Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de La Plata

ESTRUCTURAS III

Para alumnos de la carrera de Ingeniería Aeronáutica y Mecánica de la UNLP

Introducción a la Teoría de Elementos Finitos

(Tratamiento de la formulación de elementos unidimensionales a partir del método directo)

Autores:
Ing. Santiago Pezzotti
Ing. Federico Antico

Revisado por:
Ing. Juan Pablo Durruty

-2008-

***Introducción*[1]**

El campo de la mecánica se puede dividir en 3 grandes áreas:

1. Teórica
2. Aplicada
3. Numérica

El área teórica se encarga de estudiar las leyes y principios de la mecánica por su valor científico. Por ejemplo las leyes de Newton y las leyes de la cinemática entre otras.

El área aplicada transfiere los conocimientos teóricos a las aplicaciones científicas e ingenieriles. En general esa transferencia de conocimientos es utilizada para la generación de modelos matemáticos que representen a los fenómenos físicos.

El área numérica aparece para resolver aquellos problemas que son difíciles de resolver analíticamente. Hoy en día los avances de la computación permiten resolver de ésta manera algunos problemas de manera muy sencilla. El resultado obtenido a partir de la resolución numérica utilizando a la computación como herramienta de apoyo es lo que se define como "mecánica computacional". Los resultados obtenidos a partir de la mecánica compuacional deberán ser interpretados teniendo en cuenta la evolución de los fenómenos físicos.

Mecánica computacional

Se puede hacer una división de los grupos que forman la mecánica computacional según la escala física del fenómeno que se quiere estudiar:

- Nano mecánica y micro mecánica
- Mecánica del continuo
    - Sólidos y estructuras
    - Fluidos
    - Multi físicos (sólido – fluido)

El primero de estos se encarga de los fenómenos a nivel molecular y atómico. Las leyes que gobiernan estos modelos son aquellas relacionadas con la física y la química. La micro mecánica se encarga principalmente de los fenómenos físicos a niveles cristalográficos y granulares.

La parte de la mecánica del contínuo estudia los fenómenos físicos a nivel macroscópico. Las áreas tradicionales de este último campo son la de los sólidos y los fluidos.

Problemas estáticos y dinámicos

Los problemas de mecánica del continuo se pueden dividir de acuerdo a los efectos inerciales a ser tenidos en cuenta:

- Estáticos
- Dinámicos

En los problemas dinámicos existe una dependencia del tiempo, en estos problemas las fuerzas inerciales son parte del problema.

En los problemas estáticos o cuasi estáticos las fuerzas inerciales son nulas o despreciables.

[1] Felippa - Introduction to finite element method

Comportamientos lineales y no lineales

Llamaremos a los problemas lineales, a aquellos en los la respuesta a una perturbación del sistema (estructura con cargas aplicadas) responde a una relación lineal con el valor de la perturbación.

Los problemas no lineales pueden asociarse al comportamiento del material y a la geometría del modelo.

Alcance de este estudio

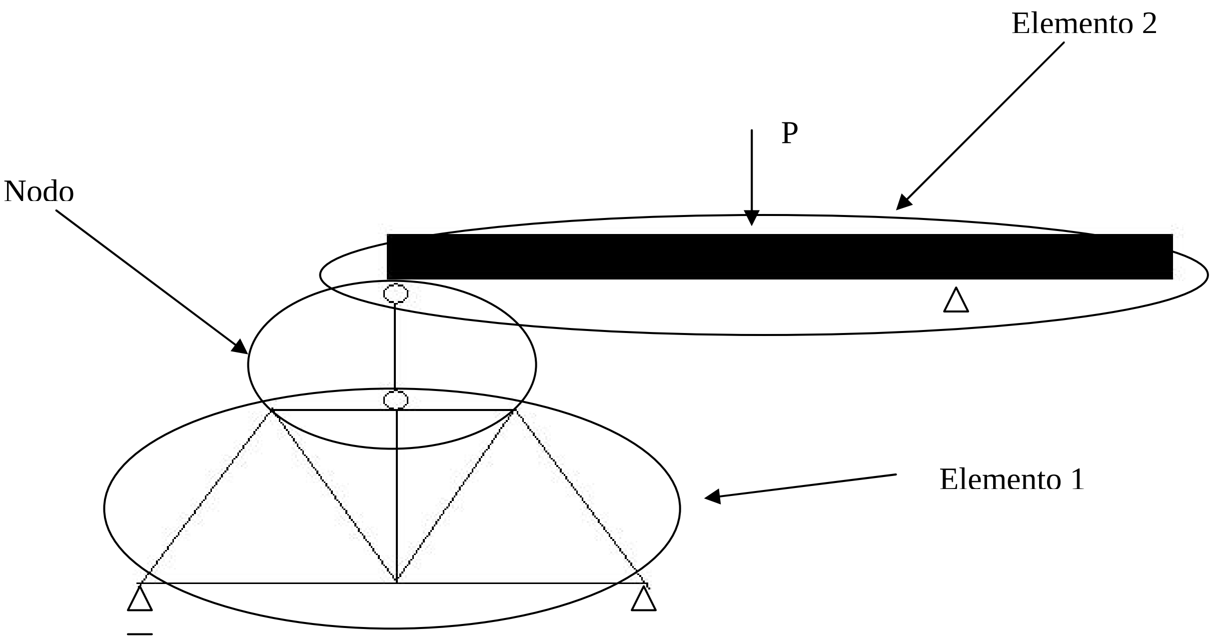
Con lo visto anteriormente podemos realizar un desglose de los campos que queremos cubrir en este curso:

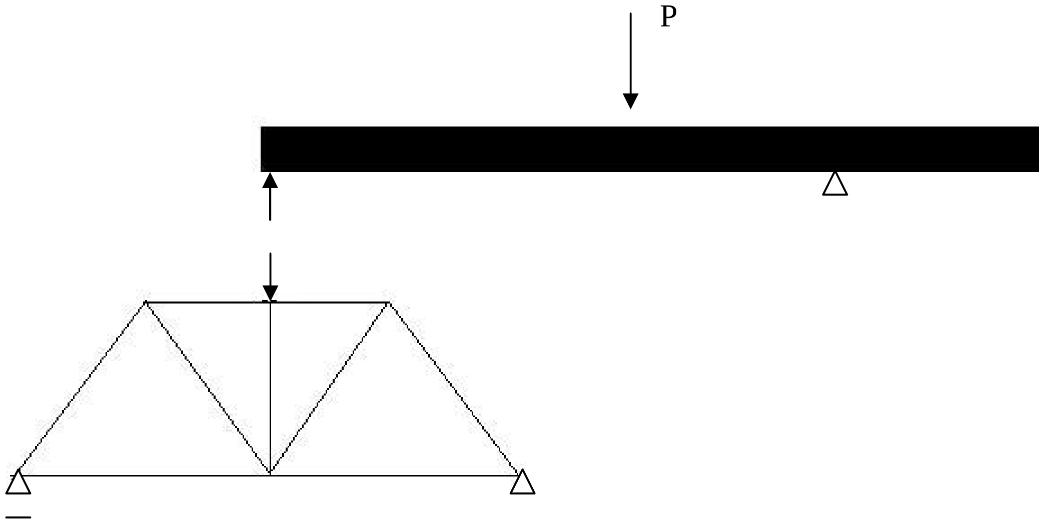
- Mecánica
    - Computacional
        - Del continuo
            - Sólidos – estructuras
                - Estáticos
                    - Lineales

[2]Muchos problemas de ingeniería involucran una complejidad tal que nos vemos forzados a realizar un modelo matemático que represente al fenómeno físico.

Una manera sencilla de simplificar el modelo es sub dividir el problema en partes o *elementos* para luego volverlo a construir ensamblando las partes para predecir el comportamiento del sistema completo. Por ejemplo, una estructura como la de la figura que sigue. Aquí se tiene un reticulado isoestáticamente restringido. Para su resolución será necesario separar la estructura en dos partes, resolver los subsistemas, que se pueden equilibrar por si mismos, para luego realizar la reconexión del sistema para ver obtener el resultado final, que será la obtención de los esfuerzos en cada uno de sus miembros considerando los efectos del sistema completo.

[2] Oñate – Una introducción generalizada al método de los elementos finitos





Hay sistemas en los cuales las partes son claramente diferenciables, estando estas conectadas por uniones comúnmente llamadas *nodos*. A tales sistemas se los denomina *discretos*.

A veces estas divisiones no son posibles por lo que se llega a un modelo matemático que se manifiesta en ecuaciones diferenciales (problemas de elasticidad tridimensional). Este tipo de sistemas recibe el nombre de sistemas contínuos.

En algunos casos la solución analítica de estos problemas es difícil de encontrar.

Para disminuir la complejidad del problema la propuesta será recurrir al modelo contínuo con infinitos grados de libertad a uno de finitos grados de libertad. Esto es lo que se define como un *sistema discreto*.

Introducción

El método de los elementos finitos (MEF en castellano o FEM en inglés) es un método de cálculo utilizado en diversos problemas de ingeniería, que se basa en considerar al cuerpo o estructura dividido en elementos discretos, con determinadas condiciones de vínculo entre sí, generándose un sistema de ecuaciones que se resuelve numéricamente y proporciona el estado de tensiones y deformaciones. También se utiliza en matemáticas como método nodal aproximado para resolver ecuaciones diferenciales en forma numérica.

Es un procedimiento numérico aplicable a un gran número de problemas con condiciones de borde impuestas (en las estructuras las condiciones de borde serian: restricciones y cargas externas). Varios de estos problemas no tienen solución analítica o es muy difícil obtenerla, por lo que se convierte en la única alternativa de resolución. Con este método se pueden resolver sistemas los cuales no son fáciles de resolver mediante modelos matemáticos simples.

Existen dos tipos de caminos para su formulación, basándose en el principio de los trabajos virtuales, es decir, formulaciones variacionales, o mediante el método de Garlekin, Método directo o bien con Raleigh Ritz..

Si bien fue originalmente desarrollado para el análisis de estructuras, con este método se pueden representar entre otros, los siguientes fenómenos físicos:

- Fenómenos termodinámicos: distribución de temperaturas en un sólido.
- Simulación de efectos dinámicos: Choque de dos cuerpos.
- Geomecánica: Comportamiento de la corteza terrestre.

Concepto

La base del método de los elementos finitos es la representación de un cuerpo por un ensamble de subdivisiones llamadas *elementos*. Estos elementos se interconectan a través de puntos llamados *nodos*.

Una manera de discretizar un cuerpo o estructura es dividirla en un sistema equivalente de cuerpos pequeños, tal que su ensamble representa el cuerpo original. La solución que se obtiene para cada unidad se combina para obtener la solución total. Por ende, La solución del problema consiste en encontrar los desplazamientos de estos puntos y a partir de ellos, las deformaciones y las tensiones del sistema analizado. Las propiedades de los elementos que unen a los nodos, están dadas por el material asignado al elemento, que definen la rigidez del mismo, y la geometría de la estructura a modelizar (a partir de las Leyes de la Elástica). Las deformaciones y las fuerzas externas se relacionan entre si mediante la rigidez y las relaciones constitutivas del elemento. Trabajando en régimen elástico, las ecuaciones que definen el sistema pueden expresarse de forma matricial como se muestra a continuación:

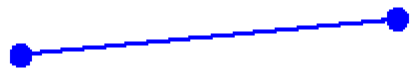
$$[K] .\{\delta\}=\{F\}$$

Donde :

- $[K]$: es la matriz rigidez del sistema
- $\{\delta\}$: es el vector desplazamientos
- $\{F\}$: es el vector de esfuerzos

Los tipos de elementos utilizados generalmente en la resolución a través de Fem son:

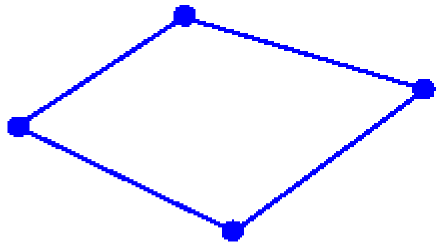
- Elementos Lineales (1-D)



Estos pueden ser:

- Resorte
- Barras
- Vigas
- Caños

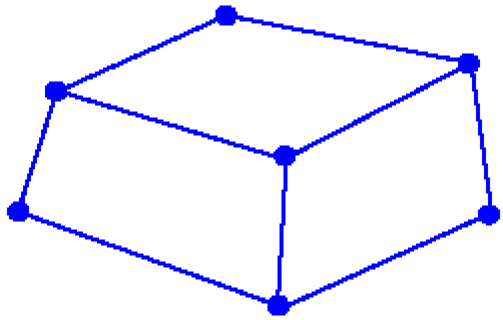
- Elementos Planos (2-D)



Estos pueden ser:

- membranas
- placas

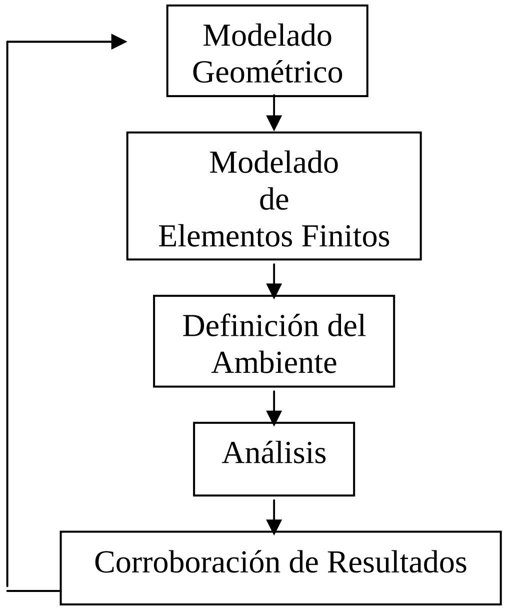
- Elementos Sólidos (3-D)



Es importante destacar que se puede utilizar combinaciones de estos elementos actuando en conjunto.

Proceso de Análisis por Elementos Finitos

El proceso de análisis por elementos finitos se puede describir como:



- *Modelado Geométrico*: Creación del modelo matemático del objeto o del conjunto. Reproducción del sólido en forma precisa y de la geometría de la superficie.

- *Modelado de Elementos Finitos*: Subdividir la geometría del modelo en elementos discretos. Asignar las propiedades del material y del elemento.

- *Definición del Ambiente*: Aplicar las cargas y las condiciones de borde para simular el ambiente de la operación.

- *Análisis*: Computar los resultados (tensiones, deformaciones, etc.) a partir de análisis estáticos, dinámicos o de transferencia de calor.

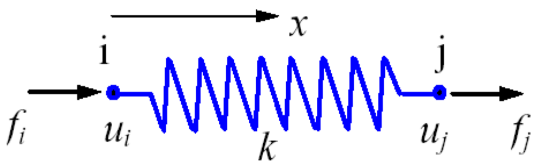
- *Corroboración de Resultados*: Comparar los resultados con los criterios de diseño. Rediseñar la estructura y repetir el proceso si fuese necesario.

En la actualidad la utilización de este método ha crecido notablemente debido a la utilización de software avanzado (además de un hardware potente que debe poseer gran velocidad y mucha memoria).

Cabe destacar que la utilización de software no implica la obtención del resultado exacto y real, es solo una aproximación y esta en el criterio del usuario el saber discernir entre un resultado coherente y uno que no lo es; además de conocer los márgenes de error y las limitaciones del modelo y el método.

Método Directo

- **Elemento Resorte**



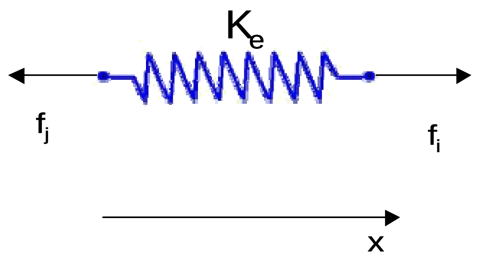
Los *elementos* tipo *resorte* más sencillos son definidos solamente con rigidez en sentido longitudinal del mismo, o sea son capaces de resistir esfuerzos de tracción – compresión.

El elemento se define con las siguientes características:

- Eje de coordenadas local: x
- Nodos: i, j
- Desplazamientos de los nodos (grados de libertad): *ui*, *uj*
- Fuerzas internas: *fi*, *fj*
- Rigidez del elemento: k

Se debe recordar que las fuerzas del sistema podrán actuar solamente en los nodos de los elementos.

Las fuerzas internas del resorte se pueden expresar en función de los desplazamientos nodales y la rigidez del elemento:



$$f_i = K_e\,(u_i - u_j)$$
$$f_j = K_e\,(u_j - u_i)$$

Se puede expresar este sistema de forma matricial. Las fuerzas internas como un vector columna llamado *f*, así como el vector de los desplazamientos nodales (u):

$$f = \begin{Bmatrix} fi \\ fj \end{Bmatrix} \quad , \quad u = \begin{Bmatrix} ui \\ uj \end{Bmatrix}$$

Los desplazamientos contemplados en el modelo matemático (en la dirección x del elemento) serán los *grados de libertad del elemento (GL).*

Cuando alguno de estos desplazamientos es una condición de borde (desplazamiento conocido) este GL pasa a ser un dato del sistema; pasando entonces a ser la fuerza en el *nodo* la incógnita a resolver en el mismo.

$$\begin{Bmatrix} fi \\ fj \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} ui \\ uj \end{Bmatrix}$$

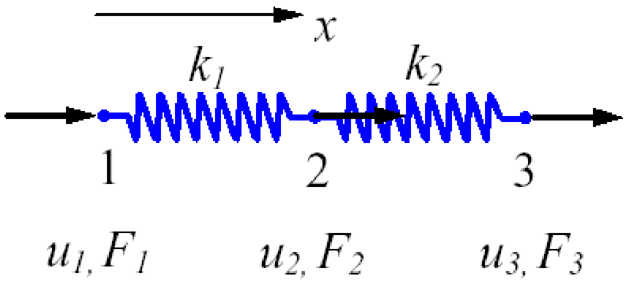
Siendo $\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}$ la matriz rigidez del elemento.

