HISTORIA DEL ALGEBRA

Cuando hablamos de Álgebra, al igual que cuando hablamos de cualquier otra disciplina, es importante conocer la Historia. Hasta llegar al estado actual han existido muchas personas que se han preocupado de estos temas y que han aportado algo que, poco a poco, se ha convertido en lo que nosotros conocemos. Pero no ha sido fácil ni rápido.

La historia oficial del álgebra como la de otras ramas de la ciencia toma la forma de un relato lento pero inexorable, en el descubrimiento de técnicas y fórmulas para la resolución de ecuaciones y en el descubrimiento de un lenguaje en el que esas técnicas y esas fórmulas aparecen. Los períodos de este progreso suelen dividirse en:

a) “álgebra retórica”: no existen abreviaturas, ni símbolos especiales. Se usa el mismo lenguaje escrito. Época paleobabilónica entre 2000 y 1600 a. n. e.

b) “álgebra sincopada”: este término lo ideó Nesselman en 1842. Se usan ya algunos términos algunos términos técnicos y abreviaturas. Ejemplo la *Aritmética* de Diofanto. Siglo III.

c) “álgebra simbólica”: Es ya un álgebra mucho más parecida a la que usamos hoy.

Con símbolos especiales, incógnitas, etc. Siglos XVI y XVII, Vièta.

FECHAS DE INTRODUCCIÓN DE ALGUNOS SÍMBOLOS MATEMÁTICOS		
Año	Personaje	Símbolo
1228	Leonardo de Pisa	Línea de quebrado
1464	Regiomontano	Punto de la multiplicación
1489	Widmann	Los signos + y - de imprenta
1524-1525	Ries-Rudolff	Signo de raíz
1557	Recorde	Signo de igualdad
1593	Vieta	Uso frecuente de parentésis
1617	Neper	Coma decimal
1637	Descartes	Escritura de potencias a^3, b^4

Los símbolos algebraicos no han existido siempre por extraño que nos parezca. Por ejemplo en esta tabla puede verse que el signo igual no empezó a usarse hasta 1557.

2. EL ÁLGEBRA EN LAS CIVILIZACIONES ANTIGUAS

2 .1 El álgebra en la antigua babilonia:

La principal fuente de información sobre la civilización y la matemática babilónica procede de textos grabados con inscripciones cuneiformes en tablillas de arcilla. Los textos se escribían sobre las tablillas cuando la arcilla estaba aún fresca. Después podían borrarse y usarse otra vez o también cocerse en hornos o simplemente se endurecían al sol. Las tablillas más antiguas que se conservan son del 2000 a.C. Varios miles de tablillas esperan todavía ser descifradas.

Estas tablillas han proporcionado abundante información sobre el sistema numérico y los métodos de cálculo que usaban. También las hay con textos que contienen problemas algebraicos y geométricos. Los babilonios disponían de fórmulas para resolver ecuaciones cuadráticas. No conocían los números negativos por lo que no se tenían en cuenta las raíces negativas de las ecuaciones. Su sistema de numeración era de base 60 y ha llegado hasta nosotros en la medida del tiempo y de los ángulos. Llegaron a resolver problemas concretos que conducían a sistemas de cinco ecuaciones con cinco incógnitas e incluso se conoce un problema astronómico que conduce a un sistema de diez ecuaciones con diez incógnitas. Tampoco conocían el cero lo que lleva a problemas de interpretación de las cantidades. Para evitar el problema, reducían el tamaño de las cifras adyacentes. A partir del siglo VI a.C. Sin embargo, fue utilizado un signo de omisión interior, es decir una especie de cero.

Por supuesto en esta fase el álgebra es retórica, es decir no se usan símbolos especiales. Si aparecen palabras como por ejemplo *us* (longitud) usadas como incógnitas posiblemente porque muchos problemas algebraicos surgen de situaciones geométricas y esto hizo que esa terminología se impusiera. También usaban antiguos pictogramas sumerios para designar las incógnitas de una ecuación.

Un ejemplo de la manera en que aparecen formulados los problemas podria ser:

“*He multiplicado la longitud por la anchura y el área es 10. He multiplicado la longitud por ella misma y he obtenido un área. El exceso de longitud sobre la anchura lo he multiplicado por sí mismo y el resultado por 9. Y éste área es el área obtenida multiplicando la longitud por ella misma. ¿Cuáles son la longitud y la anchura?”*

Hoy traduciríamos este problema a lenguaje algebraico así:

$xy = 10$
$9(x-y)^2 = x^2$
Resolver esto lleva a una ecuación bicuadrada.Enlaces:
http://descartes.cnice.mecd.es/taller_de_matematicas/Historia/Mesopotamia.htm

