C) $x\in<-\infty;-\frac{5}{2}]\cup[2;+\infty>$

D) $x \in [-\frac{5}{2};2]$ E) $x \in IR$

10.-Resolver: $x^2 - 20x \le -(25 + 3x^2)$

A) $x \in IR$ B) $x \in IR - \left\{\frac{5}{2}\right\}$ C) $x \in \phi$ D) $x \in \left\{\frac{5}{2}\right\}$ E) $x \in IR - \left\{\frac{2}{5}\right\}$

11.-Hallar el mayor valor entero “m” tal que para todo $x \in IR$, se cumple:
$m \le x^2 - 10x + 32$

A) 5 B) 8 C) 6 D) 7 E) 10

12.-Cuántos valores verifican la siguiente inecuación: $\frac{x(2x-28)}{98} \le -1$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) infinitios

13.-Hallar el menor número entero “M” tal que para todo $x \in IR$, se cumpla:
$-x^2 + 4x - 10 < M$

A) –5 B) –3 C) –1 D) 1 E) 2

14.-Al resolver: $(x-2)(x+1)(x-3) > (x-1)(x+2)(x+4)$ se obtiene como conjunto solución: $x \in <\alpha;\beta>$.Indique $"a+\beta"$.

A) $\frac{2}{3}$ B) $-\frac{1}{9}$ C) -9 D) $\frac{1}{3}$ E) -3

15.-Resolver: $x^3 - 1 < (x-1)^3$

A) $x \in <0;1>$ B) $x \in <-\infty;1]$ C) $x \in [-1;0]$
D) $x \in [-1;+\infty>$ E) $x \in <-1;1>$

16.- Resolver: $(2x+5)^2 \le (5x+2)^2$ dar un intervalo solución.
A) $x \in <-\infty;1>$ B) $x \in [-1;+\infty>$ C) $x \in <-\infty;-1]$ D) $x \in <-;+8>$ E) $x \in [-1;1]$

V.- INECUACIONES FRACCIONARIAS

Ejercicios

1.- La solución de la inecuación: $\frac{3}{x-4} > 1$ es:

a) 1< x< 4
b) 4 < x < 7
c)– ∞ < x <1; 4< x < ∞
d) – ∞ < x <4; 7< x < ∞
e) –4< x <5; 7< x < ∞

2.- Al resolver la inecuación: $\frac{x+4}{x-5} - 1 > \frac{3}{2}$ Sumar los valores enteros que satisfacen:

A) 40B) 44 C) 45C) 50 D) 56

3.- La solución de la siguiente desigualdad: $3-\frac{3x+1}{x-1}>\frac{x+2}{x+3}$ es:

a) – 3 < x< 1
b) – 1< x <3
c) 1< x <3
d) $-\infty$ < x < –3; 1< x < ∞
e) $-\infty$ < x <–1; 3< x < ∞

4.-La solución del siguiente sistema de inecuaciones

$4x^2+3x+2>0$ …. (1)
$x^2 + 6x - 72 < 0$….(2)
$x^2 - 12x - 45 > 0$ ….(3)
es:

A) – 12<x < –3 B) –3 < x <6
C) 6<x<15 D) $-\infty$ <x < – 12 E) 15< x < ∞

5.-Analizando la solución de la inecuación: $(x+2)^3+(x-2)^3<2(x-1)^3-16$ podemos afirmar:

a) Solución: 1 < x < 2
b) Solución: –2< x < 1; 1< x <2
c) Solución: $-\infty$ < x < –2; 2< x < ∞
d) Inecuación imposible.
e) Inecuación indeterminada.

6.- Al resolver la inecuación: $x(2x-3)>-\frac{9}{8}$ Se observa que:

a) Su solución es: x < 3/2; 3/2< x
b) Su solución es: x<3/4; 3/4<x
c) Su solución es: x <4/3; 4/3<x
d) Inecuación indeterminada.
e) Inecuación imposible

7.- La solución del sistema de inecuaciones

$$\frac{x+7}{x+2}<\frac{x-8}{x-1} \quad ...(1)$$
$$\frac{x+4}{x-5}>\frac{x-3}{x+2} \quad ...(2)$$
es:

A) $-\frac{3}{4}<x<\frac{1}{2}$ B) $-2<x-\frac{3}{4}$

C) $\frac{1}{2}<x<1$ D) $1<x<5$ E) $-2<x<\frac{1}{2}; 1<x<5$

8.- La solución de la inecuación: $\frac{1}{x^2-6x+9}>\frac{1}{x^2+6x+9}$ es:

A) 0 <x< ∞ B) 0<x<3
C) 3<x< ∞ D) 0<x<3; 3<x< ∞ E) – 3<x<0; 3<x< ∞

9.- La solución de la inecuación:

$\frac{x+3}{x-5} > \frac{x+1}{x-2}$ es:

A) $\frac{1}{5} < x < 2$ B) $\frac{1}{5} < x < 5$

C) $2 < x < 5$ D) $\frac{1}{5} < x < 2;\ 5 < x < \infty$ E) $-\infty < x < \frac{1}{5}; 2 < x < 5$

10.- La suma de los valores enteros y negativos de "x" que satisfacen a la siguiente inecuación:$x^3 + 3x^2 - 33x - 35 > 0$, es

A) – 11B) – 15 C) – 18 D) – 20 E) – 21

11.- La solución del siguiente sistema de inecuaciones:

$x^3 + 6x^2 - 69x - 154 < 0$ … (1)

$x^3 - 3x^2 - 13x + 15 > 0$ … (2)

$x^3 - 3x^2 - 36x + 108 > 0$… (3)

es:

A) $-6<x<-3$ B) $-6< x<-2$ C) $1< x<3$

D) $-\infty < x < -1$E) $7 < x< \infty$

12.- La solución de la inecuación: $x^4 - 11x^3 + 29x^2 + 35x - 150 > 0$es:

a) $-\infty < x< -2;\ 3< x < \infty$

b) $-\infty < x< -2;\ 3< x< 5$

c) $-\infty <x< -2;\ 3<x<5;\ 5<x< \infty$

d) $-\infty <x<-2;\ 5<x< \infty$

e) $-2< x <3$

13.-La solución de la inecuación: $\frac{x^2 + x - 6}{x^2 + 13x + 30} < 0$ es:

a) –1 0<x<2

b) $-10<x<-3;\ -3<x<2$

c) $-\infty <x< -10;\ 2<x< \infty$

d) $-3<x<2$

e) $-10<x<-3;\ -3<x< \infty$

SESIÓN 10

CAPÍTULO V: FUNCIONES

I.-FUNCIONES

Par ordenado

Es un conjunto formado por dos elementos dispuestos en determinado orden:

(a,b)

Primera componente — Segunda componente

Propiedades:

(a,b) $\neq$ (b,a) (no conmutativa)
Si: (a,b) = (c,d) $\rightarrow$ a = c $\wedge$ b = d

Producto cartesiano

Dados dos conjuntos “A” y “B” no vacíos, se llama producto cartesiano (A x B) al conjunto de pares ordenados (a,b) donde “a” $\in$“A” y “b”$\in$ “B”, es decir:
$A \times B = \{(a,b) / a \in A \wedge b \in B\}$

Ejemplo:
Sea: $A = \{1; 2; 3\}$ $B = \{2; 3; 4\}$
$\rightarrow A \times B = \{(1;2), (1;3), (1;4), (2;2), (2;3), (2;4), (3;2), (3;3), (3;4)\}$
Propiedades:
n(A x B) = n(B x A)
n(A x B) = n(A) x n (B)

Relación

Dados dos conjuntos “A” y “B” no vacíos, se llama relación de “A” en “B”, a todo subconjunto “R” del producto cartesiano “A x B”, es decir, “R” es una relación de “A” en “B” $\leftrightarrow$ “R” $\subset$ “A x B”.

En particular, si: A = B, “R” se llama relación en “A” (relación entre elementos de “A”).

La definición anterior de relación exige la comparación de elementos pares por eso suele llamarse “relaciones binarias”.

Ejemplo:
En el conjunto: $A = \{9; 8; 7; 6; 5; 4; 3; 2; 1\}$
Establecemos las siguientes relaciones:
“a” es el doble de “b”.
“a” es igual a “b”.

Escribir los pares que cumplen las relaciones respectivamente.
R_1 = {(a,b) / “a” es el doble de “b” }
= {(2; 1), (4; 2), (6; 3), (8; 4) }

R_2 = {(a,b) / “a” es igual a “b” }
$= \{(1;1), (2;2), (3;3), (4;4), (5;5), (6;6), (7;7), (8;8), (9;9)\}$

Si “R” es una relación entre elementos de “A” y “B”, al conjunto “A” se le llama conjunto de partida de la relación y a “B” conjunto de llegada.

Se llama Dominio de una relación “R” al conjunto de todos los elementos (a $\in$ A) tales que existe por lo menos un (b $\in$ B) con (a, b) $\in$IR.

Se llama Rango de una relación “R” al conjunto de todos los elementos (b $\in$ B) tales que existe por lo menos un (a $\in$ A) con (a, b) $\in$IR.

Ejemplo:

Sea la relación:

R_1 = {(1; 2), (2; b), (2; 7), (3; 2), (1; -2)}

$\rightarrow D_{R_1} = \{1; 2; 3\}$ $R_{R_1} = \{2; b; 7; -2\}$

Definición de Funciones

Sean “A” y “B” dos conjuntos no vacíos (pudiendo ser A = B) llamaremos función definida en “A” a valores en “B” (función de “A” en “B”) a toda relación:
$F \subset A \times B$
que tiene la propiedad:

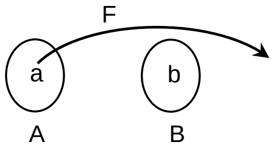
$(a, b) \in F$ y $(a, c) \in F$; entonces; $b = c$

Es decir, una función es un conjunto de pares ordenados de elementos, tal que dos pares distintos nunca tienen el mismo primer elemento.