Debe observarse que la matriz rigidez es simétrica de modo que se cumpla el equilibrio del sistema de fuerzas del elemento.

La matriz del elemento es cuadrada, el orden de la misma se relaciona directamente con la cantidad de grados de libertad. Para el elemento definido anteriormente la matriz rigidez es de orden 2.

- **Sistema de Resortes**

Considerando un par de resortes en serie:



Para el Elemento 1:

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 \end{Bmatrix}$$

Para el Elemento 2:

$$\begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^2 \\ f_2^2 \end{Bmatrix}$$

Donde f_i^m es la fuerza interna local del Nodo i actuando en el Elemento m (i=1,2).
Considerando la condición de equilibrio estático de fuerzas: F externas = F internas

Nodo 1:

$$F_1 = f_1^1$$

Nodo 2:

$$F_2 = f_2^1 + f_1^2$$

Nodo 3:

$$F_3 = f_2^2$$

Desarrollando con los valores de las fuerzas internas en función de la rigidez de cada elemento:

$$F_1 = k_1 u_1 - k_1 u_2$$
$$F_2 = -k_1 u_1 + (k_1 + k_2) u_2 - k_2 u_3$$
$$F_3 = -k_2 u_2 + k_2 u_3$$

De forma Matricial:

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

O bien, **K.U=F**

Donde: K: es la matriz rigidez del sistema completo de resortes

Se puede plantear por separado y luego plantear superposición:

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ f_1^2 \\ f_2^2 \end{Bmatrix}$$

Planteando superposición se obtiene:

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 + f_1^2 \\ f_2^2 \end{Bmatrix}$$

A modo de ejemplo si consideramos un sistema que posee las siguientes condiciones:

$$u_1 = 0 \qquad \text{and} \qquad F_2 = F_3 = P$$

Reemplazando:

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ P \\ P \end{Bmatrix}$$

Se reduce a:

$$\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ P \end{Bmatrix}$$

Y,

$$F_1 = -k_1 u_2$$

Como incógnita tenemos:

$$\mathbf{U} = \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

Resolviendo,

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2P/k_1 \\ 2P/k_1 + P/k_2 \end{Bmatrix}$$

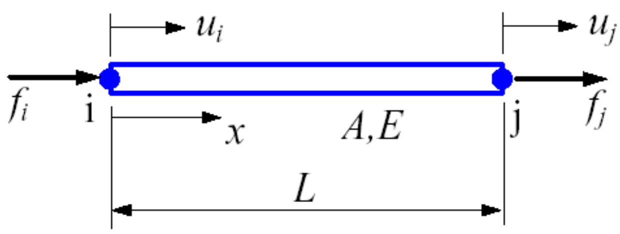
Reemplazando se obtiene la fuerza de reacción:

$$\boxed{F_1 = -2P}$$

Como conclusión, para un sistema de “n” nodos, el método de elementos finitos permite generar “n” ecuaciones, las cuales deberán tener “n” incógnitas para ser un sistema definido. Las incógnitas podrán ser parte del vector desplazamiento o ser parte del vector fuerza. Cada nodo deberá tener su desplazamiento o su fuerza actuante como condición de borde impuesta.
Este sistema permite, cómo veremos más adelante resolver sistemas isoestáticos e hiperestáticos sin necesidad de cambiar el método.

- **<u>Elemento barra en una dimensión</u>**

Consideremos una barra de sección constante:



El sistema se compone de:

- Dos Nodos: i, j
- Modulo de Elasticidad E
- Área de la Sección Transversal A
- Longitud del Elemento L

El mismo está sujeto a:

- Fuerzas internas: f_i, f_j

El elemento tiene dos grados de libertad, en el sentido longitudinal del elemento, cualquier desplazamiento de los nodos en el sentido normal al elemento no generara esfuerzos internos:

- Dos desplazamientos: u_i, u_j

Sabiendo que la rigidez a tracción / compresión de una barra es:

$$\frac{EA}{L}$$

Y haciendo una analogía con el elemento resorte, tenemos que:

$$k = \frac{EA}{L}$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix}$$

O bien,

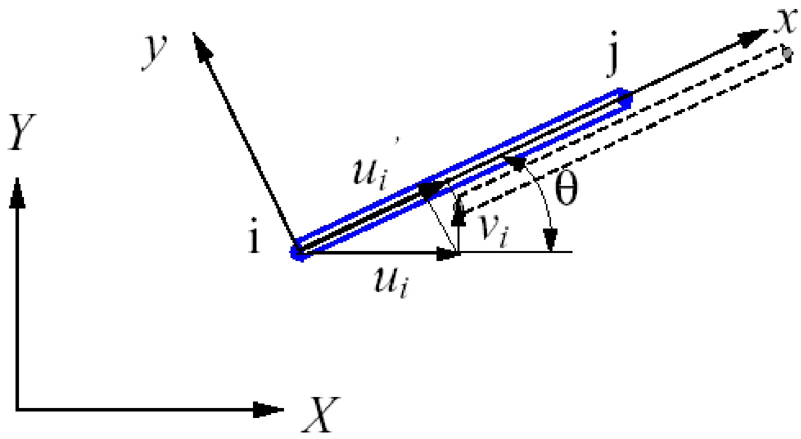
$$\mathbf{k} = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la ecuación de equilibrio del Elemento será:

$$\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_i \\ f_j \end{Bmatrix}$$

Para la resolución de este sistema se procede de la misma manera que en el elemento resorte.

