

## 2. LA LÓGICA PROPOSICIONAL

La lógica proposicional se ocupa de proposiciones. Con «proposición» entendemos una frase sobre la cual es sensato preguntar si es verdadera o falsa. Ordinariamente las proposiciones están expresadas en modo indicativo. Las frases interrogativas, dubitativas, imperativas o exclamativas no son consideradas como proposiciones. La relación que hay entre frases y proposiciones es tal que entre muchas frases sólo un grupo determinado vale como un conjunto de proposiciones, es decir, aquel que comprende frases que describiendo afirman algo. Casi es más fácil enumerar cuales frases no son proposiciones. Esto vale para las siguientes:

1. frases interrogativas, dubitativas, imperativas
2. frases modales: frases con los términos «posible», «necesario», «incondicionado», etc.
3. frases no bien formuladas: «entonces y así hizo»
4. frases sin sentido: «los libros lloran rocas emplumadas»
5. formas proposicionales: «la empresa de la limpieza utiliza  $x$  para limpiar los paños».

Con las frases no bien formuladas y sin sentido no podemos hacer nada. Las *formas proposicionales*, al contrario, se transforman inmediatamente en proposiciones tan pronto como se sustituya la variable « $x$ » —que es desconocida. No trataremos la particularidad de 1) mientras que sobre 2) volveremos más tarde.

### *Ejercicio 2*

¿Cuáles de las siguientes frases son proposiciones? Exponed porqué no son proposiciones cuando no las consideréis tales.

1. La leche es ácida.
2. ¿Tienes cinco minutos para mí?
3. El sábado Juan está siempre ocupado.
4.  $2 + 2 = 7$
5. ¡Cómprate un Volvo!
6. La ciudad  $x$  es famosa por el Coliseo.
7. Habla continuamente sobre la crisis del dólar.
8. 42.
9. David venció a Goliat con una honda.
10. Probablemente el barco a vapor es.
11. ¡Menos mal que ha dejado de llover!
12. Hasta el siglo XVII se creyó en una relación entre las fases lunares y las enfermedades.
13. El inicio de la escuela es a mitad de septiembre.
14. La balanza es imprecisa.
15. ¿Un hombre trabaja cuando piensa?

16. Llueve.
17. Es imposible obtener sangre de las zanahorias.
18. Tú bajas desde las estrellas.

### 2.1 **La formalización de las proposiciones**

Como tendremos que trabajar continuamente con proposiciones, podría resultar ventajoso utilizar una abreviación, o bien, como dicen los lógicos, llevar a cabo una formalización. Los matemáticos expresan sus incógnitas con «x», «y», etc. Análogamente nosotros representaremos con «p», «q», etc. no los números y, ni siquiera, vocablos individuales, sino frases enteras, o mejor: proposiciones. Ya que las letras toman el puesto de las proposiciones, las llamamos *variables proposicionales*. Si tratamos una proposición concreta, la podemos simbolizar como constante con una letra mayúscula. Viene privilegiada la letra inicial del sustantivo o del verbo, o bien, del adjetivo. Por ejemplo:

El gallo está enfermo simbólicamente: G

La proposición es por lo tanto representada por la letra «G». La elección de las letras es algo sin importancia: se podría haber escrito sin ningún problema «A». Importa, sin embargo, que cada proposición sea representada por una sola letra, y esto indiferentemente si la expresión lingüística es larga o breve. Por lo tanto una inofensiva «G» puede significar:

- G El gallo canta
- G El gallo canta pronto por la mañana
- G El gallo canta pronto por la mañana sin pausa haciendo que se pongan de mal humor todos los vecinos.

Está prohibido sin embargo representar dos proposiciones diversas con la misma letra dentro del mismo contexto. Por tanto:

El gallo canta y Gregorio se despierta

G y G falso

G y D justo

Una proposición que se puede representar con una sola letra se llama *frase atómica*. También la negación de una proposición atómica es una proposición atómica. Frases que no son proposiciones en nuestro sentido no vienen ni siquiera simbolizadas.

#### *Ejercicio 2.1*

Formaliza cuanto sigue:

1. Othmar es organista.
2. El viernes comeremos pescado.
3. ¡Al fin llega la primavera!

4. Las piedras preciosas se han ofendido.
5. Se esfuerza siempre con los ejercicios.
6. Antes de ayer la encontré nuevamente en la estación.
7. ¿Debo repetirlo otra vez?
8. A la tercera copa se puso a cantar en medio de la fiesta.
9. La dirección es del todo ilegible.
10. El último verano tiene.
11. No hay rosa sin espina.
12. ¡Qué bueno que el tío Nando haya encontrado una nueva mujer!
13. Alicia está disgustada porque los espaguetis están recocidos.
14. ¡Todo está perdido!
15. Ferrero tiene un problema crónico de dinero.
16. «Toalla» se dice en italiano «asciugamano».
17. ¡Atención a la puerta!
18. ¿Quieres apostar si el Alcalde tendrá un discurso?
19. El Códice 914 de St. Gallen es la fuente más importante para las ediciones críticas de la Regla benedictina.

## 2.2 **La formalización de los conectivos entre las proposiciones**

En el lenguaje ordinario parece haber dos tipos de vocablos, aquellos que significan algo, como por ejemplo «elefante», «mermelada», «orar», «prestar», etc., y aquellos desprovistos de significado como «pero», «también», «porque», «así», etc. El medioevo ha llamado a los vocablos del último tipo «sincategoremáticos». Entre estos es necesario distinguir dos grupos:

- 1) «entre», «mientras», «ahora», etc.
- 2) «y», «o», «ninguno», etc.

No es siempre evidente por qué los vocablos sincategoremáticos del primer grupo deberían distinguirse de los del segundo grupo. La diferencia, sin embargo, es muy significativa. El segundo grupo tiene una estrecha relación con el problema de la verdad de las frases mientras que el primero es máximamente neutral, razón por la cual no requiere mayor atención.

Del segundo grupo elegiremos cinco sincategoremáticos. Se les llama también funtores, más exactamente *funtores de los valores de verdad* en tanto que determinan la verdad global de las proposiciones atómicas unidas.

Quisiéramos comenzar la exposición con el *negador*. Corresponde bastante exactamente al ordinario «no». Como abreviación elegimos «¬». Con este signo de negación, que viene puesto delante de las proposiciones, representamos el negador. Se trata de un functor a un solo puesto, llamado también *monádico*. Esto significa que se aplica a una sola proposición,

aquella que lo sigue inmediatamente. Si “P” significa «La Pascua en 1995 fue en abril», “¬P” significaría algo parecido a «La Pascua en 1995 no fue en abril». La negación niega la proposición que va a continuación.

Para los funtores a dos puestos, o *diádicos*, iniciamos con la «y», que simbólicamente es « $\wedge$ ». Este functor es a dos puestos porque antes y después del símbolo debe aparecer una proposición para satisfacer el requisito de correcta formación de las proposiciones.

El segundo de los funtores a dos puestos es «o», que viene expresado simbólicamente con « $\vee$ ».

Como tercer functor del grupo a dos puestos se encuentra la implicación, que se escribe como una flecha: « $\rightarrow$ ». La implicación corresponde *grosso modo* a la expresión «si... entonces» del lenguaje ordinario —nótese que en el lenguaje ordinario frecuentemente se omite el «entonces»: también nosotros lo omitiremos a veces para no hacer más pesada la forma de los ejemplos.

El cuarto functor a dos puestos, que se puede expresar con el signo « $\leftrightarrow$ », lo interpretamos como «si y sólo si...».

Reunamos a continuación los cinco símbolos:

- ¬ no
- $\wedge$  y
- $\vee$  o
- $\rightarrow$  si... entonces
- $\leftrightarrow$  si y sólo si...

Los funtores son constantes lógicas. Sirven para unir proposiciones o variables proposicionales. Una conexión entre proposiciones constituye una frase molecular. Todo functor a dos posiciones transforma frases atómicas en frases moleculares. El conjunto de las fórmulas está por lo tanto constituido de las frases atómicas y de las frases moleculares.

Ahora podemos familiarizarnos con la formalización de los nexos entre proposiciones. Lo haremos valiéndonos de dos proposiciones: «el sol resplandece» y «Guillermo va a la montaña». La simbolización procede así:

- S El sol resplandece
- G Guillermo va a la montaña
- ¬ S El sol no resplandece
- ¬ G Guillermo no va a la montaña

Correspondientemente, en el caso con los funtores a dos posiciones:

- $S \wedge G$  El sol resplandece y Guillermo va a la montaña
- $S \vee G$  El sol resplandece o Guillermo va a la montaña
- $S \rightarrow G$  Si el sol resplandece, entonces Guillermo va a la montaña

$S \leftrightarrow G$  Si y sólo si el sol resplandece, Guillermo va a la montaña.

### Ejercicio 2.2

1) Formaliza cuanto sigue:

1. Herodoto no era un músico.
2. Fumar es nocivo para la salud y el chocolate engorda.
3. Si los bomberos llegan a tiempo, entonces el viejo edificio se salvará.
4. Paga los impuestos anticipadamente si y sólo si lo multan.
5. Se queda en casa o su mujer no juega al Bridge.
6. Si el perro no se siente bien, entonces no mueve la cola.

El principio de la formalización es extremadamente simple: las proposiciones deben ser unidas usando el functor apropiado. Es verdad que en práctica aparecen a veces dificultades que pueden ser provocadas por la riqueza del lenguaje ordinario, dado que por una expresión particular, que nosotros representamos con un functor particular, se utilizan más vocablos. Citaremos, por lo tanto, algunas de las dificultades de formalización que se presentan en este caso.

#### 2.2.1 La conjunción «y»

«El sol resplandece y Guillermo va a la montaña» es una conjunción entre proposiciones que no presenta ningún problema. Entre las dos proposiciones se inserta una «y», quedando así ya resuelto el problema de la conjunción. Desgraciadamente no todas las conjunciones son así de evidentes. Veamos algunos ejemplos.

(1) El juego del ajedrez es excitante y trabajoso.

El argumento a izquierda de la «y» es sin duda una proposición. «Trabajoso», sin embargo, es aparentemente un vocablo aislado y, por tanto, no es una proposición. En realidad el lenguaje ordinario aprovecha la circunstancia que, en aquellos casos en los que a una única cosa le son atribuidas dos o tres o más cualidades, no hay necesidad de repetir cada vez el nombre de la misma cosa. En el caso del ejemplo se trata efectivamente de dos proposiciones que se podrían expresar explícitamente de este modo: «El juego del ajedrez es excitante y el juego del ajedrez es trabajoso». Reconocemos inmediatamente que también aquella que aparece como una única palabra es en realidad una proposición, abreviada sí, pero correcta; así la formalización queda del modo siguiente:

(1)  $E \wedge T$

El lenguaje ordinario —y esto vale igualmente también para el así llamado lenguaje científico de tipo especializado— no se puede transponer inmediatamente en símbolos. Antes de comenzar a formalizar es necesario

comprender las estructuras sintácticas lógicamente relevantes. Este tipo de comprensión no coincide con el aprendizaje de un contenido aunque constituya una condición esencial del mismo. Nuestra familiaridad con el lenguaje ordinario es tal que las igualdades y las diferencias de estructura vienen reconocidas también aunque no sean manifestadas por las mismas letras. Se trata de las siguientes e irritantes circunstancias:

- la «y» no indica siempre una conjunción entre proposiciones;
- de vez en cuando nos encontramos en presencia de una conjunción entre proposiciones sin que exista una «y» que nos la señale;
- el uso de la conjunción no es unívoco.

Veamos un poco más de cerca estas tres situaciones.

#### a) Presunta conjunción

Algunas lenguas europeas conocen al menos dos conjunciones aparentes. Una es un simple estilo retórico mientras que la otra es un caso por el análisis tradicional del lenguaje.

Si el estilo viene repetido de modo concentrado llega a ser fácilmente analizable, como en la traducción del Evangelio de Marcos. En la italiana a veces —y en aquella alemana de Zuinglio siempre— aparece al inicio de los primeros siete capítulos la palabra introductiva «y», quizá con la intención de restablecer lo más fielmente posible el texto griego. De todas maneras esta «y» no tiene evidentemente ningún significado de conjunción sino que sirve como mero enlace retórico a cuanto se ha dicho anteriormente. Así este tipo de «y» forma parte de la primera clase de los sincategoremáticos. De aquí sacamos la sorprendente conclusión que también los términos sincategoremáticos pueden ser polivalentes incluso estando desprovistos de significado.

El segundo caso es más significativo para los lógicos. Partamos de las dos frases siguientes:

- (1) Francisco y Antonio son cantantes.
- (2) Francisco y Antonio son vecinos.

Las dos conjunciones parecen presentar la misma naturaleza gramatical. En realidad la frase (1) adscribe a dos seres humanos una cualidad que atribuye a ambos. En este caso, como se ha visto, el lenguaje cotidiano permite una abreviación. Representada explícitamente, la frase (1) significa lo siguiente: «Francisco es un cantante y Antonio es un cantante». La (2), sin embargo, no se puede interpretar en este sentido; en efecto, «Francisco es un vecino» es una frase no bien formulada; debería sonar más bien: «Francisco es un vecino de Antonio», o, al menos, debería ser completada implícitamente: «Francisco es el vecino de alguien». Lo que tenemos aquí

no es una conjunción de dos proposiciones simples sino más bien una relación elemental. De la teoría de las relaciones, que afrontaremos más adelante, emerge, sin embargo, que, bajo la condición expresada de la frase (2), también Antonio es un vecino de Francisco. Se trata, por tanto, de una sola proposición y por eso la (1) y la (2) deberían formalizarse así:

(1)  $F \wedge A$

(2)  $V$

Está claro que la (2) podría también representarse con una «F», siempre y cuando se aclare que esta «F» no sería idéntica a aquella de la frase (1). Por tanto es aconsejable recurrir a otra letra para formalizar la (2).

#### b) Conjunciones entre proposiciones sin la «y»

Una formalización es siempre una abstracción. En el caso de nuestras formalizaciones se omiten aquellos matices que están privados de relevancia lógica. El lenguaje ordinario utiliza efectivamente un rico espectro de palabras para expresar, más allá de la conjunción en sí, otras acentuaciones. Así se dice, por ejemplo: «Viene a comer pero no se queda». Aquí se trata de dos proposiciones que no están unidas por una «y» sino por un «pero». En el «pero» está contenido una ligera contraposición, un matiz que no se encuentra presente en la «y». Pero como el vocablo tiene sólo un valor retórico que no concierne al valor de verdad de las proposiciones, el lógico, que mira a la verdad, puede permitirse renunciar a ello sin problemas. Se encuentran muchos tipos de estos matices.

Así también el «pero» puede sustituirse por un «mas», un «sin embargo», un «no obstante», etc. El lenguaje escrito tiene también la posibilidad de expresar la función «y» por medio de una coma, por ejemplo: «Se ha esforzado para conseguir esto largamente, intensamente y con gran éxito». Además, la «y» puede incluso desaparecer de la representación lingüística evidente si la conjunción viene negada.

La negación de una conjunción constituida por una «y» puede ser expresada de modos diversos. Aunque resulte inusual, se entiende si digo:

(3) Hoy Francisco no va a la piscina, y hoy Antonio no va a la piscina

Pero en lugar de (3) se dirá mejor:

(4) Hoy Francisco y Antonio no van a la piscina

o bien:

(5) Hoy no van a la piscina ni Francisco ni Antonio

Sin duda la (3) es tan desaliñada que no viene pronunciada nunca en español. En lugar de la (4), se puede utilizar siempre la (5), en la cual la

«y», a primera vista, ha desaparecido, mientras que, realizando un análisis más detallado, se la encuentra en el «ni... ni» de la negación.

### c) Diversidad en el uso de la conjunción

La conjunción es conmutativa. Con esto se entiende que la proposición antes de la «y» puede intercambiarse con aquella sucesiva a la «y». «Cojo una carta y voy a correos» es por lo tanto equivalente a «Voy a correos y cojo una carta». Pero a veces las circunstancias, por ejemplo la sucesión temporal, impiden la conmutatividad.

(6) Francis Bacon, experimentando con pollos congelados, se resfrió y murió.

La riqueza de la lengua hablada hace así que se encuentren muchos matices diversos también en la utilización de los funtores ordinarios. Darse cuenta de ellos es una de las mayores dificultades para quien está comenzando a adentrarse en el camino de la formalización, en tanto que el hablante medio sabe como utilizar su lengua madre sin necesidad de conocer explícitamente sus estructuras lógicas. Con un poco de atención y de ejercicio se puede mejorar mucho. Más velozmente que en el caso de la «y» trataremos de prestar atención a algunas de las dificultades presentes en el uso de los otros funtores.

#### 2.2.2 Los otros funtores

La **negación**: «La cavidad es insuficiente» debe significar lo mismo que: «La cavidad no es suficiente». En particulares contextos lingüísticos la proposición «El pequeño Marcos no ha mentado nunca» puede significar lo mismo que: «El pequeño Marcos no ha mentado».

Negamos la verdad de un enunciado afirmando su negación. La negación recoge el uso de la partícula “no” del castellano (o cualquiera de sus equivalentes; “no es cierto que”, “no es verdad que”, “nunca”, “jamás”).

La **disyunción**: la «o» se emplea con tres significados diversos, aunque uno de ellos puede ser ignorado debido a que se encuentra en raras ocasiones. A los otros dos casos los llamamos la disyunción inclusiva y la disyunción exclusiva. Las diferencias entre ambas las veremos más tarde. Para la formalización la «o» presenta menores dificultades que la «y» ya que nuestra lengua hablada conoce pocas formulaciones de la «o». Con frecuencia nos sentimos engañados por algunas formulaciones típicas del lenguaje ordinario como «Los niños y los ancianos pagan la mitad». Aquí está claro que la «y» ha de entenderse como una «o». En la formalización del cálculo proposicional se pierde la dependencia de las dos proposiciones conectadas por la conjunción: sin embargo, el sucesivo cálculo de

predicados pone a la luz el contexto en el que «y» se cambia por «o». Normalmente se expresa mediante “o”, “a menos que”, “a no ser que”, “y/o”.

La **implicación**: en lugar de «si... entonces...» en la lengua hablada pueden utilizarse sustitutos, como «en el caso en que...», «si p, q», «q, si p», «p es condición suficiente para q», «q es condición necesaria para p», «sólo si q, p» etc. Lo que importa es constatar que el «porque», a pesar de la semejanza aparente, no es una expresión adecuada en esta situación, ya que ha de desempeñar una función esencialmente diversa. De este modo la implicación condicional no es una función de verdad: «Si Hitler hubiese muerto en 1935, Austria no habría sido sometida». Esta frase irreal no debe valer como función de verdad de la implicación.

Debe llamarse también la atención sobre la función asimétrica de la implicación. El argumento antes del símbolo de implicación lo llamamos «antecedente» mientras que el que lo sigue lo llamamos «consecuente». Antecedente y consecuente son los dos argumentos de la implicación. La asimetría tiene como consecuencia que antecedente y consecuente no pueden intercambiarse. En el caso de los otros funtores este cambio está permitido en base a una regla que conoceremos sucesivamente.

Si en el caso de la implicación intercambiamos antecedente y consecuente, provocamos un cambio de sentido. El cambio lo utilizamos para expresar con el mismo functor otro enlace entre proposiciones. El intercambio entre antecedente y consecuente corresponde a la expresión del habla «sólo si... entonces». Podemos clarificar este punto con algunos ejemplos:

(7) Si el sol resplandece, entonces Guillermo va a la montaña  $S \rightarrow M$

(8) Sólo si el sol resplandece, Guillermo va a la montaña  $M \rightarrow S$

Podemos hacer plausible —en el plano del contenido—, esta situación, si (8) significa lo mismo que «si Guillermo va la montaña, entonces resplandece el sol». Este «sólo si... entonces» es expresado en el lenguaje cotidiano de formas diversas: «... es una condición necesaria de...», «puesto que... entonces...», «en la medida en que...», etc.

La **equivalencia**: también la equivalencia puede presentarse de modos distintos en el lenguaje de cada día. Tiene el mismo significado que «si p, entonces q y si q, entonces p», así que escribimos “ $p \leftrightarrow q$ ”. Esta expresión significa lo mismo que: «p es una condición necesaria y suficiente de q». La forma fundamental de la equivalencia es entonces «si y sólo si... entonces...». En lugar de esta expresión inusual se puede utilizar también más brevemente la palabra «deber»: «si un leopardo es negro entonces debe ser una pantera». Se trata de una forma más corriente que la siguiente: «si y

sólo si un leopardo es negro, es una pantera», aunque esta última sea más correcta.

### *Ejercicio 2.2.2*

1) Formaliza las siguientes frases:

1. Andrea estudia biología o química.
2. En el principio creó Dios el cielo y la tierra.
3. La cerveza es bebible pero no está fría.
4. Si el concierto es público, el solista toca bien.
5. Sólo si el concierto es público, el solista toca bien.
6. Ni Napoleón, ni De Gaulle eran ingleses.
7. La subida más empinada del ferrocarril del Gottardo es del 27 por mil mientras que la del ferrocarril de Engelberg es del 246 por mil.
8. Sólo si un número es impar no se puede dividir por 2.
9. Ana y Bruno se casaron el 14 de julio, aunque no son franceses.
10. La puerta o está abierta o está cerrada.
11. El millonario tiene miedo que su patrimonio se reduzca, el filósofo que se acreciente su indigencia.
12. El gato captura pájaros en lugar de ratones.
13. No es suficiente que venga Aldo para que Berta permanezca.
14. Va a la Ópera siempre y cuando no sea de Wagner.
15. Carlos toca el piano y el órgano, Práxedes sin embargo, el piano y el arpa.
16. Un chiste eficaz debe tener un golpe final.

2) Completa la formalización:

1. No p sino q
2. Ni p ni q
3. p, si q
4. Sólo p, si q
5. p es una condición suficiente de q
6. p es una condición necesaria de q

3) Traduce los siguientes conectivos proposicionales haciendo uso de este vocabulario:

T = la temperatura sube

P = ha llovido

C = el cerezo florece

1.  $(T \wedge P) \rightarrow C$
2.  $(T \rightarrow P) \leftrightarrow (\neg T \vee P)$
3.  $\neg (C \rightarrow P)$
4.  $\neg T \vee (C \rightarrow P)$
5.  $T \leftrightarrow \neg C$

$$6. \quad C \rightarrow (P \wedge \neg T)$$

- 4) «‘ $p \leftrightarrow q$ ’ debe significar: ‘Sócrates es el filósofo que ha bebido el veneno’». [E. WALTHER, *Kleiner Abriß der Mathematischen Logik*, Kevealer, 1950: citado por J. v. KEMPSKI, „Max Bense als Philosoph“, *Archiv für Philosophie* 4 (1952): 280]. ¿Cómo juzgas esta afirmación?

### 2.3 Regla de los paréntesis

Como pueden unirse no sólo dos proposiciones sino también un número arbitrario de las mismas, si no se presta atención pueden nacer equívocos como en el caso siguiente:

$$(1) A \vee B \rightarrow C$$

Esta expresión puede interpretarse de dos modos distintos:

$$(1^a) (A \vee B) \rightarrow C \quad \text{o bien}$$

$$(1b) A \vee (B \rightarrow C)$$

(1<sup>a</sup>) Si Alberto o Bárbara van al cine, entonces Claudia se queda en casa.