Notación:

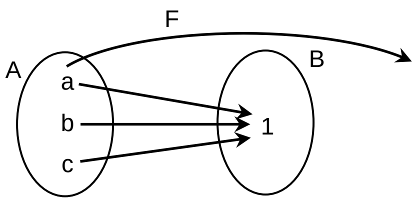
Si “F” es una función de “A” y “B” se designa por:

$F: A \to B$ ó



Se lee: “F” es una función de “A” en “B”.

Ejemplo:



Siendo $a \neq b \neq c$, diremos: $A \xrightarrow{F} B$

$F = \{(a; 1), (b; 1), (c; 1)\}$ es función.

Observación:

Toda función es una relación, pero no toda relación es una función.

Ejemplo:

Hallar los valores de “a” y “b” para que el conjunto de pares ordenados:
$A = \{(2; 5), (-1; -3), (2; 2a- b), (-1; b – a), (a + b^2; a)\}$

sea una función.

Solución:

En una función dos pares distintos nunca tienen el mismo primer elemento.

$\therefore$ $(2; 5)$ y $(2; 2a – b) \in A \to 5 = 2a – b$ … (1)
$(-1; -3)$ y $(-1; b – a) \in A \to b – a = -3$ …. (2)

De (1) y (2), resolviendo: $a = 2$; $b = -1$

$\therefore F = \{(2; 5), (-1; -3), (3; 2)\}$

Si “F” es una función de “A” en “B”, el conjunto “A” se llamará conjunto de partida de la función y “B” el conjunto de llegada.

El dominio de una función “F” se designa por “D_F” y se define como el conjunto siguiente:

$D_F = \{x \in A \,/\, \exists\, y;$ tal que $(x, y) \in F\}$

El rango (o imagen) de una función “F” se designa por “R_F” o “Im_F” y se define como el conjunto siguiente:

$R_F = \{y \in B \,/\, \exists\, x;$ tal que $(x, y) \in F\}$

es decir son las segundas componentes de los pares ordenados.

Si el par ordenado $(a, b) \in F$ escribiremos: $b = F_{(a)}$ y diremos que “b” es imagen de “a” por “F” (o también, que “b” es el valor de “F” en “a”).

$F = \{(a, b) \in A \times B \,/\, b = F_{(a)};\ a \in D_F\}$

Ejemplo:

Sea la función:
$F = \{(2; 3), (3; 4), (7; 3), (-2; 6), (4; 1)\}$

Hallar:

$M = F_{(2)} + F_{(3)} + F_{(7)} + F_{(-2)} + F_{(4)}$

Solución:

Como: $F_{(2)} = 3$; $F_{(3)} = 4$; $F_{(7)} = 3$; $F_{(-2)} = 6$; $F_{(4)} = 1$

$\therefore M = 17$

Regla de correspondencia

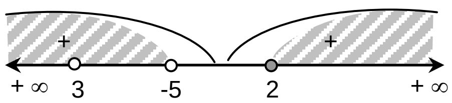
Para que se pueda definir bien un función es suficiente conocer su dominio (D_F) y una regla que permita asignar para cualquier $x \in D_F$; su imagen $F_{(x)}$.

Ejemplo:

Hallar el dominio de la siguiente función:

a. $F_{(x)} = \sqrt{\dfrac{x-2}{x+5}} + \dfrac{x}{x-3}$

$D_F = \dfrac{x-2}{x+5} \geq 0$ $\qquad$ $x - 3 \neq 0$



$\wedge\ x \neq 3$

$D_F = \langle -\infty ; -5 \rangle \cup [\, 2; +\infty \rangle - \{3\}$

Hallar el rango de la siguiente función:

F = {(2; 3), (4; 6), (5; 7), (7; 6), (-2; 3)}

R_F = {3; 6; 7}

Tenemos varias formas de hallar rangos, presentaremos las más conocidas:
Cuando tenemos una función donde su dominio no presenta rango, se despeja "x" en función de "y".

Cuando tenemos un intervalo como dominio usamos desigualdades.

Para la función definida por: $G_{(x)} = 2x^2 + 3x + 2;\ x \in \mathbb{R}$

Solución:

$y = 2x^2 + 3x + 2 \rightarrow 2x^2 + 3x + (2 - y) = 0$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4(2)(2-y)}}{2(2)}$$

Si "x" $\in \mathbb{R}$, luego "y" también $\in \mathbb{R}$

Pero: $\Delta \geq 0;\ 9 - 8(2 - y) \geq 0 \rightarrow y \geq \frac{7}{8}$

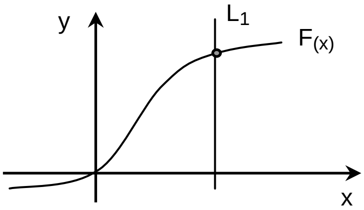
$$\rightarrow R_G = \left[\frac{7}{8}; +\infty\right\rangle$$

Gráfica de una función
Sea "F" una función real, la gráfica de "F" es el conjunto "G" de todos los puntos (x, y) en el plano, tal que "x" está en el dominio de "F" e "y" es la imagen de "x" por "F", es decir:

$G = \{(x, y) \in R^2 / y = F_{(x)};\ x \in D_F\}$

Una gráfica cualquiera será función, si y sólo si, al trazar una paralela al eje "y" corta a la gráfica en un sólo punto.

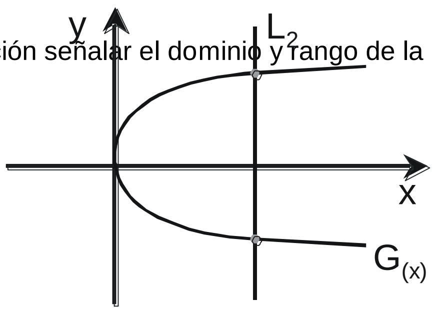
Ejemplos:
$\mathbf{F_{(x)}}$ es función, entontes "L_1" la recta paralela al eje "y" corta a la gráfica en un solo punto.



$\mathbf{G_{(x)}}$ no es función entonces "L_2" la recta paralela al eje "y" corta a la gráfica en más de un punto.

Ejercicios

1.-Si el siguiente conjunto de pares ordenados representa una función señalar el dominio y rango de la función: f = {(2; 4a - b), (3; b), (2; 3), (5; 6), (3; 1)}



a) $D_F = \{2; 3; 5;\}$; $R_F = \{3; 6; 1;\}$
b) $D_F = \{3; 6; 1;\}$; $R_F = \{2; 3; 5;\}$
c) $D_F = \{2; 3; 6;\}$; $R_F = \{3; 1; 5;\}$
d) $D_F = \{3; 1; 5;\}$; $R_F = \{2; 3; 6;\}$
e) $D_F = \{5; 3; 1;\}$; $R_F = \{3; 6; 1;\}$

2.-Hallar el rango de la función: $y = F_{(x)} = \sqrt{5-x} + \sqrt{3+x}$

A) $y \in [\sqrt{2}; 4]$
B) $y \in [0; 4\sqrt{2}]$
C) $y \in \mathbb{R}$
D) $y \in [2\sqrt{2}; 4]$
E) $y \in [0; 2\sqrt{2}]$

3.-De la función: $F = \{(2; 3), (3; 4), (4; 1)\}$

Calcular: $A = F_{(F_{(2)})} + F_{(F_{(3)})}$

A) 1   B) 5   C) 6   D) 7   E) 8

4.-Indicar el rango de f: $R \to R$
$F_{(x)} = x^2 + 10x + 30$

A) $\mathbb{R}$
B) $\mathbb{R}^+$
C) $[-5; +\infty>$
D) $[5; +\infty>$
E) $[30; +\infty>$

5.-Dado: $F = \{(0; 1), (1; 2), (2; 3)\}$

Hallar: $F_{(0)}^{F(1)} + F_{(1)}^{F(2)} + F_{(2)}^{F(0)}$

A) 6   B) 8   C) 10   D) 12   E) 16

6.-Sabiendo que el conjunto de pares ordenados:

$F = \{(1; 5), (a; 6), (3; a^2), (3; 2a+3)\}$
Representa una función; indicar el rango.

A) $\{1; 5\}$
B) $\{5; 9\}$
C) $\{1; 5; 6\}$
D) $\{1; 5; 9\}$
E) $\{5; 6; 9\}$

7.-Sea la función "F" tal que:

$F = \{(3; a^2), (3; 1), (5; 4), (5; a + b), (b; 4)\}$
Calcular la suma de los elementos del dominio.

A) 3   B) 5   C) 8   D) 13   E) 11

8.-Hallar el dominio de la función:

$$F_{(x)} = \frac{7x+1}{x-7}$$

A) $x \in \mathbb{R}$
B) $x \in \mathbb{R} - \{7\}$
C) $x \in \mathbb{R} - \{1\}$
D) $x \in \mathbb{R} - \{8\}$
E) $x \in \mathbb{R} - \{-7\}$

9.-Hallar el dominio de la función:

$$F_{(x)} = \frac{4x - 2}{x + 4}$$

A) $x \in IR$

B) $x \in IR$ - {2}

C) $x \in IR$ - {-4}

D) $x \in IR$ - {4}

E) $x \in IR$ - {1}

10.-Hallar el rango de la función:

$$F_{(x)} = \frac{4x - 1}{x + 2}$$

A) $y \in IR$ - {-4}

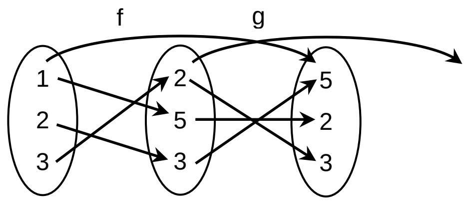
B) $y \in IR$ - {4}

C) $y \in IR$ - {2}

D) $y \in IR$ - {-2}

E) $y \in \phi$

11.-Del siguiente diagrama:



Calcule el valor de:

$$\frac{f_{(2)} + g_{(f_{(2)})}}{f_{(3)} + g_{(f_{(3)})}}$$

A) 1

B) $\frac{3}{5}$

C) $\frac{5}{8}$

D) $\frac{6}{5}$

E) $\frac{8}{5}$

12.-Obtener el número de elementos enteros del domino de la función:

$$F_{(x)} = \frac{\sqrt{x+3} + \sqrt{3-x}}{x^2 - 1}$$

A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

13.-Hallar el rango de la función: $F_{(x)} = \frac{5x+1}{2x-3}$

A) $y \in IR$ - $\left\{-\frac{5}{2}\right\}$

B) $y \in IR$ - $\left\{\frac{5}{2}\right\}$

C) $y \in IR$ - $\left\{\frac{2}{3}\right\}$

D) $y \in IR$ - $\left\{\frac{3}{2}\right\}$

E) $y \in IR$ - $\left\{-\frac{3}{2}\right\}$

14.-¿Cuántos enteros presenta el dominio de la función? $F_{(x)} = \sqrt[4]{1+x} + \sqrt[8]{2-x}$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

15.-Sea la función: $F = \{(a; b), (3; c), (1; 3), (2b; 4)\}$

Además: $F_{(x)} = x - 2a$; Indicar el producto de los elementos de:
$D_F \cap R_F$

A) -3 B) -1 C) 1 D) 3 E) 2

16.-Hallar el rango en: $F_{(x)} = x^2 + 4x + 7;\ x \in \mathbb{R}$

A) $y \in \mathbb{R}$
B) $y \in [1; +\infty]$
C) $y \in [3; +\infty]$
D) $y \in \langle -\infty; 1]$
E) $y \in \langle -\infty; 3]$

17.-Hallar el rango en: $F_{(x)} = x^2 - 6x + 5;\ x \in \mathbb{R}$

A) $\langle -\infty; -4]$
B) $[-4; +\infty]$
C) $\langle -\infty; 4]$
D) $\langle -\infty; 0]$
E) $[4; +\infty\rangle$

18.-Sabiendo que: $F = \{(5; 7a + 2b), (2; 5), (2; a + 2), (5; 5b - 2a)\}$

es una función. Calcular: $F_{(2)} + F_{(F_{(2)})}$

A) 6 B) 7 C) 34 D) 44 E) 54

19.-Indicar la suma de los elementos del dominio de: $F = \left\{(a; b), (1; 7), (\frac{b}{2}; c), (\frac{c}{2};\ 11)\right\}$

si: $F_{(x)} = x + 3a$

A) 15 B) 12 C) 10 D) 9 E) 6

20.-Indicar el dominio de: $y = \sqrt{x - 2}$

A) $\mathbb{R}^+$
B) $[0; 2]$
C) $\langle 2; +\infty\rangle$
D) $[2; +\infty\rangle$
E) $\langle -\infty; 2]$

21.-Dada la función: $F = \{(4; 8), (b; 3), (5; a^2), (4; a + b), (5; 9)\}$
Obtener: $F_{(b)} + F_{(5)} + b$

A) 18 B) 16 C) 29 D) 27 E) 23

22.-Hallar “ab”, si el conjunto de pares ordenados representa una función.

$F = \{(2; 3), (3; a - b), (2; a + b), (3; 1)\}$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

23.-Sea la función “F” tal que: $F = \{(2; 5), (3; a^2), (3; 4), (a; 5)\}$
Hallar “a”.

A) -2 B) 4 C) 6 D) 3 E) -6

24.- Sean las funciones:

F = {(-3; 2), (-4; 1), (0; -2), (1; -2)}
G = {(0; 3), (-4; 3), (7; 1), (8; -3)}

Hallar:

$$E = \frac{F_{(-4)} + G_{(7)}}{F_{(G_{(7)})}}$$

A) 1 B) -1 C) 0 D) 2 E) -2

II.-FUNCIONES II

Funciones especiales

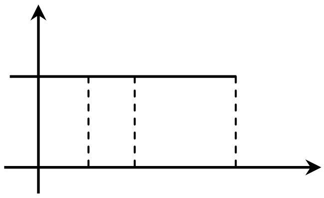
Función constante: F(x) = k

Significa que:

F = {…, (0; k), (1; k), (2; k), …}

$\therefore$ F = {(x, y) / $F_{(x)}$ = k}

Gráfica:



Función identidad

Regla de correspondencia: $F_{(x)} = x$

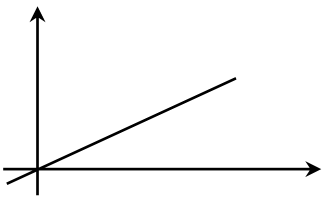
$D_F = \mathbb{R}$; $R_F = \mathbb{R}$

Significa que:

F = {…, (1; 1), (2; 2), (3; 3), …}

$\therefore F_{(x)}$ = {(x; y) / $F_{(x)} = x \rightarrow x = y$}

Gráfica:



Función valor absoluto

Regla de correspondencia: $F_{(x)} = |x|$

$$|x| = \begin{cases} x; si: x \geq 0 \\ -x; si: x < 0 \end{cases}$$

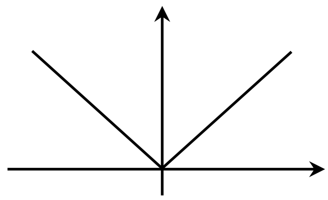
$D_F = \mathbb{R}$; $R_F = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

Significa que:

$F = \{\ldots, (-2; 2), (-1; 1), (0; 0), (1; 1), \ldots\}$
$F_{(x)} = |x|$

$y = |x| \qquad \rightarrow \qquad x = 1; y = 1$
$x = -1; y = 1$

Gráfica:



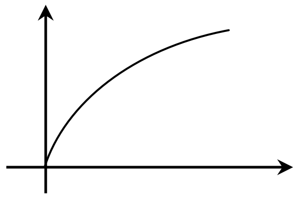
Función raíz cuadrada

Regla de correspondencia: $F_{(x)} = \sqrt{x}$

$D_F = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$; $R_F = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

Significa que:
$F = \{(0; 0), (1; 1), (2; \sqrt{2}), (3; \sqrt{3}), \ldots\}$

Gráfica:

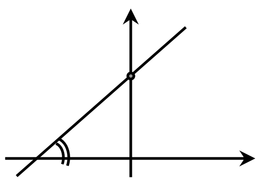


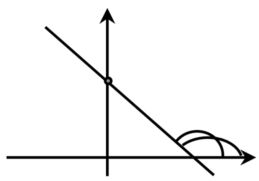
Función Lineal

Regla de correspondencia: $F_{(x)} = ax + b$
"a" y "b" constantes cualesquiera, $a \neq 0$
$D_F = \mathbb{R}$; $R_F = \mathbb{R}$

Su gráfica es una recta, con pendiente "a" e intercepto "b".

Gráfica:





Ejemplo:

Calcular la función lineal que tenga $F_{(1)} = 3$ y además $F_{(2)} = 2F_{(3)}$

Solución:
$F_{(x)} = mx + b$
$F_{(1)} \rightarrow 3 = m + b$ …. (α)

Además:

$F_{(2)} = 2F_{(3)}$

$2m + b = 2(3m + b)$

$2m + b = 6m + 2b$

$b = -4m$ … (β)

De (α) y (β):

$m = -1 \wedge b = 4$

$\therefore\ F_{(x)} = -x + 4$

Función cuadrática:

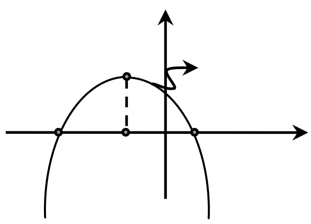
Es una función con dominio en el conjunto de los números reales y cuya regla de correspondencia es:

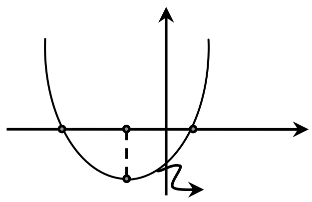
$F_{(x)} = ax^2 + bx + c$ $\qquad$ $a; b; c \in \mathbb{R}; a \neq 0$

Su gráfica es una parábola respecto a una recta vertical, llamada eje de simetría, abierta hacia arriba, si: $a > 0$; y hacia abajo, si: $a < 0$.

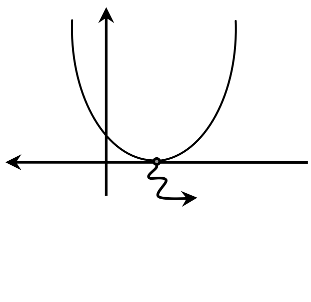
Nota gráfica:

Sea la función: $y = ax^2 + bx + c$
Δ = discriminante = $b^2 - 4ac$

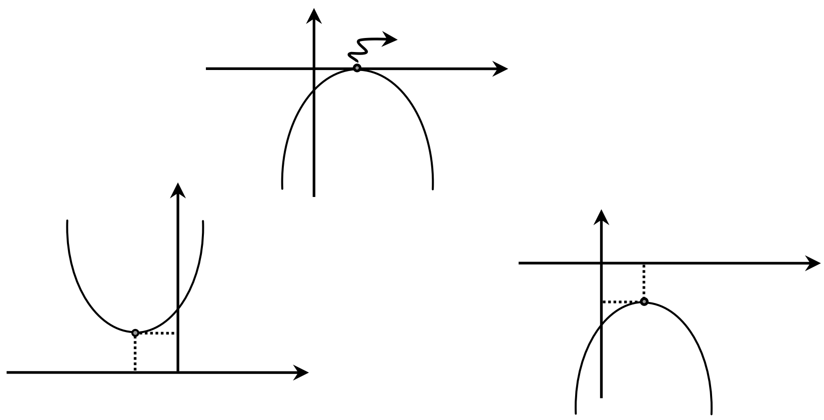




$\{x_1; x_2\}$ raíces de la ecuación, cuando: $y = 0$.



$\{x_1; x_2\}$ raíces iguales de la ecuación, cuando y = 0.