- **Elemento Barra en Dos Dimensiones**



Local	**Global**
x,y	X,Y
$u_i´,v_i´$	u_i,v_i
1 grado de Libertad por nodo	2 grados de Libertad por nodo

Nota: El desplazamiento lateral $v_i´$ no contribuye a la deformación de la barra.
La idea es trabajar con las coordenadas globales, por lo tanto se deben hacer las siguientes transformaciones:

$$u_i' = u_i \cos\theta + v_i \sin\theta = [l \quad m]\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}$$

$$v_i' = -u_i \sin\theta + v_i \cos\theta = [-m \quad l]\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}$$

Donde:

$$l = \cos\theta, \ m = \sin\theta$$

Escrito en forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} u_i' \\ v_i' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m \\ -m & l \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}$$

O bien,

$$\mathbf{u}_i^{'} = \tilde{\mathbf{T}}\mathbf{u}_i$$

Donde la *matriz transformación*:

$$\tilde{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} l & m \\ -m & l \end{bmatrix}$$

Donde la relación con la *matriz ortogonal*:

$$\tilde{\mathbf{T}}^{-1} = \tilde{\mathbf{T}}^{T}$$

A modo de ejemplo, se puede decir que para un sistema de elemento barra con dos nodos tenemos que:

$$\begin{Bmatrix} u_i^{'} \\ v_i^{'} \\ u_j^{'} \\ v_j^{'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m & 0 & 0 \\ -m & l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & m \\ 0 & 0 & -m & l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix}$$

O bien,

$$\mathbf{u}^{'} = \mathbf{T}\mathbf{u}$$

Con,

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{T}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{T}} \end{bmatrix}$$

Las fuerzas nodales son transformadas de la misma manera:

$$\mathbf{f}^{'} = \mathbf{T}\mathbf{f}$$

Para obtener la matriz rigidez en dos dimensiones:

En el sistema local de coordenadas tenemos que:

$$\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i^{'} \\ u_j^{'} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_i^{'} \\ f_j^{'} \end{Bmatrix}$$

Esto se puede escribir en su totalidad como:

$$\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_i' \\ v_i' \\ u_j' \\ v_j' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_i' \\ 0 \\ f_j' \\ 0 \end{Bmatrix}$$

O bien,

$$\mathbf{k}'\mathbf{u}' = \mathbf{f}'$$

Utilizando las transformaciones

$$\mathbf{u}' = \mathbf{T}\mathbf{u}$$
$$\mathbf{f}' = \mathbf{T}\mathbf{f}$$

Obtenemos:

$$\mathbf{k}'\mathbf{T}\mathbf{u} = \mathbf{T}\mathbf{f}$$

Multiplicando ambos lados por T^T y como $T^T*T=I$, obtenemos:

$$\mathbf{T}^T\mathbf{k}'\mathbf{T}\mathbf{u} = \mathbf{f}$$

La matriz rigidez en el sistema global quedara de la siguiente manera:

$$\mathbf{k} = \mathbf{T}^T\mathbf{k}'\mathbf{T}$$

La cual es una matriz simétrica de 4X4. Escrita de manera explicita tenemos que:

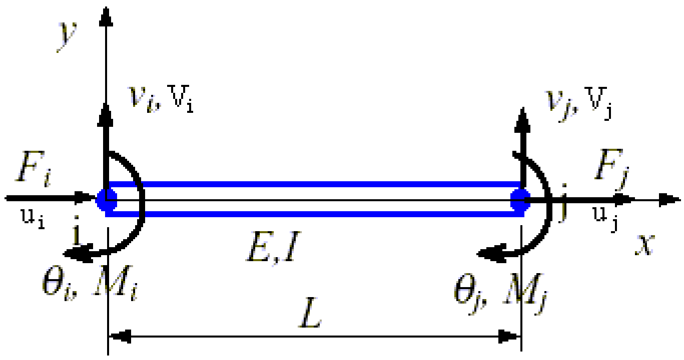
$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} u_i & v_i & u_j & v_j \end{array} \\ \mathbf{k} = \dfrac{EA}{L} & \begin{bmatrix} l^2 & lm & -l^2 & -lm \\ lm & m^2 & -lm & -m^2 \\ -l^2 & -lm & l^2 & lm \\ -lm & -m^2 & lm & m^2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Donde los cosenos directores l y m son:

$$l = \cos\theta = \frac{X_j - X_i}{L}, \qquad m = \sin\theta = \frac{Y_j - Y_i}{L}$$

- **<u>Elemento Viga</u>**

Se considera una viga en el plano. Esta toma esfuerzos de Corte, Axiles y Momentos, todas consideradas en el plano. Cada Nodo posee tres Grados de Libertad (u, v, q).
Un elemento que toma estas cargas, tiene asociado para el calculo a E, J, l y A.



El sistema se compone de:

- Dos Nodos: i, j
- Modulo de Elasticidad E
- Área de la Sección Transversal A
- Longitud del Elemento L
- Momento de Inercia I

El mismo está sujeto a:

- Fuerzas internas en los Nodos: F_i, F_j, V_i, V_j
- Momento en los Nodos: M_i, M_j

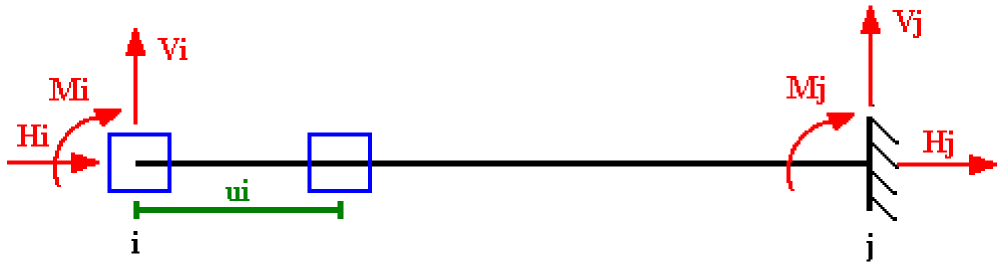
Habrá tres grados de libertad por cada nodo

- Cuatro desplazamientos: u_i, u_j, v_i, v_j
- Dos Giros: θ_i, θ_j

Para crear la Matriz Rigidez se suponen casos con desplazamientos unitarios, que luego mediante Superposición se ensamblan y dan forma a dicha matriz.
Se adoptan giros en sentido horario y desplazamientos positivos.