(1b) Alberto va al cine, o bien si Bárbara va al cine, entonces Claudia se queda en casa.

Evidentemente la (1<sup>a</sup>) y la (1b) no son idénticas. Más adelante estudiaremos un método para expresar exactamente la diferencia entre las dos.

También la negación requiere una cierta atención:

$$(2) \text{No es el caso que Emilio fuma o beba.}$$

La negación se refiere aquí a todo el conectivo proposicional, así que se impone la siguiente formalización:

$$(2^a) \neg (F \vee B)$$

Si se ignoraran los paréntesis, la negación se limitaría a la primera constante:

$$(2b) \neg F \vee B$$

lo cual correspondería a la siguiente aserción singular: «Emilio no fuma o bien bebe». La singularidad depende, sin embargo, sólo del contenido específico del ejemplo elegido. La estructura de la (2b) puede ser interpretada de un modo totalmente sensato así:

$$(3) \text{Emilio no se marcha o bien coge el coche}$$

Lo cual significa: tiene intención de quedarse; sin embargo, si debiera decidirse diversamente, cogería el coche.

$$(3^a) \neg M \vee C$$

Si no están presentes los paréntesis vale la convención de que « $\wedge$ » y « $\vee$ » unen más estrechamente que « $\rightarrow$ » y que « $\leftrightarrow$ ». Correspondientemente a esta regla, la (1) debería ser interpretada como (1<sup>a</sup>). Sin embargo, para facilitar las cosas, también en el caso (1<sup>a</sup>) dejaremos los paréntesis, si bien, en sentido estricto, sean innecesarios. Si, por el contrario, la convención no es suficiente, como en el caso (1b), entonces los paréntesis no se pueden eliminar. Por esto la expresión “ $A \rightarrow B \rightarrow C$ ” no está bien formulada; en efecto significa cosas diversas dependiendo de si es interpretada como “ $(A \rightarrow B) \rightarrow C$ ” o como “ $A \rightarrow (B \rightarrow C)$ ”.

### *Ejercicio 2.3*

Formaliza lo que sigue:

1. O vamos a nadar o si no vamos a nadar tocamos cualquier instrumento.
2. Es valiente sólo si está en la taberna sin la mujer cerca.
3. No podemos tener ambas cosas
4. No ha bebido vino, o bien si lo ha bebido no conduce el automóvil.
5. No se da el caso que él haya bebido vino y conduzca el coche.
6. Si el director se equivoca en el ataque o el pianista pasa dos páginas a la vez, entonces no hay armonía.
7. La asamblea tiene poder decisivo, o, si no lo tiene, la disolvemos.
8. El seguro paga en el caso de rotura, incendio o robo pero no en el caso de granizo
9. El seguro paga sólo en caso de rotura e incendio pero no en caso de robo
10. El ordenador no interrumpe a los alumnos a no ser que lo haga para mostrar errores o bien para anunciar una interrupción de la corriente.
11. El cliente se ha ido sin pagar la cuenta, o bien ha ido a dar un paseo y vuelve de un momento a otro)
12. Si Aida no toca ni un instrumento de cuerda o de percusión sino que seguramente canta, entonces toca un instrumento de madera o bien el órgano y compone.

Una observación sobre la multiplicidad de los símbolos de la lógica. Frecuentemente las diferencias pueden ignorarse, como cuando la conjunción se indica con « $\cdot$ » o con « $\&$ ». Una sola forma de escritura es una excepción y por esto debe ser estudiada aparte: se trata de la notación polaca. Tiene el valor de no utilizar paréntesis y de permanecer incluso siempre unívoca. Desde este punto de vista es superior a todas las otras formas de escritura simbólica. La afrontaremos más adelante.

Síntesis de algunas expresiones especializadas:

$p, q, r, \dots$	variables proposicionales	
$A, B, C, \dots$	constantes proposicionales	
$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$	constantes lógicas	
$p$	} proposiciones atómicas	} fórmulas
$\neg p$		
$A$		
$\neg \neg C$	} proposiciones moleculares	
$p \vee q$		
$A \rightarrow B$		
$(\neg p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow q)$		

$p$	1 argumento, 1 variable
$p \vee p$	2 argumentos, 1 variable
$(p \vee p) \rightarrow p$	3 argumentos, 1 variable
$(p \vee q) \rightarrow r$	3 argumentos, 3 variables
$A \rightarrow B$	A = antecedente, B = consecuente

La formalización no siempre resulta fácil sobre todo en el caso del condicional, que funciona como lo hacen las leyes: marca unas circunstancias y estipula lo que en ellas debe suceder. Por consiguiente, actuamos conforme a la ley (no la infringimos) cuando, o bien las circunstancias marcadas no se producen o cuando hacemos lo que la ley prescribe:

1. Tenemos cuatro cartas sobre la mesa. Sabemos que todas ellas tienen una letra por un lado y un número por el otro. Queremos comprobar que la siguiente ley se cumple para todas las cartas: «Si hay una vocal por una cara, por la otra hay un número par» ¿A cuántas cartas tengo que darle la vuelta para estar completamente seguro de que la ley se cumple?

2		1		A		B
---	--	---	--	---	--	---

Otra circunstancia que hace difícil el condicional es cuando tiene antecedente falso, pero se pueden poner ejemplos pertinentes (por ejemplo, con una fuerte relación de causalidad entre antecedente y consecuente) para convencernos, al menos de que es preciso adoptar una convención al respecto. Es así como ironizamos en castellano. Una anécdota para condicionales con antecedente y consecuente falso es la siguiente:

2. Dos periodistas que no se podían ver. El primero publica en el diario local una foto de su hijito disfrazado de rociero, con el siguiente pié:

*Fotografía del simpático rociero Pepito Ruiz, hijo del brillante escritor D. José Ruiz.*

Al día siguiente aparece, en la misma página, el siguiente insulto rimado:

*Si tu hijo es rociero y tú un escritor brillante, yo soy Felipe III, Genoveva de Brabante y el hijo del Espartero.*

3. Elegid la formalización adecuada (y/o sus equivalentes, si las hubiera).
  - (a) Si **Pedro juega al badminton** ( $P$ ), **Quiteria también** ( $Q$ )
  - (b) **Pienso** ( $P$ ), luego **existo** ( $Q$ )
  - © No pienso, luego existo.
  - (d) **El fuego** ( $P$ ) es la causa del **humo** ( $Q$ )
  - (e) El fuego siempre produce humo.
  - (f) Sólo si Pedro juega al bádminon, juega Quiteria.

	$P \rightarrow Q$	$Q \rightarrow P$	$P \rightarrow \neg Q$	$Q \rightarrow \neg P$	$\neg P \rightarrow \neg Q$	$\neg Q \rightarrow \neg P$	* Ninguna
a							

b							
c							
d							
e							
f							

4. Elegid la formalización adecuada (y/o sus equivalentes, si las hubiera).

(a) **Pedro irá al dentista** ( $P$ ), tanto si **quiere** ( $Q$ ) como si no quiere.

(b) **La magia del cuento se revela** ( $P$ ) sólo cuando **Pinocho miente** ( $Q$ ) o **Blancanieves muerde la manzana** ( $R$ )

(c) **El certificado tiene validez** ( $P$ ), si **está firmado por el director del departamento** ( $Q$ ), o **por el tutor del proyecto** ( $R$ )

(d) **La inflación aumentará** ( $P$ ), a menos que **baje la emisión de moneda** ( $Q$ ) u **ocurra un milagro** ( $R$ ).

(e) Aristóteles, que **era un filósofo genial** ( $P$ ), sostiene que si **el mundo es eterno** ( $Q$ ), entonces **el sol gira** ( $R$ )

(f) **Leeré a Proust** ( $P$ ), si **me voy de vacaciones** ( $Q$ ) y **encuentro sus libros en oferta** ( $R$ )

	$(Q \vee R) \rightarrow P$	$P \rightarrow (Q \vee R)$	$P \rightarrow (Q \vee \neg Q)$	$P \wedge (Q \rightarrow R)$	$(Q \wedge R) \rightarrow P$	$P \rightarrow (Q \wedge R)$	$\neg P \rightarrow \neg(Q \vee R)$	*
a								
b								
c								
d								
e								
f								

#### 2.4 Las funciones de verdad

Admitamos sólo dos valores de verdad: el verdadero y el falso. Sobre la base de este presupuesto, un argumento concreto puede ser sólo o verdadero o falso. La verdad o falsedad de un conectivo proposicional depende de la verdad o falsedad de los argumentos individuales. Intentaremos indagar la naturaleza de los funtores ya conocidos con respecto a sus valores de verdad.

### 2.4.1 La negación

La negación es aquella función que confiere a un argumento el valor de verdad opuesto. La proposición «La lámpara está encendida» puede ser verdadera o falsa referida a una lámpara concreta. Si es verdadera, entonces la negación «La lámpara no está en funcionamiento» es falsa; si, por el contrario, la proposición «La lámpara no está en funcionamiento» es verdadera para una lámpara determinada, entonces en estas circunstancias su negación, «La lámpara está encendida», es falsa. De esto se deriva que, al afirmar una frase, negamos contemporáneamente la frase contradictoria.

Podemos definirla de la siguiente forma:

*La negación de un enunciado verdadero será falsa y la de uno falso será verdadera.*

Esto se puede representar de un modo general con una tabla de los valores de verdad:

p	$\neg p$
verdadero	falso
falso	verdadero

C	1) el azul es un color
I	2) los ciervos son insectos
B	3) Bélgica es más pequeña que Luxemburgo
V	4) San Marcos está en Venecia

¿Qué proposiciones son verdaderas?

El azul es verdaderamente un color y, por lo tanto «C» es verdadera. Sin embargo, los ciervos no son insectos, así que «I» es falsa y consecuentemente « $\neg I$ » es verdadera. Bélgica tiene una superficie once veces más grande que Luxemburgo. Por tanto, la proposición «B» es falsa y « $\neg B$ » es verdadera. Todos los turistas saben que San Marcos es la Iglesia más importante de Venecia y, por lo tanto, «V» es verdadera.

La pregunta se podría haber hecho también en estos términos: ¿qué proposiciones son falsas? Respuesta:  $\neg C, I, B, \neg V$ .

Una proposición concreta es, por tanto, verdadera o falsa. La cosa es menos evidente si tenemos dos ( $A \wedge B$ ), tres ( $A \wedge B \wedge C$ ) o más constantes. En este contexto sería más apropiado hablar de «argumentos» en lugar de «constantes» dado que la ocurrencia repetida de la misma constante vale como un solo argumento, así que el valor de verdad de « $A \vee A \vee A$ » depende sólo de la constante «A». Si «A» es verdadera, será verdadero todo el conectivo proposicional, si «A» es falsa, este valor se aplica nuevamente a toda la expresión; en efecto, una afirmación que se repite tres veces no posee más verdad o falsedad que la que tiene una ocurrencia

concreta. Si, sin embargo, nos encontramos con « $A \vee B$ » y « $A$ » es falsa, entonces queda todavía abierta la cuestión del valor de verdad de « $B$ ». De esto observamos que en el momento en que tenemos que tratar con dos o más variables, existen diversas combinaciones entre verdadero y falso.

Con un ejemplo se puede mostrar cómo es de grande el número de combinaciones de dos variables. Supongamos que tenemos en una bolsa con bolas de vidrio y de fermio. A continuación introduzco dentro las dos manos y extraigo dos bolas. Una breve reflexión nos hará ver que son posibles las cuatro combinaciones siguientes:

mano izquierda	mano derecha	abreviación	
vidrio	vidrio	v	v
vidrio	fermio	v	f
fermio	vidrio	f	v
fermio	fermio	f	f

Si interpretamos «v» como «verdadero» y «f» como «falso», entonces habremos representado las posibles combinaciones de los valores de verdad de dos variables. A nivel internacional se ha impuesto la siguiente forma de escritura: «1» para «verdadero» y «0» para «falso».

Una función de verdad con dos variables está entonces unívocamente definida si se encuentra establecido unívocamente el valor de verdad para cada uno de los cuatro casos posibles. Lo cual equivale a una rigurosa definición de los funtores que ya conocemos. A continuación los examinaremos más atentamente.

#### 2.4.2 La conjunción

«El cartero lleva una revista y un paquete». Estas son dos proposiciones unidas por la conjunción; formalmente se pueden representar así: « $R \wedge P$ ». Como ya se ha dicho, en el caso de que haya dos variables existen cuatro posibilidades diversas de combinación por lo que respecta a los valores de verdad. Escribimos los cuatro casos bajo las letras « $R$ » y « $P$ » en la siguiente tabla:

$R$	$P$	$R \wedge P$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Este conectivo proposicional es verdadero sólo si son verdaderas tanto la primera como la segunda proposición, es decir, cuando el cartero lleva tanto la revista como el paquete. Decimos, sin embargo, que es falsa tanto si el cartero llega sin el paquete como si llega sin la revista, y aún más si llega sin ninguno de los dos. Interpretamos esta situación diciendo que el

espacio bajo la conjunción tiene un «1» cuando ambas proposiciones valen «1», por lo tanto, sólo en la primera línea. Los otros casos deben entonces ser rellenados con un «0». La definición de «conjunción» sería pues, en general, la siguiente:

*La conjunción de dos enunciados es verdadera si y sólo si ambos lo son.*

p	q	p $\wedge$ q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

De esta tabla de los valores de verdad concluimos que la conjunción, por definición, es verdadera si y sólo si son verdaderas las dos proposiciones. Podemos escribir nuestro resultado sobre la conjunción, en vez de verticalmente, de modo horizontal: 1000. El número mil no tiene nada que ver con esto; lo único que nos interesa es la exacta definición del functor « $\wedge$ ».

Ejemplos de conjunción:

$C \wedge V$  1) El azul es un color y San Marcos está en Venecia.

$D \wedge A$  2) 12 es divisible por dos y las ciruelas son albaricoques.

$P \wedge \neg M$  3) Paris es una ciudad y la madera no arde.

$\neg I \wedge \neg S$  4) Los esquimales no viven en Italia y los negros no viven en el Polo Sur.

¿Qué proposiciones son verdaderas?

En el ejemplo 1) las dos proposiciones son verdaderas, por lo tanto también su conectivo y la macroproposición que las reúne por medio de este último. En el caso 2) «A» es falsa dado que las ciruelas no son albaricoques. Por lo tanto 2) es falsa aunque la proposición «D» sea verdadera. Esto guarda relación con la segunda línea de nuestra definición, de la que, gracias al signo «0» entre las dos, se pone de manifiesto que de «p» verdadera y de «q» falsa, se deriva el falso. Ya que todos saben que la madera arde, «M» es verdadera y « $\neg M$ » falsa, por lo que también la 3) es falsa. Para los esquimales Italia sería una tierra demasiado caliente y, en efecto, no viven allí: por tanto « $\neg I$ » es verdadera. Y viceversa, los negros encontrarían el Polo Sur demasiado frío y, entonces, « $\neg S$ » es verdadera. Como los dos argumentos de la conjunción son verdaderos, toda la proposición 4) es verdadera.

### 2.4.3 La disyunción

Como ejemplo de disyunción elegiremos la proposición «Como postre hay queso o fruta». Con «disyunción» entendemos aquella función a dos argumentos que es falsa si y sólo si ambos argumentos son falsos, es decir, si no hay ni fruta ni queso. De este modo, en general, la tabla de los valores de verdad de la disyunción se presenta así:

*La disyunción de dos enunciados es verdadera si al menos uno de ellos lo es.*

$p$	$q$	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

También aquí el resultado de la definición se lee en columna debajo del functor « $\vee$ », resultado que puede ser también escrito horizontalmente: 1110. El functor puede expresarse así en el lenguaje ordinario: «una u otra o también ambas». Esto corresponde exactamente al «*vel*» latino, que desgraciadamente no tiene el mismo significado que la disyunción española «o». La fórmula «y/o» que se encuentra a veces en textos jurídicos y en otros lugares también, como en trabajos teológicos, es por tanto un pleonismo, como la tabla pone claramente en evidencia.

El vocablo «o» del lenguaje ordinario puede, sin embargo, asumir un significado contrario: puede ser una disyunción exclusiva. Intentemos clarificar el concepto con un ejemplo: «Alberto es católico o es protestante». Ya que no es posible pertenecer a las dos confesiones contemporáneamente, la tabla de los valores de verdad se presenta en este caso así: 0110. Este «o» exclusivo se traduce en latín con «*aut-aut*». La consiguiente distinción latina no ha sido recibida en la lengua española o, por ejemplo, en la alemana, de modo que es sólo el contexto el que nos puede ayudar a esclarecer si se trata de una disyunción inclusiva o exclusiva. Debo saber anticipadamente la relación que existe entre católicos y protestantes para comprender que, en el ejemplo anterior, se trata de una disyunción exclusiva. Menos ambiguamente se debería decir: «Alberto o es católico o es protestante». Pero el lógico no tiene prescripciones que recomendar al lenguaje ordinario para obtener una mayor coherencia; se limita a constatar como en el lenguaje de todos los días se habla sin prestar atención a lo que se dice y que es sólo por la enorme redundancia por lo que no se produce un caos verbal.

Ya que la disyunción exclusiva se puede representar, si bien prolijamente, gracias a la disyunción inclusiva —Alberto es católico o protestante pero no es católico y protestante— renunciaremos a introducir otra constante lógica: en lo que sigue con «disyunción» se entiende, por tanto, siempre la *inclusiva*.

Ejemplos de disyunción:

- $C \vee V$  1) El azul es un color o San Marcos está en Venecia.
- $D \vee A$  2) 12 es divisible por 2 o las ciruelas son albaricoques.
- $\neg P \vee M$  3) Paris no es una ciudad o la madera arde.
- $I \vee S$  4) Los esquimales viven en Italia o los negros en el Polo Sur.

¿Qué proposiciones son verdaderas?

En el ejemplo 1) las dos proposiciones son verdaderas y, por tanto, también toda la proposición resultante de la disyunción entre ambas. En el caso 2) «D» es verdadera. Ya que la disyunción es verdadera si al menos uno de sus argumentos es verdadero, el falso «A» no puede cambiar nada del valor de verdad de 2). En 3) tenemos «M» verdadera, lo que suficiente para la verdad del conectivo proposicional. Sin embargo, en 4) nos encontramos que son falsas sea «I», sea «S», es decir, todos los miembros de la disyunción y, por tanto, la 4) es falsa.

#### 2.4.4 La implicación

[Un enunciado condicional afirma que en cualquier caso en que su antecedente sea verdadero, también el consecuente será verdadero.. No afirma que su antecedente es verdadero, sino solamente que si su antecedente es verdadero, su consecuente también lo será. No afirma que su consecuente es verdadero, sino solamente que si su antecedente es verdadero, su consecuente también lo será. El significado esencial de un enunciado condicional es la relación afirmada entre su antecedente y su consecuente, en este orden.

Será falso cuando se dé  $p \wedge \neg q$ , siendo verdadero  $\neg(p \wedge \neg q)$

El valor de verdad de la implicación no se puede comprender igualmente bien sólo con ejemplos. Pero intentaremos comenzar al menos así.

«Si Tomás alcanza el máximo de puntos, ha vencido». De este ejemplo se puede concluir sin lugar a dudas que decimos que una implicación es válida si el antecedente y el consecuente son verdaderos. Y es igualmente evidente que el valor de la implicación es falso si el antecedente es verdadero y el consecuente es falso: probablemente percibimos como inválido el hecho que Tomás, aun habiendo conseguido la puntuación máxima, no sea el vencedor. Pero, ¿qué sucede en los dos casos en los que el antecedente es falso? Dichos dos casos los fijaremos como verdaderos, y

esto independientemente del hecho de que nos convenzan o no los ejemplos de los que nos sirvamos para clarificar las ideas. Podemos definirla así:

*Un enunciado condicional es falso cuando el antecedente es verdadero y el consecuente falso, en el resto de los casos es verdadero.*

De este modo obtenemos la siguiente tabla de los valores de verdad de la implicación:

$p$	$q$	$p \rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

El lenguaje ordinario expresa este functor con «si... entonces». Entre los funtores que hemos discutido hasta ahora es éste, sin embargo, el que se aleja mayormente de nuestra comprensión intuitiva, y esto no sólo en los casos en los que es falso el antecedente. Nuestras oscilaciones son una consecuencia del hecho que, en el lenguaje ordinario, hacemos dos ulteriores presuposiciones extra-lógicas: primero, interpretamos una proposición del tipo *si-entonces* como si fuese una relación causa-efecto, lo cual no forma parte entre las finalidades de la implicación y, segundo, usamos proposiciones del tipo si-entonces preferentemente allí donde el antecedente no es unívocamente determinado como verdadero o falso. Por ejemplo:

- 1) Si la temperatura desciende bajo cero, entonces el agua se congela.
- 2) Si el domingo hace buen tiempo, entonces daremos un paseo.

Ambas proposiciones son implicaciones genuinas, sólo que en ambas hay bastante más de lo que se precisa para que exista una implicación. Es necesario, sin embargo, limitarse a lo poco que se quiere expresar cuando se utiliza una implicación definida rigurosamente. Qué dificultades pueden en consecuencia presentarse lo muestra la siguiente comparación:

1. Tomás tiene la puntuación máxima.
2. Tomás ha vencido.
3. Bonn está en Alemania.
4. El agua se congela a cero grados.

Imaginemos que sean verdaderas las cuatro proposiciones. Partiendo de aquí podemos componer las dos implicaciones siguientes:

- (1) Si Tomás tiene la puntuación máxima, entonces ha vencido.
- (2) Si Bonn está en Alemania, entonces el agua se congela a cero grados.

El ejemplo (2) es extraño porque entre Bonn y el agua congelada no hay ninguna relación de causa-efecto y porque además ya sabemos que son verdaderos tanto el antecedente como el consecuente. En el caso (1) se trata seguramente de un nexo causal—pero la lógica no está en condiciones de analizar la causalidad ni siquiera en la medida en que se encuentra presente en este ejemplo. De todos modos se puede pensar en un momento del tiempo en el que no estaba todavía decidido el resultado de la acción; pero si efectivamente Tomás ha conseguido después la máxima puntuación, a partir de aquel momento la proposición (1) debe quizá ser considerada verdadera. El lenguaje ordinario la considera generalmente correcta aunque se diga usualmente que: «Tomás ha alcanzado la puntuación máxima y es el vencedor». Naturalmente no se niegan con esto los matices diversos de (1) y (2). Pero no tienen un alcance tal que empuje al lógico a redefinir la implicación.

¿Qué debemos decir sobre una implicación con el antecedente falso? También aquí se pueden aducir ejemplos y contraejemplos que pueden hacer parecer a nuestra implicación unas veces razonable y otras veces irracional. Un ejemplo no carente de sentido es el siguiente:

(3) Si dirige Abbado, entonces la sala está llena.

Supongamos que Abbado no haya podido aparecer en público, de modo que el antecedente se vuelva falso. ¿Por esto ha de estar vacía la sala? Esto no concuerda con nuestra intuición; por suerte los conciertos son frecuentados por un público multitudinario aunque sea otro el que los dirija. Por tanto, no es *a priori* descarriado definir verdadera una implicación con un antecedente falso.