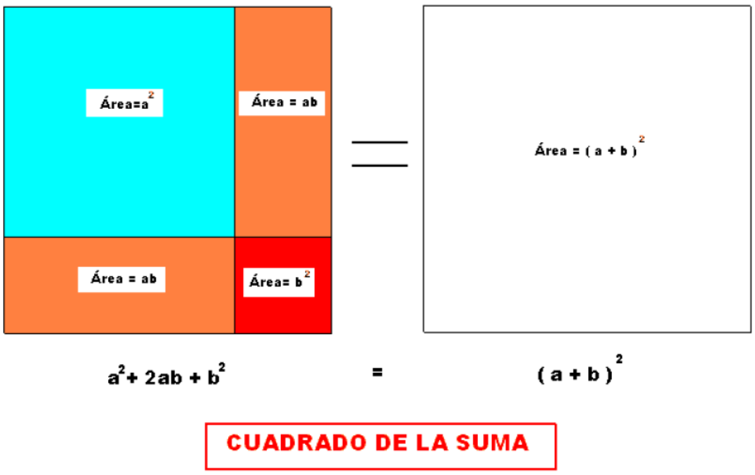
2 .2 El álgebra en la civilización egipcia:
Dejaron pocas evidencias matemáticas. El papiro es un material que resiste mal el paso del tiempo. Hay dos papiros de gran importancia: el papiro *Rhind* y el *Moscú*. El *Rhind* fue confeccionado hacia 1650 a.C. por un escriba llamado Ahmes quien dice haberlo copiado de un original doscientos años más antiguo. Expone 87 problemas y sus soluciones y se usa la escritura hierática en vez de la jeroglífica. No se sabe si fue escrito al estilo de un libro de texto el cuaderno de notas de un alumno. El *Moscú* es parecido con 25 problemas y sus soluciones. En lo referente al álgebra, los papiros contienen soluciones a problemas con una incógnita. Sin embargo los procesos eran puramente aritméticos y no constituían un tema distinto a éste que es el predominante junto con problemas geométricos.
Por ejemplo, el problema 31 del papiro de Ahmes traducido literalmente dice: “Una cantidad; sus 2/3, su ½, su 1, su totalidad asciende a 33”. Esto para nosotros significa:

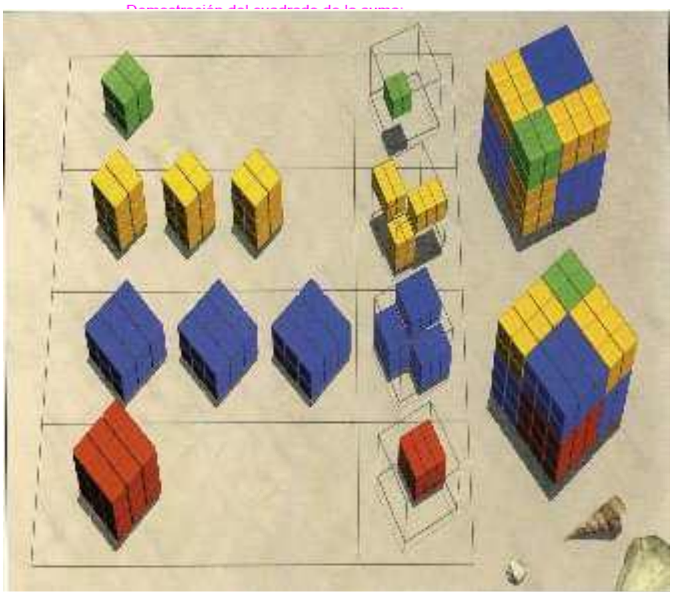
$$\frac{2x}{3}+\frac{x}{2}+\frac{x}{7}+x=3$$

El único tipo de ecuación de segundo grado que aparece es el más sencillo a $x^2 = b$
Enlaces: http://www.egiptologia.org/ciencia/matematicas/

2.3 El álgebra en la civilización china:
De la época de la primera dinastía Han (206 a. C. hasta 24 d.C.) procede el tratado
Matemáticas en nueve Libros. Posteriormente otros matemáticos como Liu Hui (siglo III), Sun-zi (siglos II-IV), Liu Zhuo (siglo VI) y indeterminadas y un procedimiento algorítmico para resolver sistemas lineales parecido al que hoy conocemos como método de Gauss que les llevó al reconocimiento de los números negativos. Estos números constituyen uno de los principales descubrimientos de la matemática china.
La escuela algebraica china alcanza su apogeo en el siglo XIII con los trabajos de Quinotros hicieron aportaciones a este tratado. El texto trata problemas económicos y administrativos como medición de campos, construcción de canales, cálculo de impuestos,..Trabajan las ecuaciones lineales Jiu-shao, Li Ye, Yang Hui y Zhu Shi-jie que idearon un procedimiento para la resolución de ecuaciones de grado superior llamado *método del elemento celeste* o tian-yuanshu.
Este método actualmente se conoce como *método de Horner,* matemático que vivió medio milenio más tarde.
El desarrollo del álgebra en esta época es grandioso: sistemas de ecuaciones no lineales, sumas de sucesiones finitas, utilización del cero, triángulo de Tartaglia (o Pascal) y coeficientes binomiales así como métodos de interpolación que desarrollaron en unión de una potente astronomía.
El siglo VII vió la enorme gesta de ingeniería que supuso la unión de los dos ríos más importantes de China mediante el Gran Canal de 1700 km. de largo.
2.4 Él álgebra en la civilización india:
Son muy escasos los documentos de tipo matemático que han llegado a nuestras manos, pese a tener constancia del alto nivel cultural de esta civilización. Aun más que en el caso de China, existe una tremenda falta de continuidad en la tradición matemática hindú y al igual que ocurría con las tres civilizaciones anteriores, no existe ningún tipo de formalismo teórico. Los primeros indicios matemáticos se calculan hacia los siglos VIII-VII a.C, centrándose en aplicaciones geométricas para la construcción de edificios religiosos y también parece evidente que desde tiempos remotos utilizaron un sistema de numeración posicional y decimal. Fue, sin embargo, entre los siglos V-XII d.C cuando la contribución a la evolución de las matemáticas se hizo especialmente interesante, destacando cuatro nombres propios: Aryabhata (s.VI), Brahmagupta (s.VI), Mahavira (s. IX) y Bhaskara Akaria (s.XII). La característica principal del desarrollo matemático en esta cultura, es el predominio de las reglas aritméticas de cálculo, destacando la correcta utilización de los números negativos y la introducción del cero, llegando incluso a aceptar como números validos las números irracionales. Profundizaron en la obtención de reglas de resolución de ecuaciones lineales y cuadráticas, en las cuales las raíces negativas eran interpretadas como deudas. Desarrollaron también, sin duda para resolver problemas astronómicos, métodos de resolución de ecuaciones diofánticas, llegando incluso a plantear y resolver (siglo XII) la ecuación $x^2=1+ay^2$, denominada ecuación de Pelt. Como resumen acabaremos diciendo que en la historia de la India se encuentran suficientes hechos que ponen en evidencia la existencia de relaciones políticas y económicas con los estados griegos, egipcios, árabes y con China. Matemáticamente se considera indiscutible la procedencia hindú del sistema de numeración decimal y las reglas de cálculo.
2.5 El álgebra en la civilización griega:

En la matemática griega suelen distinguirse en cuatro períodos:
I. Jónico: finales del siglo VII a.C. hasta mitad del siglo V a.C. Formación de la matemática como ciencia independiente.
II. Ateniense: entre el 450 y el 300 a.C. Período del álgebra geométrica. El centro de la actividad matemática se hallaba en Atenas.
III. Helenístico: desde mediados del siglo IV hasta mediados del siglo II. Período de mayor esplendor.
IV. Alejandrino: también se menciona, a veces, este período en la época en que Alejandría era el foco principal.
La escuela pitagórica incorpora resultados de la tradición babilónica aritmético algebraica. La primera finalidad de esta secta era religiosa pero secundariamente, el desarrollo matemático que de ella se derivó fue enorme.
La época del álgebra geométrica. Trata los problemas algebraicos con la ayuda de construcciones geométricas. El núcleo los constituye el método de *anexión de áreas* cuya finalidad básica era resolver ecuaciones. Este método se puede usar para resolver ecuaciones lineales y no lineales. En los *Elementos* de Euclides se tratan diversas ecuaciones cuadráticas según los métodos del álgebra geométrica. También Teodoro de
Cirene, Teeteto y Eudoxo de Cnido, consolidan esta álgebra geométrica.





Demostración “geométrica” del cubo de la suma:
$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3\ ab^2 + b^3$

Lenguaje algebraico

El lenguaje algebraico utiliza letras, números y signos de operaciones para expresar informaciones.

***Ejemplos*: El doble de un número: 2x**
La suma de dos números: x + y

Las expresiones: 2x, x + y: son expresiones a1gebraicas.

El valor numérico de una expresión algebraica es el numero que se obtiene al sustituir las letras de la misma por números determinados y hacer las operaciones indicadas en la expresión.

***Ejemplo*: Calcular el valor numérico de $2x^2 + 3a$ para x = 2 y a = -1.**

Para x = 2 y a = -1: $2 \cdot 2^2 + 3 \cdot (-1) = 8 - 3 = 5$.

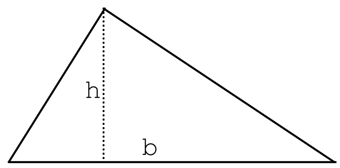
$\boxed{1}$ Expresa en lenguaje algebraico las siguientes frases:

a) La mitad de un número.

b) Añadir 5 unidades al doble de un número.

c) La suma de un número y el doble del mismo.

d) El área de un triángulo de base b y altura h.



e) La resta de un número par y su siguiente.

f) La suma de tres números consecutivos es 21, la suma de tres números pares consecutivos y la suma de tres números impares consecutivos

g) Dos números pares consecutivos suman 10.

h) El producto de tres números consecutivos es 120.

i) El producto de dos números pares consecutivos es 48.

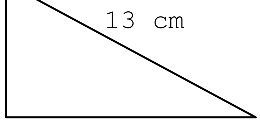
j) Unos pantalones y una camisa cuestan en total 12000 pesos. La camisa cuesta 6000 Pesos menos que los pantalones.

k) Al aumentar el lado de un cuadrado en 2 cm su superficie aumenta en 24 cm^2.

l) La diferencia entre los cuadrados de un número y el número anterior a éste es 21.

m) La suma de dos números es 22 y su diferencia es 8.

n) En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide 13 cm y los catetos se diferencian en 7 cm. Expresar el teorema de Pitágoras en función de cualquiera de los dos catetos.



ñ) Las dos cifras de un número suman 12. Si se invierte el orden de sus cifras, el número disminuye en 36 unidades.

o) De dos números sabemos que el cociente entre el mayor y el menor es 3 y el resto es 4, mientras que el cociente entre ambos es exactamente igual a 2 al aumentarlos en 7 unidades cada uno.