- <u>Se supone</u> $u_i=1$

  $u_j, v_i, v_j, \theta_i, \theta_j = 0$



Aplicando la Ley de Hooke, tal como se hace con elemento barra, tenemos que:

$$H_i = \frac{EA}{l} \cdot u_i$$

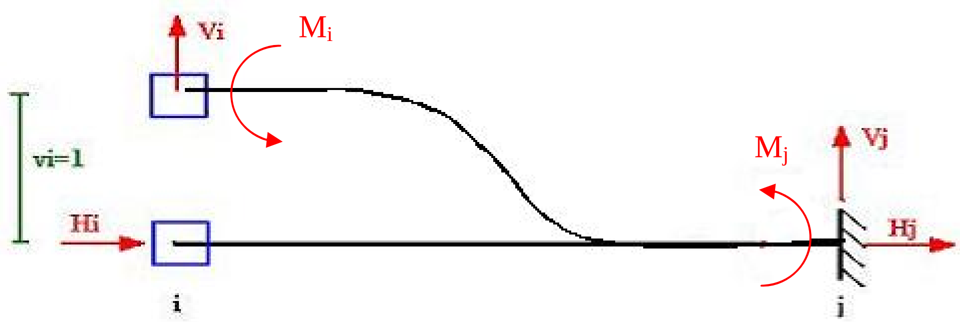
Por lo tanto,

$$\boxed{H_i = \frac{EA}{l}}$$

Realizando un equilibrio de fuerzas,

$$\boxed{H_j = -\frac{EA}{l}}$$

- <u>Se supone</u> $v_i = 1$
  $u_i, u_j, v_j, \theta_i, \theta_j = 0$



Se puede demostrar calculando por Método de las Fuerzas que para un Desplazamiento Transversal en el extremo i, los esfuerzos en el sistema son:

$$\boxed{V_i = \frac{12EJ}{l^3}} \qquad \boxed{M_i = -\frac{6EJ}{l^2}}$$

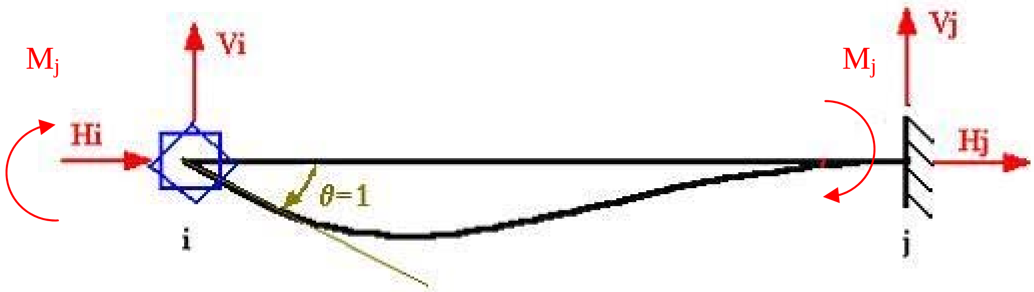
$$\boxed{V_j = -\frac{12EJ}{l^3}} \qquad \boxed{M_j = -\frac{6EJ}{l^2}}$$

$$\boxed{H_i = 0} \qquad \boxed{H_j = 0}$$

➢ Se supone $\theta_i = 1$

$u_i, u_j, v_i, v_j, \theta_j = 0$

De la misma manera que en el caso anterior, tenemos que:



$$\boxed{V_i = -\frac{6EJ}{l^2}} \qquad \boxed{M_i = \frac{4EJ}{l}}$$

$$\boxed{V_j = \frac{6EJ}{l^2}} \qquad \boxed{M_j = \frac{2EJ}{l}}$$

$$\boxed{H_i = 0} \qquad \boxed{H_j = 0}$$

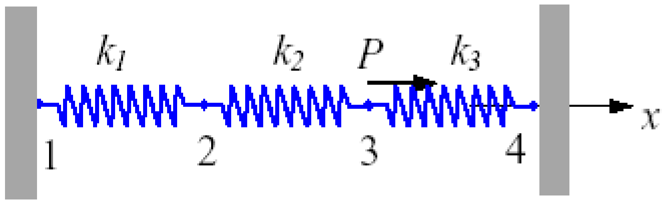
Procediendo de forma análoga para los desplazamientos del Nodo j , obtendremos los restantes coeficientes de la Matriz Rigidez del Elemento.

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccc} u_i & v_i & \theta_i & u_j & v_j & \theta_j \end{array} \\
\mathbf{k} = & \begin{bmatrix}
\frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\
0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\
0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\
-\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\
0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\
0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L}
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Ejemplos Prácticos

1. <u>Elemento Resorte</u>

Sea un sistema de resortes en serie, con una carga P aplicada:



Datos:

$$k_1 = 100 \text{ N / mm}, \quad k_2 = 200 \text{ N / mm}, \quad k_3 = 100 \text{ N / mm}$$
$$P = 500 \text{ N}, \quad \mathrm{u}_1 = u_4 = 0$$

Se pide:

a) Encontrar la matriz rigidez del sistema.
b) Desplazamientos en los Nodos 2 y 3.
c) Las fuerzas en los empotramientos (Nodos 1 y 4).
d) La fuerza en el resorte 2.

Solución

a) La matriz rigidez de cada elemento es:

$$\mathbf{k}_1 = \begin{bmatrix} 100 & -100 \\ -100 & 100 \end{bmatrix} \quad \text{(N/mm)}$$

$$\mathbf{k}_2 = \begin{bmatrix} 200 & -200 \\ -200 & 200 \end{bmatrix} \quad \text{(N/mm)}$$

$$\mathbf{k}_3 = \begin{bmatrix} 100 & -100 \\ -100 & 100 \end{bmatrix} \quad \text{(N/mm)}$$

Aplicando el principio de superposición se obtiene la matriz rigidez del sistema completo:

$$\mathbf{K} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 100 & -100 & 0 & 0 \\ -100 & 100+200 & -200 & 0 \\ 0 & -200 & 200+100 & -100 \\ 0 & 0 & -100 & 100 \end{bmatrix} \end{array}$$

o bien,

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 100 & -100 & 0 & 0 \\ -100 & 300 & -200 & 0 \\ 0 & -200 & 300 & -100 \\ 0 & 0 & -100 & 100 \end{bmatrix}$$

La Ecuación Matricial de Equilibrio quedara de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} 100 & -100 & 0 & 0 \\ -100 & 300 & -200 & 0 \\ 0 & -200 & 300 & -100 \\ 0 & 0 & -100 & 100 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \\ P \\ F_4 \end{Bmatrix}$$

b) Aplicando las <u>Condiciones de Borde</u>:

$u_1 = u_4 = 0$

en la Ecuación Matricial de Equilibrio y tachando la primera y cuarta fila y columna, tenemos que:

$$\begin{bmatrix} 300 & -200 \\ -200 & 300 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ P \end{Bmatrix}$$

Cuya solución es:

$$\boxed{\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P/250 \\ 3P/500 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \end{Bmatrix} \ (\text{mm})}$$

c) Con la primera y cuarta fila de la Ecuación de Equilibrio, y con los datos de los desplazamientos ya calculados, tenemos que:

$$\boxed{\begin{aligned} F_1 &= -100 u_2 = -200 \ \ (\text{N}) \\ F_4 &= -100 u_3 = -300 \ \ (\text{N}) \end{aligned}}$$

d) La ecuación de equilibrio del elemento 2 es:

$$\begin{bmatrix} 200 & -200 \\ -200 & 200 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_i \\ f_j \end{Bmatrix}$$

donde,

$i = 2, j = 3$

Por lo tanto se puede calcular, la fuerza como:

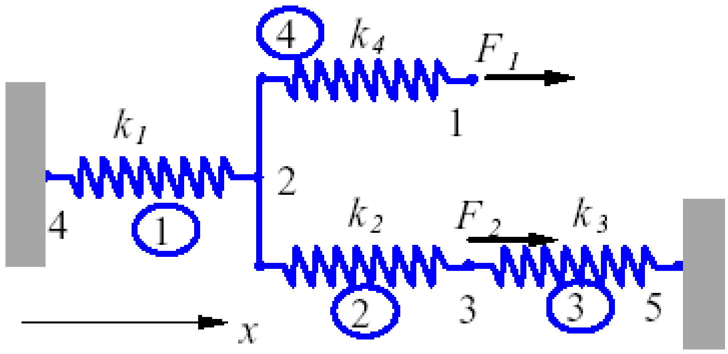
$$F = f_j = -f_i = [-200 \quad 200]\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

$$= [-200 \quad 200]\begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{= 200 \ \ (N)}$$

2. **<u>Sistema de Resortes</u>**

Sea un sistema de resortes en serie-paralelo con cargas aplicadas:



Se pide:

Para el Sistema de Resortes de la figura, cuyos nodos fueron numerados de forma arbitraria, encontrar la Matriz Rigidez Global.

Solución:

Se construye una Tabla de Conectividad de Elementos:

Element	*Node i (1)*	*Node j (2)*
1	4	2
2	2	3
3	3	5
4	2	1

La matriz rigidez de cada elemento:

$$\mathbf{k}_1 = \begin{array}{c} \begin{matrix} u_4 & \quad u_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \mathbf{k}_2 = \begin{array}{c} \begin{matrix} u_2 & \quad u_3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \end{array}$$

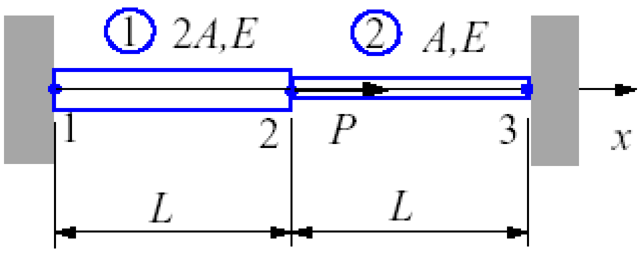
$$\mathbf{k}_3 = \begin{array}{c} \begin{matrix} u_3 & \quad u_5 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} k_3 & -k_3 \\ -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \mathbf{k}_4 = \begin{array}{c} \begin{matrix} u_2 & \quad u_1 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} k_4 & -k_4 \\ -k_4 & k_4 \end{bmatrix} \end{array}$$

Por lo tanto, aplicando el Principio de Superposición, obtendremos la Matriz Rigidez Global del Sistema:

$$\mathbf{K} = \begin{array}{c} \begin{matrix} u_1 & \quad u_2 & \quad u_3 & \quad u_4 & \quad u_5 \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} k_4 & -k_4 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -k_4 & k_1 + k_2 + k_4 & -k_2 & -k_1 & 0 \\ \hline 0 & -k_2 & k_2 + k_3 & 0 & -k_3 \\ \hline 0 & -k_1 & 0 & k_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -k_3 & 0 & k_3 \end{array}\right] \end{array}$$

3. **<u>Elemento Barra</u>**

Sean dos barras de igual Longitud, igual Modulo de Elasticidad y el Área de una es dos veces la de la otra:



Se pide:

Hallar el desplazamiento en el Nodo 2.

Solución:

La Matriz Rigidez de cada elemento:

Elemento 1

$$\mathbf{k}_1 = \frac{2EA}{L}\begin{array}{cc} u_1 & u_2 \\ \end{array}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Elemento 2

$$\mathbf{k}_2 = \frac{EA}{L}\begin{array}{cc} u_2 & u_3 \\ \end{array}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Aplicando el Principio de Superposición, obtenemos la Matriz Rigidez Global, y así, obtenemos la Ecuación de Equilibrio.

$$\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

Aplicando las <u>Condiciones de Borde</u>:

$$u_1 = u_3 = 0, \qquad F_2 = P$$

y reemplazando, se obtiene:

$$\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ P \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

Para hallar el desplazamiento en el Nodo 2, utilizamos solo la segunda fila:

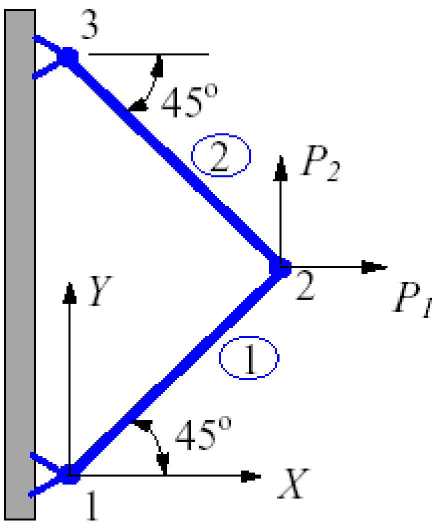
$$\frac{EA}{L}[3]\{u_2\} = \{P\}$$

Por lo tanto,

$$\boxed{u_2 = \frac{PL}{3EA}}$$

4. Elemento Barra en Dos Dimensiones

Sean dos barras idénticas que poseen el mismo Modulo de Elasticidad, la misma Área Transversal y la misma Longitud:



Se pide:

Hallar el desplazamiento del Nodo 2.