¿Cómo están las cosas con una implicación con el antecedente y el consecuente falsos? También aquí existen justificaciones ordinarias para el procedimiento del lógico. Parece que Göbbels dijo: «Si perdemos la guerra, entonces me llamo Meier». Con esta implicación él quería decir algo cierto; pensaba que perder la guerra fuese del todo imposible mientras no pensaba mínimamente en un cambio de apellido. Ambos argumentos le parecían falsos mientras la proposición en su conjunto era concebida como verdadera, y así era entendida por otros.

En fin, para las definiciones del lógico, no es decisivo el que ellas aporten una base para analizar razonablemente los ejemplos: existen suficientes contraejemplos. El motivo más profundo de la defensa coherente de su definición de implicación, el lógico la encuentra en la íntima conexión con las definiciones de los otros funtores, es decir, en la completud del sistema.

Ejemplos de implicaciones:

$H \rightarrow M$  1) Si el heno es hierba seca, entonces la hora tiene 60 m.

- $\neg H \rightarrow M$  2) Si el heno no es hierba seca, entonces la hora tiene 60 m.  
 $H \rightarrow \neg M$  3) Si el heno es hierba seca, entonces la hora no tiene 60 m.  
 $\neg F \rightarrow \neg M$  4) Si el heno no es hierba seca, entonces la hora no tiene 60 m.

¿Qué proposiciones son verdaderas?

En el caso 1) «H» y «M» son verdaderas y, por tanto, también lo es la implicación. En el caso 2) « $\neg H$ » es falsa. Una implicación con antecedente falso es siempre verdadera. En 3) tenemos un antecedente verdadero con un consecuente falso. Es el único caso en el que la implicación es falsa. En el caso 4) tenemos de nuevo una implicación verdadera dado que son falsos tanto el antecedente como el consecuente.

#### a) Condición Suficiente y necesaria

En todas las lenguas tenemos expresiones para mostrar la *condición suficiente*. Podemos decir:

En Valencia cuando llueve hay atasco

¿Qué estamos diciendo? Decimos algo así como *Basta que llueva para que haya atasco* o también *Es suficiente un poco de lluvia y hay atasco*. En otros términos, tratamos de decir que la presencia de la condición (la lluvia) es suficiente para que se dé lo condicionado (el atasco). Por tanto será falso si *habiendo lluvia* (la condición) no se diera lo condicionado, *el atasco*. Entiéndase bien que no estamos diciendo que el atasco sólo aparece si hay lluvia, pueden haber más motivos (manifestaciones, obras, accidente, rotura de semáforos,...)

Tenemos, pues dos propiedades de la *condición suficiente*:

-No puede ser verdadera la condición si no es verdadero también lo condicionado (a no ser que la proposición completa sea falsa)

-Lo condicionado puede ser verdadero aunque no sea verdadera la condición.

Veamos la segunda propiedad. Si no fuera así, querría decir que habría atasco *sólo si* hay lluvia. Pero este *sólo si* está expresando otra cosa diversa de la condición suficiente. *Sólo si* significa que, si no estuviera la condición, no podría ser lo condicionado, o bien, en otros términos, que la condición es *necesaria* para obtener lo condicionado, pero ahora estamos mostrando una *condición necesaria*. Podemos ver un ejemplo de condición necesaria:

Para nacer, es necesario ser concebido

¿Qué estamos diciendo? Que no se podría nacer (condicionado) sin haber sido concebidos primero (condición necesaria). Pero aunque se

podría ser concebido sin nacer (y como se sabe, sucede a veces, sobre todo en los primeros tres meses de embarazo). Por tanto la condición necesaria tiene las propiedades inversas a las de la suficiente:

-Puede ser verdadera la condición y lo condicionado falso.

-No puede ser verdadero lo condicionado si no es verdadera la condición.

Veamos algún ejemplo más.

*Es necesario respirar para vivir.* Es evidente que respirar es la condición necesaria para vivir, de hecho no es posible vivir si no se respira. Pero respirar no es la condición suficiente para vivir. Se puede respirar muy bien y morir de un infarto o de un accidente. Por tanto, incluso respirando no tenemos garantizada la vida.

Otro ejemplo de condición suficiente. Podemos decir *Basta dejar de respirar 3 ó 4 minutos para morir.* De hecho, sólo hay que probarlo para morir, esto no significa que sólo se pueda morir dejando de respirar (sino no respirar sería condición necesaria para morir) y de hecho hay muchas otras maneras.

Otro ejemplo podría ser: *Hace falta bien poco para hacer reír a Laura.* Con esto decimos que basta la más mínima insinuación o un pequeño incidente para provocar la hilaridad de Laura. Pero no decimos que Laura sólo ríe cuando hay una pequeña insinuación, puede ser grande o una crisis nerviosa para provocar su risa.

Tenemos diversas expresiones:

Condición *suficiente*: si... entonces...; basta.... para que...; es suficiente que...

Condición *necesaria*: Sólo si... entonces...; sólo en el caso en que...; es necesario ... para que...; sin esto... no se podría...

-De **haber tomado medidas en su momento (P)**, no se **hubieran propagado los incendios forestales (Q)**. -Si **los elefantes se fugan (P)**, entonces **el domador se quedará muy triste (Q)**.

-**Quien a hierro mata (P)**, **a hierro muere (Q)**.

-Sólo si **estudias (P)**, **aprobarás (Q)**.

-**Te traeré flores (P)**, siempre que **vaya a Valencia (Q)**.

#### 2.4.5. La equivalencia

La equivalencia es otra función a dos puestos. Usando un ejemplo se puede expresar así: «Alicia va a bailar si y sólo si es invitada». La equivalencia es simbolizada así: «A ↔ I».

El valor de verdad de la equivalencia se puede obtener del mismo símbolo: el functor consiste en una flecha dirigida hacia la izquierda y hacia la derecha. Para la implicación hemos definido el siguiente valor de verdad: 1011. La flecha dirigida hacia el lado contrario valdrá, por tanto, 1101. Tomando juntos los dos valores obtenemos 1001, así como se puede apreciar la tabla siguiente:

*Un enunciado bicondicional es verdadero cuando y sólo cuando sus dos miembros son simultáneamente verdaderos o falsos.*

$p$	$q$	$p \leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

La equivalencia es, por tanto, verdadera si y sólo si las dos proposiciones son equivalentes, es decir, si son ambas verdaderas o ambas falsas.

En el lenguaje ordinario la equivalencia se puede expresar de modos diversos: «... si y sólo si...», «si... entonces..., y viceversa...», «... es una condición necesaria y suficiente de...», etc. En los textos científicos se usan las siguientes abreviaciones:

español:    síí = si y sólo si  
italiano:    sse = se e solo se  
inglés:      iff = if and only if  
francés:    ssi = si et seulement si

En el lenguaje ordinario todas estas expresiones son vistas como complicaciones inútiles y se suele decir más brevemente: «si... (entonces)». Por ejemplo: «si hoy es lunes, entonces mañana es martes». Pero sobre la base de los datos de hecho objetivos se trata sin lugar a dudas de una equivalencia y no de una implicación. Es necesario, por lo tanto, prestar mucha atención antes de pasar a la formalización.

Ejemplos de equivalencias:

$R \leftrightarrow C$     1) Si la figura es redonda, entonces es un círculo.  
 $\neg T \leftrightarrow I$    2) Si y sólo si el auricular no es colgado, la conversación se interrumpe.

¿Qué proposiciones son verdaderas?

El ejemplo 1) está formalizado correctamente. La proposición del tipo si-entonces esconde una equivalencia. Como las dos proposiciones son verdaderas, es verdadero también todo el conectivo proposicional. También

2) está formalizado correctamente. Pero los valores de verdad son diversos y, por tanto, la equivalencia es falsa.

Hemos definido entonces cinco funtores y les hemos dado los siguientes valores de verdad:

$\neg$	1	0
$\wedge$	1	0 0 0
$\vee$	1	1 1 0
$\rightarrow$	1	0 1 1
$\leftrightarrow$	1	0 0 1

p	$\neg p$
1	0
0	1

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

Sobre la base de estos conocimientos se pueden resolver fácilmente los siguientes ejercicios.

#### Ejercicio 2.4.5

1) ¿Qué proposiciones son verdaderas?

- $\neg$  (Londres está sobre el Rin).
- $(4 + 9 = 12) \vee$  (los claveles tienen perfume).
- (La nieve es negra)  $\rightarrow$  (la nieve es blanca).
- $(5 \text{ es un número primo}) \wedge$  (algunos Suizos aman el juego de las cartas).
- (Las palomas comen serpientes)  $\rightarrow$  (París está en la Selva negra).
- $\neg$  (Hay rosas rojas)  $\vee$  (a veces llueve en Boloña).
- (La abuela va de paseo)  $\vee$  (el 4 es un número cuadrado).
- (Francisco posee una casa)  $\leftrightarrow$  (Francisco paga muchos impuestos).
- (Todas las chicas se llaman Rita)  $\rightarrow$  (Einstein era un gran físico).

2) Formaliza los siguientes conectivos proposicionales y averigua su valor de verdad:

1. Las moscas son insectos y el Mar Muerto está salado.
2. Algunos oficiales son pilotos y al lunes le sigue el domingo.
3. Un ex-secretario general de la ONU se llama Hammarskjöld o bien la ensalada es buena para la salud.
4. Tokio es la capital de Japón, o bien las quitanieves son azules.
5. Si Mozart era un músico, entonces  $4 + 4 = 8$ .
6. Si  $2 \cdot 3 = 7$  entonces Mozart era un músico.
7. Si Júpiter no tiene satélites, entonces John es americano.
8. Los mirlos cantan melodiosamente o Fiat es una marca de coches italiana.
9. Si y sólo si tenemos un plano regulador, no se tolerarán más cementerios de coches.

3) A y B son verdaderas, X, Y, y Z falsas. Determina los valores de verdad.

1.  $A \wedge B$
2.  $A \wedge X$
3.  $\neg A \wedge X$
4.  $A \wedge \neg Z$
5.  $\neg \neg B \wedge \neg Y$
6.  $\neg(\neg A \wedge Y)$
7.  $\neg(A \wedge Z) \wedge (\neg Y \wedge B)$
8.  $A \wedge B \wedge \neg(Y \wedge \neg Z)$
9.  $\neg[A \wedge \neg(B \wedge \neg(Y \wedge \neg(Z \wedge \neg A)))]$
10.  $A \vee Y$
11.  $\neg A \vee Z$
12.  $(A \wedge B) \vee \neg X$
13.  $\neg A \vee \neg Z \vee \neg(A \wedge B)$
14.  $A \rightarrow Y$
15.  $Y \rightarrow A$
16.  $A \rightarrow (B \vee \neg Z)$
17.  $(Z \wedge A) \rightarrow (\neg A \vee B \vee \neg Z)$
18.  $B \rightarrow [Y \rightarrow (Z \rightarrow \neg B)]$

4) ¿Cuál es el valor de verdad de los siguientes conectivos proposicionales cuando las siglas son sustituidas por las proposiciones relativas?

- |                              |   |
|------------------------------|---|
| P: Platón era griego         | (verdadera)                               |
| A:<br>de Alejandro           | Aristóteles era el maestro<br>(verdadera) |
| K: Kant vivió en el medioevo | (falsa)                                   |

R: Russell era un amigo de Hegel (falsa)

a)

1.  $(\neg R \vee K) \rightarrow P$
2.  $\neg [\neg (K \rightarrow \neg A)]$
3.  $(A \wedge \neg K) \rightarrow (P \wedge \neg R)$
4.  $\neg P \vee (\neg A \rightarrow K)$
5.  $\neg K \rightarrow \neg R$
6.  $(\neg P \vee K) \rightarrow (A \wedge \neg R)$
7.  $\neg (\neg P \vee \neg A) \vee R$
8.  $\neg A \rightarrow (\neg K \wedge \neg R)$

b) ¿Se modifica el valor de verdad si en 2, 4, 7, 8 substituyo « $\neg A$ » por « $A$ » y si en 3, 6 substituyo « $A$ » por « $\neg A$ »?

Responde las preguntas con un sí o un no.

5) «*Implicación*»: este término ha substituido en la lógica contemporánea el término más antiguo de “condicional” y como consecuencia ha permitido generalizar el significado.

(1) Si  $x$  está soltero, entonces  $x$  no está casado.

(2) Si  $x$  es un triángulo, entonces tienes los ángulos internos iguales a dos rectos.

(3) Si  $x$  es de metal, entonces  $x$  es maleable.

(4) Si  $x$  comete un delito, entonces  $x$  irá a la cárcel.

(5) Si  $x$  me hace un favor, entonces lo recompensaré.

(6) Si  $x$  es un genio filosófico, entonces soy el emperador de China.

La validez de (1) está fundada en cualquier buen diccionario de la lengua española, donde se encontrará que “soltero” y “no casado” son términos equivalentes. La proposición (2) es válida sobre la base de la geometría euclídea y de sus postulados. La (3) se basa o en observaciones empíricas o en las ciencias naturales. La (4) deriva de las reglas morales y jurídicas de un país determinado. La (5) de mi decisión de reaccionar ante un determinado comportamiento de  $x$ .

Entre los ejemplos mencionados sólo la (6) es una pura implicación material porque puede ser expresada así: “o  $x$  no es un genio filosófico o yo soy el emperador de China”» [cf. N. ABBAGNANO, *Dizionario di Filosofia*, Torino, Utet<sup>2</sup>1992, v. *Implicazione*].

1. ¿Porqué (1) - (6) no son implicaciones? ¿Qué son?
2. Traduce los ejemplos en expresiones que puedan ser tratadas por la lógica.
3. Formaliza los ejemplos (1) – (6).
4. ¿Qué dices sobre el comentario a los ejemplos (1) – (6)?

5. ¿Qué tienes que decir sobre el comentario a (6) respecto del comentario sobre (1) – (5)?

## 2.5 *La valoración de las funciones de verdad*

La formalización —o simbolización— no es la finalidad de la lógica sino simplemente un momento de paso. Ella nos sitúa en la condición de saber exactamente cuándo un conectivo proposicional es verdadero o falso. Si, por ejemplo, alguno nos dice que en el último año han aumentado los accidentes de coche en nuestro país, nosotros, de entrada, asumimos esta proposición como verdadera ya que nos fiamos de la persona en cuestión. No podemos hacer valer ningún motivo lógico por el que la frase deba considerarse dudosa. Sin embargo, si la misma persona añade que en el último año han disminuido todos los tipos de accidente en nuestro país, entonces intervendremos por motivos exclusivamente lógicos. Todo oyente está autorizado a hacerlo, incluso si el que habla es un famoso estadista y nosotros no entendemos nada de esta ciencia. En efecto, la aserción: «Los accidentes de coche han aumentado y todos los tipos de accidente han disminuido» es contradictoria. Y la contradicción es rechazada por motivos lógicos. La contradicción, o la eventual no-contradicción, se puede obtener del valor de verdad del conectivo proposicional. Entonces no nos queda más que mostrar cómo se llega a esos valores de verdad.

Para redactar una tabla de los valores de verdad elegimos un ejemplo elemental. Comenzamos con un conectivo proposicional que sabemos que es verdadero desde el inicio. Esto se da seguramente en este caso: «El sol difunde luz exactamente cuando (si y sólo si) el sol la difunde». Antes que nada simbolizamos esta aserción así:

$$S \leftrightarrow S$$

En segundo lugar contamos el número de las proposiciones (constantes o variables). En nuestro ejemplo sólo hay una, «S», que aparece dos veces, es decir, que es empleada dos veces (hay dos «ocurrencias» de la misma). Correspondientemente a nuestra asunción, una proposición tiene exactamente dos valores de verdad, puede ser o verdadera o falsa. Por esto ponemos bajo las dos «S» un «1» o un «0»:

$$\begin{array}{cc} S \leftrightarrow S \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{array}$$

En tercer lugar valoramos la equivalencia. Comparamos los valores de verdad en columnas de arriba abajo. En nuestro caso tenemos en la primera línea dos veces «1»: correspondientemente a nuestra definición de equivalencia (1001), la equivalencia entre dos «1» da siempre «1». Por eso escribimos bajo el símbolo de equivalencia « $\leftrightarrow$ » entre los dos «1», un «1». A continuación confrontamos los valores de la segunda línea. La definición de la equivalencia nos dice que si ambos argumentos tienen el valor «0»

entonces el valor total es de nuevo «1» (1001). Este «1» lo ponemos en la segunda línea. Obtenemos así la tabla siguiente:

$$\begin{array}{ccc} S & \leftrightarrow & S \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}$$

La columna bajo el functor « $\leftrightarrow$ » contiene dos «1». Esta es la demostración de la verdad lógica de la expresión. Si en la columna del functor principal — aquí tenemos sólo un functor que hace, por tanto, de functor principal — todos los puestos son ocupados por «1», entonces el conectivo proposicional es siempre verdadero, como en este ejemplo. Si bajo el functor principal hay sólo «0» entonces la expresión es siempre falsa. Sin embargo, si hay tantos «1» como «0», entonces podemos enunciar las condiciones bajo las cuales el conectivo es verdadero o falso.

Más complicada todavía resulta la demostración con dos variables:

$$(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$$

Aquí las dos variables son «p» y «q». Con dos variables existen cuatro combinaciones posibles de verdadero-falso. Las escribimos bajo las variables correspondientes:

$$\begin{array}{cccc} (p \vee q) & \leftrightarrow & (q \vee p) & \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

El functor principal aquí es la equivalencia. Antes que nada debemos valorar los funtores secundarios. Por eso comenzamos primero con « $(p \vee q)$ ». La definición de la disyunción nos dice que la disyunción es falsa si y sólo si los dos argumentos son falsos. Este caso se da sólo en la cuarta línea. Ahí pondremos un «0» mientras que en las otras líneas podremos un «1». Ahora valoramos el segundo functor. « $(q \vee p)$ » es, de nuevo, una disyunción: también ella adquiere el valor «0» sólo en la última línea. Ahora nuestro resultado — para facilitar la visión de conjunto ignoramos los valores de «p» y «q», de los cuales no tenemos ya necesidad — aparece así:

$$\begin{array}{ccc} (p \vee q) & \leftrightarrow & (q \vee p) \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Se tiene que poder reconocer clara y unívocamente cuál es el functor principal, que debe ser evaluado en último lugar. Para este fin se utilizan los paréntesis. Recuérdese una vez más que los funtores unen más

estrechamente según marca la siguiente serie:  $\neg$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\rightarrow$ ,  $\leftrightarrow$ . Esto tiene como consecuencia que en la fórmula:

$$p \vee \neg q$$

cuando se comiencen a escribir los valores de verdad bajo la «p» y la «q», vaya primero valorada la negación y, después, la disyunción. Una evidente ambigüedad puede superarse utilizando los paréntesis. En este caso se transpone a la lógica la regla ya conocida en aritmética: los paréntesis comienzan a resolverse desde el interior.

En los ejemplos siguientes están numerados los pasos con los que se procede a la asignación de valor. El número más alto, que representa el último paso, nos da en cada caso el functor principal.

2	1	2	1	3	3	2	1
$p \rightarrow$	$(p \vee p)$	$\neg$	$\neg$	$p \leftrightarrow p$	$p \vee$	$\neg$	$(p \rightarrow q)$
1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	0

5	4	6	1	3	2
$\neg$	$(p \vee q)$	$\leftrightarrow$	$\neg$	$p \wedge$	$\neg q$
0	1	1	1	1	0
0	1	1	0	1	0
0	0	1	1	1	0
1	0	0	0	1	1

El tercer ejemplo es falso: se puede ver por el hecho de que en la columna bajo el functor principal en la tercera y cuarta línea encontramos un «0». En el último ejemplo podríamos haber comenzado por el lado izquierdo siguiendo, por tanto, esta sucesión: 2, 1, 6, 3, 5, 4.

Hasta ahora en nuestros ejemplos hemos utilizado una o dos variables. No hay ningún motivo para esta limitación. Pero cuando aparecen tres, cuatro o incluso más variables, entonces el número de las combinaciones posibles de los valores de verdad crece exponencialmente:

1 variable	$2^1 = 2$ líneas
2 variables	$2^2 = 4$ líneas
3 variables	$2^3 = 8$ líneas
4 variables	$2^4 = 16$ líneas
5 variables	$2^5 = 32$ líneas
.....	.....
n variables	$2^n = 2^n$ líneas

En el caso de tres variables escribiremos siempre los valores de verdad bajo las respectivas letras. Se aconseja proceder sistemáticamente. Se marca la primera variable con un «1» para la mitad de los casos y, para la otra mitad, con un «0». Para la segunda variable se divide por medio cada mitad y así también para la tercera, llegando así con la última a una alternancia continua de «0» y «1». La cosa se presenta así:

p	q	r
1	1	1
1	1	0
1	0	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0
0	0	1
0	0	0

El mismo procedimiento se aplica en el caso de cuatro o más variables. Con p, q, r, s tenemos  $2^4 = 16$  líneas. Por eso en la columna bajo «p» escribiremos «1» en las primeras ocho líneas y en las otras ocho «0». Para la segunda variable, «q», se escribe primero cuatro veces «1», después cuatro veces «0», después nuevamente cuatro veces «1», etc. Para la tercera, cada vez 2 veces «1» después 2 veces «0» y así sucesivamente hasta que llegemos a la última variable y escribamos alternativamente «1» y «0».

Ejemplo con tres variables:

	1	5	2	4	3
(p ↔ q) → [(p ∧ m) → (q ∧ m)]					
1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1
0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	0	0

### Ejercicio 2.5

1) Demuestra con la ayuda de las tablas de los valores de verdad la validez de los siguientes conectivos proposicionales:

1.  $(p \vee p) \rightarrow p$
2.  $q \rightarrow (p \vee q)$
3.  $(p \vee q) \rightarrow (q \vee p)$
4.  $[p \vee (q \vee r)] \rightarrow [q \vee (p \vee r)]$

$$5. (q \rightarrow r) \rightarrow [(p \vee q) \rightarrow (p \vee r)]$$

Estos son los cinco axiomas de los *Principia Mathematica* de Whitehead y Russell. Su validez es una condición necesaria pero no suficiente para construir un sistema axiomático. En lugar de 4. y 5. ha sido propuesta una mejora por parte de Bernays:

$$4.a (p \rightarrow q) \rightarrow [(r \vee p) \rightarrow (r \vee q)]$$

Demuestra también la validez de 4.a.

2) Demuestra la validez de los siguientes axiomas que Frege puso en la base de su sistema:

$$1. p \rightarrow (q \rightarrow p)$$

$$2. [p \rightarrow (q \rightarrow r)] \rightarrow [q \rightarrow (p \rightarrow r)]$$

$$3. [p \rightarrow (q \rightarrow r)] \rightarrow [(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)]$$

$$4. (p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$$

$$5. \neg \neg p \rightarrow p$$

$$6. p \rightarrow \neg \neg p$$

3)

1. Si Aldo va de paseo, lleva siempre el perro consigo.

Formaliza la proposición 1 y revisa si dice la misma cosa que esta otra: «Si Aldo no va de paseo, no lleva el perro consigo».