$\boxed{2}$ Expresa en lenguaje ordinario las siguientes expresiones algebraicas:

a) $x/2$

b) $x^2 + 2x$

c) $n(n +1)$

d) $a^2 = b^2 + c^2$

e) $y/2 + y^2$

f) $(x + y)\cdot(x - y)$

g) $x^2 - y^2$

h) $(x - y)^2$

i) $a^2 + b^3$

j) $\frac{x^3 + y^3}{2}$

k) $\sqrt{x^2 + 2}$

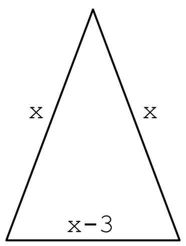
$\boxed{3}$ Calcula el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas para los valores de las letras que se indican:

a) $23x$, para $x = 4$
b) $a + b^2 - 3ab$, para $a = -2$ y $b = -3$
c) $n + (n + 1)^3 - 3n + 2$, para $n = 3$
d) $\frac{x + ay}{2} + 3x^2 - 1$, para $x = 0$, $y = 2$ y $a = -1$
e) $x^2 + 2xy + y^2$, para $x = 5$, $y = -2$
f) $\sqrt{x^2 + y^2}$, para $x = 4$, $y = 3$
g) $\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2}$, para $x = 4$, $y = 3$

$\boxed{4}$ Observa la figura y contesta las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es la expresión algebraica que nos da el Perímetro del triángulo?

b) ¿Cuál es el perímetro del triángulo si los lados Iguales miden 3 cm cada uno?



$\boxed{5}$ Señala verdadero o falso según corresponda:

a) El cuadrado de la suma de dos números: $x^2 + y^2$

b) La mitad de un número más 5 unidades: $\frac{n}{2} + 5$

c) La suma de los cuadrados de dos números: $(x + y)^2$

d) La mitad de la suma de un número más tres unidades: $\frac{n+3}{2}$

Identidades y ecuaciones de primer grado

La igualdad $3x - 2x = x$ es cierta ya que el primer miembro y el segundo toman el mismo valor para cualquier valor de x. Esta igualdad se llama identidad.

Las igualdades $x - 2 = 4$ y $x^2 = 9$ no son ciertas para cualquier valor de x.
Estas igualdades se llaman ecuaciones.

El valor de x que hace cierta la igualdad es la solución de la ecuación.

Ejemplo: Hallar la solución de $-\frac{x}{2} - \frac{2x}{3} + \frac{3x}{2} = 6$

m.c.m.(2, 3, 2) = 6: $-\frac{3x}{6} - \frac{4x}{6} + \frac{9x}{6} = 6$

Multiplicar por 6 los dos miembros: $-3x - 4x + 9x = 36$
Operando: $2x = 36$
Dividiendo por 2 los dos miembros: $x = 18$

6 Indica cuáles de las siguientes expresiones algebraicas son ecuaciones y cuáles son identidades.

a) $x + x - 1 = 3x + 2$

b) $3x - 2 = 1 - 4x + 5$

c) $2x + 7 - 5(x + 1) = 2 - 3x$

d) $2(x + 1) = 5(x + 1) - 3(x + 1)$

7 ¿Por qué números hay que sustituir las letras para que las igualdades sean ciertas?

a) $b + 5 = 5$ **b)** $x - 4 = 20$ **c)** $3x = 27$ **d)** $9x - 1 = 8$

8 ¿Cuáles de las siguientes ecuaciones son de primer grado?

a) $3 - x^2 = 5$

b) $2x^2 - x + 50 = 0$

c) $1 - \frac{x}{2} = 1$

d) $4x - 6x + 4x - 2 = 0$

9 Comprueba si los siguientes valores de x son soluciones de la ecuación correspondiente.

a) $2x - 3 = 5$, $x = 3$

b) $x + 1 = 7$, $x = 6$

c) $2x - 3 = x$, $x = -1$

d) $\frac{x}{2} = 6$, $x = 2$

e) $\frac{x}{2} + 3 = 2$, $x = -2$

f) $\frac{x+1}{3} = 1$, $x = -2$

g) $\frac{2x+1}{3} = x$, $x = 1$

h) $5(5 - x) = 10$, $x = -3$

10 Explica los pasos dados en la resolución de las siguientes ecuaciones:

a) $2x - 6 = 8$

$2x = 14$

$x = 7$

c) $\frac{x}{2} + 10 = 19$

$\frac{x}{2} = 9$

$x = 18$

b) $8x + 36 = 2x$

$6x + 36 = 0$
$6x = -36$
$x = -6$

d) $\frac{x-3}{4} = x$

$x - 3 = 4x$
$-3x = 3$
$x = -1$

$\boxed{11}$ Resuelve las siguientes ecuaciones dando los pasos que se indican:

a) $x - 8 = 6 + 21$
Sumar 8:
Operar:

c) $x - 5 + 6 = 0$
Operar:
Restar 1:

b) $5 + x = 2x + 1$
Restar x:
Restar 1:

d) $5x - 2 = 3x - 16$
Restar 3x:
Sumar 2:
Dividir entre 2:

$\boxed{12}$ Resuelve las siguientes ecuaciones explicando los pasos seguidos:

a) $-2x - 6 = 7(4x + 14)$

b) $5x + \frac{3}{2} = \frac{3x+1}{2}$

c) $\frac{3x}{2} + \frac{5x}{3} = \frac{3x}{4} - 1$

d) $\frac{2x-3}{2} - \frac{4x-1}{2} = \frac{3x+1}{4} + \frac{6x-2}{6}$

e) $\frac{3-2x}{x} = 4$

f) $x + 5 = \frac{x+3}{3}$

g) $\frac{2x-5}{x} = \frac{3}{4}$

h) $\frac{4x-12}{-4} = x - 15$

i) $\frac{x+4}{5} - \frac{x+3}{4} = 1 - \frac{x+1}{2}$

j) $\frac{3-x}{6} - \frac{x}{2} = \frac{1-x}{5} + \frac{2-x}{3}$

k) $\frac{x+1}{8} - \frac{x+1}{3} + \frac{x+3}{5} = 0$

Resolución de problemas con ecuaciones de primer grado

La edad de un alumno es el triple de la que tenía hace 8 años. ¿Cuál es esa edad?

1.º Identificar los valores que hay que hallar: edad = x
2.º Identificar los datos o valores conocidos: edad hace 8 años = x - 8
3.º Expresar en una ecuación las condiciones contenidas en el problema:

$$x = 3(x - 8)$$

4.º Resolver la ecuación: $x = 3x - 24$
$-2x = -24$

$x = 24$

13 La edad de una madre es el triple de la de su hijo. Dentro de 10 años su edad será el doble. ¿Qué edad tiene cada uno?

14 Si sumamos 5 unidades al doble de un número el resultado es el mismo que si le sumáramos 7 unidades. ¿Cuál es el número?

15 Queremos repartir un dinero entre varios chicos. Si damos 100 Pesos a cada uno sobran 15 pesos, mientras que si les damos 125 pesos faltan 35 Pesos. ¿Cuántos chicos hay? ¿Cuánto dinero tenemos?

16 La suma de tres números naturales consecutivos es 84. Halla dichos números.

17 En un rectángulo de base 70 m y altura 30 m se disminuyen 10 m de la base. ¿Cuánto debe aumentar la altura para que resulte la misma superficie?

18 El tronco de un gato mide de largo 1/2 de su longitud total y la cabeza mide igual que la cola, 6 cm. ¿Cuánto mide el gato?

19 La valla del patio rectangular de un colegio mide 3600 m. Si su largo es el doble que su ancho, ¿cuáles son las dimensiones del patio?

20 En una reunión hay triple número de mujeres que de hombres y doble número de niños que de hombres y mujeres juntos. ¿Cuántas mujeres, hombres y niños hay si asistieron a la reunión 60 personas?

21 Un poste de teléfonos tiene bajo tierra 2/7 de su longitud y la parte exterior mide 8 m. ¿Cuánto mide en total el poste?

Sistemas de ecuaciones. Método de sustitución

Las ecuaciones: $\left.\begin{array}{r} 2x + y = 2 \\ x - 3y = -13 \end{array}\right\}$ forman un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, x e y.

Resolución del sistema por el método de sustitución:

1.º Despejamos la y de la primera ecuación: $\begin{array}{l} y = 2 - 2x \\ x - 3y = -13 \end{array}$

2.º Sustituimos este valor de y en la segunda: $\begin{array}{l} y = 2 - 2x \\ x - 3(2 - 2x) = -13 \end{array}$

3.º Resolvemos la segunda ecuación: $\begin{array}{l} y = 2 - 2x \\ x = -1 \end{array}$

4.º Sustituimos x = -1 en la primera ecuación: $\begin{array}{l} x = -1 \\ y = 4 \end{array}$

22 Comprueba si los siguientes valores de x e y son las soluciones de los sistemas.

a) x = 1, y = 3 de $\left.\begin{array}{l} 2x + y = 5 \\ x + y = 4 \end{array}\right\}$

b) x = 3, y = -1 de $\left.\begin{array}{l} 2x + y = 3 \\ x - y = 2 \end{array}\right\}$

$\boxed{23}$ Resuelve los siguientes sistemas por el método de sustitución:

a) $\left.\begin{array}{l} x - 2y = 2 \\ 3x + 2y = 6 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{l} 4x + 4y = -41 \\ 2x - 5y = 12 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{l} 3x + 2y = 9/2 \\ 4x - y = 1/2 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{l} 7x + 5y = -20 \\ 5x + 7y = 20 \end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2}x + y = 8 \\ 3x + 5y = 41 \end{array}\right\}$

f) $\left.\begin{array}{l} 3(x + 2) - 5y = 11 \\ x - 7(y - 1) = 14 \end{array}\right\}$

g) $\left.\begin{array}{l} \frac{3}{4}x + \frac{y}{3} = 4 \\ 2x - \frac{y}{6} = \frac{15}{2} \end{array}\right\}$

h) $\left.\begin{array}{l} \frac{1}{6}x - \frac{y+1}{3} = \frac{5}{6} \\ 5x + \frac{y}{4} = \frac{29}{2} \end{array}\right\}$