Esta función, cuando: y = 0, los valores de "x" son números complejos.

Otras funciones:

Funciones pares

Son aquellas funciones que se caracterizan por ser simétricas respecto al eje "y", y se cumple que:

Si: $x \in D_F \rightarrow -x \in D_F$

$F_{(x)} = F_{(-x)} \rightarrow \forall\ x \in D_F$

Funciones impares

Son aquellas que se caracterizan por ser simétricas respecto al origen:

Si: $x \in D_F \rightarrow -x \in D_F$

$-F_{(x)} = -F_{(-x)} \rightarrow \forall\ x \in D_F$

Ejemplos:

Indicar qué funciones son pares, impares o ni par ni impar:

I. $F_{(x)} = x^4 + 1$ II. $G_{(x)} = x^3$ III. $H_{(x)} = x - |x|$

Solución:

$F_{(x)}$ es par porque:

$F_{(-x)} = (-x)^4 + 1$

$F_{(-x)} = x^4 + 1$

$F_{(-x)} = F_{(x)} \therefore F_{(x)}$ es par.

$G_{(-x)} = (-x)^3$

$G_{(-x)} = -x^3$

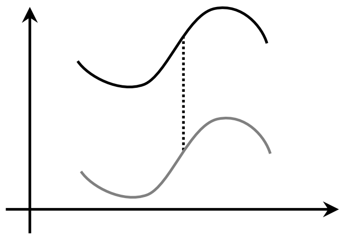
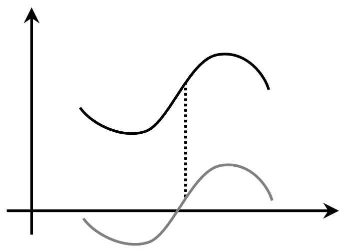
$-G_{(-x)} = x^3$

$-G_{(-x)} = G_{(x)} \therefore G_{(x)}$ es impar.

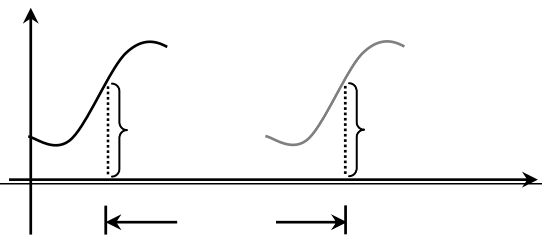
$H_{(-x)} = -x - |-x|$
$-H_{(-x)} = x + |x|$
$-H_{(-x)} \neq H_{(x)};$ también $H_{(-x)} \neq H_{(x)}$
$\therefore H_{(x)}$ no es par ni impar.

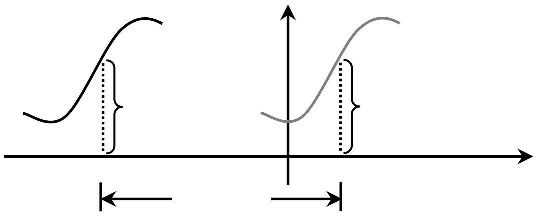
Gráficas de funciones
Aquí se dan algunos medios auxiliares para trazar gráficas de determinados tipos de funciones:

Desplazamiento vertical de la gráfica de y = f(x)

Función	Efecto sobre la gráfica	Interpretación gráfica
y = f(x) + c donde: c > 0	La gráfica de “f” se desplaza verticalmente hacia arriba una distancia “c”.	
y = f(x) – c donde: c > 0	La gráfica de “f” se desplaza verticalmente hacia abajo una distancia “c”.	

Desplazamiento horizontal de la gráfica de y =f(x)

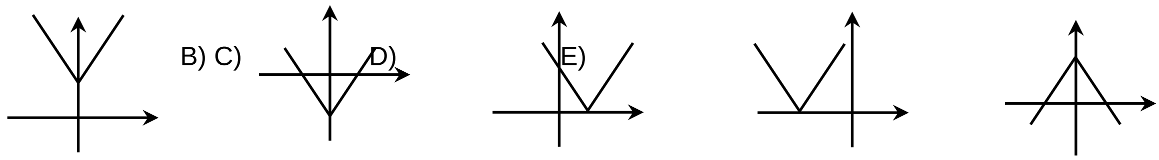
Función	Efecto sobre la gráfica	Interpretación gráfica
y = f(x – c) donde: c > 0	La gráfica de “f” se desplaza horizontalmente hacia la derecha una distancia “c”.	

y = f(x + c) donde: c > 0	La gráfica de “f” se desplaza horizontalmente hacia la izquierda una distancia “c”.	

Ejercicios

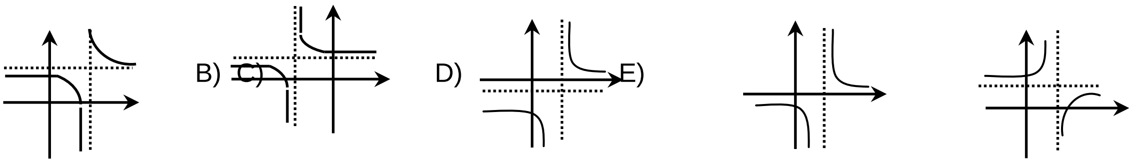
Graficar: $F_{(x)} = |x + 8|$

A) B) C) D) E)



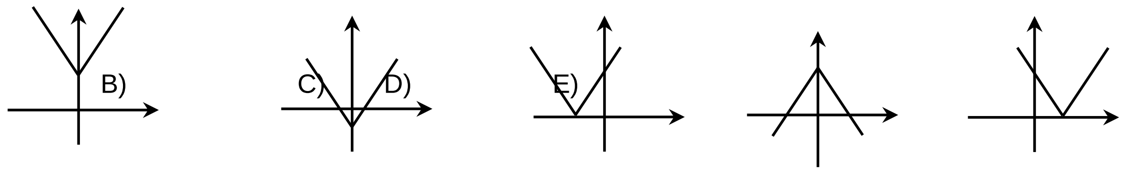
Graficar: $F_{(x)} = \frac{x-1}{x-3}$

A) B) C) D) E)



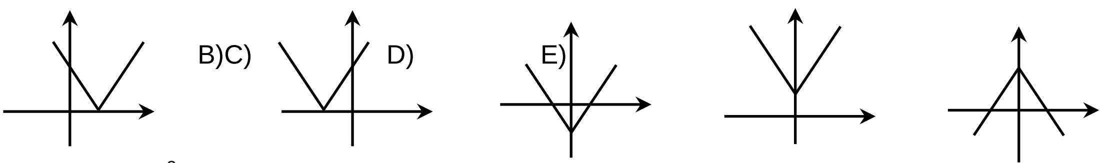
Graficar: $F_{(x)} = |x| + 3$

A) B) C) D) E)



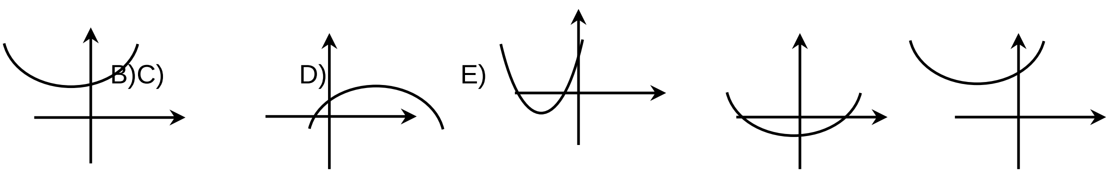
Graficar: $y = |x| - 8$

A) B)C) D) E)

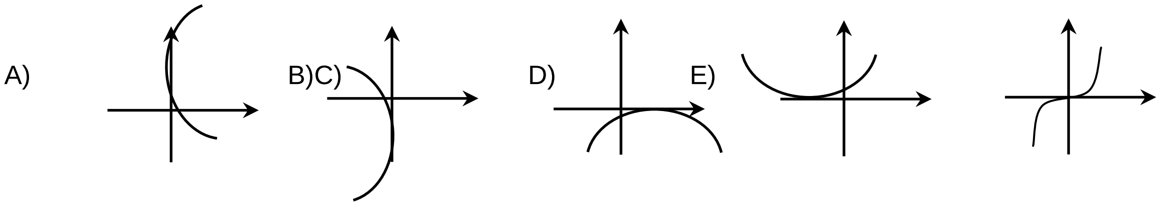


Graficar: $F_{(x)} = (x + 3)^2 - 5$

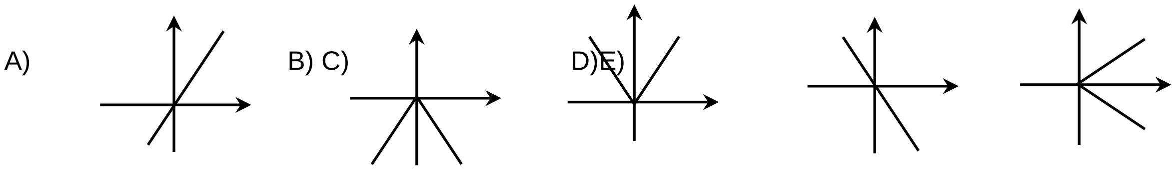
A) B)C) D) E)