2. Si Walter conduce el coche y es un deportivo, entonces es un Jaguar.  
¿2. es idéntica con (a) o con (b)?

$$(a) (W \rightarrow D) \rightarrow J$$

$$(b) W \rightarrow (D \rightarrow J)$$

3. Si el perro ladra, siento miedo.

a) ¿Cómo se niega esta proposición?

b) Verifica el resultado utilizando las tablas de los valores de verdad.

4. Si Mauro no comete errores es premiado.

¿Se sigue de aquí lógicamente que no es premiado si comete un error?

$$5. [p \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow q] \leftrightarrow [p \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow q)]$$

4) ¿Cuál de las siguientes proposiciones o conectivas proposicionales es implicada por « $p \vee q$ »?

$$1. p$$

$$2. q$$

$$3. p \vee q$$

$$4. p \wedge q$$

$$5. \neg p \vee q$$

6.  $p \wedge \neg q$
7.  $\neg q \rightarrow p$
8.  $p \leftrightarrow q$

5) ¿Cuál de las siguientes proposiciones son equivalentes?

1.  $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \vee q)$
2.  $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$
3.  $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$
4.  $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \vee \neg q)$
5.  $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$

### 2.5.1 Tautología, contradicción y contingencia

La tautología y la contradicción ocupan un lugar especial en la lógica. Son dos casos-límite con los que es necesario proceder cautamente. Por lo cual necesitamos saber qué significan exactamente.

#### a) Tautología

Como ejemplo de una tautología consideraremos el siguiente conectivo proposicional:

$$(1) p \vee \neg p$$

Que se trata efectivamente de una tautología se puede reconocer mediante la asignación de los valores de verdad: en la columna bajo el functor principal todos los valores son «1». Las valoraciones que dan «verdadero» como resultado constituyen el campo de la proposición. Una tautología está, por tanto, caracterizada del hecho que posee todo el campo posible mientras que un conectivo proposicional como por ejemplo « $p \wedge q$ » tiene como campo sólo la primera línea.

Una tautología es verdadera de modo trivial porque tiene todo el campo sin excluir ninguna posibilidad y se llama por eso también *fórmula vacía*. Una tautología permanece verdadera cualquiera que sea la situación de hecho. Por eso aquel que expresa una tautología no dice nada falso pero tampoco transmite ninguna información.

En muchos ambientes es común reírse de una tautología demasiado a la vista. Por ejemplo esto sucede con «llueve o no llueve», que es una ocurrencia para el ejemplo (1). Ciertamente, la proposición es trivial, pero la trivialidad, la tautología o bien una fórmula vacía no deben ser confundidas con una tontería o con una ingenuidad. El contenido tautológico a veces puede escapar porque está escondido como en el ejemplo «Aldo duerme o está despierto». Lo que el buen sentido está en grado de dominar con un esfuerzo apropiado, es inversamente proporcional al crecimiento en complejidad de los conectivos proposicionales. A consecuencia de esto,

también para el estudioso habituado a reflexionar sobre estos problemas, un conectivo proposicional a cinco variables no se puede reconocer a primera vista como una tautología. He aquí entonces que él debe recurrir también al método de la asignación de valores de verdad.

El lego en la materia se preguntará maravillado para qué servirán las tautologías si se admite que son vacías. Sólo que el vacío se refiere exclusivamente a la información acerca de la realidad de la cosa objeto de la tautología. Por este motivo, contrariamente a cuanto se podría imaginar precipitadamente, las tautologías no están faltas de valor. Porque son conectivos proposicionales siempre verdaderos, las tautologías son leyes lógicas. Dado que tienen la propiedad de ser *a priori* válidas, por una parte no aportan contenido empírico, pero, por otra, prescinden de la verificación empírica. Lo que es verdadero lógicamente, es siempre verdadero; o bien, lo que es lo mismo, es verdadero tautológicamente o trivialmente.

### b) Contradicción

La contradicción se puede formular en general así:

$$(2) p \wedge \neg p$$

La asignación de los valores de verdad nos muestra que bajo el functor principal hay sólo ceros. Tenemos, por tanto, un campo vacío. El campo vacío no debe ser confundido con las fórmulas vacías; la contradicción es precisamente la negación de las fórmulas vacías.

Quien formula una contradicción, afirma ya, por esto, algo absurdo. Exactamente como para una tautología, no hay necesidad de aducir una información determinada de un ámbito especializado. La contradicción es una categoría lógica que no corresponde a nada real. En el mundo material o espiritual encontramos sólo oposiciones como duro-suave, bueno-malo, etc., pero nunca contemporáneamente duro y no duro. Una presunta contradicción en la realidad es el signo de una descripción defectuosa de un estado de hechos.

A veces la contradicción es equiparada a una absurdidad. Como, cuando se reprocha a un político de justificar la esclavitud, y este responde: «Pero es absurdo». El oyente entiende «no lo he dicho nunca», «no he podido haberlo dicho», etc. Quien utiliza la palabra «absurdo» considera normalmente algo más, es decir, que la acusación estaría en contradicción con sus principios o bien con principios universalmente reconocidos.

Puesto que las tautologías son leyes lógicas y las contradicciones negaciones de leyes lógicas, tienen una validez ilimitada. Mientras que la contradicción es evitada en cualquier circunstancia, la tautología posee una

utilidad que de todos modos no tiene nada que ver con las proposiciones empíricas.

### c) Contingencia

Con «contingencia» entendemos aquí *satisfacibilidad*. Mientras que la tautología es universalmente válida, una proposición contingente es verdadera si al menos uno de sus valores es verdadero. Ejemplo: «Si es miércoles, el bar está cerrado».

#### (3) $M \rightarrow C$

La tabla de los valores de verdad mostraría una mezcla de «1» y «0», esto es, en la segunda línea un «0», y en las restantes un «1». Como entre las cuatro líneas no hay ninguna que tenga la precedencia por motivos lógicos, entonces tenemos que ver con una forma lógicamente indeterminada. Si hoy es miércoles u otro día, si el bar está cerrado o no, estas dos cuestiones no pueden ser resueltas con medios lógicos. Por tanto, la determinación preliminar del valor de verdad de la proposición concreta es condición para la valoración del valor de verdad global del ejemplo (3). Aquí aparece claramente la diferencia con las tautologías, que son verdaderas *a priori*, cualquiera que sea el valor de verdad que asuman las proposiciones concretas de las que están constituidas.

Las proposiciones contingentes no están fijadas lógicamente de modo unívoco y son decidibles sólo sobre la base de ulteriores informaciones empíricas. Su valor de verdad no puede ser determinado sólo por medio de la lógica.

Cuando en las clases de historia de la filosofía se habla de «contingencia», en general se entiende otra cosa. En otro contexto discutiremos también sobre este concepto de contingencia.

#### *Ejercicio 2.5.1*

##### 1) El principito

El principito «quedó, pues, de pie, y como estaba fatigado, bostezó. —Es contrario al protocolo bostezar en presencia de un rey —le dijo el monarca—. Te lo prohíbo. —No puedo impedirlo —respondió confuso el principito—. He hecho un largo viaje y no he dormido... —Entonces —le dijo el rey— te ordeno bostezar. No he visto bostezar a nadie desde hace años. Los bostezos son una curiosidad para mí. ¡Vamos bosteza!, bosteza otra vez. Es una orden. —Eso me intimida..., no puedo... —dijo el principito, enrojeciendo. —¡Hum! ¡Hum! —respondió el rey—. Entonces te... te ordeno bostezar o no bos... Farfulló un poco y pareció irritado. El rey exigía esencialmente que su autoridad fuese respetada. Y no toleraba la desobediencia. Era un monarca absoluto. Pero, como era muy bueno, daba

órdenes razonables.» [A. DE SAINT-EXUPÉRY, *Le petit Prince*, trad. esp., *El principito*, Alianza, Madrid 1992, 46].

Demuestra que el principito se atiene estrechamente a las órdenes del Rey. ¿Por qué?

2) «Frasas en las que aparece la “x” son fórmulas vacías. Así al menos en un juego lingüístico wittgensteiniano o derivado» [H. OGIERMANN, «Metaphysik der Zukunft»: en J. DE VRIES – IES RUGGER (Hg), *Festschrift J. B. Lotz*, Frankfurt a. M., 1973: 74].

¿Cómo juzgas esta afirmación (sin sacar a relucir a Wittgenstein)?

3) «El ser no es inmediatamente contradictorio en sí, sin embargo funda la posibilidad de la contradicción que puede inmiscuirse en cualquier momento. Pero la contradicción misma está excluida» [P. – C. COURTÈS, «Teilhabe und Kontingenz bei T. von Aquin»: en K. BERNATH (Hg), *Thomas von Aquin. Philosophische Fragen*, Darmstadt, 1981: II, 275].

1. ¿Qué piensas sobre la posibilidad de la contradicción que puede inmiscuirse siempre mientras que la contradicción misma está excluida?
2. El autor, ¿cómo podría formular comprensiblemente lo que quiere indicar?

5) «Ahora para el lógico es importante presentar tales frases de la forma más general, de modo que sean o siempre verdaderas o siempre falsas. Así, según el esquema ya conocido,  $p \wedge \neg q$  es siempre falsa, porque la proposición  $p \wedge q$  es siempre verdadera. Propositiones, de las cuales se ha establecido que son siempre verdaderas, sirven de axiomas...» [H. Leisegang, *Einführung in die Philosophie*, Berlin, W. de Gruyter, <sup>8</sup>1983: 58].

1. ¿El conectivo proposicional  $p \wedge \neg q$  es siempre falso?
2. ¿El conectivo proposicional  $p \wedge q$  es siempre verdadero?
3. Los axiomas son tautologías. ¿Por qué la fórmula mencionada en 2. no es un axioma?
4. Muestra una fórmula que sea siempre falsa.
5. Muestra una fórmula que sea siempre verdadera.

6) Según Santo Tomás de Aquino, Anselmo no habría demostrado que ninguno podría pensar que Dios no existe, sino «sólo que alguno, cuando piensa a Dios, no lo puede pensar contemporáneamente como existente y no-existente» [H. MEYER, «Der ontologische Gottesbeweis», *Phil. Jahrb.* 66 (1958): 177].

1. Formaliza esta afirmación.
2. Muestra su valor de verdad.
3. ¿Qué piensas de ello?

### 2.5.2 Las tablas parciales de los valores de verdad

Valorando dos variables, en la tabla de los valores de verdad tenemos 4 líneas, valorando 3 variables tendremos 8 líneas. Si tuviéramos que tratar con 5 variables, sería muy engorroso llenar una tabla con 32 líneas. Una tabla de los valores de verdad nos da una visión de conjunto sobre todos los valores de verdad. Sin embargo, frecuentemente no nos interesa una completud tal; más bien, con el mínimo esfuerzo, deseamos saber si el conectivo proposicional en cuestión es tautológico. Y esto puede ser demostrado indirectamente. En la praxis las tablas parciales aligeran la asignación de valor.

De una fórmula tautológica sabemos que es siempre verdadera. Ahora partamos de la hipótesis que la fórmula a verificar sea falsa. Esto se indica poniendo provisoriamente bajo el functor principal el valor «0». Si a consecuencia de esta asunción emerge una contradicción, entonces hemos demostrado que la asunción de partida no era la correcta y que de hecho se trata de una fórmula tautológica. Pero si no emerge de esto ninguna contradicción, la asunción viene confirmada y entonces no se trataría de una tautología.

Ejemplo:

$$p \leftrightarrow p$$

Supongamos que la equivalencia sea falsa. Por eso ponemos bajo el signo de equivalencia un «0». Nos encontramos entonces con dos posibilidades:

a) «p» es verdadero. Entonces ponemos un «1» bajo la «p». La segunda «p» es una ocurrencia o una repetición de la misma variable y, por tanto, también ella debe ser valorada como «1». La equivalencia de dos proposiciones verdaderas es verdadera y, por tanto, se ha demostrado que la asunción del inicio — la asignación de valor «0» — es falsa.

b) «p» es falsa. Entonces escribimos bajo la variable «p» un «0». Para la segunda «p» emplearemos también un «0». Pero la equivalencia de dos proposiciones falsas es verdadera, de modo que es valorada de nuevo «1» en contra de la asunción hecha.

Como consecuencia del fracaso de la confutación, el ejemplo se ha demostrado como verdadero.

La confutación de la hipótesis falsa ha sido realizada de dos modos. Para la verificación es suficiente seguir uno de los dos controles, a) o b). A continuación mostraremos que una elección casual de un valor de verdad no tiene influencia sobre la demostración.

Otro ejemplo:

$$(p \vee q) \rightarrow \neg(p \wedge q)$$

1	0	0		
			1	
			1	1
				0

Asumiendo que la proposición sea falsa ponemos un «0» bajo la implicación, el functor principal. Una implicación es falsa sólo si el antecedente es verdadero y el consecuente es falso. Por esto ponemos bajo el functor principal del antecedente un 1 y bajo el del consecuente un 0. En el caso del antecedente deberemos verificar tres casos diversos. Por eso nos dirigiremos antes que nada al consecuente, más fácil. Si « $\neg(p \wedge q)$ » es falsa entonces la afirmación, o sea, « $(p \wedge q)$ » debe ser verdadera. Una conjunción es verdadera sólo si todos sus argumentos son verdaderos. Es decir, si tanto « $p$ » como « $q$ » son verdaderos. Pero entonces seguramente la negación de esta conjunción: « $\neg(p \wedge q)$ », es falsa, lo que concuerda con la asunción inicial. Luego no se ha logrado confutar la asunción de la falsedad del conectivo proposicional. Por tanto, el ejemplo es efectivamente falso.

Si conocemos el valor de verdad de las proposiciones podemos elegir también el recorrido opuesto.

Ejemplo:

Guillermo Tell era Suizo            T  
Winston Churchill era Francés    C

«En el caso en que Tell fuese suizo o Churchill francés pero que Tell efectivamente no fuese suizo, entonces vale que si Churchill hubiese sido francés, Tell habría sido suizo». Esto es verdad, aunque no se trate de una tautología.

$$((T \vee C) \wedge \neg T) \rightarrow (C \rightarrow T)$$

1	0	0	1	0	1
\	/	/	/		/
1	1	1	1	1	1
/	/	/	/	/	/
0	0	0	0	0	0
/	/	/	/	/	/
1	1	1	1	1	1

### Ejercicio 2.5.2

1) Verifica la verdad de los siguientes conectivos proposicionales con la ayuda de las tablas parciales de los valores de verdad.

1.  $(p \vee p) \rightarrow (p \wedge p)$
2.  $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg p \vee q)$
3.  $\neg(p \wedge q) \rightarrow (\neg p \vee \neg q)$
5.  $[p \rightarrow (\neg q \leftrightarrow r)] \rightarrow [(p \wedge r) \rightarrow \neg q]$
6.  $[p \rightarrow (\neg q \vee p)] \rightarrow (q \wedge \neg p)$
7.  $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge \neg r)$
8.  $[(p \vee q) \rightarrow r] \rightarrow [(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)]$

2) Si Urs y Gabriela están en la escuela, entonces Heidi toca la flauta, y si Othmar toca el clavicémbalo, entonces Gabriela no está en la escuela, y si Franco hace una visita, Heidi deja de tocar la flauta, y si todo esto sucede, entonces Othmar suena el clavicémbalo, supuesto que Urs esté en la escuela y Franco haya venido a hacer una visita (Ockham, siglo XIV: cfr. J. SALAMUCHA, «Die Aussagenlogik bei Wilhelm von Ockham», *Franziskan. Studien* 32 (1950): 116).

Verifica 2) con una tabla de los valores de verdad.

$$[((U \wedge G) \rightarrow H) \wedge (O \rightarrow \neg G) \wedge (F \rightarrow \neg H)] \rightarrow [(U \wedge F) \rightarrow O]$$

3) Di si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas:

1. Toda disyunción, un argumento de la cual sea una tautología, es tautológica.
2. Toda disyunción, un argumento de la cual sea una contradicción, es contradictoria.
3. Toda conjunción con una tautología es una tautología.
4. Toda conjunción con una contradicción es una contradicción.
5. Toda implicación cuyo antecedente sea una tautología es una tautología.
6. Toda implicación cuyo antecedente sea una contradicción es una contradicción.
7. Toda implicación cuyo consecuente sea una tautología es una tautología.
8. Toda implicación cuyo consecuente sea una contradicción es una contradicción.
9. La negación de una contradicción es una tautología.
10. La negación de una tautología es una contradicción.
11. Toda implicación cuyo antecedente sea contingente es contingente.
12. Toda implicación cuyo consecuente sea contingente es contingente.

### 2.5.3 Recapitulación de los resultados

El uso apropiado de las tablas de los valores de verdad nos suministra al menos tres preciosas adquisiciones:

i) La lógica proposicional posee un procedimiento de decisión. Con este término entendemos un procedimiento mecánico, que utilizándolo, en un número finito de pasos, se puede verificar unívocamente la validez de cualquier conectivo proposicional. La verdad o la falsedad, sobre la base de un método universalmente reconocido y verificable, pueden ser demostradas y no quedan así dependientes de la inteligencia de un individuo. Este procedimiento de prueba, parecido al del cálculo y, en el fondo toda la estructura de esta lógica, ha provocado así que se hablase de cálculo lógico.

ii) En el ámbito de los conectivos proposicionales un gran significado va asignado al campo. Si está presente todo el campo, como en el caso de las tautologías, entonces nos encontramos en presencia de un conectivo privado de informaciones. El campo vacío significa contradicción. Confrontando emerge que tienen un campo reducido sólo aquellas aserciones que están repletas de informaciones. Por eso el contenido de información de una conjunción es más precioso que el de una disyunción.

iii) Las leyes lógicas son tautologías o leyes estructurales universalmente válidas. Los estudiosos tienden a veces a considerarlas —junto con las consecuencias que derivan de ellas— como necesarias. Pero es necesario observar que existe también otro concepto de necesidad más rígido; es correlativo al de validez universal, que aquí no viene afirmada de modo absoluto. La validez universal de la lógica proposicional se refiere al marco en el cual han sido elaboradas las definiciones. La cuestión de hasta qué punto las tautologías expresan leyes del pensamiento o incluso del ser, es un asunto que pertenece a la gnoseología: por tanto aquí no se toma ninguna posición al respecto.

## 2.6 La deducción

«Una proposición individual es verdadera si corresponde a la realidad». Tales proposiciones son descripciones. Sin embargo, si argumentamos, buena parte de nuestro discurso no es descriptivo sino deductivo. Una inferencia válida presupone que sean respetadas las estructuras lógicas. Con la ayuda de las tablas de los valores de verdad podemos ciertamente verificar estas condiciones. Pero queda abierta la cuestión sobre qué reglas conservan la verdad, es decir, qué reglas conducen a deducciones sin modificar el valor de verdad de cuanto está contenido en las premisas.

Las reglas sirven para deducir de nuestras aserciones, ulteriores aserciones verdaderas. Esencialmente esto se logra con poquísimas reglas. Pero hay un número muy grande de reglas que sirve simplemente para abreviar la deducción. Como para el neófito en particular son más comprensibles las deducciones breves, procuraremos aprender relativamente muchas reglas. Renunciamos por tanto a la economicidad en favor de una presentación más comprensible.

Nuestras reglas son **veinte** y se subdividen en dos grupos: reglas de *deducción* y reglas de *equivalencia*. Nótese además que en sus primeros años de vida los niños aprenden la mayor parte de estas reglas con el aprendizaje del lenguaje.

Optamos por presentar las diversas reglas mediante el mismo procedimiento. Antes que nada se presenta la regla en su formulación general. A continuación hacemos las observaciones más importantes para después presentar un diverso número de ejemplos. Finalmente el lector puede verificar su comprensión de las reglas con los ejercicios.

### 2.6.1 Reglas de inferencia

1. <i>Modus ponens (MP)</i>
$  \begin{array}{l}  p \rightarrow q \\  p \\  \hline  q  \end{array}  $

Sobre la línea se encuentran las premisas, debajo todo lo que puede ser deducido de las mismas. Por tanto con el *modus ponens* tenemos dos premisas, de las cuales se puede derivar una sola conclusión: cuando tenemos una implicación y al mismo tiempo su antecedente aislado, podemos deducir su consecuente. Se trata de inferencias de este tipo:

1. Si Jorge es un diputado, vive en Roma.
2. Jorge es un diputado.
3. Por tanto vive en Roma.

Esta deducción nos parece natural. La impresión de evidencia se basa en el hecho de que tenemos desde hace tiempo familiaridad con la validez universal de esta regla, que es la regla llamada de la separación o regla del *Modus ponens*.

Para verificar una deducción elegimos una escritura unitaria. Iniciamos con la formalización de las premisas. En el caso del ejemplo tenemos:

1.  $D \rightarrow R$
2.  $D$

Después de haber tenido en cuenta todas las premisas, a la derecha de la última premisa el resultado deseado es introducido en el interior del siguiente signo:

En nuestro ejemplo se trata de  $\langle\langle R \rangle\rangle$ . La cosa se presenta entonces así:

1.  $D \rightarrow R$
2.  $D$   $\langle R \rangle$

Los pasos ulteriores se numeran progresivamente. En el lado derecho los números y las abreviaciones de las reglas muestran de qué líneas y con qué reglas se ha llegado a la aserción. Por tanto, nuestro ejemplo, formulado completamente, se presenta así:

1.  $D \rightarrow R$
2.  $D$   $\langle \therefore R \rangle$
3.  $R$  1, 2, MP

«MP» significa que la deducción ha sido efectuada utilizando la regla del *modus ponens*, sirviéndose éste a su vez de la primera y la segunda premisa. Después que la regla nos ha conducido efectivamente a la «R» que buscábamos, le antepone entonces los tres puntos siguientes: « $\therefore$ ». Estos significan: *quod erat demonstrandum* = como se quería demostrar.

Ejemplos ulteriores:

1. Si no llueve, entonces visito a la tía.
2. No llueve.
3. Por tanto visito a la tía.

Formalmente:

1.  $\neg L \rightarrow T$
2.  $\neg L$   $\langle \therefore T \rangle$
3.  $T$  1, 2, MP

Desde este ejemplo podemos percibir que es irrelevante para la aplicación del *modus ponens* el hecho de que el antecedente venga

afirmado o negado. La regla puede ser aplicada siempre que la segunda premisa corresponda exactamente al antecedente. Por tanto vale también:

1. Si es sábado o domingo, Gabriela va al concierto.
2. Es sábado o domingo.
3. Por tanto va al concierto.

$$\begin{array}{ll}
 1. (S \vee D) \rightarrow C & \\
 2. (S \vee D) & \\
 3. C & \begin{array}{l} \hline \therefore C \\ 1, 2, MP \end{array}
 \end{array}$$

Sería falsa sin embargo la siguiente deducción:

$$\begin{array}{ll}
 1. (A \rightarrow B) \rightarrow C & \\
 2. A & \\
 3. B & \begin{array}{l} \hline \therefore C \end{array}
 \end{array}$$

Con la única premisa «A» de la implicación 1 no se puede deducir nada.

### *Ejercicio 2.6.1*

1)

1. Si el niño duerme, es feliz.
2. El niño duerme.
3. Por tanto es feliz.

2)

1. Si el queso tiene agujeros, entonces es Emmentaler.
2. El queso es Emmentaler.
3. Por tanto tiene agujeros.

3)

1.  $((p \wedge q) \vee r) \rightarrow (f \vee s)$
2.  $((p \wedge q) \vee r)$   $\hline$

4) ¿Cómo se puede clarificar lógicamente la siguiente locución: «Quien dice A, debe decir también B»?