Sistemas de ecuaciones. Método de reducción

Resolver por el método de reducción: el sistema: $\left.\begin{array}{l} 2x + 3y = 8 \\ 3x - 5y = -7 \end{array}\right\}$

1.º Igualamos los coeficientes de x.
Se multiplica la primera por 3: 6x + 9y = 24
Se multiplica la segunda por 2: 6x - 10y = -14

2.º Se restan las ecuaciones:

$$\begin{array}{r} 6x + 9y = 24 \\ \underline{-6x + 10y = 14} \\ 19y = 38 \end{array}$$

3.º Se resuelve esta ecuación: y = 2

4.º Se sustituye y = 2 en la primera ecuación: 2x + 3·2 = 8; x = 1

$\boxed{24}$ Comprueba si los siguientes valores de x e y son las soluciones de los sistemas:

a) x = 1, y = 1 de $\left.\begin{array}{l} 4x + 3y = 7 \\ 2x - 5y = -4 \end{array}\right\}$

b) x = 0, y = -1 de $\left.\begin{array}{l} 5x - 2y = -2 \\ x - 2y = -2 \end{array}\right\}$

$\boxed{25}$ Resuelve los siguientes sistemas por el método de reducción.

a) $3x + 5y = 31$
$4x - y = 26$

b) $3x + 2y = 9/2$
$4x - y = 1/2$

c) $2x - 7y = -22$
$x + y = 5/2$

d) $3x + 5y = 20$
$2(x - 5y) = 0$

e) $7x + 5y = -20$
$5x + 7y = 20$

f) $\frac{3}{4}x + \frac{y}{3} = 4$
$2x - \frac{y}{6} = \frac{15}{2}$

g) $x + 2y = 20$
$3x - \frac{y}{4} = 10$

h) $2x = 3y$
$\frac{2}{3}x = \frac{4}{3}y + 2$

Resolución de problemas mediante sistemas

La suma de dos números es 24, y el doble del primero menos el segundo es 6. ¿Cuáles son estos números?

1.º Identificamos los valores que hay que hallar (las incógnitas): un número es x y el otro es y.

2.º Planteamos el sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{l} x + y = 24 \\ 2x - y = 6 \end{array}\right\}$

3.º Se resuelve el sistema por cualquiera de los dos métodos: x = 10, y = 14

26 Tenemos un total de 26 monedas, unas de cinco pesos y otras de 25 pesos. En total tenemos 310 Pesetas. ¿Cuántas monedas tenemos de cada clase?

27 Beatriz se ha gastado 37 500 Peseta al comprar una cazadora para Juan y otra para Laura. La de Juan costó 3 500 Peseta más que la de Laura. ¿Cuánto costó cada una?

28 Descompón el número 1000 en dos números de manera que al dividir el mayor entre el menor el cociente sea 2 y el resto 220.

29 En un colegio hay 237 estudiantes menos de Primaria que de Secundaria. Sabiendo que el número total es de 1279 alumnos, de los que 200 son de Educación Infantil, ¿cuántos alumnos hay en total de Primaria y cuántos de Secundaria?

30 Una familia tiene periquitos y perros como mascotas. Averigua cuántos perros y cuántos periquitos tienen, sabiendo que en total hay 6 animales y el número total de patas es 16.

$\boxed{31}$ En un rectángulo de perímetro 152, la base mide 9 unidades más que la altura. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?

$\boxed{32}$ La razón de dos números es 3/5 y si aumentamos el denominador una unidad y disminuimos el numerador en 2 unidades, la nueva razón es 4/11. ¿Cuáles son los dos números?

Ecuaciones de segundo grado incompletas

Las ecuaciones de segundo grado son del tipo: $ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$.

Ecuaciones de segundo grado incompletas son aquellas en las que o $b = 0$ o $c = 0$.

Ejemplo: $2x^2 - 32 = 0$ (ecuación del tipo $ax^2 + c = 0$, $b = 0$)
Se suma 32: $2x^2 = 32$
Se divide por 2: $x^2 = 16$
Se extrae la raíz cuadrada: $x = -4$, $x = 4$

Ejemplo: $2x^2 + 3x = 0$ (ecuación del tipo $ax^2 + bx = 0$, $c = 0$)
Se extrae x como factor: $x(2x + 3) = 0$
Primer factor nulo: $x = 0$
Segundo factor nulo: $2x + 3 = 0$
$x = -3/2$

$\boxed{33}$ Indica el valor de los coeficientes a, b y c de las siguientes ecuaciones de segundo grado.

	a	b	c
a) $3x^2 + 2x - 3 = 0$			
b) $x^2 + x = 0$			
c) $\frac{3}{2}x - x^2 + 5 = 0$			
d) $6 - x^2 = 0$			
e) $2x - 3 = x^2$			
f) $3 + 5x^2 = \frac{3}{2}$			

$\boxed{34}$ ¿Cuáles de las siguientes ecuaciones de segundo grado son incompletas? ¿Por qué?