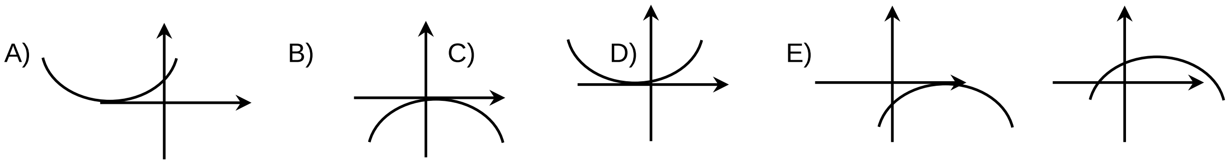
Graficar: $F_{(x)} = -x^2$



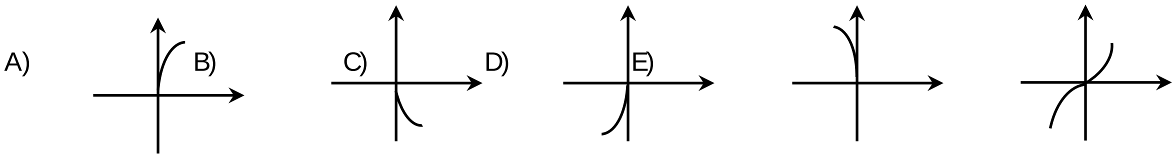
Graficar: $F_{(x)} = -|x|$



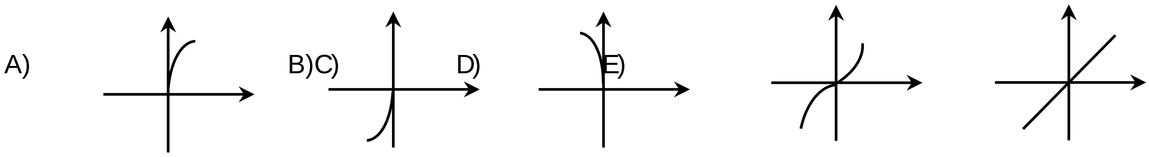
Graficar: $F_{(x)} = 10x - x^2 - 25$



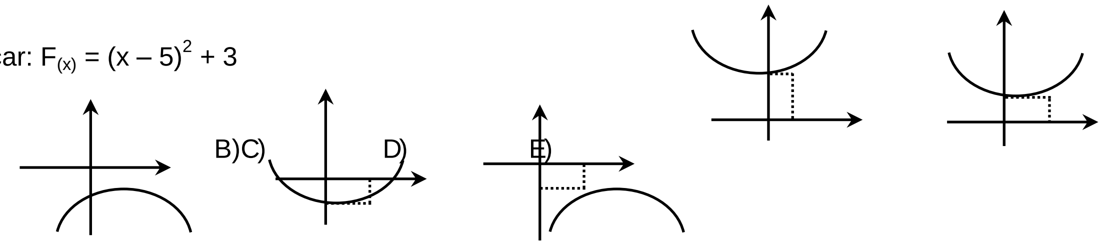
Graficar: $F_{(x)} = -\sqrt{x}$



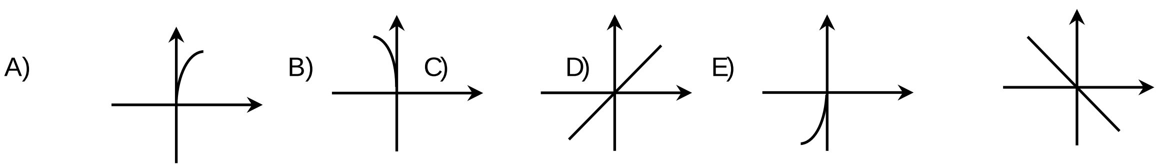
Graficar: $F_{(x)} = -\sqrt{x}$



Graficar: $F_{(x)} = (x-5)^2 + 3$

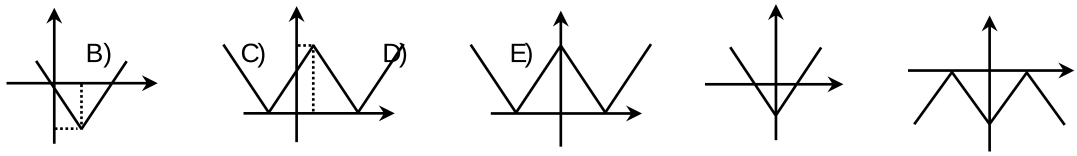


Graficar: $F_{(x)} = -\sqrt{-x}$

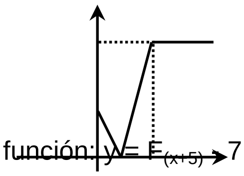


Graficar: $F_{(x)} = || x - 1| - 3|$

A) B) C) D) E)

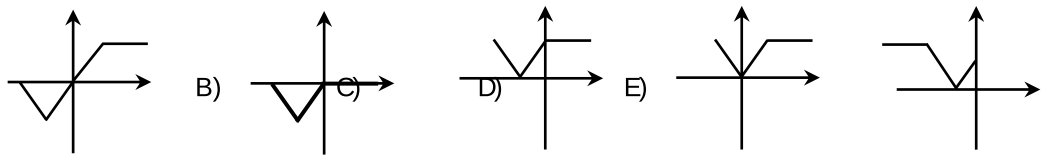


Si la gráfica de la función: $y = F_{(x)}$, es:



Graficar la función: $y = F_{(x+5)} - 7$

A) B) C) D) E)

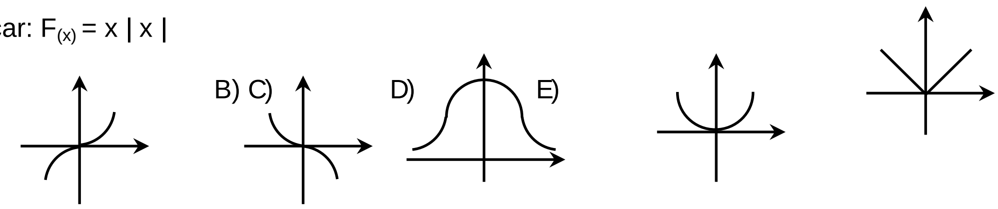


Determine el área de la región formada por la función: $F_{(x)} = - | x | + 4$
y el eje de las abscisas.

A) 8 u^2 B) 12 C) 16 D) 32 E) 64

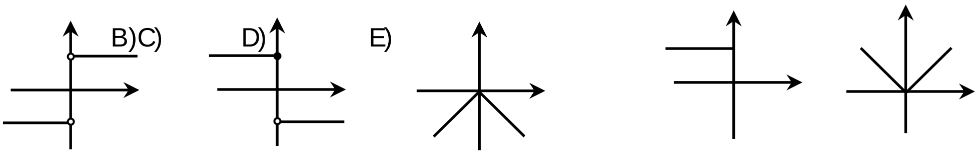
Graficar: $F_{(x)} = x | x |$

A) B) C) D) E)



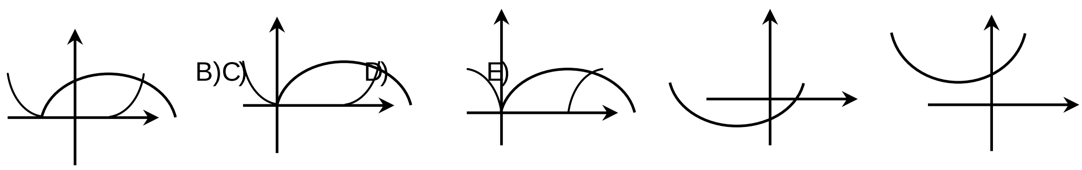
Graficar: $F_{(x)} = \frac{|x|}{x}$

A) B) C) D) E)



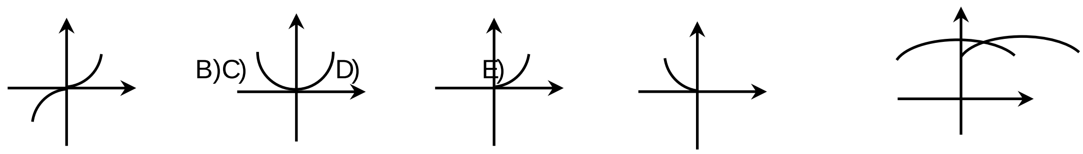
Graficar: $F_{(x)} = | x^2 - 5 |$

A) B) C) D) E)



Graficar: $y = | x |^3$

A) B) C) D) E)



TERCERA UNIDAD

I. COMPETENCIA Desarrolla habilidades lógico matemáticas para identificar y plantear problemas de la realidad, y tomar decisiones para su resolución, desenvolviéndose con responsabilidad y actitud proactiva.

II. CAPACIDADES
15. Define y describe las matrices, determinantes y sus propiedades.
16 Define y describe los vectores y sus propiedades.
17. Discrimina distintos tipos de sistemas de ecuaciones lineales.
18. Aplica Las matrices, determinantes y vectores en la solución de problemas de su entorno.
.

SESIÓN 12
TEMÁTICA: Clasificación de las Matrices.

SESIÓN 13
TEMÁTICA: Operaciones con matrices. Matriz Inversa.

SESIÓN 14
TEMÁTICA: Sistemas de Ecuaciones Lineales.

SESIÓN 15
TEMÁTICA: Definición de determinantes. Operaciones con Determinantes. Solución de sistemas de ecuaciones lineales con determinantes

SESIÓN 16
TEMÁTICA: EVALUACIÓN DE LA TERCERA UNIDAD.

SESIÓN 12

CAPÍTULO VI: MATRICES Y DETERMINANTES

Definición de matriz
Se llama **matriz** de orden **m×n** a todo conjunto rectangular de elementos $\mathbf{a_{ij}}$ dispuestos en **m** líneas horizontales (filas) y **n** verticales (columnas) de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Abreviadamente suele expresarse en la forma A = (a_{ij}), con i =1, 2, ..., m, j =1, 2, ..., n. Los subíndices indican la posición del elemento dentro de la matriz, el primero denota la fila (i) y el segundo la columna (j). Por ejemplo el elemento a_{25} será el elemento de la fila 2 y columna 5.
Dos matrices son **iguales** cuando tienen la misma dimensión y los elementos que ocupan el mismo lugar en ambas son iguales.
Ejemplo
Las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 4 & x \\ y & -2 \end{bmatrix} \quad y \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$\wedge$ Son iguales solo sí: x =0 y = 1

Algunos tipos de matrices
Vamos a describir algunos tipos de matrices que aparecen con frecuencia debido a su utilidad, y de los que es conveniente recordar su nombre.
<u>Atendiendo a la forma</u>
Matriz fila: Es una matriz que solo tiene una fila, es decir m =1 y por tanto es de orden **1 x n**. Ejemplo: A= [2, -3, 5]

Matriz columna: Es una matriz que solo tiene una columna, es decir, n =1 y por tanto es de orden **m x 1**. Ejemplo:

$$C = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Matriz cuadrada: Es aquella que tiene el mismo número de filas que de columnas, es decir **m = n**. En estos casos se dice que la matriz cuadrada es de orden n, y no n x n. Ejemplo:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}_{2x2}$$

Los elementos a_{ij} con i **=** j, o sea a_{ii} forman la llamada diagonal principal de la matriz cuadrada, y los elementos a_{ij}con i + j **=** n +1 la diagonal secundaria.
Matriz traspuesta: Dada una matriz A, se llama transpuesta de A, y se representa por A^t, a la matriz que se obtiene cambiando filas por columnas. La primera fila de A es la primera fila de A^t, la segunda fila de A es la segunda columna de A^t, etc.