### 2. *Modus tollens (MT)*

$$\begin{array}{l}
 p \rightarrow q \\
 \neg q \quad \underline{\hspace{1cm}} \\
 \hline
 \neg p
 \end{array}$$

La regla del *modus tollens* se aplica cuando, además de la implicación, figura como premisa la negación del consecuente. En este caso se puede deducir la negación del antecedente.

1. Si Marcos ha perdido el tren, entonces se ha quedado en Berlín.
2. No se ha quedado en Berlín.

3. Por tanto no ha perdido el tren.

1. $P \rightarrow B$	
2. $\neg B$	$\frac{\quad}{\therefore \neg P}$
3. $\neg P$	1, 2, MT

Por inadvertencia el principiante se olvida con frecuencia de negar el antecedente deducido con el auxilio del *modus tollens*, particularmente cuando en la implicación se presenta ya negado.

Ejemplo:

1. Si no hace frío, Silvia no se pone el abrigo.
2. Se ha puesto el abrigo.
3. Luego hace frío.

1. $\neg F \rightarrow \neg A$	
2. $A$	$\frac{\quad}{\therefore F}$
3. $\neg \neg F$	1, 2, MT

Como hemos visto ya utilizando las tablas de los valores de verdad la doble negación es una afirmación. Por esto es comprensible si, reflexionando sobre el contenido del ejemplo, se olvida generalmente la doble negación. En general anotamos: un número par de negaciones equivale a una afirmación.

### Ejercicio 2.6.2

1) Si Gabriela continúa jugando, llega tarde. Gabriela no llega tarde. Luego no continúa jugando.

2) Si nieva, los turistas no van a Engadin. Los turistas van a Engadin. ¿Entonces?

3)

1. $(p \vee q) \rightarrow \neg (r \wedge \neg s)$	
2. $r \wedge \neg s$	$\frac{\quad}{\quad}$

4) Si Protágoras escribió en contra de los dioses, entonces fue condenado justamente según las leyes. Si no escribió en contra de los dioses, entonces es necesario volver a discutir su Introducción. No fue condenado justamente. Entonces es necesario volver a discutir su Introducción.

Partiendo de las reglas del *modus ponens* y del *modus tollens* podemos llegar ya a un resultado significativo: de una implicación aislada no es necesario deducir nada. Para realizar una deducción válida necesitamos una premisa suplementaria. Si esta premisa suplementaria es idéntica al antecedente de la implicación, entonces deducimos con el *modus ponens*; si es, sin embargo, idéntica a la negación del consecuente —y, por tanto, no al

consecuente como tal—, entonces deducimos la negación del antecedente. Las otras deducciones no son válidas.

1. Si el usuario no demuestra su identidad, no recibe el documento.
2. Demuestra su identidad.
3. Por tanto recibe el documento.

$$1. \neg I \rightarrow \neg D$$

$$2. I$$

$$3. D$$

$$\underline{\quad} / D$$

Esta conclusión es falsa porque la segunda premisa no es idéntica al antecedente de la implicación. La segunda premisa es aún menos idéntica con la negación del consecuente. Por tanto no se puede ni siquiera deducir tomando el *modus tollens*. *Modus ponens* y *modus tollens* —como también sus reformulaciones, que trataremos a continuación— son las únicas reglas de inferencia válidas para una implicación. Como no hay premisas para utilizar ninguno de los dos modos, en el presente caso no se puede entonces deducir. La violación de una de las dos reglas se llama *fallacia consequentis*. Este es el tipo de error lógico que se encuentra más extendido dentro del nivel elemental.

### Ejercicio 2.6.2

5) ¿Cómo debe sonar la segunda premisa del último ejemplo para efectuar una deducción válida?

Las siguientes deducciones, ¿son correctas?; y si no, ¿qué es lo que se sigue de las premisas?

6) Si el gato ve a un perro, saca las uñas. Saca las uñas. Por tanto ve a un perro.

7) Si Isabel es italiana, es europea. Isabel no es italiana. Entonces no es europea.

8) Si  $2 \times 2$  no da 4, entonces la luna es un dado. Pero  $2 \times 2 = 4$ . ¿Entonces?

9) Si Pitágoras era americano, para los triángulos rectángulos es verdad que  $a^2 + b^2 = c^2$ . Pero para los triángulos rectángulos es verdad que  $a^2 + b^2 = c^2$ . ¿Entonces?

10) Hegel, en su *Historia de la filosofía*, presenta la lógica de los estoicos y menciona la contribución específica de Crisipo. Para visualizar los tipos de deducción en cuestión, Hegel propone el siguiente ejemplo: «Si es de día, hay claridad; pero ahora es de noche y, por tanto, no hay claridad» [G.W.F. HEGEL, *Vorlesungen über die Geschichte der Philosophie*, Frankfurt a.M., Suhrkamp, 1971: XIX, 275].

Él reenvía a Diógenes Laercio como fuente. Allí leemos: «Si es de día, entonces hay claridad; ahora es de noche y, por tanto, no es de día» [Diógenes Laercio, VII, 80].

1. Formaliza ambas deducciones.
2. ¿Son equivalentes?
3. ¿Dónde está el error?

11) «El filósofo entra y

Os demuestra que debe ser así:

Si el primero es así, y así es el segundo

Entonces así el tercero y el cuarto.

Pero si el primero y el segundo no son,

No serían siquiera el tercero y el cuarto».

[GOETHE, *Faust*, IV escena, II acto: vv. 399-404]

### 3. Simplificación (Simp.)

$p \wedge q \wedge r$ o bien	$p \wedge q \wedge r$ o bien	$p \wedge q \wedge r$
p	q	r

De una conjunción se puede deducir sin necesidad de tener premisas ulteriores. Además todos los argumentos pueden ser enunciados separadamente.

Ejemplo:

1. Olbers era un médico y un astrónomo diletante.
2. Por tanto era un médico.

O bien: 2a. Por tanto era un astrónomo diletante.

1. $M \wedge A$	$\therefore M$
2. M	1a, Simp.
O bien:	
2a. A	1b, Simp.

1. Se interpreta la sinfonía de *Júpiter*, la *Incompleta* y *Pacific 231*.
2. Por tanto se interpreta *Pacific 231*.

1. $J \wedge I \wedge P$	$\therefore P$
2. P	1c, Simp.

En el curso de una deducción se pueden repetir a voluntad todas las reglas permitidas.

Ejemplo:

1. Si es de día, hay luz.
2. La luna ha desaparecido y es de día.
3. Por tanto hay luz.

1.  $D \rightarrow L$
2.  $S \wedge D$   $\underline{\quad} L$

Para proceder con éxito, se aconseja proceder mentalmente desde el resultado que se busca. Se intenta deducir «L». «L» aparece sólo en la primera premisa. En la cual está vinculado en una implicación. Se podría obtener si tuviésemos «D». En la segunda premisa hay una «D» que, en base a las reglas de simplificación, se puede deducir. Por tanto con la utilización de dos reglas tenemos la siguiente deducción:

1.  $D \rightarrow L$
2.  $S \wedge D$   $\underline{\quad} L$
3.  $D$  2b, Simp.
4.  $L$  3, 1, MP

### Ejercicio 2.6.3

1) Si Gerardo es invitado a una copa, está contento. Se muestra agresivo con la secretaria y no está contento. ¿Entonces?

2) Si el taxista no trabaja, va a la Oficina de Empleo. Es otoño, hace frío, llueve y no trabaja. Por tanto va a la Oficina de Empleo.

3) Si Churchill era francés, bebía Champagne, pero si era inglés bebía Whisky. Era inglés. Entonces bebía Whisky.

4) Los tejones excavan agujeros, los zorros viven en ellos y los cazadores van de caza. Si los tejones no se han ido, los zorros no viven en los agujeros. Por tanto los tejones se han ido.

5) Si un pasajero paga la mitad de precio o tiene una reducción, es soldado o estudiante o pensionista. El pasajero no es ni soldado ni estudiante ni pensionista. Por tanto no paga ni la mitad ni tiene una reducción.

6) Si el *escalofrío incontrolado*, que se difundió después de la Primera Guerra Mundial, no era un fenómeno nervioso, el análisis de Oppenheimer era correcto. Nonne procedió psicoterapéuticamente y desmintió el análisis de Oppenheimer. Si el *escalofrío incontrolado* era un fenómeno nervioso no podía ser tratado anatómicamente. Por tanto el *escalofrío incontrolado* no pudo ser curado anatómicamente.

#### 4. Conjunción (Con.)

$p$   
 $q$  \_\_\_\_\_  
 $p \wedge q$

La regla de conjunción permite de unir proposiciones individuales por medio de la conjunción. Es la regla inversa de la simplificación.

Ejemplo:

1. Olbers era médico.
2. Olbers era astrónomo diletante.
3. Entonces era médico y astrónomo diletante.

1. M	
2. A	$\therefore M \wedge A$
3. $M \wedge A$	1, 2, Con.

*Ejercicio 2.6.4*

1) Hay castañas y hay conversación. Hay bocadillos y la cena es a las ocho. Si la cena es a las ocho y hay castañas, entonces es la vigilia de Navidad. Por tanto es la vigilia de Navidad y hay conversación.

2)

1.  $\neg t$
2.  $p \wedge q$
3.  $r \wedge p$
4.  $(r \wedge q) \rightarrow (s \rightarrow t)$   $\underline{p \wedge \neg s}$

Indicad en los ejercicios siguientes los pasos efectuados y las reglas utilizadas:

3)

1.  $p \rightarrow q$
2.  $((r \vee s) \rightarrow z) \wedge (\neg t \wedge u)$
3.  $(v \vee w) \wedge (\neg t \wedge x)$
4.  $(v \rightarrow w) \wedge p$
5.  $y \rightarrow t$   $\underline{\therefore q \wedge \neg y}$
6. p
7. q
8.  $\neg t \wedge u$
9.  $\neg t$
10.  $\neg y$
11.  $q \wedge \neg y$

4)

1.  $(p \rightarrow q) \rightarrow r$
2.  $(s \wedge t) \rightarrow u$
3.  $(v \vee w) \wedge (t \wedge \neg r) \wedge (\neg x \vee y)$
4.  $\neg z \wedge s$   $\underline{\therefore u \wedge \neg (p \rightarrow q)}$
5.  $t \wedge \neg r$
6.  $\neg r$
7.  $\neg (p \rightarrow q)$

8. s
9. t
10.  $s \wedge t$
11. u
12.  $u \wedge \neg (p \rightarrow q)$

### 5. Silogismo hipotético (HS)

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \underline{q \rightarrow r} \\ p \rightarrow r \end{array}$$

El silogismo hipotético es conocido también como «silogismo en cadena». En su forma más simple consiste en dos implicaciones, de las que el consecuente de la primera es retomado como antecedente de la segunda, estableciendo así un nexo entre las dos.

Ejemplos:

1. Si no sale el *Times* estamos menos informados.
2. Si los salarios aumentan, el *Times* no sale.
3. Por tanto si los salarios aumentan, estamos menos informados.

$$\begin{array}{l} 1. T \rightarrow I \\ 2. S \rightarrow T \\ 3. S \rightarrow I \end{array} \quad \begin{array}{l} \underline{\therefore S \rightarrow I} \\ 2, 1, HS \end{array}$$

1. Si aumenta el coste del dinero, no bajan los alquileres.
2. Si los alquileres no bajan, disminuye el nivel de vida.
3. Por tanto si aumenta el coste del dinero, disminuye el nivel de vida.

$$\begin{array}{l} 1. C \rightarrow \neg A \\ 2. \neg A \rightarrow N \\ 3. C \rightarrow N \end{array} \quad \begin{array}{l} \underline{\therefore C \rightarrow N} \\ 1, 2, HS \end{array}$$

#### Ejercicio 2.6.5

1) Si el párroco tiene prisa, pronuncia una homilía descentrada. Si hace una homilía descentrada, no por esto es más breve. Por tanto si el párroco tiene prisa, la homilía no es más breve.

2) Esto no tiene color. Sólo si tiene color, es amarillo. Si es amarillo canario, es amarillo. Por tanto no es amarillo canario.

3) Si el Lord agranda la casa, necesita una nueva habitación para la criada. Si contrata a un chófer, agranda la casa. Si compra un Rolls Royce, contrata a un chófer. Por tanto si compra un Rolls Royce necesita una nueva habitación para la criada.

4) Si Hildegard piensa en sus flores y en el perro, se preocupa. El 2 de agosto es su cumpleaños. Si recibe rosas, piensa en sus flores y en el perro. Cuando es 2 de agosto, recibe rosas. Por tanto Hildegard se preocupa.

5) Si el maestro no tiene ganas de trabajar, es despedido. No busca otro puesto de trabajo. Si es despedido, busca otro puesto de trabajo. Si hace calor, no tiene ganas de trabajar. Por tanto, no hace calor.

6) Si Rossi se presenta a las elecciones, se convierte en presidente. Controla las cuentas todos los meses y paga regularmente la tarjeta de abono. Si es miembro, entonces se presenta a las elecciones. Si paga regularmente la tarjeta de abono, es miembro. Por tanto Rossi se convierte en presidente.

7) Donde hay fe, hay amor; donde hay amor, hay paz; donde hay paz, hay prosperidad; donde hay prosperidad, está Dios; donde está Dios, no hay necesidad. ¿Qué se sigue de esto?

8)

$$1. p \rightarrow q$$

$$2. r \wedge s \wedge t$$

$$3. u \rightarrow p$$

$$4. z$$

$$5. t \rightarrow u$$

$$\underline{\quad} q$$

Indicación: Como ya para la deducción breve de 2.6.3, todavía más en el caso de deducciones largas no debemos perder de vista la conclusión que se pretende alcanzar. Se busca «q». Está contenida en la primera premisa, pero unida a «p» mediante una implicación. «p» podría ser extrapolada de la tercera premisa, de modo que quedaría por obtener «u». «u», sin embargo, se encuentra en la quinta premisa, y se puede también obtener suponiendo que tengamos «t». «t» se puede extrapolar de la segunda premisa. Ahora se puede seguir todo el recorrido al revés, comenzando con «t».

9)

$$1. \neg p \rightarrow (q \rightarrow r)$$

$$2. (q \rightarrow r) \rightarrow (r \rightarrow s)$$

$$3. (q \rightarrow s) \rightarrow [t \rightarrow (s \rightarrow u)]$$

$$4. t \wedge \neg p$$

$$\underline{\quad} q \rightarrow u$$

### 6. Silogismo disyuntivo (DS)

$$p \vee q$$

$$p \vee q$$

$$\underline{\neg p}$$

$$\text{o bien } \underline{\neg q}$$

$$q$$

$$p$$

Si con una premisa suplementaria se niega un argumento de la disyunción, el otro se afirma.

1. José fuma en pipa o cigarros.
2. No fuma en pipa.
3. Luego fuma cigarros.

1. $P \vee C$	
2. $\neg P$	$\therefore C$
3. $C$	<u>2, 1, DS</u>

1. Esteban estudia en Ginebra o en Lucerna.
2. No estudia en Lucerna.
3. Por tanto, estudia en Ginebra.

1. $G \vee L$	
2. $\neg L$	$\therefore G$
3. $G$	<u>2, 1, DS</u>

### *Ejercicio 2.6.6*

1) La demostración es sofística o Aquiles adelanta a la tortuga. Si Aquiles adelanta a la tortuga, entonces la lógica tiene alguna contradicción. Los matemáticos han verificado el total y la lógica no tiene ninguna contradicción. Por tanto la demostración es sofística.

2) Llueve o no llueve. Llueve. Por tanto no llueve.

3) Pettenkofer ha vivido mucho tiempo o su hipótesis no es válida. Si la hipótesis no es válida, no es mencionado como científico de la higiene. Bebió en público un cultivo de bacilos del cólera y es mencionado como científico de la higiene. Por tanto Pettenkofer ha vivido mucho tiempo.

4) El pescador bebe gustosamente vino y el obrero canta en el coro. Si el carnicero es el propietario de una casa, no vota a la izquierda. El carnicero es el propietario de una casa o el obrero no canta en el coro. Por tanto el pescador bebe gustosamente una copa y el carnicero no vota a la izquierda.

5) Si Schopenhauer se levantaba temprano como Kant, entonces en este sentido ha hecho bien al imitarlo. Schopenhauer tenía amor propio, no amaba la democracia y tenía ataques de cólera. En un ataque de cólera tiró a la modista por las escaleras. Se levantaba temprano como Kant o no tenía amor propio. Por tanto, tiró a la modista por las escaleras y ha hecho bien en imitar a Kant levantándose temprano.

6) Dorotea recibe un caballo o un automóvil. Si recibe un automóvil, coge la autopista. Si recibe un caballo, cabalga por el bosque. Va a pie o en tren, nada o escala las montañas, pero no va por el bosque. Por tanto coge la autopista.

## 7. Adición (Add.)

$$\frac{p}{p \vee q}$$

A una proposición se le puede añadir por disyunción cualquier otra proposición a placer. La regla, sin embargo, no se llama «disyunción» sino «adición».

Ejemplos:

1. Hermann bebe cerveza.
2. Por tanto Hermann bebe cerveza o vino.

$$\begin{array}{ll} 1. C & \\ 2. C \vee V & \end{array} \quad \begin{array}{l} \hline \therefore C \vee V \\ 1, \text{Add.} \end{array}$$

1. La Luna es redonda.
2. Por tanto o la Luna es redonda o los pinos son de madera.

$$\begin{array}{ll} 1. R & \\ 2. R \vee P & \end{array} \quad \begin{array}{l} \hline \therefore R \vee P \\ 1, \text{Add.} \end{array}$$

1. Si Alberto toca la tromba o Elisabetta trepa sobre el piano, Claudia se enfada.
2. Alberto toca la tromba.
3. Por tanto Claudia se enfada.

$$\begin{array}{ll} 1. (A \vee E) \rightarrow C & \\ 2. A & \\ 3. A \vee E & \\ 4. C & \end{array} \quad \begin{array}{l} \hline \therefore C \\ 2, \text{Add.} \\ 3, 1, \text{MP} \end{array}$$

1. Si Alfredo y Bernardo abren una tienda, entonces, si está también César, obtendrán la ruina y difamación.
2. Alfredo, Bernardo y César abren una tienda.
3. Por tanto obtienen o la ruina o difamación.

$$\begin{array}{ll} 1. (A \wedge B) \rightarrow [C \rightarrow (R \wedge D)] & \\ 2. A \wedge B \wedge C & \\ 3. A \wedge B & \\ 4. C \rightarrow (R \wedge D) & \\ 5. C & \\ 6. R \wedge D & \\ 7. R & \\ 8. R \vee D & \end{array} \quad \begin{array}{l} \hline \therefore R \vee D \\ 2ab, \text{Simp.} \\ 3, 1, \text{MP} \\ 2c, \text{Simp.} \\ 5, 4, \text{MP} \\ 6a, \text{Simp.} \\ 7, \text{Add.} \end{array}$$

*Ejercicio 2.6.7*

1)

1.  $(\neg) \rightarrow r$

2.  $(s \wedge r) \rightarrow t$

3.  $t \rightarrow u$

4.  $u \wedge q \wedge s$

$$\frac{}{q \vee t}$$

2)

1.  $p \rightarrow q$

2.  $p \vee r$

3.  $r \rightarrow (r \rightarrow s)$

4.  $\neg q$

$$\frac{}{s \vee q}$$

3)

1.  $p \wedge q$

2.  $q \rightarrow (r \wedge s)$

3.  $(r \vee s) \rightarrow (s \leftrightarrow p)$

$$\frac{}{s \leftrightarrow p}$$

4)

1.  $\neg p \wedge q$

2.  $r \rightarrow s$

3.  $(q \vee r) \rightarrow (p \rightarrow t)$

4.  $s \rightarrow p$

$$\frac{}{s \rightarrow t}$$

**8. Dilema constructivo (CD)**

$$(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)$$

$$\frac{p \vee r}{q \vee s}$$

$$q \vee s$$

En el lenguaje ordinario el dilema constructivo se utiliza poco. Por esta razón los ejemplos suenan algo artificiales. Aun así esta regla es útil justamente cuando hay dos implicaciones y una disyunción que tiene como argumentos los antecedentes de las implicaciones.

Ejemplos:

1. Si llueve, la calle se moja, y si hace frío, encendemos la calefacción.

2. Llueve o hace frío.

3. Por tanto o la calle está mojada o encendemos la calefacción.

1.  $(L \rightarrow M) \wedge (F \rightarrow C)$

2.  $L \vee F$

3.  $M \vee C$

$$\frac{}{\therefore M \vee C}$$

$$1, 2, CD$$

1. Si el padre llega pronto, Aldo hace los deberes con tiempo, y si la madre vuelve tarde, Aldo juega con Gabriela.

2. Aldo no juega con Gabriela.

3. El padre llega pronto o la madre tarde.

4. Por tanto Aldo hace los deberes con tiempo.

1.  $(P \rightarrow D) \wedge (M \rightarrow G)$

2.  $\neg G$

3.  $P \vee M$

4.  $D \vee G$

5.  $D$

$\therefore D$

3, 1, CD

2, 4, DS

### Ejercicio 2.6.8

1) Si Pía hace horas extraordinarias, se cansa, y si vive en la ciudad, tiene poco aire. Hace horas extraordinarias o vive en la ciudad. Por tanto se cansa o tiene poco aire.

2) Si Esteban habla portugués, va a Brasil. Si habla inglés, llega a ser científico. Si habla turco, hace el café. Habla inglés o ruso. Si habla ruso, es un político sospechoso. Por tanto o llega a ser científico o es un político sospechoso.

3) El lógico es libre para elegir las reglas o utiliza la Simplificación o el Dilema constructivo. Si usa la Simplificación, es libre para elegir las reglas, y si utiliza el Dilema constructivo, llega a la solución con más rapidez. Si es libre para elegir las reglas o llega a la solución con más rapidez, entonces es libre para elegir las reglas o utiliza el Dilema constructivo. No es libre para elegir las reglas. Por tanto utiliza inteligentemente el Dilema constructivo.

4)

1.  $s \rightarrow t$

2.  $\neg p \wedge \neg r$

3.  $p \vee q \vee r \vee s$

4.  $(u \vee t) \rightarrow (p \vee q \vee r)$

5.  $q \rightarrow u$

$\underline{\quad} q$

### 9. Dilema destructivo (DD)

$(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)$

$\neg q \vee \neg s$

$\neg p \vee \neg r$

Quien haya percibido la semejanza entre el dilema constructivo y el *Modus ponens*, no tendrá problema en notar la analogía entre dilema destructivo y el *Modus tollens*.