a) $6x^2 + 3x - 1 = 0$

b) $4x - x^2 = 0$

c) $2x - 1 = x^2$

d) $2x - 4x^2 = 0$

e) $3 - x = x^2$

f) $x^2 - 3 + x = 0$

$\boxed{35}$ Comprueba si los siguientes valores de x son las soluciones de las siguientes ecuaciones de segundo grado:

a) $x = 1$, $x = -1$ de $x^2 - 1 = 0$

b) $x = 4$, $x = -4$ de $80 = 20x^2$

c) $x = 9$, $x = -9$ de $3x^2 - 27 = 0$

d) $x = 1$, $x = -1$ de $-x^2 + 1 = 0$

e) $x = 0$, $x = 5$ de $4x^2 - 100 = 0$

f) $x = 4$, $x = -2$ de $-16x^2 = -64$

$\boxed{\textbf{36}}$ Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado incompletas, explicando el proceso seguido.

a) $x^2 - 16 = 0$

b) $3x^2 - 147 = 0$

c) $x^2 - 144 = 0$

d) $7x^2 = 343$

e) $3x^2 = 243$

f) $x^2 - 24 = 120$

g) $3x^2 + 12 = 0$

h) $7x^2 - 28 = 0$

$\boxed{\textbf{37}}$ Comprueba si los siguientes valores de x son las soluciones de las siguientes ecuaciones de segundo grado.

a) $x = 1$, $x = -1$ de $x - x^2 = 0$

b) $x = 0$, $x = 1$ de $x^2 = x$

c) $x = 1$, $x = -10$ de $3x^2 = 30x$

d) $x = 0$, $x = 12$ de $3x^2 - 39x = 0$

e) $x = 0$, $x = -5$ de $4x^2 + 20x = 0$

f) $x = 0$,$x = 1$ de $6x^2 - 6x = 0$

$\boxed{\textbf{38}}$ Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado incompletas, explicando el proceso seguido:

a) $2x^2 + 7x = 0$

b) $x^2 - 64x = 0$

c) $5x^2 - 40x = 0$

d) $4x^2 – 9x = 0$

e) $\frac{x^2}{5} = x$

f) $3x^2 + 27x = 0$

g) $7x^2 = 3x$

h) $6x^2 + 2x = 0$

Ecuaciones de segundo grado completas

La ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, donde a, b y c son distintos de cero, es una ecuación de segundo grado completa.

Las dos soluciones de la ecuación son de la forma: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

La expresión $\Delta = b^2 - 4ac$ se llama discriminante y nos permite conocer el número de soluciones de la ecuación de segundo grado:

Si $\Delta > 0$: La ecuación tiene dos soluciones distintas.

Si $\Delta = 0$: La ecuación tiene dos soluciones iguales (solución doble).

Si $\Delta < 0$: La ecuación no tiene solución.

39 Comprueba si los siguientes valores de x son las soluciones de las siguientes ecuaciones de segundo grado:

a) $x = 1$, $x = -1$ de $2x^2 - x - 1 = 0$

b) $x = 3$, $x = 4$ de $x^2 - 7x + 12 = 0$

c) $x = -6$, $x = 0$ de $x^2 + 5x - 6 = 0$

d) $x = -2$, $x = 4$ de $x^2 - 2x - 8 = 0$

e) $x = 0$, $x = 1$ de $x^2 - 2x - 3 = 0$

40 Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado completas:

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$

b) $x^2 + 5x + 6 = 0$

c) $x^2 - x - 6 = 0$

d) $x^2 + x - 6 = 0$

e) $8x^2 - 10x + 3 = 0$

f) $4x + 1 = -4x^2$

g) $12 = x^2 + x$

h) $3x + 10 = x^2$

i) $x^2 - 4x + 4 = 0$

j) $9x^2 - 6x + 1 = 0$

k) $100x^2 + 20x = -1$

l) $x^2 + x + 1 = 0$

m) $x^2 - 6x + 10 = 0$

n) $x^2 + \frac{5}{2}x + 1 = 0$

ñ) $x^2 + 3x + \frac{9}{4} = 0$

o) $-2x^2 - x - 1 = 0$

p) $-x^2 + 2x - 3 = 0$

41 ¿Cuánto vale el discriminante en las siguientes ecuaciones?

a) $3x^2 + 2x - 9 = 0$ $\Delta =$

b) $5x - 6x^2 + 10 = 0$ $\Delta =$

c) $x - 1 = 3x^2$ $\Delta =$

d) $x^2 = 2x - 8$ $\Delta =$

$\boxed{42}$ Indica cuáles de las siguientes ecuaciones de segundo grado tienen dos soluciones distintas, cuáles dos soluciones iguales y las que no tienen solución.

a) $x^2 - 2x + 1 = 0$ $\Delta =$

d) $x^2 + 4x + 4 = 0$ $\Delta =$

b) $3x^2 - 2x + 1 = 0$ $\Delta =$

e) $2x^2 - x + 3 = 0$ $\Delta =$

c) $x^2 + 3x + 2 = 0$ $\Delta =$

f) $x^2 + x + 1 = 0$ $\Delta =$

$\boxed{43}$ Calcula el valor de m para que las siguientes ecuaciones tengan raíz doble:

a) $2x^2 - 4x + m = 0$ m =

b) $mx^2 + 2x + 1 = 0$ m =

c) $x^2 - mx + 36 = 0$ m =

Propiedades de las soluciones de la ecuación de 2º grado

Suma de las soluciones de la ecuación: $ax^2 + bx + c = 0$

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

Producto de las soluciones de la ecuación : $ax^2 + bx + c = 0$

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Conocidas la suma y el producto de las raíces de una ecuación de segundo grado podemos escribir esta ecuación directamente.