Solución:

En el sistema Local de Coordenadas, la matriz rigidez de los elementos es:

$$\mathbf{k}_1^{'} = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{k}_2^{'}$$

Estas matrices no pueden ser ensambladas juntas, ya que cada una esta en diferentes Sistemas Coordinados. Por esta razón se debe trabajar con un Sistema Coordenado Global.

Trabajaremos con cada elemento por separado:

Elemento 1:

$$\theta = 45^o, \quad l = m = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

La matriz rigidez del elemento 1 respecto a la Terna Global es:

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{T}_1^T \mathbf{k}_1^{'} \mathbf{T}_1 = \frac{EA}{2L} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Elemento 2:

$$\theta = 135^o, \; l = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad m = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

La matriz rigidez del elemento 1 respecto a la Terna Global es:

$$\mathbf{k}_2 = \mathbf{T}_2^T \mathbf{k}_2^{'} \mathbf{T}_2 = \frac{EA}{2L} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_2 & v_2 & u_3 & v_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Aplicando el Principio de Superposición, podemos armar la Ecuación de Equilibrio:

$$\frac{EA}{2L}\begin{array}{c} \begin{matrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1X} \\ F_{1Y} \\ F_{2X} \\ F_{2Y} \\ F_{3X} \\ F_{3Y} \end{Bmatrix}$$

Utilizando las Condiciones de Borde:

$$u_1 = v_1 = u_3 = v_3 = 0, \qquad F_{2X} = P_1, \quad F_{2Y} = P_2$$

Consideramos solo la tercer y cuarta fila, junto a la tercer y cuarta columna, y obtenemos:

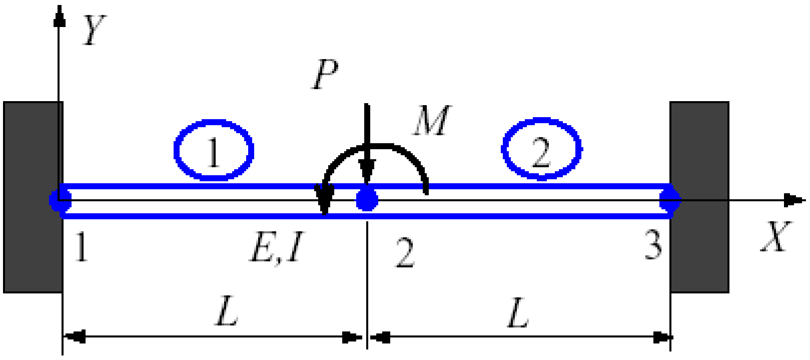
$$\frac{EA}{2L}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix}$$

Resolviendo:

$$\boxed{\begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \frac{L}{EA}\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix}}$$

5. Elemento Viga

Sea una viga empotrada-empotrada, con una carga P aplicada en L/2 y un Momento actuando en el mismo punto:



Se pide:

a) Hallar la Rotación y Deflexión del Nodo 2.

b) Hallar las Reacciones de Vinculo en los Empotramientos.

Nota: Para este ejemplo, se tomo como convención que el momento antihorario es positivo. No solo como condición de borde, sino en el análisis matricial, y es por eso que la matriz rigidez difiere en signos con la de la explicación de la pagina 15.

Solución:

a) La Matriz Rigidez de cada Elemento es:

$$\mathbf{k}_1 = \frac{EI}{L^3} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & \theta_1 & v_2 & \theta_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\mathbf{k}_2 = \frac{EI}{L^3} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_2 & \theta_2 & v_3 & \theta_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \end{array}$$

La Ecuación de Equilibrio Global es:

$$\frac{EI}{L^3} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} v_1 & \theta_1 & v_2 & \theta_2 & v_3 & \theta_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc:cc:cc} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 \\ \hdashline -12 & -6L & 24 & 0 & -12 & 6L \\ 6L & 2L^2 & 0 & 8L^2 & -6L & 2L^2 \\ \hdashline 0 & 0 & -12 & -6L & 12 & -6L \\ 0 & 0 & 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{array}\right] \end{array} \left\{ \begin{array}{c} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} F_{1Y} \\ M_1 \\ F_{2Y} \\ M_2 \\ F_{3Y} \\ M_3 \end{array} \right\}$$

Aplicando las Condiciones de Borde:

$$F_{2Y} = -P, \qquad M_2 = M$$
$$v_1 = v_3 = \theta_1 = \theta_3 = 0$$

Reemplazamos y obtenemos:

$$\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 24 & 0 \\ 0 & 8L^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -P \\ M \end{Bmatrix}$$

Por lo tanto, resolviendo:

$$\boxed{\begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \frac{L}{24EI}\begin{Bmatrix} -PL^2 \\ 3M \end{Bmatrix}}$$

b) Reemplazando en la Matriz Global, tenemos:

$$\begin{Bmatrix} F_{1Y} \\ M_1 \\ F_{3Y} \\ M_3 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} -12 & 6L \\ -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L \\ 6L & 2L^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

Resolviendo tenemos,

$$\boxed{\begin{Bmatrix} F_{1Y} \\ M_1 \\ F_{3Y} \\ M_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{Bmatrix} 2P + 3M/L \\ PL + M \\ 2P - 3M/L \\ -PL + M \end{Bmatrix}}$$

Referencias

- ¨Análisis de Estructuras mediante el Método de los Elementos Finitos¨. Ing. Ruben Lopez Triaca. Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires.
- ¨Introduction to Finite Element Method¨. Yijun Liu. University of Cincinnati.
- ¨Finite Elements in Solids and Structures¨. Astley.
- ¨Resistencia de Materiales¨. Stiopin
- "Introduction to finite element method". Felippa
- "Una introducción generalizada al método de los elementos finitos". Oñate