<u>Ejemplo</u>La matriz transpuesta de la matriz A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{es } A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -5 & 7 \end{bmatrix}$$

<u>Propiedades de la trasposición de matrices</u>
1. Dada una matriz A, siempre existe su traspuesta y además es única.
2. $(A^t)^t = A$.

Matriz simétrica: Una matriz cuadrada A es simétrica si A = A^t, es decir, si $a_{ij} = a_{ji}$ i, j.
Matriz antisimétrica: Una matriz cuadrada es antisimétrica si A = –At, es decir, si $a_{ij} = -a_{ji}$ i, j.
Ejemplos Consideremos las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -3 & 6 & 7 \\ 5 & 7 & -8 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -4 \\ -3 & 0 & 5 \\ 4 & -5 & 0 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Podemos observar que los elementos simétricos de *A* son iguales, o que $A^T = A$. Siendo así, *A* es simétrica.

Para *B* los elementos simétricos son opuestos entre sí, de este modo *B* es antisimétrica.

A simple vista, *C* no es cuadrada; en consecuencia, no es ni simétrica ni antisimétrica.

Atendiendo a los elementos

Matriz nula es aquella que todos sus elementos son 0 y se representa por **0**.
Ejemplo [0, 0]

Matriz diagonal: Es una matriz cuadrada, en la que todos los elementos no pertenecientes a la diagonal principal son nulos.
Ejemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Matriz escalar: Es una matriz diagonal con todos los elementos de la diagonal iguales.

Ejemplos

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Matriz identidad: Es una matriz escalar con los elementos de la diagonal principal iguales a 1.
Ejemplos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz Triangular: Es una matriz cuadrada que tiene nulos todos los elementos que están a un mismo lado de la diagonal principal. Las matrices triangulares pueden ser de dos tipos:

Triangular Superior: Si los elementos que están por debajo de la diagonal principal son todos nulos. Es decir, $a_{ij} = 0$ □ $i<j$.

Ejemplo

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Triangular Inferior: Si los elementos que están por encima de la diagonal principal son todos nulos. Es decir, $a_{ij}=0$ □$j<i$. **Ejemplo**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

SESIÓN 13

OPERACIONES CON MATRICES

Suma y resta de matrices

Para poder sumar o restar matrices, éstas deben tener el mismo número de filas y de columnas. Es decir, si una matriz es de orden 3 x 2 y otra de 2x3, no se pueden sumar ni restar. Esto es así ya que, tanto para la suma como para la resta, se suman o se restan los términos que ocupan el mismo lugar en las matrices.

Ejemplo:

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -3 \\ 7 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Entonces:

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -3 \\ 7 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 2 & 10 & 5 \\ 7 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -3 \\ 7 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & -11 \\ 7 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

Para sumar o restar más de dos matrices se procede igual. No necesariamente para poder sumar o restar matrices, éstas tienen que ser cuadradas.

Ejemplo*:*

Sean $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$$A + B + C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$A - B + C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 3 & 11 & 9 \end{pmatrix}.$$

Producto de matrices

Para poder multiplicar dos matrices, la primera debe tener el mismo número de columnas que filas la segunda. La matriz resultante del producto quedará con el mismo número de filas de la primera y con el mismo número de columnas de la segunda.

Es decir, si tenemos una matriz 2 x 3 y la multiplicamos por otra de orden 3 x 5, la matriz resultante será de orden 2 x 5.

(2 x 3) * (3 x 5) = (2 x 5)

Se puede observar que el producto de matrices no cumple la propiedad conmutativa, ya que en el ejemplo anterior, si multiplicamos la segunda por la primera, no podríamos efectuar la operación.

3 x 5 por 2 x 3,

puesto que la primera matriz no tiene el mismo número de columnas que filas la segunda.

Supongamos que $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ son matrices tales que el número de columnas de *A* coincide con el número de filas de *B*; es decir, *A* es una matriz *m* □ *p* y *B* una matriz *p* □ *n*. Entonces el producto *AB* es la matriz *m* □ *n* cuya entrada *ij*se obtiene multiplicando la fila *i* de *A* por la columna *j* de *B*.

Esto es,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ . & \dots & . \\ a_{i1} & \dots & a_{ip} \\ . & \dots & . \\ a_{m1} & \dots & a_{mp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1n} \\ . & \dots & . & \dots & . \\ . & \dots & . & \dots & . \\ . & \dots & . & \dots & . \\ b_{p1} & \dots & b_{pj} & \dots & b_{pn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ . & \dots & . \\ . & c_{ij} & . \\ . & \dots & . \\ c_{m1} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\text{donde } c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ip}b_{pj}$$

Ejemplo:

1.

$$\begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra_1 + sb_1 & ra_2 + sb_2 & ra_3 + sb_3 \\ ta_1 + ub_1 & ta_2 + ub_2 & ta_3 + ub_3 \end{pmatrix}$$

2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 0 & 1\cdot 1 + 2\cdot 2 \\ 3\cdot 1 + 4\cdot 0 & 3\cdot 1 + 4\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}$$

Producto por un escalar

El producto de un escalar *k* por la matriz *A*, escrito *k·A* o simplemente *kA*, es la matriz obtenida multiplicando cada entrada de *A* por *k*:

$$kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

$$\text{Sea} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Entonces:

$$3A = \begin{pmatrix} 3\cdot 1 & 3\cdot(-2) & 3\cdot 3 \\ 3\cdot 4 & 3\cdot 5 & 3\cdot(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 12 & 15 & -6 \end{pmatrix}$$

División de matrices

La división de matrices se define como el producto del numerador multiplicado por la matriz inversa del denominador. Es decir, sean las matrices *A* y *B* tal que $A/B = AB^{-1}$:

Si una matriz está dividida entre un escalar, todos los términos de la matriz quedarán divididos por ese escalar.

Ejemplo:

Sean la matriz $A = \begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$, y $k = 2$ un escalar. En este caso:

$$A/k = \frac{\begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} 8/2 & 16/2 \\ 3/2 & -6/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 3/2 & -3 \end{pmatrix}$$

DETERMINANTES

A cada matriz *n*-cuadrada $A = (a_{i\,j})$ se le asigna un escalar particular denominado determinante de *A*, denotado por det (A), | A | o

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

Una tabla ordenada $n \times n$ de escalares situada entre dos líneas verticales, llamada determinante de orden *n*, no es una matriz.
La función determinante apareció por primera vez en el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales. Veremos que es una herramienta indispensable en el estudio y obtención de éstas.

DETERMINANTES DE ORDEN UNO Y DOS

Los determinantes de orden uno y dos se definen como sigue:

$$|a_{11}| = a_{11}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Así, el determinante de una matriz 1×1 $A = (a_{11})$ es el propio escalar a_{11}, es decir, det $(A) = |a_{11}| = a_{11}$.

Ejemplos:

a) Dado que el determinante de orden uno es el mismo escalar, tenemos det (24) = 24, det(-3) = -3, det ($3x$+5) = $3x$+5.

b)

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (3)(1) - (5)(2) = 3 - 10 = -7.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = (2)(-4) - (-3)(1) = -8 - (-3) = -8 + 3 = -5.$$

DETERMINANTES DE ORDEN TRES

Consideremos una matriz 3x 3 arbitraria $A = (a_{i\,j})$. El determinante de A se define como sigue:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} -$$

Obsérvese que hay seis productos, cada uno formado por tres elementos de la matriz. Tres de los productos aparecen con signo positivo (conservan su signo) y tres con signo negativo (cambian su signo).

Para calcular los determinantes de orden tres, el siguiente diagrama puede ayudar a resolverlos:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{(Para los tres productos positivos).}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{(Para los tres productos negativos).}$$

Ejemplo:

Calcular el valor del determinante:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -5 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (3)(2)(4) + (2)(-5)(-2) + (0)(1)(1) - (-2)(2)(1) - (0)(2)(4) - (1)(-5)(3) =$$

= 24 + 20 + 0 - (-4) - 0 - (-15) = 44 + 4 + 15 = 63

El determinante de la matriz 3 x 3 $A = (a_{i\,j})$ puede reescribirse como:

$\det(A) = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) =$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

que es una combinación lineal de tres determinantes de orden dos, cuyos coeficientes (con signos alternantes) constituyen la primera fila de la matriz dada. Esta combinación lineal puede indicarse de la forma siguiente:

$$a_{11}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Nótese que cada matriz 2 x 2 se obtiene suprimiendo en la matriz inicial la fila y la columna que contienen su coeficiente.

Ejemplo:

Para demostrar que la propiedad anterior se cumple, trabajaremos con :

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -5 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -5 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -5 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -5 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 3\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & -5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$= 3(8+5) - 2(0-10) + 1(0+4) = 39 + 20 + 4 = 63$

PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

Las propiedades básicas del determinante son las siguientes:

1. El determinante de una matriz A y el de su traspuesta A^T son iguales, es decir,

$$|A| = |A^T|$$

2. Sea A una matriz cuadrada,

Si A posee dos filas (columnas) iguales, necesariamente $|A| = 0$.