Ejemplos:

1. Si Juan nada, hay olas, y si él sube al *Titlis* siente un estiramiento en los músculos.

2. No hay olas o no siente ningún estiramiento.

3. Por tanto Juan o no nada o no sube al *Titlis*.

1.  $(N \rightarrow O) \wedge (T \rightarrow E)$

2.  $\neg O \vee \neg E$

3.  $\neg N \vee \neg T$

$\therefore \neg N \vee \neg T$

2, 1, DD

1. Si lo dice el partido, es correcto, y si lo dice la Banca, entonces es caro.

2. No es correcto o no es caro.

3. Por tanto o no lo dice el partido o no lo dice la Banca.

1.  $(P \rightarrow R) \wedge (B \rightarrow C)$

2.  $\neg R \vee \neg C$

3.  $\neg P \vee \neg B$

$\therefore \neg P \vee \neg B$

2, 1, DD

*Ejercicio 2.6.9*

1)

1.  $\neg \neg p$

2.  $r \rightarrow s$

3.  $p \rightarrow q$

4.  $\neg q \vee \neg s$

5.  $(t \wedge u) \rightarrow r$

$\neg(t \wedge u)$

2)

1.  $(\neg p \vee \neg r \vee t) \rightarrow z$

2.  $r \rightarrow q$

3.  $\neg s$

4.  $p \rightarrow s$

$z$

3) Para el ejercicio 2) existe un camino más corto sin utilizar la regla DD. ¿Cómo proceder?

4)

1.  $t \rightarrow \neg r$

2.  $\neg p$

3.  $(\neg s \vee \neg t) \rightarrow (p \vee m)$

4.  $p \vee q \vee r$

5.  $s \rightarrow \neg q$

$m$

### 2.6.2 Reglas de equivalencia (o de sustitución)

Las nueve reglas mencionadas hasta ahora pueden ser definidas como reglas de inferencia porque prescriben las condiciones bajo las cuales se efectúa una deducción válida. A continuación consideraremos 11 reglas de sustitución o equivalencia. Sirven para simplificar las expresiones sin modificar su valor de verdad.

Hemos ido utilizando hasta este momento una regla de equivalencia sin haberla tratado como tal, nos referimos a la regla de la doble negación. Este uso no era lícito en tanto que hemos utilizado una regla que no había sido introducida explícitamente. Trataremos de corregir ahora el fallo ocasionado.

<i>10. Doble negación (DN)</i>
$p \leftrightarrow \neg \neg p$
<i>11. Conmutación (Com.)</i>
$(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$ $(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$
<i>12. Asociación (Assoc.)</i>
$[p \vee (q \vee r)] \leftrightarrow [(p \vee q) \vee r]$ $[p \wedge (q \wedge r)] \leftrightarrow [(p \wedge q) \wedge r]$
<i>13. Idempotencia (Idemp.)</i>
$(p \vee p) \leftrightarrow p$ $(p \wedge p) \leftrightarrow p$

#### Ejercicio 2.6.13

1.  $\neg s$
2.  $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow q)$
3.  $p \vee q \vee s$   $\underline{q}$

<i>14. Contraposición (Contr.)</i>
$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$

#### Ejercicio 2.6.14

1) Si suena el cuerno, los huéspedes no duermen. Si hay silencio, los huéspedes duermen. Por tanto cuando suena el cuerno, no hay silencio.

- 2)
  1.  $(\neg p \vee q \vee \neg r) \rightarrow [\neg s \rightarrow (t \rightarrow u)]$
  2.  $\neg p$
  3.  $\neg p \rightarrow [(t \rightarrow u) \rightarrow (u \rightarrow v)]$

$$4. (\neg p \vee q) \rightarrow [(u \rightarrow v) \rightarrow \neg w] \quad / \quad \underline{w \rightarrow s}$$

### 15. Implicación (Impl.)

$$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$$

#### Ejercicio 2.6.15

1)

$$1. p \rightarrow q$$

$$2. r \vee \neg q$$

3. p

r

2) Gustavo toca la trompa o el piano. Toca el trombón o bien no toca el piano. Por tanto toca la trompa o el trombón.

3)

$$1. \neg v \rightarrow (q \rightarrow \neg x)$$

$$2. (t \wedge u) \rightarrow \neg v$$

$$3. p \rightarrow (q \rightarrow r)$$

$$4. \neg s \vee \neg (q \rightarrow \neg x)$$

$$5. (q \rightarrow r) \rightarrow s$$

$\neg p \vee \neg (t \wedge u)$

4) O bajan las tarifas, o se reducen los ingresos o la industria lechera florece. Si las tarifas disminuyen, los ingresos se reducen. Por tanto la industria lechera florece o los ingresos se reducen.

### 16. Distribución (Dist.)

$$[p \wedge (q \vee r)] \leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$$

$$[p \vee (q \wedge r)] \leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$$

#### Ejercicio 2.6.16

1)

$$1. p \rightarrow (q \wedge r)$$

$$2. r \vee (p \wedge \neg q)$$

r

2)

$$1. (p \vee q) \vee (r \wedge s)$$

$$2. (\neg p \wedge s) \wedge \neg (\neg p \wedge q)$$

$\neg p \wedge r$

Las reglas de distribución valen también para expresiones complejas, por ejemplo:

$$(p \wedge q) \vee (r \wedge s) \leftrightarrow (p \vee r) \wedge (p \vee s) \wedge (q \vee r) \wedge (q \vee s)$$

$$(p \vee q) \wedge (r \vee s) \leftrightarrow (p \wedge r) \vee (p \wedge s) \vee (q \wedge r) \vee (q \wedge s)$$

**17. Equivalencia (Equiv.)**

$$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$$

$$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)]$$

*Ejercicio 2.6.17*

1) Las violetas perfuman sólo cuando florecen. Ahora no perfuman. Por tanto no florecen.

2)

1.  $(r \rightarrow s) \wedge (t \vee v)$

2.  $(\neg q \rightarrow r) \leftrightarrow \neg p$

3.  $(\neg q \rightarrow s) \rightarrow (p \vee t)$

4.  $\neg p \wedge \neg s$

$/ \quad q \vee u$

**18. Exportación (Exp.)**

$$[(p \wedge q) \rightarrow r] \leftrightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$$

*Ejercicio 2.6.18*

1) No se da el caso que los Americanos y los Belgas revaloricen sus monedas o los Alemanes se queden mirando el cambio. Por tanto si los Americanos revalorizan su moneda, entonces los Belgas no la revalorizan o los Alemanes se quedan mirando el cambio.

**19. Absorción (Abs.)**

$$p \wedge (p \vee q) \leftrightarrow p$$

$$p \vee (p \wedge q) \leftrightarrow p$$

$$p \rightarrow (p \wedge q) \leftrightarrow (p \rightarrow q)$$

*Ejercicio 2.6.19*

1)

1.  $\neg p \vee (q \wedge p)$

2.  $\neg q \vee \neg r$

3.  $\neg(p \wedge q) \rightarrow r$

$/ \quad (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

**20. De Morgan (De M)**

$$\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$$

$$\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$$

Las leyes De Morgan son particularmente importantes porque no pueden ser sustituidas por otras reglas. La seguridad de su uso no debe sin embargo obtenerse a través de un aprendizaje mnemotécnico, sino que se debe comprender como están estructuradas las mismas reglas. Para conseguir este resultado se aconseja de seguir la notación de Hilbert, en la que la

negación se simboliza con una línea encima de la expresión que debe ser negada.

Ejemplos:

Scholz	Hilbert
$\neg p$	$\overline{p}$
$\neg p \vee q$	$\overline{p \wedge q}$
$\neg (p \wedge q)$	$\overline{\overline{p \wedge q}}$
$\neg (p \rightarrow q)$	$p \rightarrow q$

Se aplican las leyes De Morgan cuando se niegan expresiones entre paréntesis, por ejemplo « $\neg (p \wedge q)$ », que en la notación de Hilbert se escribe así:  $\overline{p \wedge q}$ . La línea que está sobre la expresión se resuelve así:

1. se «parte» por el medio;

2. a la conjunción (o bien, la disyunción) «se le da la vuelta», de modo que la conjunción se convierte en una disyunción y la disyunción en conjunción.

$$\begin{array}{cc} \overline{p \wedge q} & \overline{p \vee q} \\ \overline{p \vee q} & \overline{p \wedge q} \end{array}$$

Queda todavía traducir el resultado en la notación familiar. El procedimiento completo puede sintetizarse así:

$$\begin{array}{ccc} 1. \neg (p \wedge q) & \text{o bien} & 1. \neg (p \vee q) \\ \quad \overline{\overline{p \wedge q}} & & \quad \overline{\overline{p \vee q}} \\ \quad \begin{array}{l} 1^a. \overline{p \wedge q} \\ 1b. \overline{p \vee q} \end{array} & & \quad \begin{array}{l} 1^a. \overline{p \vee q} \\ 1b. \overline{p \wedge q} \end{array} \\ 2. \neg p \vee \neg q & & 2. \neg p \wedge \neg q \end{array}$$

Naturalmente las leyes De Morgan se pueden emplear también con las negaciones de implicaciones y equivalencias, sólo que estas deben ser antes transformadas en disyunciones o conjunciones:

$$\begin{array}{l} 1. \neg (p \rightarrow q) \\ \quad \overline{\overline{p \rightarrow q}} \\ \quad \overline{\overline{\neg p \vee q}} \\ \quad \overline{\overline{\neg p} \wedge \overline{\overline{q}}} \\ \quad \overline{\overline{\neg p} \wedge \overline{q}} \\ \quad \overline{\neg \neg p \wedge \neg q} \\ 3. p \wedge \neg q \end{array}$$

### Ejercicio 2.6.20

1) No se da el caso que un caracol no se pueda enrollar y no pueda nadar. Es cierto que no puede nadar. Por tanto se puede enrollar.

2) Si el diputado tiene los votos de los campesinos, gana en el campo, y si tiene los votos de los obreros gana en la ciudad. Si tiene de su lado a ambas partes, campo y ciudad, entonces viene elegido con toda seguridad. Pero no es elegido con seguridad. Por tanto le faltan los votos de los obreros si gana los de los campesinos.

### 21. Reglas superfluas

Con la enumeración de 20 reglas hemos ido más allá de lo que era estrictamente necesario. Se podría lograr el mismo resultado sin ninguna restricción utilizando un menor número. El conocimiento de muchas reglas nos permite, sin embargo, deducciones más breves y una transcripción más fiel de nuestras argumentaciones intuitivas. Utilizando tres ejemplos se mostrará que las reglas de inferencia y las de equivalencia se pueden sustituir mutuamente.

#### Ejemplo 1: Sustitución de la regla DS

- |               |                            |
|---------------|----------------------------|
| 1. $p \vee q$ |                            |
| 2. $\neg p$   | $\underline{\therefore q}$ |

Utilizando la regla DS podemos deducir «q» directamente de las dos premisas. Pero podemos evitar la regla operando así:

- |                           |          |
|---------------------------|----------|
| 3. $\neg p \rightarrow q$ | 1, Impl. |
| 4. $q$                    | 2, 3, MP |

#### Ejemplo 2: Sustitución de la regla MT

- |                      |                                 |
|----------------------|---------------------------------|
| 1. $p \rightarrow q$ |                                 |
| 2. $\neg q$          | $\underline{\therefore \neg p}$ |

Se aconseja también aquí deducir directamente de las dos premisas utilizando el MT. Pero la misma conclusión se puede deducir también por otros medios:

- |                                |           |
|--------------------------------|-----------|
| 3. $\neg q \rightarrow \neg p$ | 1, Contr. |
| 4. $\neg p$                    | 2, 3, MP  |

#### Ejemplo 3: Deducción de la Exportación

- |                                      |          |
|--------------------------------------|----------|
| 1. $(p \wedge q) \rightarrow r$      |          |
| 2. $\neg (p \wedge q) \vee r$        | 1, Impl. |
| 3. $(\neg p \vee \neg q) \vee r$     | 2, De M  |
| 4. $\neg p \vee (\neg q \vee r)$     | 3, Ass.  |
| 5. $p \rightarrow (\neg q \vee r)$   | 4, Impl. |
| 6. $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ | 5, Impl. |

Hemos deducido la exportación, por tanto no se trata de una regla estrictamente necesaria. Esta posibilidad de sustituir la regla *salva veritate* permite al lógico un discreto margen de maniobra en cuanto al número de reglas a utilizar.

*Ejercicio 2.6.21* Repetición de todas las reglas

1) Si las Olimpiadas se celebran en Davos o Zermatt, los Suizos y la Asociación de los comerciantes están contentos. La Asociación de los comerciantes no está contenta. Por tanto las Olimpiadas no se celebran en Zermatt.

2)  $\neg (p \leftrightarrow q)$ . Resuelve esta expresión negada entre paréntesis.

3) Si trabajo, gano, pero si soy perezoso, estoy en paz. O trabajo o soy perezoso. Pero si trabajo, no estoy en paz, y si soy perezoso, no gano. Por tanto estoy en paz exactamente si no gano.

4) En Suiza cuando baja el viento del Norte y se levanta el Föhn, hay tempestad. El viento del Norte baja y ponemos la vela. No se da el caso que con el Föhn la cubierta permanezca seca. Si tenemos tempestad, no se da el caso que no observemos las alarmas o que no pongamos la vela. Por tanto se levanta el Föhn y observamos las alarmas.

5) El tío Walter va a Milán, Rávena o Pisa. Si y sólo si llega a Cremona, va también a Brescia. Si va a Milán, va también a Pisa. Sólo en el caso que vaya a Pisa o a Rávena, llega o a Pisa o a Trieste. No va a Pisa. Si va a Rávena, va también a Cremona. Por tanto llega a Brescia.

6) Franco lee a Goethe y Schiller o Marcel y Camus. No lee a Goethe. Por tanto lee a Camus.

7) Después de haber adquirido una cierta familiaridad con los funtores y de haber visto que resulta fácil sustituirlos respectivamente, podemos preguntarnos si no nos está permitido elegir funtores de verdad a voluntad como punto de partida. Veamos los textos a) y b) como respuestas posibles y después el texto c).

a) «Deducciones disyuntivas: A ha robado o engañado.

A ha robado.

Luego no ha engañado»

[E. SCHNEIDER, *Logik für Juristen*, München, <sup>2</sup>1972: 149]

b) «Los juicios disyuntivos contraponen irreconciliablemente dos juicios parciales de tal modo que sólo uno de los dos puede ser real. Cuál de los dos es queda como cuestión abierta de modo que falta una exacta determinación del S con un P. “La licencia de construcción o es concedida

o es rechazada”. “La voluntad o es libre o está determinada”. Un juicio disyuntivo es verdadero sólo sobre la base de dos presupuestos:

1. Los dos conceptos que hacen las veces de predicado deben excluirse el uno al otro y ser irreconciliables: sólo un P puede ser real pero, mientras tanto, uno de los dos debe ser real.

2. La disyunción debe ser total, es decir, la enumeración de los conceptos que hacen de predicado debe ser completa» [*Ibid.*, 74].

¿Qué debemos pensar de la inferencia disyuntiva a) y de la definición b)?

c) Ejemplo del Califa Omar:

«Si la biblioteca (de Alejandría) debiera ser conservada, contendría las mismas cosas del *Corán*, o bien no. Si las contuviera sería superflua. Si no las contuviera sería nociva. Por tanto no debe ser conservada en ningún caso.

Algunos lógicos indican esta forma de deducción con el término “dilema”. En la jurisprudencia el dilema no se puede utilizar. Para el trabajo científico es la deducción que menos sirve de todas. Su fuerza de sugestión la hace ser amada por los oradores tendenciosos. La debilidad de esta inferencia está en el hecho de que frecuentemente la disyunción es incompleta sin que uno se dé cuenta» [*Ibid.*, 151]

1. Restituye el vocabulario aquí empleado y formaliza la deducción.

2. ¿La lógica debe ocuparse de locuciones sugestivas?

3. ¿Dónde está el error principal del juicio lógico del dilema?

8) «Es necesario que la consecuencia parcial que se deduce de cada miembro, sea deducida *legítimamente*. El dilema del Califa Omar, por ejemplo, viola esta regla» [J. MARITAIN, *Eléments de philosophie*, v. II: *L'ordre des concepts. 1. Petite Logique (Logique formelle)*, Paris 1923, 21, 1966, Fribourg 1987: 613-14].

1. ¿Qué entiende el autor con «consecuencia parcial»?

2. ¿Qué es una consecuencia legítima y cómo se reconoce?

3. ¿Qué regla viola el dilema del Califa Omar? Indica las reglas usadas.

9)

1.  $(p \vee q) \rightarrow r$

2.  $s \rightarrow t$

3.  $q \wedge \neg t$

4.  $p \vee s$

5.  $\neg (v \rightarrow \neg w)$

$\therefore r \wedge w$

6. q

7.  $q \vee p$

8.  $p \vee q$
9.  $r$
10.  $\neg(\neg v \vee \neg w)$
11.  $v \wedge w$
12.  $w$
13.  $r \wedge w$

10)

1.  $p \rightarrow (q \rightarrow \neg p)$
2.  $p \leftrightarrow q$
3.  $\neg p \vee (\neg q \vee \neg p)$
4.  $(\neg q \vee \neg p) \vee \neg p$
5.  $\neg q \vee (\neg p \vee \neg p)$
6.  $\neg q \vee \neg p$
7.  $\neg p \vee \neg q$
8.  $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
9.  $\neg(p \wedge q)$
10.  $\neg p \wedge \neg q$

 $\therefore \neg p \wedge \neg q$ 

11)

1.  $s \rightarrow \neg s$
2.  $p \rightarrow (q \rightarrow s)$
3.  $(t \rightarrow p) \wedge (u \rightarrow q)$
4.  $\neg s \vee \neg s$
5.  $\neg s$
6.  $(p \wedge q) \rightarrow s$
7.  $\neg(p \wedge q)$
8.  $\neg p \vee \neg q$
9.  $\neg t \vee \neg u$
10.  $t \rightarrow \neg u$

 $\therefore t \rightarrow \neg u$ 

12)

1.  $(\neg p \rightarrow \neg q) \wedge (r \rightarrow s)$
2.  $t \rightarrow (u \rightarrow v)$
3.  $(\neg w \rightarrow \neg s) \wedge (x \rightarrow q)$
4.  $(\neg y \wedge \neg t) \rightarrow (\neg p \vee \neg w)$
5.  $\neg(u \rightarrow v)$
6.  $\neg y \vee (u \rightarrow v)$
7.  $x \rightarrow q$
8.  $\neg p \rightarrow \neg q$
9.  $q \rightarrow p$

 $\therefore x \rightarrow \neg r$

10.  $\neg(u \rightarrow v) \rightarrow \neg t$
11.  $\neg t$
12.  $u \wedge \neg v$
13.  $\neg y \vee (\neg u \vee v)$
14.  $\neg y$
15.  $\neg y \wedge \neg t$
16.  $\neg p \vee \neg w$
17.  $p \rightarrow \neg w$
18.  $\neg w \rightarrow \neg s$
19.  $r \rightarrow s$
20.  $\neg s \rightarrow \neg r$
21.  $x \rightarrow \neg r$

13) He aquí un texto extraído de 1Cor 15, 12-20.

Si no hay resurrección de los muertos, ¡entonces ni siquiera Cristo ha resucitado! (v. 13)

Pero si Cristo no ha resucitado, entonces es vana nuestra predicación y vana también nuestra fe (v. 14).

a) ¿Qué se puede deducir de estas dos premisas?

Añádase la siguiente premisa: Sin embargo, Cristo ha resucitado de entre los muertos (v. 20).

b) ¿Qué se sigue ahora...

ba) ... en lo que respecta a la resurrección de los muertos?

bb) ... en lo que respecta a la vanidad de la fe?

c) ¿Pablo considera que no hay resurrección de los muertos?

d) La resurrección de los muertos, ¿es condición de la resurrección de Cristo?

e) Tomás de Aquino argumentó así:

1.  $\neg R \rightarrow \neg C$  (v. 13)
2.  $C$  (v. 20)
3.  $C \rightarrow R$
4.  $R$

Enumera las reglas utilizadas por Santo Tomás.

14) «Más allá de esto se puede mostrar cómo proposiciones dogmáticas que definen negativamente hacen particularmente evidente la problemática de las proposiciones, de tal modo que, más allá de la constatación precedente —según la cual las frases pueden ser verdaderas o falsas—, se debe efectuar una reflexión ya vinculada por nosotros a la problemática de

las definiciones eclesiásticas: las frases pueden ser verdaderas y falsas» [H. KÜNG, *Unfehlbar?*, Einsiedeln, 1970: 138].

1. ¿Qué quiere decir el autor y qué es lo que dice efectivamente?
2. ¿Por qué su concepción es inadmisibile?

15) «Si Küng —y es esto lo que siempre se le reprocha— mantiene que toda proposición podría ser verdadera y falsa [...], esto debe entenderse en el cuadro en su comprensión concreta de la verdad que es siempre contextual, por lo que la verdad de una frase se decide en la función práctica, en la práctica lingüística de la situación concreta. Por esto, en otro lugar él añade a la tesis recriminada por muchos —“toda frase puede ser verdadera y falsa”—: “dependiendo de cómo sea entendida, motivada y opinada”» [W. KASPER, «Zur Diskussion um das Problem der Unfehlbarkeit», en: H. KÜNG (ed.), *Fehlbar?*, Einsiedeln, 1973: 77].

¿Por qué esta defensa está privada de valor?

16)

1.  $(\neg q \vee \neg y) \rightarrow [z \rightarrow (s \wedge \neg t)]$
2.  $\neg(\neg p \rightarrow q) \wedge (x \rightarrow z)$
3.  $(\neg q \wedge \neg p) \rightarrow ((s \wedge \neg t) \rightarrow x)$   $\neg(\neg x \wedge z)$

17)

1.  $\neg p \rightarrow \neg q$
2.  $p \vee \neg s$
3.  $\neg h \rightarrow s$   $\neg(h \vee \neg q) \rightarrow p$

18)

1.  $p \vee \neg(q \wedge \neg r)$
2.  $\neg s \vee p$
3.  $\neg s \rightarrow \neg(t \wedge \neg q)$
4.  $\neg p$
5.  $\neg s$   $\neg(t \wedge \neg r)$

19)

1.  $\neg p \rightarrow (q \wedge r)$
2.  $(s \rightarrow \neg t) \rightarrow (\neg t \wedge \neg p)$
3.  $(t \vee s) \rightarrow r$   $r$

20)

1.  $p \vee (\neg q \vee p)$
2.  $q \vee (\neg p \vee q)$   $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

## 2.7 Reducción de funtores

Hasta ahora hemos tratado cinco funtores, cuatro diádicos y uno monádico. Los funtores los podemos definir por su tabla de verdad. En el caso de los funtores diádicos tenemos definidos los siguientes:

p	q	$\wedge$	2	3	$\downarrow$	5	6	$\leftrightarrow$	8	9	10	$\vee$	12	$\rightarrow$	1	15	16
1	1	1						1				1		1			
1	0	0						0				1		0			
0	1	0						0				1		1			
0	0	0						1				0		1			

Como vemos, podríamos establecer doce funtores más, ya que podemos tener 16 tablas de verdad distintas correspondientes a funtores diádicos, con lo que tendríamos:

p	q	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0
0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0
0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0

Pero no es necesario definir 16 funtores binarios ya que los otros doce se pueden definir utilizando los cinco funtores que hemos utilizado (cuatro binarios más la negación).