$$x^2 - Sx + P = 0$$

Ejemplo: Sabiendo que la suma de las dos raíces vale 7 y que el producto vale 12, la ecuación es: $x^2 - 7x + 12 = 0$

$\boxed{44}$ Calcula, sin resolverlas previamente, cuánto vale la suma y el producto de las raíces de las ecuaciones siguientes:

a) $4x^2 + 5x - 6 = 0$ S = P =

b) $x^2 + x - 56 = 0$ S = P =

c) $5x^2 - 5x = 16$ S = P =

d) $4x^2 + 28x = 0$ S = P =

e) $-3x^2 + 18x = 0$ S = P =

f) $6x^2 - 12 = 0$ S = P =

g) $-3x^2 - 30x + 27 = 0$ S = P =

h) $-3x^2 + 3x - 6 = 0$ S = P =

45 Escribe la ecuación de segundo grado correspondiente a las raíces cuya suma y producto se indica.

a) S = 7, P = 0 Ecuación: **d)** S = 2, P = 2/3 Ecuación:

b) S = 6, P = 8 Ecuación: **e)** S = -2 , P = -15 Ecuación:

c) S = 1, P = -2 Ecuación: **f)** S = 14, P –3/5 Ecuación:

46 Escribe la ecuación de segundo grado cuyas soluciones son:

a) $x_1 = 2$, $x_2 = 1$ S = P = Ecuación:

b) $x_1 = 3$, $x_2 = -2$ S = P = Ecuación:

c) $x_1 = -1$, $x_2 = 5$ S = P = Ecuación:

Factorización

La ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$, de raíces x_1 y x_2, se puede expresar de la forma:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Ejemplo: Dada la ecuación $x^2 - 5x + 6 = 0$, al ser sus raíces 2 y 3 se verifica que:

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$$

Por tanto, conocidas las raíces de una ecuación de segundo grado, se puede saber cuál es ésta sin más que realizar el proceso inverso.

Ejemplo: si las raíces son 5 y -6, la ecuación será:

$$(x - 5)(x + 6) = 0 \Rightarrow x^2 + x - 30 = 0$$

47 Resuelve y factoriza las siguientes ecuaciones:

a) $6x^2 + 3x - 3 = 0$
Soluciones de la ecuación: $x_1 =$
$x_2 =$
Ecuación factorizada:

c) $2x^2 + 9x - 5 = 0$
Soluciones de la ecuación: $x_1 =$
$x_2 =$
Ecuación factorizada:

b) $2x^2 + 5x - 3 = 0$
Soluciones de la ecuación: $x_1 =$
$x_2 =$
Ecuación factorizada:

d) $x^2 + x - 2 = 0$
Soluciones de la ecuación: $x_1 =$
$x_2 =$
Ecuación factorizada:

48 Completa la siguiente tabla:

x_1	x_2	a	Ecuación factorizada
-5	-2	2	
-1/2	7	1	
0	-3/2	1	
-1	1	3	
2	2	1	

1/4	1/2	2	
1/3	-1/6	1	

Resolución de problemas con ecuaciones de segundo grado

Hay problemas que se plantean y resuelven mediante una ecuación de segundo grado.

Ejemplo: La suma de las áreas de un cuadrado de lado L y de un rectángulo de lados 2 cm y 2L es 32 cm^2. ¿Cuál es el lado del cuadrado?

Área del cuadrado: L^2
Área del rectángulo: $2 \cdot 2L = 4L$
Ecuación del problema: $L^2 + 4L = 32$

Soluciones: L = 4 cm, L = -8 cm
Sólo la solución L = 4 cm verifica la condición del problema.

$\boxed{49}$ El perímetro de un rectángulo es 24 cm y su área es 20 cm^2. ¿Cuáles son sus dimensiones?

$\boxed{50}$ Halla tres números enteros consecutivos cuyo producto sea igual a su suma. ¿Cuál sería la solución si se pidieran números naturales?

$\boxed{51}$ Si disminuimos 3 m cada lado de un cuadrado se obtiene otro cuadrado cuya área es 63 m^2 más pequeña que la del cuadrado primitivo. ¿Cuáles eran las dimensiones primitivas de este cuadrado?

$\boxed{52}$ Al añadir a un número 3 unidades y multiplicar por sí mismo el valor resultante, se obtiene 100. Calcula dicho número.

$\boxed{53}$ La diferencia de dos números es 3 y la suma de sus cuadrados es 117. ¿Cuáles son esos números?

$\boxed{54}$ La suma de dos números es 15 y su producto es 26. ¿Cuáles son dichos números?

Página Web: yuniorandrescastillo.galeon.com
Correo: yuniorcastillo@yahoo.com
yuniorandrescastillosilverio@facebook.com
Twitter: @yuniorcastillos
Celular: 1-829-725-8571
Santiago de los Caballeros,
República Dominicana,
2015.
"DIOS, JUAN PABLO DUARTE Y JUAN BOSCH – POR SIEMPRE"®