Si A es triangular, esto es, A sólo tiene ceros por encima o por debajo de la diagonal principal, entonces $|A|$ es igual al producto de los elementos de la diagonal.

3. Supongamos que B se ha obtenido de A mediante una operación elemental entre filas o columnas,

Si se han intercambiado dos filas (columnas) de A, $|B| = - |A|$.

Si se ha sumado un múltiplo de una fila (columna) a otra, entonces $|B| = |A|$.

Si se ha multiplicado una fila (columna) de A por un escalar k, $|B| = k|A|$.

4. Sea A cualquier matriz n-cuadrada, son equivalentes los siguientes principios:

A es invertible, es decir, A tiene inversa A^{-1}.
$AX = 0$ tiene solamente la solución trivial.
El determinante de A no es nulo: $|A| \neq 0$.

5. El determinante es una función multiplicativa. Es decir, el determinante del producto de matrices A y B es el producto de los determinantes: $|AB| = |A|\ |B|$.

6. Supongamos que A y B son matrices similares, entonces: $|A| = |B|$.

Ejercicio: cálculo de determinantes

Calcular los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -4 \end{vmatrix}.$

b) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 5 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 5 & 2 & -7 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 4 \\ 5 & 0 & 7 \end{vmatrix}.$

c) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 5 & 4 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 6 & -2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & -8 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & -2 \end{vmatrix}.$

b) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 5 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$ al haber toda una fila nula, el determinante da como resultado $= 0$.

c) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 5 & 4 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 6 & -2 \end{vmatrix} =$

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & -8 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & -2 \end{vmatrix} =$$

MATRICES INVERTIBLES

Se dice que una matriz cuadrada A es invertible, si existe una matriz B con la propiedad de que

$$AB = BA = I$$

siendo I la matriz identidad. Denominamos a la matriz B la inversa de A y la denotamos por A^{-1}.

Ejemplo:

Supongamos $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Entonces:

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-5 & -10+10 \\ 3-3 & -5+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-5 & 15-15 \\ -2+2 & -5+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Puesto que $AB = BA = I$, A y B son invertibles, siendo cada una la inversa de la otra.

<u>Método de Gauss</u>

Sea $A = (a_{i\,j})$ una matriz cuadrada de orden n. Para calcular la matriz inversa de A, que denotaremos como A^{-1}, seguiremos los siguientes pasos:

Paso 1. Construir la matriz $n \times 2n$ $M = (A \,\vdots\, I)$ esto es, A está en la mitad izquierda de M y la matriz identidad I en la derecha.

Paso 2. Se deja tal y como está la primera fila de M, y debajo del primer término de la diagonal principal, a_{11}, que llamaremos *pivote*, ponemos ceros. Luego se opera como se indica en el siguiente ejemplo.

Ejemplo:

Consideremos una matriz 3 x 3 arbitraria

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Paso 1.

$$M = (A \; \vdots \; I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

Paso 2.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} & a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13} & a_{11}0 - a_{21}1 & a_{11}1 - a_{21}0 & a_{11}0 - a_{21}0 \\ 0 & a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12} & a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13} & a_{11}1 - a_{31}1 & a_{11}0 - a_{31}0 & a_{11}1 - a_{31}0 \end{array}\right)$$

El siguiente paso es igual que el anterior, pero esta vez se coge como pivote el segundo término de la diagonal principal.

Al llegar al último término de la diagonal, se procede igual que antes, pero poniendo los ceros encima del nuevo pivote. Se observa que al coger como pivote el último término de la diagonal, la matriz *A* se transforma en una matriz triangular.

Una vez realizados todos los pasos, la mitad izquierda de la matriz *M* se convierte en una matriz diagonal. En este momento hay que proceder a transformar, si es que no lo está, la mitad izquierda en la matriz identidad, dividiendo si fuera necesario las filas de *M* por un escalar.

Ejemplo:

Supongamos que queremos encontrar la inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

Primero construimos la matriz $M = (A \,\vdots\, I)$,

$$M = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1-2\cdot 0 & 3-2\cdot 2 & 0-2 & 1-2\cdot 0 & 0 \\ 0 & 1-4\cdot 0 & 8-4\cdot 2 & 0-4 & 0 & 1-0 \end{array}\right)$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right), \text{ luego se coge como pivote } a_{22} = -1,$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0-(-1) & 4-(-2) & 0-1 & -1-0 \end{array}\right)$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{array}\right)\sim$$

La mitad izquierda de *M* está en forma triangular, por consiguiente, *A* es invertible. Si hubiera quedado toda una fila con ceros en la mitad *A* de *M*, la operación habría terminado (*A* no es invertible).

A continuación, cogemos como pivote a_{33}, ponemos ceros encima de éste y seguimos operando hasta que nos quede una matriz diagonal.

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -11 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{array}\right).$$

Ya que la matriz colocada en la mitad izquierda es diagonal, no hay que operar más. Transformamos la matriz diagonal en una matriz identidad; para ello hay que dividir la segunda fila entre -1:

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -11 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{array}\right).$$

La matriz que ha quedado en la mitad derecha de *M* es precisamente la matriz inversa de *A*:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Para comprobar si el resultado es correcto, se procede a multiplicar AA^{-1}, teniendo que dar como resultado la matriz identidad *I*.

Comprobación:

$AA^{-1} = I$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11+0+12 & 2+0-2 & 2+0-2 \\ -22+4+18 & 4+0-3 & 4-1-3 \\ -44-4+48 & 8+0-8 & 8+1-8 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Ejercicio: operaciones con matrices

Sean

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

a)¿Qué clase de matrices son?
b) Calcular:
- *A* - *B* + *C*.
A + *B* - *C*.
3*A* + *C*/2.

c) Calcular:
(*A* · *B*) /*C*.

d) Calcular la inversa de *A* (A^{-1}) y comprobar el resultado.

ADJUNTA DE UNA MATRIZ

Consideremos una matriz *n*-cuadrada $A = (a_{ij})$ sobre un cuerpo *K*. El adjunto de *A*, denotado por adj*A*, es la traspuesta de la matriz de cofactores de *A*:

$$\text{adj}\, A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

$$\text{Sea } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Los cofactores de los nueve elementos de *A* son:

$$A_{11} = + \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -17 \quad A_{12} = - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 4 \quad A_{13} = + \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 6$$

$$A_{21} = - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -11 \quad A_{22} = + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 7 \quad A_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{31} = + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \quad A_{33} = + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -3$$

La traspuesta de la matriz de los cofactores anteriores proporciona el adjunto de *A*:

$$\text{adj}\, A = \begin{pmatrix} -17 & -11 & 1 \\ 4 & 7 & -2 \\ 6 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Aplicación del adjunto para hallar la matriz inversa

Para toda matriz cuadrada *A*,

$A \cdot (\text{adj}A) = (\text{adj}A) \cdot A = |A|I$

De este modo, si $|A| \neq 0$,

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{adj}\, A)$$

Observemos que esta propiedad nos permite hallar por otro método la inversa de una matriz.

Ejemplo:

Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \ \text{adj}\, A = \begin{pmatrix} -17 & -11 & 1 \\ 4 & 7 & -2 \\ 6 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

y el det*A*:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -15 + 8 + 0 - 6 - 0 - 2 = -15 \neq 0.$$

Así pues, aplicando la propiedad anterior:

$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\mathrm{adj}\, A)$, obtendremos:

$$A^{-1} = -1/15 \begin{pmatrix} -17 & -11 & 1 \\ 4 & 7 & -2 \\ 6 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

CÁLCULO DEL RANGO DE UNA MATRIZ

Consideremos la matriz $A = (a_{ij})$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

1. El rango de la matriz *A* coincide con el de la matriz *A*' que se obtiene suprimiendo en la matriz *A* todas la líneas (filas o columnas) cuyas entradas estén sólo formadas por ceros, es decir, que sean nulas.

2. Consideremos la matriz:

$A_1 = (a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n})$

y supongamos que

$$a_{11} \neq 0,$$

entonces :

rango (*A*) □rango(A_1) = 1

3. Añadimos filas de la matriz *A*a la matriz A_1 hasta encontrar una matriz que cumpla:

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots a_{1n} \\ a_{i1} & \ldots a_{in} \end{pmatrix}, \text{ donde } (1 < i \leq n),$$

tal que posea un menor no nulo de la forma:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{1j} \\ a_{i1} & a_{ij} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Por consiguiente,

rango (A) □rango(A_2) = 2.

Si esto no hubiese sido posible, entonces:

rango (A) = 1.

Supongamos que rango (A) rango (A_2) y que i = 2 y j = 2.

4. Añadimos filas a la matriz A_2 hasta encontrar una matriz que cumpla:

$$A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{in} \end{pmatrix}$$

de forma que posea un menor de orden tres de la forma:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2j} \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{ij} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Entonces:

rango (A) rango (A_2) = 3.

En caso de no haber sido posible encontrar dicho menor, entonces:
rango (A) = rango (A_2) = 2.

Suponiendo que rango (A) □rango (A_3) y que i = 3 y j = 3, se procedería como en los casos anteriores, y así sucesivamente hasta agotar todas las filas de la matriz A.

Ejemplos:

a) Sea la matriz A una matriz de orden tres. Hallar el rango (A).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 3 & 6 & 5 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Como A es una matriz cuadrada de orden tres, como máximo el rango (A) puede valer tres. Calcularemos primero el determinante o determinantes de las submatrices de orden dos de A. Así pues

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0.$$

Ya que el resultado es cero, probaremos con todas las submatrices de A hasta encontrar una cuyo determinante no sea cero. Si no encontramos ninguna, el rango (A) = 1.

$$\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 - (-15) = 2 + 15 = 17 \neq 0.$$

Puesto que el resultado de calcular el determinante de esta submatriz de *A* no es nulo, podemos afirmar de momento que el rango (*A*) = 2.

Añadimos ahora una columna y una fila más para ver si el rango puede ser tres:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 3 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 24 + 0 + 15 - 0 - 24 + 2 = 17 \neq 0.$$

Dado que el determinante de *A* no es nulo y a su vez es de orden tres, el rango
(*A*) = 3.