En<sup>10</sup> la presentación de la lógica proposicional hemos tratado cinco funtores. Esto corresponde a la forma ordinaria de presentación. Sin embargo, de las muchísimas reglas de sustitución se deriva que podemos servirnos de un número menor. De este modo todos los conectivos proposicionales se pueden reconducir a uno de los tres pares siguientes:

$\neg, \wedge$

$\neg, \vee$

$\neg, \rightarrow$

Comprobar las equivalencias:

$\neg, \wedge$

$$p \vee q = \neg(\neg p \wedge \neg q)$$

<sup>10</sup> Ver también A. DEAÑO, *Introducción a la lógica formal*, 95-101.

$$p \rightarrow q = \neg(p \wedge \neg q)$$

$$p \leftrightarrow q = \neg(p \wedge \neg q) \wedge \neg(q \wedge \neg p)$$

$\neg, \vee$

$$p \wedge q = \neg(\neg p \vee \neg q)$$

$$p \rightarrow q = \neg p \vee q$$

$$p \leftrightarrow q = \neg[\neg(\neg p \vee q) \vee \neg(\neg q \vee p)]$$

$\neg, \rightarrow$

$$p \vee q = \neg p \rightarrow q$$

$$p \wedge q = \neg(p \rightarrow \neg q)$$

$$p \leftrightarrow q = \neg[(p \rightarrow q) \rightarrow \neg(q \rightarrow p)]$$

### Ejercicio 2.9

1)  $q \rightarrow (p \vee q)$

2)  $p \leftrightarrow q$  Para ambas expresiones utilizar las siguientes reformulaciones:

- a) negación y conjunción
- b) negación y disyunción
- c) negación e implicación

Tanto Peirce (ya en 1880) como Sheffer (en 1913) llegaron a la conclusión de que es posible incluso valerse de un único functor. Naturalmente ninguno de los que hemos discutido hasta ahora es apto para ello. Por tanto cada uno de los dos autores ha propuesto un nuevo functor, llamado «el functor de Peirce» y la «barra de Sheffer»:

Peirce	Sheffer
$p \downarrow q$	$p \mid q$
1 0 1	1 0 1
1 0 0	1 1 0
0 0 1	0 1 1
0 1 0	0 1 0

El functor de Peirce tiene la misma tabla de valores de verdad que la expresión « $\neg(p \vee q)$ ». Por tanto se puede representar con «ni p, ni q». La barra de Sheffer corresponde exactamente a la expresión « $\neg(p \wedge q)$ »: «no p o no q». Todos los functores se pueden reformular en uno de estos dos. Mostraremos esta posibilidad sólo para el functor de Peirce:

$\neg p$	$p \downarrow p$	$p \downarrow p$
$p \wedge q$	$\overline{p \downarrow q}$	$(p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$
$p \vee q$	$p \downarrow q$	$(p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$
$p \rightarrow q$	$\overline{p \downarrow q}$	$((p \downarrow p) \downarrow q) \downarrow ((p \downarrow p) \downarrow q)$

### Ejercicio 2.9

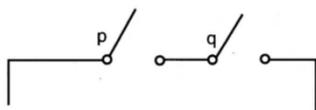
3) a) «Una consecuencia ulterior es la convicción de Whitehead de que la lógica proposicional, se basa sobre la inconsistencia (H.M. Sheffer ha mostrado que el sistema de los *Principia Mathematica* puede ser construido sobre la base de la inconsistencia como única relación no definida. Es cierto que él no habla de una relación de inconsistencia sino de una operación llamada “no conjunción” [= barra de Sheffer]), refleja el dato fundamental de una metafísica procesual pluralística» [V. Lowe, «The Development of Whitehead’s Philosophy», en: A. Schilpp (ed.), *Library of Living Philosophers*, New York 1951: 121].

b) Sheffer dice que: «finalmente se ha logrado, después de un profundo análisis simbólico, reducir los principios de la lógica formal a un pequeño número de proposiciones que son posteriormente expresadas con un número muy pequeño de conceptos fundamentales. Tratándose de lógica, la economía de los conceptos de base es significativa, visto que la sustitución de los dos operadores proposicionales de negación y disyunción por el único operador de no-conjunción es considerada por los autores como una mejora cardinal de la nueva edición de los *Principia*» [H.M. Sheffer, «Recensione della II edizione dei *Principia Mathematica*», Cambridge University Press, *Isis* 8 (1926): 229].

1. ¿Sobre qué trata Sheffer en el texto b)?
2. ¿Cómo se relaciona la no-conjunción con una relación inconsistente?
3. Esta inconsistencia, ¿refleja una metafísica procesual pluralística?

Hasta hace poquísimo tiempo se creía que detrás de esta simplificación no hubiese nada más que un hecho teóricamente relevante. Más recientemente se ha encontrado también una realización práctica.

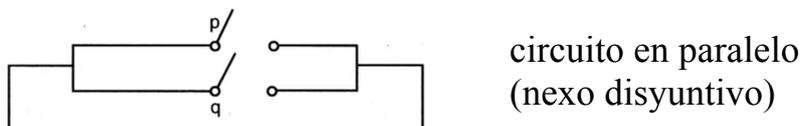
La electrónica tiene que tratar con circuitos en serie o paralelos. Estos se pueden realizar como conectivos conjuntivos o disyuntivos.



circuito en serie  
(nexo conjuntivo)

Aquí la corriente puede fluir si el circuito está completamente cerrado, esto es, cuando estén cerrados sea «p», sea «q». Esto corresponde a la conjunción.

Las cosas son diversas con los circuitos paralelos:

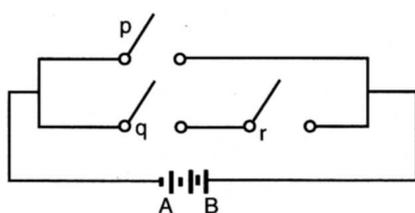


Para hacer fluir la corriente es suficiente que esté cerrado o «p» o «q». Naturalmente la corriente fluye también cuando están cerrados ambos. Y esto corresponde a las condiciones de nuestra disyunción.

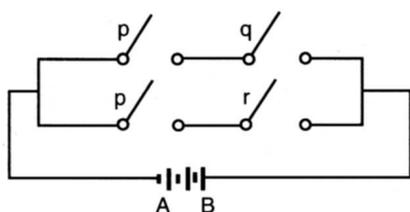
Ejemplos:

1)  $p \vee (q \wedge r)$

Se pueden representar también deducciones más complicadas, como la siguiente:



2)  $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$



«p» aparece dos veces. Como ambos argumentos de la disyunción son conjunciones, necesitamos dos circuitos y «p»

3)

1.  $p \rightarrow q$

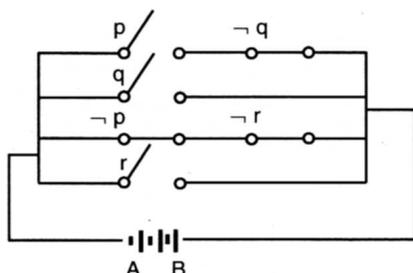
2.  $\neg q$

3.  $p \vee r \quad \underline{\quad} r$

o bien:  $[(p \rightarrow q) \wedge q] \wedge (p \vee r) \rightarrow r$

o bien en forma normal disyuntiva:

$$(p \wedge \neg q) \vee q \vee (\neg p \wedge \neg r) \vee r$$



La tautología de 3) se manifiesta en el hecho de que siempre fluye la corriente independientemente del valor que asuman las variables.

$$\{[(p \rightarrow q) \wedge \neg q] \wedge (p \vee r)\} \rightarrow r$$

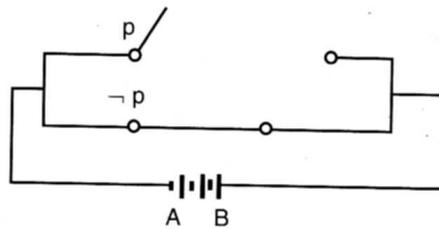
en forma normal disyuntiva es:

$$(p \wedge \neg q) \vee q \vee (\neg p \wedge \neg r) \vee r$$

es decir:

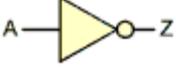
$$pq\bar{r} \cdot \bar{q}\bar{p}\bar{r}$$

Se trata de una tautología (flujo continuo de corriente). Por eso puede ser reducida a esta forma simple:



$$p \vee \neg q$$

Para realizar circuitos, por motivos técnicos son privilegiados *nandores* y *nortores*. «Nand» es la síntesis inglesa de «not» y «and», y «Nor» de «not» y «or». *Nor* corresponde al functor de Peirce, *Nand* al functor de Sheffer. De este modo, una vez más, un juego teórico ha encontrado una aplicación técnica.

CONECTOR/COMPUERTA, ENTRADA(S), SALIDA CONNECTOR/GATE, INPUT(S), OUTPUT	NOMBRE NAME	TABLA DE VERDAD TRUTH TABLE															
	<b>AMORTIGUADOR</b> BUFFER	<table border="1"> <thead> <tr> <th>A</th> <th>Z</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>1</td> </tr> </tbody> </table>	A	Z	0	0	1	1									
A	Z																
0	0																
1	1																
	<b>Y</b> AND	<table border="1"> <thead> <tr> <th>A</th> <th>B</th> <th>Z</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>1</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>1</td> </tr> </tbody> </table>	A	B	Z	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	1
A	B	Z															
0	0	0															
1	0	0															
0	1	0															
1	1	1															
	<b>O (O, en sentido inclusivo)</b> OR	<table border="1"> <thead> <tr> <th>A</th> <th>B</th> <th>Z</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>0</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>1</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>1</td> </tr> </tbody> </table>	A	B	Z	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1
A	B	Z															
0	0	0															
1	0	1															
0	1	1															
1	1	1															
	<b>OE (O, en sentido exclusivo)</b> XOR (EXCLUSIVE-OR)	<table border="1"> <thead> <tr> <th>A</th> <th>B</th> <th>Z</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>0</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>1</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>0</td> </tr> </tbody> </table>	A	B	Z	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0
A	B	Z															
0	0	0															
1	0	1															
0	1	1															
1	1	0															
	<b>N, NEG o INVERSOR</b> NOT or INVERTER	<table border="1"> <thead> <tr> <th>A</th> <th>Z</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>0</td> </tr> </tbody> </table>	A	Z	0	1	1	0									
A	Z																
0	1																
1	0																
	<b>NY (N Y)</b> NAND (NOT AND)	<table border="1"> <thead> <tr> <th>A</th> <th>B</th> <th>Z</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>0</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>0</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>1</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>0</td> </tr> </tbody> </table>	A	B	Z	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0
A	B	Z															
0	0	1															
1	0	1															
0	1	1															
1	1	0															
	<b>NO (N O)</b> NOR (NOT OR)	<table border="1"> <thead> <tr> <th>A</th> <th>B</th> <th>Z</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>0</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>1</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>0</td> </tr> </tbody> </table>	A	B	Z	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	1	0
A	B	Z															
0	0	1															
1	0	0															
0	1	0															
1	1	0															
	<b>NOE (N OE)</b> NXOR (NOT EXCLUSIVE-OR)	<table border="1"> <thead> <tr> <th>A</th> <th>B</th> <th>Z</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>0</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>1</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>1</td> </tr> </tbody> </table>	A	B	Z	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1
A	B	Z															
0	0	1															
1	0	0															
0	1	0															
1	1	1															

### 3. LA LÓGICA ARISTOTÉLICA

La lógica aristotélica es uno de los resultados más significativos de la civilización antigua. Hasta la Edad Media, junto con rudimentos de lógica proposicional, se enseñaba a los estudiantes como la base más importante para el trabajo científico. Después del Renacimiento la lógica proposicional cayó casi completamente en el olvido. La lógica aristotélica, cuando no era relegada completamente, se reducía a aspectos de aburridas banalidades. La consecuencia de esto es que Kant consideraba como aristotélica la poca lógica que él conocía desacreditando de este modo al padre de la lógica.

Si en el siglo XX la lógica aristotélica tiene fama de ser una simple curiosidad histórica, la cosa puede ser comprensible si se juzga en relación con las eventuales aplicaciones prácticas —de hecho un estudiante medianamente preparado resuelve un silogismo con la misma rapidez que un especialista en silogística aristotélica— pero, queriendo presentar hoy la lógica aristotélica sería equivocado limitarse a este aspecto. El primer objetivo debe ser el de mostrar la idea de un sistema abarcable con la mente. La lógica aristotélica está particularmente adaptada a este fin porque está realizada y limitada a un ámbito circunscrito.

Lo que presentamos a continuación debería llamarse mejor «lógica clásica» ya que se trata de una sistematización y, en parte, de corrección de la lógica llamada aristotélica. De todos modos la lógica moderna ha integrado la clásica. También en esto podemos ver que la lógica aristotélica, en cuanto teoría especial, no está dirigida a la aplicación en problemas prácticos.

#### 3.1 *Algunos conceptos de la lógica aristotélica*

En la tradición aristotélica se ha estudiado poco de la lógica proposicional. En cambio se desarrolló una notable teoría de la deducción en la cual se analizan los elementos internos de las proposiciones. El ámbito de las aplicaciones es poco significativo, por cuanto sólo se permiten proposiciones con sujeto, cópula y predicado.

Antes que nada debemos distinguir el *signo* del *objeto*. El signo lo llamamos *sujeto* y la cosa a la que se refiere *suppositum*. De este modo el **sujeto** de una proposición predicativa es aquella palabra que nos indica a qué *suppositum* se refiere la proposición.

El **predicado** expresa una determinada idea que nos hacemos del *suppositum*. Según la filosofía tradicional es imposible para nuestra mente aprehender todas las propiedades de un *suppositum* de una sólo vez. Por eso el predicado expresa siempre sólo una en particular, por muy compleja

que pueda ser. El afirmar o negar se expresa a través de la cópula positiva o negativa «es» o «no es».

Existen sujetos concretos y sujetos generales. Sujetos concretos son «yo», «aquí», «esto», etc. Un signo distintivo debe acompañar el *suppositum* para no provocar confusiones. De los sujetos concretos la lógica tradicional se ha ocupado solamente a partir del medioevo.

Para poder hablar de sujetos generales, debemos precisar primero el concepto de atributo, que viene clarificado mejor si comenzamos con el de predicado.

El **predicado** se distingue del sujeto porque expresa solo una determinada propiedad y no todo el objeto real. Consideremos las dos proposiciones siguientes referidas al mismo sujeto concreto:

- (1) Esto es un bolígrafo
- (2) Esto es de plástico

Los predicados son diversos. De la conjunción de ambos obtenemos:

- (3) Esto es un bolígrafo y esto es de plástico

Que parece lo mismo que

- (4) Este bolígrafo es de plástico

Pero (3) y (4) no son lo mismo, esto se ve en la negación. De hecho la negación de la proposición (3) es:

- (3') No es el caso que esto es un bolígrafo y que esto es de plástico

Normalmente, son la negación no se quiere negar que se trate de un bolígrafo sino solo que sea de plástico. Por eso decimos que «bolígrafo» no ejerce el rol de predicado sino que se ha convertido en *atributo*. «Este bolígrafo es azul» consta del atributo «Este bolígrafo» y del predicado «azul». El **atributo** no es más un predicado, sino que como ex-predicado, ha sido incorporado al sujeto. Se espera que la negación niegue el predicado, mientras el atributo permanezca ajeno a la negación. A menudo, según los contextos, la distinción exacta ente sujeto, predicado y atributo es superflua. Entonces hablamos genéricamente de *términos*.

¿Cómo se forman sujetos universales y particulares? Si dejamos el sujeto concreto «esto» y en su lugar entra:

- «todos» o «ninguno» para el sujeto universal.
- «algunos» o «no algunos» para el sujeto particular.

La cantidad del sujeto —más exactamente del atributo— se comunica a toda la proposición. Si el atributo se toma universalmente, entonces la proposición se llama «proposición universal».

Ahora podemos pensar diversos tipos de sujeto:

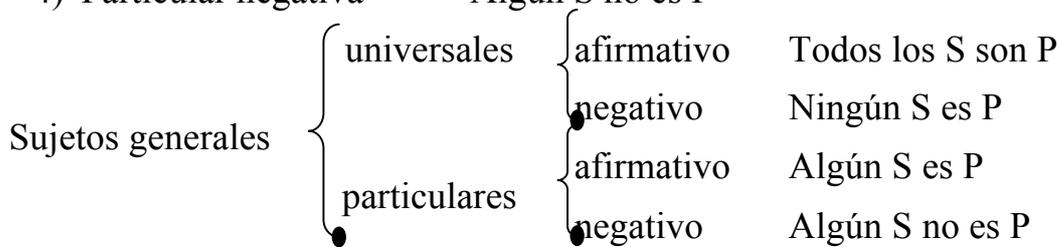
- 1) Sujeto concreto e inanalizable (esto, tú, etc.)
- 2) Sujeto concreto con atributo («este bolígrafo»)
- 3) Sujeto general universal («todos los perros...»)
- 4) Sujeto general particular («algunos animales...»)

Aquí nos vamos a ocupar solo de los *sujetos generales*.

### 3.2 Las proposiciones categóricas y el cuadrado lógico

Como proposiciones categóricas las únicas proposiciones permitidas en la lógica aristotélica son del tipo: sujeto, cópula, predicado. Se pueden reducir a las siguientes cuatro formas:

- 1) Universal afirmativa      Todos los S son P
- 2) Particular afirmativa      Algún S es P
- 3) Universal negativa      Ningún S es P
- 4) Particular negativa      Algún S no es P

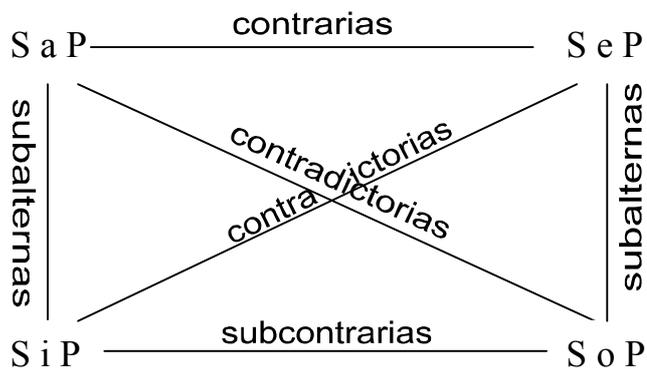


En lugar de «S» o «P» podemos colocar nombres, que no sean vacíos como los nombres «unicornio», «quimera», «rey de Suiza», etc.

Las relaciones entre estos cuatro tipos de juicios se pueden visualizar con el cuadrado lógico. Con este fin introducimos una formalización con la ayuda de las cuatro vocales **a, e, i, o**. Extraídas de las palabras latinas *affirmo* y *nego*, la primera para las frases afirmativas, la segunda para las negativas. En el lenguaje simbólico vienen intercaladas entre «S» y «P»:

- |                   |              |                     |
|-------------------|--------------|---------------------|
| Todos los S son P | S <b>a</b> P | ( <u>a</u> ffirmo)  |
| Algunos S son P   | S <b>i</b> P | (a <u>i</u> ffirmo) |
| Ningún S es P     | S <b>e</b> P | ( <u>e</u> ngo)     |
| Algún S no es P   | S <b>o</b> P | (ne <u>o</u> )      |

Las relaciones recíprocas entre estas proposiciones las podemos sacar del cuadrado lógico:



1. Del cuadrado vemos que SaP-SoP y SiP-SeP constituyen dos pares de proposiciones *contradictorias*. Dos proposiciones contradictorias no pueden ser ambas verdaderas o ambas falsas. Si una afirmación es verdadera la otra es falsa y al revés. Ya que de la verdad de una se puede deducir la falsedad de la otra se dice que ambas son complementarias. (Todos los hombres son justos- Algún hombre no es justo)
2. Proposiciones *contrarias* **no** pueden ser al mismo tiempo verdaderas, pero pueden ser ambas falsas. (Todo hombre es justo- Ningún hombre es justo.)
3. Proposiciones *subcontrarias* pueden ser al mismo tiempo verdaderas, pero **no** pueden ser ambas falsas. (Algún hombre es justo- Algún hombre no es justo).
4. En las proposiciones *subalternas* deducir de la superior a la inferior pero no al revés. Si la universal es verdadera, lo es la particular, pero no al revés. Si la particular es falsa, lo es la universal. (Todos los hombres son justos- algún hombre es justo.) SaP-SiP; SeP-SoP

Además de estas hay otras relaciones que no son visibles en el cuadrado. Se trata de las conversiones:

Por *conversión* se entiende una operación con la cual el atributo y el predicado se cambian sin cambiar el tipo de cópula. En este caso deben distinguirse dos posibilidades:

- Con la *conversio simplex* (de SaP a PaS) la cantidad no cambia.
- Con la *conversio per accidents* (de SaP a PiS) cambia también la cantidad.

Las expresiones de amplio uso «oposición» o «contraposición» son ambiguas y pueden ser comprendidas con precisión utilizando el cuadrado.

Ejemplo:

1. Blanco- negro
  2. Blanco- no blanco
  3. Blanco- colorado
- 1) Representa una relación de contrariedad, 2) una relación de contradicción; 3) una relación de subalternidad.

### 3.3 ***El silogismo clásico***

Si de dos proposiciones con forma de sujeto-cópula-predicado se deduce una tercera con la misma forma, hablamos de un silogismo. Es necesario observar dos principios cuya violación hace que el silogismo sea inválido.

- En la conclusión no debe haber nunca un término que no esté presente en las premisas.
- El principio del *latius hoc* (*latius hos quam praemissae conclusio non vult*). En la conclusión no debe haber ningún término que tenga una cantidad mayor de las que aparecen en las premisas.

El silogismo es una deducción de una proposición predicativa de otras dos. Los atributos y los predicados de la conclusión deben aparecer en una de las premisas. De este modo en cada una de las premisas queda un sitio vacío para otro término. Esto sirve para establecer la conexión entre las dos premisas que se llama por eso el *término medio*. Cada término que en la conclusión aparece como predicado se llama *término mayor* y se indica por «G». Debe aparecer también en una premisa, que nosotros llamamos *premisa mayor* o simplemente *maior*. El otro término se llama *término menor* y se indica por «P»; correlativamente hablamos de *premisa menor* o bien *minor*. Así tenemos el siguiente esquema:

Todos los M son G      *maior*

Todos los P son M      *minor*

Por tanto todos los P son G      conclusión

Para que un silogismo sea válido hace falta observar cinco reglas:

- 1) Los términos son solo tres, de los cuales el medio no debe aparecer en la conclusión.
- 2) El término medio debe tener el mismo contenido en ambas premisas y al menos en una debe aparecer como universal. La exigencia de universalidad se llama «regla de distribución» y se entiende así:

De (1) «Todos los hombres son seres vivos» se sigue que «este hombre es un ser vivo». Pero no se sigue que «todo hombre sea este ser vivo». Decimos por tanto que «hombre» está por todos los *supposita*, en el sentido que el atributo está tomado universalmente, mientras que el predicado «ser vivo» es particular. Una proposición negativa lo supone en modo diverso. De «Ningún hombre es un caballo» se puede deducir que «este hombre no es un caballo» así como «ningún hombre es este caballo». Por ello sea el sujeto, sea el predicado son tomados ambos universalmente. El sentido natural del lenguaje nos clarifica bastante sobre la suposición universal del sujeto, es decir «todos» y «ninguno». En cambio, por lo que se refiere a la suposición del predicado, notemos que esta es universal solo en las negativas, como «ningún... es P» o bien «algunos... no son P». Lo que se puede resumir en la tabla siguiente:

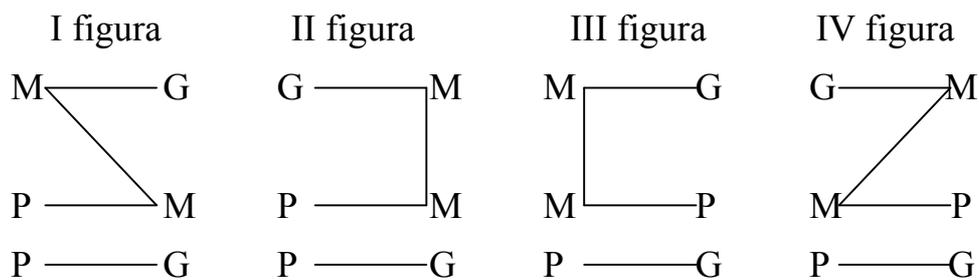
	Sujeto	Predicado
A	universal	particular
E	universal	universal
I	particular	particular
O	particular	universal

Además, los lógicos tradicionales han formulado otras tres reglas según el tipo de cópula de la conclusión.

- 3) Dos premisas afirmativas no pueden producir una conclusión negativa.
- 4) Si una premisa es negativa, lo debe ser también la conclusión.
- 5) De dos premisas negativas (EE, EO, OE, OO) no se puede concluir nada.

### 3.4 Figuras y modos válidos del silogismo

Desde el siglo XIV los escolásticos han distinguido cuatro figuras, que se distinguen entre ellas por el lugar ocupado por el término medio:



Las figuras se pueden recordar fácilmente: juntas pueden ser interpretadas como una «W» estilizada: \//

Cuando tenemos determinadas la calidad (afirmación o negación) y la cantidad (universal o particular) de las proposiciones predicativas, para cada figura se obtienen los modos relativos. De ahí resulta que tenemos un número finito de modos. El número se puede determinar con precisión: si tenemos cada vez dos premisas, de las cuales cada una puede ser A, E, I, O. Nos da 16 posibilidades. Pero también la conclusión puede asumir una de las cuatro formas por lo que  $16 \times 4 = 64$  modos. Si consideramos que estos 64 modos se pueden ordenar en 4 figuras obtenemos un total de  $64 \times 4 = 256$  silogismos.

Pero la mayor parte de estos silogismos se elimina por las reglas ya enunciadas. Por tanto sólo podemos usar un pequeño número de las 256 combinaciones teóricas. Por ejemplo la regla 5) dice que no se puede deducir nada de dos premisas negativas. Entre los 256 silogismos está contenidos también los modos como EEE, EEI, EEO i también EEA, que son eliminadas. Si conservamos sólo los que no entran en conflicto con ninguna de las reglas, quedan sólo 24 silogismos, y son:

I figura	II figura	III figura	IV figura
AAA	AEE	AAI*	AAI*
AAI*	AEO*	AII	AEE
AII	AOO	EAO*	AEO*
EAE	EAE	EIO	EAO*
EAO*	EAO*	IAI	EIO
EIO	EIO	OAo	IAI

Los modos marcados por \* tienen la conclusión debilitada, que, aunque es válida, deduce menos de cuanto se podría deducir dadas las premisas.

Ejemplo:

Todos los hombres son racionales (A)

Los griegos son hombres (A)

Por tanto algunos griegos son racionales (I)

Porque sería correcto deducir de las premisas que «Todos los griegos son racionales», no es falso decir que algunos griegos son racionales. Si, por tanto, excluimos estas formas debilitadas —lo que sucede en la lógica moderna— quedan sólo 15 silogismos.

Para recordar los silogismos válidos, los lógicos de la escolástica tardía han formado palabras clave que representan los diversos modos, donde las vocales indican el tipo de proposición (cualidad y cantidad); la primera vocal corresponde al modo de la primera premisa, la segunda vocal a la segunda premisa y la tercera al modo de la conclusión. Los versos nemotécnicos para las cuatro figuras son<sup>11</sup>:

*Barbara, Celarent, primæ, Darii, Ferioque.*  
*Cesare, Camestres, Festino, Baroco, secundæ.*  
 Tertia grande sonans recitat (*Darapti*), (*Felapton*),  
*Disamis, Datisi, Bocardo, Ferison. Quartæ*  
 sunt (*Bamalip*) *Calemes, Dimatis, (Fesapo), Fresison.*

Si se añaden a la primera figura (*Barbari*) y (*Celaront*), a la segunda (*Cesarop*) y (*Camestrop*), a la cuarta (*Calemop*), tenemos los 24 modos del silogismo, incluidos los debilitados, que están puestos entre paréntesis.

Las palabras de las estrofas están dispuestas en un orden muy racional. En efecto, contienen todas las reglas de los silogismos. Este es el sentido de las palabras en cursiva. Las palabras no en cursiva nos indican a qué figuras pertenecen los modos, si a la primera, a la segunda, etc.

Procedimiento práctico:

<sup>11</sup> *Summulae Logicales* de Pedro Hispano († 1277).

- 1.- Primero se determinan los modos de las dos premisas
- 2.- Observando el término medio se individua la figura
- 3.- Con la ayuda del verso correspondiente se puede buscar la conclusión, o bien, si ya está dada, se puede verificar su validez.

Si las dos primeras condiciones no se satisfacen, aunque sólo sea parcialmente, el silogismo estaría incompleto y lógicamente inutilizable.

Ejemplo 1:

Todos los hombres son racionales  
 Todos los griegos son hombres  
 Por tanto todos los griegos son racionales

1.- Determinación de los modos: la primera premisa es una proposición A, también la segunda y la conclusión. Por tanto se trata de un silogismo con los modos AAA.

2.- Determinación de la figura: la figura se obtiene del lugar del término medio. El término medio es «hombre». En la primera premisa actúa de sujeto, en la segunda de predicado. Esto significa que es un silogismo de la I figura.

El resultado es: I figura, AAA.

3.- Para la demostración de validez tenemos tres posibilidades:

a) Usamos todas las reglas. Si no se viola ninguna, hemos demostrado que el silogismo es válido. Este procedimiento es demasiado laborioso. A esto se le añade la tendencia, psicológicamente comprensible, a pasar con descuido los controles apenas se tiene la sensación de que el silogismo sea correcto. Por eso este tipo de control no es aconsejable.

b) Observamos en la tabla si en la primera figura existe un AAA. Vemos que aparece en la primera fila, por tanto la validez del silogismo está asegurada.

c) Dado que no siempre se dispone de la tabla, los lógicos medievales pensaron en aprender de memoria los versos «*Barbara, Celarent, ...*». Los recorrían mentalmente y veían que en la primera figura hay cuatro silogismos válidos: *Barbara, Celarent, Darii, Ferio*. Nuestras tres «a» están presentes, precisamente en «*Barbara*». Por ello podemos decir: nuestro ejemplo se trata de un silogismo válido de la primera figura, *Barbara*.

Ejemplo 2:

Todos los jugadores de ajedrez son lógicos  
 Algunos políticos no son lógicos  
 Luego, algunos políticos no juegan al ajedrez

1.- Determinación de los modos: la primera premisa es un A, la segunda una O y la conclusión es también una O: por tanto AOO.

2.- Figura: el término medio es «lógico». Como corresponde a su posición se trata de una II figura. ¿Existe en la segunda figura AOO?

3.- El verso de la segunda figura dice: «*Cesare, Camestres, Festino, Baroco, secundæ*». Las vocales buscadas por nosotros están en «*Baroco*», por tanto se trata de un silogismo válido.

Ejemplo 3:

Todos los filósofos son pensadores  
Algunos pensadores están en las nubes  
Por tanto algunos filósofos están en las nubes

Modo: AII

Figura: IV

Podemos revisar los silogismos de la IV figura: «*Quartæ sunt (Bamalip) Calemes, Dimatis, (Fesapo), Fresison*». Ninguno de ellos contiene las vocales AII, por tanto se trata de un silogismo no válido.

Ejercicio 3.3

Indica para cada silogismo la figura y la palabra mnemotécnica (ejemplo: I, *Barbara*), si es falso, sólo la figura y las vocales (ejemplo: I, EEI).

- 1 Todos los peces son animales acuáticos  
Algunos mamíferos son peces  
Por tanto algunos mamíferos son animales acuáticos
- 2 Todos los cantantes son felices  
Algunos cazadores no son felices  
Por tanto algunos cazadores no son cantantes
- 3 Todos los milaneses son seres humanos  
Todos los italianos son seres humanos  
Por tanto todos los milaneses son italianos.
- 4 Todos los leones son herbívoros  
Todas las vacas son leones  
¿Por tanto?
- 5 Todos los mentirosos son poco dignos de crédito  
Algunos mentirosos son periodistas  
¿Por tanto?
- 6 Toda gallina es bípeda  
Ningún gato es una gallina

- Por tanto ningún gato es bípedo.
- 7 Ningún buey es un pájaro  
Ningún pez es un buey  
Por tanto ningún pez es un pájaro.
- 8 Ningún ministro es un policía  
Todos los ministros son invitados  
Por tanto algunos invitados no son policías
- 9 Algunos martillos neumáticos no ponen nervioso  
Todos los martillos neumáticos son fuente de ruidos  
Por tanto algunas fuentes de ruido no ponen nervioso
- 10 Todos los no fumadores ahorran dinero  
Ningún vegetariano es fumador  
Por tanto todos los vegetarianos ahorran dinero
- 11 Todos los pobres son refugiados  
Algunos refugiados son dignos de compasión  
¿Por tanto?
- 12 Ningún pez es un cuadrúpedo  
Algunos mamíferos son peces  
¿Por tanto?
- 13 Ninguna dificultad es insuperable  
Algunas situaciones insuperables son ridículas  
Por tanto algunas dificultades son ridículas
- 14 Todos los caballos son solípedos  
Todos los solípedos son mamíferos  
Por tanto todos los mamíferos son caballos.

En la edad media las premisas se ampliaron a clases de nombres individuales. Desde entonces se repite el famoso silogismo sobre el Sócrates mortal:

Todos los hombres son mortales  
Sócrates es un hombre  
Por tanto Sócrates es mortal

La segunda premisa se puede interpretar como una proposición A o I. Ambas posibilidades son válidas. En el caso de una proposición I, tenemos la primera figura y deberemos deducir según *Darii*; en el segundo caso de una proposición A, tendremos una primera figura en *Barbara*. La edad media ha dado preferencia a la interpretación en A manteniendo que silogismos del siguiente tipo deben ser válidos:

Sócrates es sabio  
Sócrates es un hombre

Por tanto un hombre es sabio

Esta tercera figura, interpretando siempre como A, es un (*Darapti*), pero interpretando como I no es válida (III). Las premisas negativas piden una interpretación en E o en O. La II figura deja abierta la elección entre *Camestres* y *Baroco*. Pero si el siguiente silogismo es válido, es obligada la elección de E:

Ningún planeta es propiedad de un estado  
 Júpiter es un planeta  
 Por tanto Júpiter no es propiedad de un estado.

De hecho este silogismo es válido solo como *Celarent* de la figura I: la posible alternativa *Celiront* no existe.

De todo esto se puede concluir que, si bien el lenguaje ordinario sienta intuitivamente como adecuadas las interpretaciones en I y O, la sistemátización pide la interpretación en A o en E, lo que fue entendido muy bien por los lógicos del medioevo.

### Ejercicio 3.3

- 15 Todos los italianos son europeos  
 Galileo era un italiano  
 ¿Por tanto?
- 16 Todos los astrónomos son físicos  
 Francisco no es un físico  
 Por tanto Francisco no es astrónomo
- 17 Ningún perro es un gato  
 Rex es un perro  
 Por tanto Rex no es un gato.

Los manuales tradicionales suelen mostrar los peligros más comunes que invalidan el silogismo. Pero, en lugar de advertir acerca de la poca precisión que tiene el lenguaje ordinario, han sobrevalorado el caso particular de la *quaternio terminorum*. Se trata de un silogismo que está construido aparentemente siguiendo las reglas, pero que un análisis más atento muestra una ambigüedad en el término medio: éste tiene dos significados diversos, por lo que se trataría de un silogismo de cuatro términos en lugar de tres.

Ejemplo:

Todos los espíritus son incorpóreos  
 Las bebidas alcohólicas son espíritus  
 Por tanto las bebidas alcohólicas son incorpóreas.

La ambigüedad de la palabra «espíritu» es evidente. En realidad este tipo de ambigüedad en la práctica es muy rara, comparada con otros errores.

*Barbara, Celarent, primæ, Darii, Ferioque (Barbari) (Celaront).*  
*Cesare, Camestres, Festino, Baroco, secundæ. (Cesarop) (Camestrop)*  
*Tertia grande sonans recitat (Darapti), (Felapton),*  
*Disamis, Datisi, Bocardo, Ferison. Quartæ*  
*sunt (Bamalip) Calemes, Dimatis, (Fesapo), Fresison. (Calemop)*

#### 4. EL CÁLCULO ELEMENTAL DE PREDICADOS (CÁLCULO DE I ORDEN)

La relación entre el cálculo proposicional y el cálculo de predicados se puede comparar con el de dos redes. La lógica proposicional es una malla ancha, sólo quedan atrapadas las proposiciones enteras. El cálculo de predicados puede incluir también predicados y otras partes de frases. La comparación también es válida atendiendo otro aspecto: con la red de malla más fina se puede coger también los peces grandes —los del cálculo proposicional—, pero no al revés. En el lenguaje ordinario atendemos también a los peces pequeños. La lógica proposicional, tal como la hemos visto hasta ahora es un lenguaje tan pobre que debe capitular incluso en las más sencillas argumentaciones de un niño. De hecho si un niño dice: «Mamá es amable y buena» quiere expresar dos cualidades del mismo individuo. Pero la formalización « $A \wedge B$ » no nos permite ver claramente que se trata del mismo o de dos individuos distintos. Por ello, para representar lógicamente esta simple situación de hecho, debemos ampliar el lenguaje hasta incluir las partes de las proposiciones.

##### 4.1 *Construcción de las proposiciones predicativas*

El cálculo de predicados retoma enteramente la lógica proposicional, desde su simbolismo hasta su interpretación. Los medios de la lógica proposicional consisten en cinco constantes lógicas ( $\neg$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\rightarrow$ ,  $\leftrightarrow$ ) y un ilimitado número de letras para designar proposiciones (para las variables  $p$ ,  $q$ ,  $r$ ...; para las constantes  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,...). Ya para demostrar los silogismos, las proposiciones en sentido aristotélico deber ser sometidas a un análisis más refinado. Tenemos proposiciones de este tipo:

El hombre es racional

La estación de ferrocarril es vieja

Las rosas son rojas

Etc.

Parece que se trate de proposiciones que no se distinguen de las tratadas en la lógica proposicional. Lo que es también verdad. Sólo que ahora estamos interesados en otro aspecto: no las consideramos como verdaderas o falsas en su totalidad, sino más bien según las relaciones contenidas en ellas. Haciendo esto, nos damos cuenta que en todos estos casos se dice algo del hombre, de una estación, de las rosas. Las cosas de las que se dice algo son *individuos*, lo que se dice de ellas son *propiedades*. Si en una proposición simple se borra el nombre con que se indica el individuo nos

queda el predicado. Ahora no nos preocupa que se diga algo de un individuo utilizando un adjetivo o bien otra categoría verbal. Por ello las siguientes expresiones serán para nosotros idénticas:

Brígida es una charlatana

Brígida es charlatana

Brígida habla constantemente, etc.

#### 4.2 **Expresiones para individuos y expresiones para predicados**

En la lógica de predicados representamos a cada individuo con una letra, y también hacemos eso para la cualidad que se predica. Por ello es necesario que se distinga rápidamente si se trata de un individuo o de un predicado. Por ello elegimos las *minúsculas* para indicar a los individuos y las *mayúsculas* para referirnos a los predicados.

Individuos	s	Sol
	l	Luna
	v	Venus
	j	Júpiter
Predicados	R	redondo
	L	luminoso
	T	transparente
	G	gomoso

Con este vocabulario podemos formar frases como:

Rs      El sol es redondo

Lv      Venus es luminoso

Este lenguaje más refinado nos permite representar relaciones que hasta ahora no habíamos considerado:

Ejemplo:

(1) Alberto canta o Bárbara come un dulce

(2) Alberto canta o come un dulce

En cálculo proposicional:

(1')  $A \vee B$

(2')  $A \vee D$

La formalización (1') se limita a una distinción entre dos proposiciones. No dice nada de si hay una relación entre los contenidos. En el caso (2') la relación es tal que no puede ser obviada. La primera es admisible, la segunda no lo es tanto. El cálculo de predicados nos permite la siguiente precisión:

(1'')  $Sa \vee Db$

(2'') Sa v Da

(1'') respecto de (1') es una complicación inútil, pero (2'') expresa una relación que no está contenida en (2').

Los individuos pueden ser sustituidos por variables x, y, z... Por tanto resultan proposiciones del siguiente tipo:

(3') Sx v Dx x canta o come un dulce

(4') Sx v Dy x canta o y come un dulce

En el lenguaje ordinario no decimos «x» sino «alguien». Por eso (3') y (4') deberían traducirse así:

(3) Alguien canta o come un dulce

(4) Alguien canta o alguien (otro) come un dulce.

Ejercicio 4.1. Formaliza

1 La estufa caliente

2 La estufa no caliente

3 La estufa caliente y Alfredo no tiene frío

4 La estufa caliente y yo tengo frío

5 Si la estufa caliente entonces yo no tengo frío

6 Francisco no es italiano o bien tiene oído musical

7 Solo si estas flores son lirios, son blancas o azules

8 Si y solo si la figura tiene ángulos rectos y equiláteros es cuadrada

### 4.3 Cuantificadores

(Todas las cosas) son redondas  $(\forall x) Rx$

Lo leemos así «para todas las x, que son cosas, vale: esta x es redonda». El cuantificador no puede ir nunca sólo, debe acompañar a una variable.

$\neg(\forall x) Ux$  No todo es utilizable; es decir, hay algo que no lo es

$(\forall x) \neg Ux$  Todo es no utilizable; nada es utilizable.

(Algo) es redondo  $(\exists x) Rx$

$\neg(\exists x) Cx$  No hay algo que corra; nada corre

$(\exists x) \neg Cx$  Hay algo que no corre; algo no corre

Podemos expresar la cantidad y la cualidad de los silogismos aristotélicos:

$(\forall x) Bx$   $\neg(\exists x) \neg Bx$  Todas las cosas son buenas. Todo es bueno

$(\exists x) Bx$   $\neg(\forall x) \neg Bx$  Algunas cosas son buenas. Algo es bueno

$(\forall x) \neg Bx$   $\neg(\exists x) Bx$  Ninguna cosa es buena. Nada es bueno

$(\exists x) \neg Bx$   $\neg(\forall x) Bx$  Algunas cosas son no buenas. Algo es no bueno.

## 5. OTRAS LÓGICAS

Lógica de enunciados

Lógica de Predicados de primer orden, de orden superior

Lógica de relaciones

Lógica modal: *es posible, es necesario*

Otras modalidades:

Lógica epistémica (modalidad epistémica), *sé que p, creo que p*

Lógica deóntica *está permitido que p; es obligatorio que p*

Lógica temporal *siempre sucede p; a veces sucede p*

Lógica ética *es bueno que p; es malo que p*

Lógicas no clásicas

Lógica trivalente, polivalente, borrosa (no tercio excluso)

Lógica cuántica (diversa distributividad)

<b>1. NOCIONES PREVIAS</b>	<b>1</b>
<b>1.1 LENGUAJE Y METALENGUAJE</b>	<b>2</b>
<i>1.1.1 Distingamos oración proposición enunciación:</i>	2
<i>1.1.2 Diversos niveles de lenguaje:</i>	3
<i>1.1.3 Uso y mención</i>	4
<b>1.2 SEMIÓTICA</b>	<b>5</b>
<b>1.3 LA NOCIÓN DE CÁLCULO</b>	<b>6</b>
<b>1.4 LA LÓGICA COMO LA CIENCIA DE LAS FORMAS VÁLIDAS</b>	<b>7</b>
<b>1.5 VERDAD Y VALIDEZ</b>	<b>8</b>
<b>1.6 IDEA DE LÓGICA FORMAL</b>	<b>10</b>
<i>1.6.1 Inferencia</i>	10
<i>1.6.2 Validez formal</i>	10
<i>1.6.3 Principios</i>	11
<i>1.6.4 Ciencia</i>	11
<b>1.7 BREVE HISTORIA DE LA LÓGICA</b>	<b>11</b>
<b>2. LA LÓGICA PROPOSICIONAL</b>	<b>15</b>
<b>2.1 LA FORMALIZACIÓN DE LAS PROPOSICIONES</b>	<b>16</b>
<b>2.2 LA FORMALIZACIÓN DE LOS CONECTIVOS ENTRE LAS PROPOSICIONES</b>	<b>17</b>
<i>2.2.1 La conjunción «y»</i>	19
<i>2.2.2 Los otros funtores</i>	22
<b>2.3 REGLA DE LOS PARÉNTESIS</b>	<b>25</b>
<b>2.4 LAS FUNCIONES DE VERDAD</b>	<b>29</b>
<i>2.4.1 La negación</i>	30
<i>2.4.2 La conjunción</i>	31
<i>2.4.3 La disyunción</i>	33
<i>2.4.4 La implicación</i>	34
<i>2.4.5. La equivalencia</i>	38
<b>2.5 LA VALORACIÓN DE LAS FUNCIONES DE VERDAD</b>	<b>44</b>
<i>2.5.1 Tautología, contradicción y contingencia</i>	49
<i>2.5.2 Las tablas parciales de los valores de verdad</i>	53
<i>2.5.3 Recapitulación de los resultados</i>	55
<b>2.6 LA DEDUCCIÓN</b>	<b>57</b>
<i>2.6.1 Reglas de inferencia</i>	57
<i>2.6.2 Reglas de equivalencia (o de sustitución)</i>	72
<b>2.7 REDUCCIÓN DE FUNTORES</b>	<b>82</b>
<b>3. LA LÓGICA ARISTOTÉLICA</b>	<b>88</b>
<b>3.1 ALGUNOS CONCEPTOS DE LA LÓGICA ARISTOTÉLICA</b>	<b>88</b>
<b>3.2 LAS PROPOSICIONES CATEGÓRICAS Y EL CUADRADO LÓGICO</b>	<b>90</b>
<b>3.3 EL SILOGISMO CLÁSICO</b>	<b>91</b>
<b>3.4 FIGURAS Y MODOS VÁLIDOS DEL SILOGISMO</b>	<b>93</b>
<b>4. EL CÁLCULO ELEMENTAL DE PREDICADOS (CÁLCULO DE I ORDEN)</b>	<b>100</b>
<b>4.1 CONSTRUCCIÓN DE LAS PROPOSICIONES PREDICATIVAS</b>	<b>100</b>
<b>4.2 EXPRESIONES PARA INDIVIDUOS Y EXPRESIONES PARA PREDICADOS</b>	<b>101</b>
<b>4.3 CUANTIFICADORES</b>	<b>102</b>
<b>5. OTRAS LÓGICAS</b>	<b>103</b>