No necesariamente para poder calcular el rango de una matriz, ésta tiene que ser cuadrada. Así, en el siguiente ejemplo:

b) Calcular el rango de la matriz *B* de orden 3 x 4.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -4 + 4 = 0. \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 0 = -1 \neq 0.$$

Como hay una determinante de orden dos no nulo, el rango de la matriz *B* es mayor o igual que 2. Calculamos a continuación los determinantes de orden superior:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 - 4 + 2 + 4 + 4 - 2 = 0.$$

Probamos con un segundo determinante de orden tres:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -4 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -12 + 2 + 0 + 0 + 12 + 1 = 3 \neq 0.$$

Así pues, como hay un determinante de orden tres que no es nulo, el rango (*B*) = 3.

Un rango mayor que 3 no se puede hallar, ya que no se puede formar un determinante de orden 4. Recuérdese que para poder calcular el determinante de una matriz o de una submatriz, éstas tienen que ser cuadradas.

Ejercicio: cálculo de la matriz inversa

Calcular, por la propiedad anterior, la inversa de las siguientes matrices:

a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

b)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

<u>SESIÓN Nº 14</u>

MATRICES Y SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

La matriz ampliada *M* de un sistema de *m* ecuaciones con *n* incógnitas es la siguiente:

$$M = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Cada fila de *M* corresponde a una ecuación del sistema y cada columna a los coeficientes de una incógnita, excepto la última, que corresponde a las constantes del sistema.

Un sistema de ecuaciones lineales puede resolverse trabajando con su matriz ampliada, específicamente, reduciéndola a forma escalonada mediante el proceso de Gauss.

<u>Método de Gauss</u>

Para resolver sistemas de ecuaciones lineales, se aplica el método de Gauss. Este proceso se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo:

Sea el sistema,

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x &+& 2y &+& z &=& 3\\ 2x &+& 5y &-& z &=& -4 \\ 3x &-& 2y &-& z &=& 2\end{array}\right\}$$

su matriz ampliada asociada es

$$\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc} x & y & z & & \end{array}\\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & \vdots & 3\\ 2 & 5 & -1 & \vdots & -4\\ 3 & -2 & -1 & \vdots & 2\end{pmatrix}\end{array}.$$

Ahora resolvemos por el método de Gauss sabiendo que la primera columna corresponde a los coeficientes de la *x*, la segunda a los de la *y*, la tercera a los de la *z* y la cuarta a los términos independientes:

$$\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc} x & y & z & & \end{array}\\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & \vdots & 3\\ 2 & 5 & -1 & \vdots & -4\\ 3 & -2 & -1 & \vdots & 2\end{pmatrix}\end{array} \sim \begin{array}{c}\begin{array}{ccccc} x & y & z & & \end{array}\\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & \vdots & 3\\ 0 & 1 & -3 & \vdots & -10\\ 0 & -8 & -4 & \vdots & -4\end{pmatrix}\end{array} \sim \begin{array}{c}\begin{array}{ccccc} x & y & z & & \end{array}\\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & \vdots & 3\\ 0 & 1 & -3 & \vdots & -10\\ 0 & 0 & -28 & \vdots & -84\end{pmatrix}\end{array} \sim$$

$$\sim \begin{array}{c}\begin{array}{ccccc} x & y & z & & \end{array}\\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & \vdots & 3\\ 0 & 1 & -3 & \vdots & -10\\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 3\end{pmatrix}\end{array} \sim \begin{array}{c}\begin{array}{ccccc} x & y & z & & \end{array}\\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \vdots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -1\\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 3\end{pmatrix}\end{array} \sim \begin{array}{c}\begin{array}{ccccc} x & y & z & & \end{array}\\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 2\\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -1\\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 3\end{pmatrix}\end{array}.$$

De este modo, el sistema tiene la solución única

$x = 2$, $y = -1$, $z = 3$.

La resolución de sistemas de ecuaciones lineales por matrices, aplicando el método de Gauss u otros, es una de las múltiples aplicaciones que tienen éstas.

SESIÓN 15

Ejercicio: Resolución de sistemas de ecuaciones lineales por matrices

Hallar el valor de *x, y, z, t* en los siguientes sistemas de ecuaciones lineales aplicando matrices:

a) $$\left.\begin{array}{rcrcrcrcr} x &+& y &-& 2z &+& 4t &=& 5\\ 2x &+& 2y &-& 3z &+& t &=& 3\\ 3x &+& 3y &-& 4z &-& 2t &=& 1\end{array}\right\}$$

b) $$\left.\begin{array}{rcrcrcrcr} x &+& y &-& 2z &+& 3t &=& 4\\ 2x &+& 3y &-& 3z &+& t &=& 3\\ 5x &+& 7y &+& 4z &+& t &=& 5\end{array}\right\}$$

a) La matriz *M* asociada al sistema de ecuaciones es:

$$M = \begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z & t & & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 & \vdots & 5 \\ 2 & 2 & -3 & 1 & \vdots & 3 \\ 3 & 3 & -4 & -2 & \vdots & 1 \end{pmatrix} \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z & t & & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 & \vdots & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & \vdots & -7 \\ 0 & 0 & 2 & -14 & \vdots & -14 \end{pmatrix} \end{array}.$$

La tercera fila se suprime, puesto que es múltiplo de la segunda y resultaría una fila nula. Así, el sistema queda formado por dos ecuaciones con cuatro incógnitas:

$$\sim \begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z & t & & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 & \vdots & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & \vdots & -7 \\ 0 & 0 & 2 & -14 & \vdots & -14 \end{pmatrix} \end{array}.$$

La solución del sistema es compatible e indeterminado, esto es, tiene infinitas soluciones.

$x = -9 - y + 10t$

$z = 7t - 7$ ó $(- 9 - y + 10t, y, 7t - 7, t)$.

Dependiendo de qué valores se escojan para *yyt*, salen distintos resultados. Así, para $y = t = 0$ tendremos la solución del sistema

$x = -9$, $y = 0$, $z = -7$, $t = 0$.

b) La matriz *M* asociada al sistema de ecuaciones es:

$$M = \begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z & t & & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & \vdots & 4 \\ 2 & 3 & 3 & -1 & \vdots & 3 \\ 5 & 7 & 4 & 1 & \vdots & 5 \end{pmatrix} \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z & t & & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & \vdots & 4 \\ 0 & 1 & 7 & -7 & \vdots & -5 \\ 0 & 2 & 14 & -14 & \vdots & -15 \end{pmatrix} \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z & t & & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & \vdots & 4 \\ 0 & 1 & 7 & -7 & \vdots & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & -5 \end{pmatrix} \end{array}$$

No hay necesidad de continuar calculando nada más, puesto que la matriz escalonada ya nos indica que el sistema es incompatible (SI), es decir, que no tiene solución. Específicamente, la tercera fila de la matriz escalonada corresponde a la ecuación

$$0x + 0y + 0z + 0t = -5$$

obteniendo como resultado $0 = -5$, que es absurdo. Por lo tanto, decimos que no tiene solución.

EJERCICIOS

1. Calcular el valor de las variables, para que las igualdades se cumpla

$$\begin{pmatrix} x & 3 & 4 \\ 2 & -1 & y \\ 1 & z & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & t & -1 \\ 3 & 4 & x \\ u & y & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & v+1 \\ 5 & w-2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x+1 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & z+2 \\ -1 & y & 2 \end{pmatrix} + 2\bullet\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & u+2 & 7 \\ v+1 & 5 & -7 \\ 7 & 0 & w \end{pmatrix}$$

$$3\bullet\begin{pmatrix} x & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 1 & y & 2 \end{pmatrix} + 2\bullet\begin{pmatrix} -2 & t & 0 \\ z & 1 & -1 \\ u & 2 & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w-2 & 1 & -v \\ 4 & 2w & 2v+y \\ -1 & x+7 & 12 \end{pmatrix}$$

$$2\bullet\begin{pmatrix} 1 & x+1 & 0 \\ 0 & -2 & y-1 \\ z & 1 & 2 \end{pmatrix} - 3\bullet\begin{pmatrix} u & -1 & 2 \\ 1 & v+2 & 3 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 2v-2z \\ u+y & -7 & 1-7z \\ 4 & w+11 & t \end{pmatrix}$$

2. Dadas las matrices:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcular: a) A + B b) A – B c) A x B d)B x A e) $A^t + B^t$

3. Sean $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 7 & -1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 0 & -4 \\ -3 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ Calcule AB. ¿Está definido el producto BA? Explique su respuesta.

4. Determinar los valores de los siguientes determinantes.

a) $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 8 \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & -6 & 1 \end{vmatrix}$

5. Calcular el determinante de las matrices

A = $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ A = $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ A = $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

A = $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ A = $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ A = $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ A = $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ A = $\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ A = $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

6. Resolver los siguientes sistemas lineales

a)4x + 2y +z = 8
3x +4y + 2z = -1
2x - y + 5z = 3

b)x+y+z= 4
x-2y+3z=13
x+3y+4z=11

c)x-2y+3z=2
2x – 3y +z=1
3x- y + 2z =9

d)x+y+z =5
2x – y+ z =2
3x +2y =8

HABILIDADES LÓGICO MATEMÁTICAS
Enviado por:
Ing.+Lic. Yunior Andrés Castillo S.
"NO A LA CULTURA DEL SECRETO, SI A LA LIBERTAD DE INFORMACION"®
www.monografias.com/usuario/perfiles/ing_lic_yunior_andra_s_castillo_s/monografias
Página Web: yuniorandrescastillo.galeon.com
Correo: yuniorcastillo@yahoo.com
yuniorandrescastillosilverio@facebook.com
Twitter: @yuniorcastillos
Celular: 1-829-725-8571
Santiago de los Caballeros,
República Dominicana,
2015.
"DIOS, JUAN PABLO DUARTE Y JUAN BOSCH – POR SIEMPRE"®